Paksuhäntäisten moniulotteisten riskijakaumien mallinnus vakuutuksessa ja rahoituksessa

Vakuutusiltapäivä

Miriam Hägele

Helsingin yliopisto,
Eläketurvakeskus

2.12.2022

Sisältö

- Opiskelu ja nykyinen työ
- Mitä tarkoittaa paksuhäntäisten moniulotteisten riskijakaumien mallinnus?
- Mitkä ovat riskillisimmät suunnat?
- Miten voi löytää riskillisimmät suunnat?
- Simulointiesimerkki
- Yhteenveto

Opiskelu ja työ

OPISKELU

- 2011–2014: kandidaattiopinnot Ulmin yliopistossa (Saksa), talousmatematiikka
- 2014–2016: maisteriopinnot Helsingin yliopistossa, vakuutus- ja finanssimatematiikan linja
- 2017–2022: jatko-opinnot Helsingin yliopistossa vakuutus- ja finanssimatematiikan alalla, filosofian lisensiaatti 2019, väitöstilaisuus lokakuu 2022

TYÖ

- Työharjoittelut Kreissparkasse Waiblingen -pankissa (kesä 2013 ja kesä 2015) ja Eläketurvakeskuksessa (kesä 2016)
- 9/2021 alkaen: matemaatikko Eläketurvakeskuksessa

Eläketurvakeskus

- Työeläkejärjestelmän yhteiselin, joka toimeenpanee ja kehittää työeläketurva
- Päätehtävät
  - Tutkimusten, tilastojen ja taustaselvitysten tuottaminen työeläketurvan arviointia, kehittämistä ja uudistusten seurantaa varten
  - Työeläketurvaa koskevan lainvalmistelun tukeminen
  - Kustannustenjako: Suomen työeläkejärjestelmässä toimivat useat työeläkelaitokset, eläkeläinen saa työeläkkeen vain yhdestä laitoksesta vaikka on ollut vakuutettu useammassa laitoksessa → Eläketurvakeskus selvittää laitosten todelliset kustannukset

Eläketurvakeskus
PENSIONSSKYDDSCENTRALEN

Väitöskirja

On multivariate heavy-tailed risk modelling in insurance and finance

M. Hägele.
Precise asymptotics of ruin probabilities for a class of multivariate heavy-tailed distributions.
Statistics & Probability Letters, Volume 166: 108871, 2020.

M. Hägele and J. Lehtomaa.
Large deviations for a class of multivariate heavy-tailed risk processes used in insurance and finance.
Journal of Risk and Financial Management, Volume 14: 202, 2021.

M. Hägele and J. Lehtomaa.
On the identification of the riskiest directional components from multivariate heavy-tailed data.
Submitted, 2022.

HELSINGIN YLIOPISTO
MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA

Riskijakaumien mallinnus

Riskit vakuutuksessa ja rahoituksessa

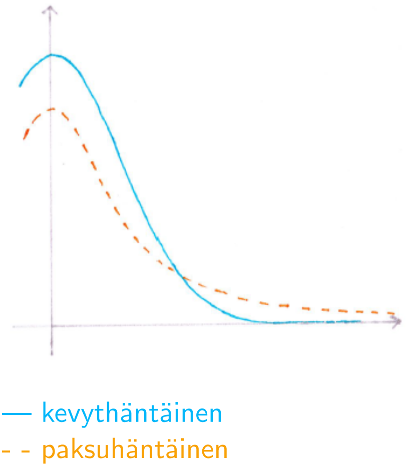
- Vakuutuksessa: vakuutussopimus
  vakuutettu maksaa yhtiölle kiinteä maksu, vahinkotapauksessa yhtiö maksaa korvaus $\rightarrow$ yhtiö pitää arvioida kuinka monia ja suuria korvauksia pitää korvata
- Rahoituksessa: osakkeen hinta
  osakkeenomistajalla on riski koska hinta vaihtelee ja voi olla myös negatiivinen

Riskijakaumien mallinnus

Riskit mallinnetaan matemaattisesti satunnaismuuttujien avulla, esim. $R \in \mathbb{R}$

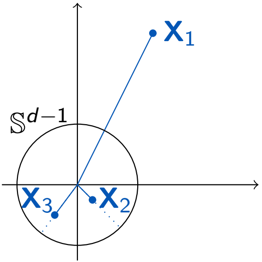
Paksuhäntäinen riski

- Esimerkki: Suomen aikuisväestö, henkilöiden pituus (kevythäntäinen) vs. ansiot vuodessa (paksuhäntäinen)
- Harvinaisilla tapahtumilla joilla iso vaikutus (ääritapahtumat) on suhteellisen iso todennäköisyys
- Vakuutuksessa luonnonkatastrofit voivat aiheuttaa monia ja isoja vahinkoja samanaikaisesti, rahoituksessa pörssiromahduksia ovat mahdollisia
- Momentitgeneroiva funktio ei ole olemassa, eli $\mathbb{E}(e^{sR}) = \infty$ kaikilla $s > 0$



Moniulotteisten paksuhäntäisten riskien mallinnus

- Vakuutusyhtiö tarjoa vakuutuksia eri vakuutuslajista ja operoi eri alueissa/maissa $\rightarrow$ yhtiö pitää ottaa huomioon samalla hetkellä jokaisen vakuutuslajin riskit
- Salkku rahoitusmarkkinoilla koostuu eri osakkeista ja muista sijoituksista, pörssiromahdus vaikuttaa moniin sijoituksiin
- Mallinnus: satunnaisvektori $\mathbf{X} = R\mathbf{U}$
    - $R = \|\mathbf{X}\|, R > 0$: satunnaisvektorin pituus tai etäisyys origosta
    - $\mathbf{U} = \frac{\mathbf{X}}{\|\mathbf{X}\|}, \mathbf{U} \in \mathbb{S}^{d-1}$: satunnaisvektorin suunta tai kulma



Moniulotteiset riskit

Yksiulotteinen malli

- Kuinka isoja havaintoja odotetaan?
- Kuinka paksu on häntä?

Moniulotteinen malli

- Missä suunnissa odotetaan havaintoja?
- Entä suurimmat havainnot?
- Kuinka suuret ovat nämä havainnot, eli kuinka paksu on häntä?
- Riippuvatko komponentit toisistaan?
- Miten komponentit riippuvat toisistaan?

Riskillisimmät suunnat

Riskillisimmät suunnat ovat ne suunnat, jossa häntä on paksuin, eli ääritapahtumia osuvat suurella todennäköisellä niihin suuntiin.

Riskillisimpien suuntien joukko määritellään

$$S = \left\{ \mathbf{v} \in \mathbb{S}^{d-1} \quad : \quad \lim_{k \to \infty} \frac{\log(\mathbb{P}(R > k | \mathbf{U} \in B(\mathbf{v}, \varepsilon)))}{\log(\mathbb{P}(R > k))} = 1, \right.$$
$$\left. \mathbb{P}(\mathbf{U} \in B(\mathbf{v}, \varepsilon)) > 0, \ \forall \varepsilon > 0 \right\},$$

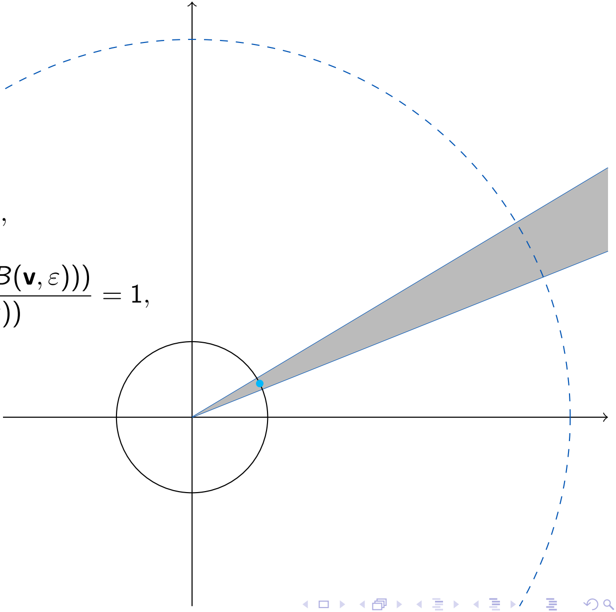
missä $B(\mathbf{v}, \varepsilon)$ on vektorin $\mathbf{v} \in \mathbb{S}^{d-1}$ ε-ympäristö.

Riskillisimmät suunnat

$$S = \Bigg\{ \mathbf{v} \in \mathbb{S}^{d-1} \colon \forall \varepsilon > 0,$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{\log(\mathbb{P}(R > k | \mathbf{U} \in B(\mathbf{v}, \varepsilon)))}{\log(\mathbb{P}(R > k))} = 1,$$

$$\mathbb{P}(\mathbf{U} \in B(\mathbf{v}, \varepsilon)) > 0 \Bigg\}$$



Oletukset

(O1) R on positiivinen paksuhäntäinen satunnaismuuttuja siten että $\lim_{k\to\infty} -\log(\mathbb{P}(R > k))/k = 0$.

(O2) $\mathbf{U} \in \mathbb{S}^{d-1}$ on satunnaisvektori siten että $\mathbb{P}(\mathbf{U} \in A | R > k)$ on vakio kaikilla $k > k_0$.

(O3) Raja-arvo $\lim_{k\to\infty} g(k, A)$ on olemassa kaikilla $A \subset \mathbb{S}^{d-1}$, missä $g(k, A) = \frac{\log(\mathbb{P}(R>k, \mathbf{U}\in A))}{\log(\mathbb{P}(R>k))}$ and $k_R = \sup\{k : \mathbb{P}(R > k) = 1\}$.

(O4) On olemassa avoin joukko S :n komplementissa. $S = \overline{T_1} \cup T_2$, missä $T_1 \subset \mathbb{S}^{d-1}$ on avoin joukko ja $T_2 \subset \mathbb{S}^{d-1}$ on äärellinen kokoelma pisteitä, joilla todennäköisyysmassa.

Testijoukot

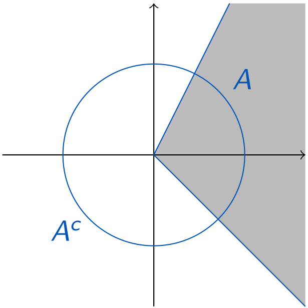
Testijoukko $A \in \mathcal{A}, A \subset \mathbb{S}^{d-1}$ on äärellinen yhdiste avoimia palloja siten että kaikilla $\mathbf{x} \in A^c$ jokainen avoin pallo sisältää avoimen pallon A^c:ssa.

Jos pätee

$$\lim_{k\to\infty} g(k, A) < \lim_{k\to\infty} g(k, A^c),$$

hylätään joukko A^c.

$\left(g(k, A) = \frac{\log(\mathbb{P}(R>k, \mathbf{U}\in A))}{\log(\mathbb{P}(R>k))}\right)$



Testijoukot

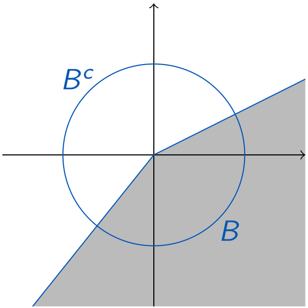
Testijoukko $B \in \mathcal{A}, B \subset \mathbb{S}^{d-1}$ on äärellinen yhdiste avoimia palloja siten että kaikilla $\mathbf{x} \in B^c$ jokainen avoin pallo sisältää avoimen pallon B^c:ssa.

Jos pätee

$$\lim_{k\to\infty} g(k, B) < \lim_{k\to\infty} g(k, B^c),$$

hylätään joukko B^c.

$\left(g(k, B) = \frac{\log(\mathbb{P}(R>k, \mathbf{U}\in B))}{\log(\mathbb{P}(R>k))}\right)$

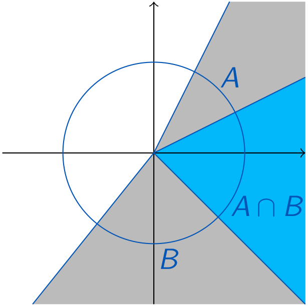


Riskillisimpien suuntien joukon approksimaatio

$$\tilde{S} = \bigcap \left\{ A \in \mathcal{A} : \lim_{k\to\infty} g(k, A) < \lim_{k\to\infty} g(k, A^c) \right\}$$

Theorem (H., Lehtomaa (2022))

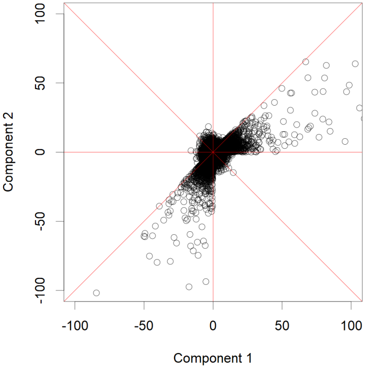
Olkoon $\mathbf{X} = R\mathbf{U} \in \mathbb{R}^d, d \geq 2$ siten että oletukset (O1)-(O4) pätevät. Tällöin pätee $S = cl(\tilde{S})$.



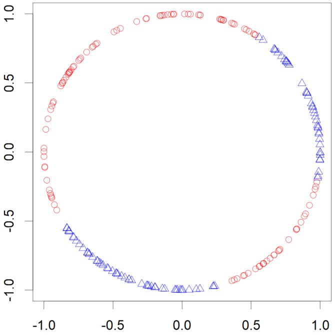
Simulointiesimerkki

- 800000 kaksiulotteisia paksuhäntäisiä havaintoja
- Avaruus jaettu kahdeksaan eri osaan
- Osien sisällä sama jakauma
- Kaikki suunnat yhtä todennäköisiä
- Kahdessa osassa R noudattaa Paretojakaumaa, muissa Weibulljakaumaa (Paretojakaumalla on paksumpi häntä kuin Weibulljakaumalla)
- Testijoukot A valitaan niin, että 90% havainnoista kuuluu siihen
- Parametri k valitaan siten, että 0.5% havainnoista ovat kauempana origosta kuin k
- Joukko A^c hylätään, jos $g(k, A^c) \geq g(k, A) + 0.5$

Simulointiesimerkki

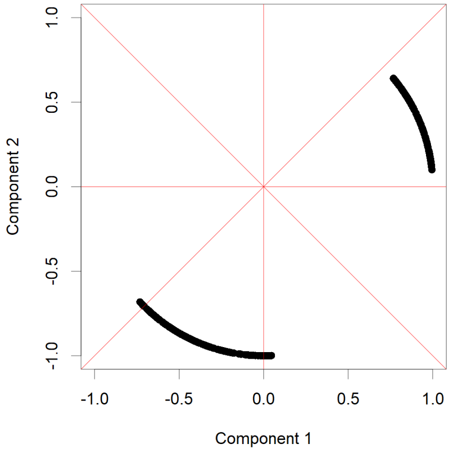


Kuva: simuloitu data



Kuva: hylätyt ja hyväksytyt suunnat

Simulointiesimerkki



Huomautuksia

- Teoreettinen tulos $\rightarrow$ tarvitaan täydellinen data
    - Voi olla ettei riskillisin suunta näy datassa, koska ei ole tarpeeksi dataa
    - Parametrien valinta voi olla vaikea
- Data ei tarvitse olla muunnettua
- R:n jakauma ei ole rajoitettu tiettyyn jakaumaperheeseen
- $\mathbf{U}$:n oletus salli, että $\mathbf{U}$:n kantaja ei ole koko yksikköympyrä ja että hännän paksuus on vaihtelee eri suunnissa
- Menetelmä palauttaa joukko $\tilde{S}$, joka kertoo enemmän $\mathbf{X}$:n jakaumasta kuin tavallinen riskimitta (yksi luku)
- Riskiluokitus: menetelmän avulla voi luokitella suunnat paksuhäntäisyyden mukaan

Yhteenveto

- Vakuutus- ja rahoitusalan toimijat haluavat pienentää kokonaisriskinsä $\rightarrow$ pitää ymmärtää mitkä ovat riskien päälähteet
- Tutkitaan riskillisimpien suuntien joukko $\rightarrow$ jos ääritapahtuma tapahtuu, mihin komponentteihin se vaikuttaa eniten
- Vakuutus: moniulotteiset havainnot voivat johtua eri vakuutuslajien korvauksista, tunnistaa varallisimmat suunnat ja yrittää löytää niille sopiva jälleenvakuutusstrategia
- Rahoitus: salkku, joka kostuu osakkeista ja muista sijoituksista mallinnetaan moniulotteisella jakaumalla, yritykset ja salkunomistajat yrittävät löytää paras suojausstrategia

Kiitos!

Miriam Hägele
miriam.hagele@helsinki.fi
miriam.hagele@etk.fi

HELSINGIN YLIOPISTO
MATEMAATTIS-LUONNONTIETEELLINEN TIEDEKUNTA

Eläketurvakeskus
PENSIONSSKYDDSCENTRALEN