# Finanssisitoumusten suojaamisesta

Harri Nyrhinen

Matematiikan ja tilastotieteen laitos
Helsingin yliopisto

Vakuutusmatematiikan seminaari
4.5.2017

## Esitelmän sisältö

Teoreettisluonteisia poimintoja kirjallisuudesta liittyen

- Finanssisitoumusten suojauksiin epätäydellisillä markkinoilla.
- Yhteyksiin elinaikoihin kytkettyihin finanssisitoumuksiin.

# Kahden arvopaperin finanssimarkkinat

- Arvopaperi 1: bondi. Arvo identtisesti 1 kaikkina ajanhetkinä.
- Arvopaperi 2: osake. Arvo hetkellä $k$ on

$$S(k), \quad k = 0, 1, 2, \ldots.$$

Tulkinta: kaikki rahamäärät on diskontattu hetkeen 0 pankkitalletuksen hintaprosessilla.

## Yhden periodin suojausongelma

Asetelmassa

- Toimijalla on vastattavanaan hetkellä 1 finanssimarkkinoiden kehityksestä riippuva stokastinen summa $X$.
- Sitoumuksen hallnnoimiseksi toimija hankkii hetkellä 0 salkun, jossa on bondeja ja osakkeita. Salkku realisoidaan hetkellä 1.

Toimijalle syntyy kustannuksia:

- Hetkellä 0: salkun hankintahinta.
- Hetkellä 1: $X-$ salkun hetken 1 arvo.

## Salkkujen kuvauksia

Olkoon hetkellä 0 hankittava osakkeiden lukumäärä $\theta(1)$ ja salkun hinta $V(0)$. Olkoon $S(k)$ osakkeen hinta hetkellä $k$, $k = 0, 1$. Tällöin hetkellä 0

- Osakkeisiin on sijoitettu $\theta(1)S(0)$ euroa.
- Bondien lukumäärä on $V(0) - \theta(1)S(0)$.

Hetkellä 1 edellä hankittua salkkua kuvaa

- Osakkeisiin on sijoitettu $\theta(1)S(1)$ euroa.
- Salkun arvo on $V(0) + \theta(1)(S(1) - S(0))$.

## Kriteereitä suojaavalle salkulle

- Minimoidaan keskineliöpoikkeamaa

$$\mathbb{E}\left((X - V(0) - \theta(1)(S(1) - S(0)))^2\right).$$

- Minimoidaan yo. keskineliöpoikkeamaa, kun vaaditaan lisäksi, että $V(0) \in [v_1, v_2]$
- Vaaditaan, että

$$\mathbb{P}(X - V(0) - \theta(1)(S(1) - S(0)) > 0) \leq \varepsilon.$$

  Lisäksi mahdollisesti vaatimuksia koskien hintaa $V(0)$.
- ...

Tarkastellaan jatkossa lähinnä ensinmainittua krtiteeriä.

# Standardi regressio-ongelma

Määrättävä salkun osakkeiden lukumäärä $\theta(1)$ ja hetken 0 salkun hinta $V(0)$ siten, että keskineliöpoikkeama

$$\mathbb{E}\left((X - V(0) - \theta(1)(S(1) - S(0)))^2\right)$$

minimoituu. Optimaaliset $\theta(1) = \bar{\theta}(1)$ ja $V(0) = \bar{V}(0)$ voidaan määrätä toisen kertaluvun momenttien avulla.

Kustannuksia syntyy

- Hetkellä 0: $\bar{V}(0)$ salkun perustamisesta,
- Hetkellä 1: $X-$ salkun arvo hetkellä 1.

# Esimerkki

- Osakkeen hinta hetkellä 0 on $S(0) = 1$.
- Osakkeen hetken 1 arvo $S(1)$ on log-normaalisti jakautunut parametrein $\mu = 0, \sigma = 0.5$.
- $X = \max(S(1) - S(0), 0)$.

# Esimerkki (jatkoa)

Keskineliöpoikkeamia suhteessa minimiarvoon muutamalla salkulla. Salkun hetken 0 hinta on vakio = 0.95.

| *Osakkeet* | *Bondit* | *Suhde* | *Kommentti* |
|---|---|---|---|
| 0.00 | 0.95 | 32.70 | vain bondeja |
| 0.70 | 0.25 | 1.26 | |
| 0.77 | 0.18 | 1.00 | optimi |
| 0.85 | 0.10 | 1.34 | |
| 0.95 | 0.00 | 2.72 | vain osakkeita |

# Kommentteja

- Toteutus kohtuullisen helppoa.
- Edellä tuotettu $\bar{V}(0)$ ei ole aina $X$:n arbitraasivapaa hinta.

## Monen periodin malli

Finanssimarkkinoilla on bondi ja osake. Osakkeen arvo hetkellä $k$ on $S(k)$. Toimijalla on vastattavanaan hetkellä $T$ summa $X$.

Esimerkiksi jos $T = 2$, niin sitoumuksen hallnnoimiseksi toimija

- 1. Hankkii hetkellä 0 salkun, jossa on bondeja ja osakkeita.
- 2. Vaihtaa salkun hetkellä 1. Salkkuun voidaan myös sijoittaa lisää rahaa (tai ottaa rahaa pois).
- 3. Realisoi salkun hetkellä 2 ja maksaa sopimuksen mukaisen summan $X$.

Kustannuksia syntyy kaikissa vaiheissa. Strategia ei ole yleensä omavarainen.

# Lokaali keskineliöpoikkeaman minimointi ($T = 2$)

- Hetkellä 1 hankitaan salkku, jossa on $\theta(2)$ osaketta ja jonka arvo on $V(1)$, ja joka minimoi ehdollisen keskineliöpoikkeaman

$$\mathbb{E}\left((X - V(1) - \theta(2)(S(2) - S(1)))^2 | \mathcal{F}_1\right).$$

- Jos $V(1) = \bar{V}(1)$ on edellisen tehtävän ratkaisu, hankitaan hetkellä 0 salkku, jossa on $\theta(1)$ osaketta, jonka arvo on $V(0)$, ja joka minimoi keskineliöpoikkeaman

$$\mathbb{E}\left(\left(\bar{V}(1) - V(0) - \theta(1)(S(1) - S(0))\right)^2\right).$$

## Esimerkki

Osakkeen hinta hetkellä 0 olkoon $S(0) = 1$ ja olkoon

$$S(1) = \xi_1, \quad S(2) = \xi_1 \xi_2,$$

missä $\xi_1, \xi_2$ ovat riippumattomia log-normaalisti jakautuneita parametrein $\mu = 0, \sigma = 0.5$. Olkoon

$$X = \max(S(2) - S(1), 0).$$

# Esimerkki (jatkoa)

Hetkellä 1 on optimaalista hankkia salkku, jonka osakkeiden lukumäärä $\bar{\theta}(2)$ ja arvo $\bar{V}(1)$ ovat

$$\bar{\theta}(2) = b \quad \bar{V}(1) = aS(1),$$

missä $a$ ja $b$ ovat vakioita vastaavasta yhden periodin probleemasta,

$$a = 0.18, \quad b = 0.77.$$

Hetkellä 0 pyritään suojaamaan $\bar{V}(1)$. Optimaalista on hankkia $a$ osaketta ja 0 bondia.

## Esimerkki

Olkoon $X$ toistettavissa finanssimarkkinoilla. Tällöin voidaan

- ottaa hetkellä 0 sopiva bondeista ja osakkeista muodostuva salkku,
- operoida salkun synnyttämällä varallisuudella markkinoilla siten, että hetkellä $T$ salkun arvo on juuri $X$.

Tällöin lokaalin riskin minimoi em. operoinnista syntyvä salkkujono. Kustannuksia syntyy vain hetkellä 0.

Esimerkiksi $X = S(T)$ on toistettavissa. Tällöin hetkellä 0 hankitaan 1 osake, joka myydään hetkellä $T$.

# Elinaikoihin sidotut sopimukset

Olkoon $X$ kuten edellä ja $\tau$ $x$-ikäisen vakuutetun (jäljellä oleva) elinaika. Oletetaan, että $X$ ja $\tau$ ovat riippumattomia.

Vakuutusyhtiö maksaa vakuutetulle hetkellä $T$ summan

$$X\,\mathbf{1}(\tau > T).$$

Siis summa $X$ maksetaan, jos vakuutettu elää hetkellä T, muuten ei makseta mitään.

# Suurten lukujen laki

Olkoon yksinkertaisesti $X = S(T)$ osakkeen arvo hetkellä $T$, ja olkoon vakuutettuja $N$ kappaletta. Näiden elinajat $\tau_1, \ldots, \tau_N$ olkoot IID. Vakuutukset ovat kertamaksullisia, kertamaksu on

$$P = pS(0) + \lambda, \quad \text{missä } p = \mathbb{P}(\tau > T) \text{ ja } \lambda > 0.$$

Jos yhtiö sijoittaa kaikki saamansa vakuutusmaksut $T$ vuodeksi osakkeeseen ja syntyvä tappio on $L_N$,

$$L_N = \text{ korvausten summa} - \text{salkun arvo hetkellä } T,$$

niin

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{P}(L_N > 0) = 0.$$

# Esimerkki

Olkoon $\lambda = 0.1$, $S(0) = 1$ ja

$$S(T) \quad \text{log-normaalisti jakautunut}$$

parametrein $\mu = 0, \sigma = 0.5$.

Jos $\mathbb{P}(\tau > T) = 0.8$ ja $N = 100$, niin tappion todennäköisyys on 0.0023.

Vertailun vuoksi, jos yhteen elinaikaan $\tau$ on sidottu elämänvarakorvaus $NS(T)$, $N = 100$, niin tappion todennäköisyys on 0.8.

## Lokaali keskineliöpoikkeaman minimointi

Olkoon $X$ kuten aiemmin jokin finanssimarkkinoista riippuva satunnaismuuttuja ja $T = 2$. Oletetaan, että

$$(1) \qquad (\bar{V}(0), \bar{\theta}(1)), \ (\bar{V}(1), \bar{\theta}(2))$$

minimoi lokaalin riskin, kun suojattavana on $X$.

Täman avulla voidaan muodostaa lokaalin riskin minimoiva strategia, kun suojattavana on $X\mathbf{1}(\tau > T)$:

$$(2) \qquad {}_2p_x(\bar{V}(0), \bar{\theta}(1)), \ \mathbf{1}(\tau > 1)\, {}_1p_{x+1}(\bar{V}(1), \bar{\theta}(2)).$$

Siis:

- jos vakuutettu on kuollut, salkku puretaan,
- jos vakuutettu elää, otetaan suojaus (1):stä kerrottuna asianmukaisella elossaolotodennäköisyydellä.

# Elinaikaan sidottu toistettavissa oleva $X$

Olkoon $X$ toistettavissa finanssimarkkinoilla. Miten suojataan $X\mathbf{1}(\tau > T)$?

Edellä esitetyn nojalla elossaolevalle vakuutetulle pidetään $X$:n toistavaa salkkua kerrottuna elossaolotodennäköisyydellä.

Esimerkki: $X = S(T)$. Suojaava salkku hetkellä $k$ sisältää vain osakkeita. Näitä on

$$\mathbf{1}(\tau > k)\ {}_{T-k}p_{x+k} \text{ kappaletta.}$$

$X$:n jakauma ei vaikuta salkun valintaan.

Kustannuksia syntyy kaikkina hetkinä $k = 0, 1, \ldots, T$.

## Yleisiä ominaisuuksia

- + diskreetti eläkevakuutus ja kuolemanvaravakuutus pystytään myös käsittelemään
- + klassisen ekvivalenssiperiaatteen yleistys
- + tulevien kustannusten odotusarvo = 0
- + vahva matemaattinen viitekehys

- - kriteeriä sinänsä voi aina kritisoida
- - arbitraasia valvottava.

## Lähteitä

Finanssimatematiikkaa:


- Föllmer, H. and M. Schweizer (1988) Hedging by sequential regression. Astin Bulletin 18: 147-160.
- Föllmer, H. and A. Schied (2011) Stochastic finance. Walter de Gruyter, Berlin.

# Lähteitä

Finanssimatematiikkaa yhdistettynä henkivakuutukseen:


- Möller, T. (2000) Quadratic Hedging approaches and Indifference Pricing in Insurance. Ph.D. dissertation, University of Copenhagen.
- Möller, T. (2001) Hedging Equity-Linked Life Insurance Contracts. North American Actuarial Journal 5: 79-95.
- Pansera, J. (2012) Discrete-time local risk minimization of payment processes and applications to equity-linked life-insurance contracts. IME 50: 1-11.

# Graduja


- Kainulainen, T. (2014) Eräs suojausmenetelmä sijoitussidonnaisille henkivakuutuksille. Helsingin yliopisto.
- Eerola, M. (2017) Sijoitussidonnaisten vakuutusten suojaaminen. Helsingin yliopisto.