WORKING PAPERS ISSN 0781-4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

24

Onerva Savolainen

VIIPALETEKNIIKAN JA VUOSIMAKSU-TEKNIIKAN YHTEENSOPIVUUS
(1988)

Viipaletekniikan ja vuosimaksutekniikan

yhteensopivuus

SHV-harjoitustyö
Onerva Savolainen
1988

The article deals with pure endowment or annuities supplemented with a death benefit equal to either premiums paid (P) or accrued mathematical reserve (R). Various ways of determining a set of premiums are discussed as well as the effect of applying different mortalities to the pure endowment and to the death benefit component. In particular, formulae for death benefit of type (R) are developed for the non-trivial case of applying two mortalities and such loadings as are used in Finnish life insurance.

SISÄLLYSLUETTELO

SAATESANAT

Vuoden 1987 aikana Suomi-Salamassa kehitettiin uutta vanhuuseläkevakuutusta, jonka piti olla joustavamaksuinen ja johon voitaisiin liittää maksun- tai rahastonpalautusvakuutus.

Siinä yhteydessä syntyi käytännön tarpeesta selvityksiä, jotka muodostavat tämän kirjoituksen "prototyypin". Silloiset muistiinpanot on täydennetty selittävällä tekstiosalla, välivaiheilla ja viittauksilla. Esitystapaa ja merkintöjä on virtaviivaistettu.

Vaikka redundanssi on alkuperäisversioon nähden lisääntynyt reippaanpuoleisesti, lukijalta ei toivoakseni ole riistetty kaikkea ajattelemisen iloa.

Punaisena lankana on koko ajan joustavamaksuisuuden mukanaan tuomat näkökohdat. Tämä merkitsee mm. sitä, että paljon joustavamaksuisuuden kannalta epäolennaista on abstrahoitu pois. Esimerkiksi kuormituksia ei oteta huomioon, ellei niillä ole vaikutusta itse turvaan. Tarvittaessa sovelletaan Suomessa käytössä olevaa kuormitustapaa.

Korkokanta ja käytetyt kuolevuudet on oletettu annetuiksi. Ylipäänsä numeroarvot ovat tämän kirjoituksen tavoitteiden kannalta toissijaisia.

Ensimmäisessä luvussa käsitellään verryttelymielessä puhtaita säästövakuutuksia ja vertaillaan jatkuvaa ja diskreettiä vuosimaksua sekä viipaletekniikkaa.

Toisessa luvussa tarkastellaan maksunpalautusvakuutusta säästövakuutuksen kylkiäisenä ja pohdiskellaan erilaisia tapoja määrittää maksuohjelmaa.

Kolmannessa luvussa on vuorossa rahastonpalautusvakuutus, joka on periaatteessa erittäin yksinkertainen, mutta varmuuslisillä ja kuormituksilla ryyditettynä laskennallisesti varsin omalaatuinen vakuutus.

Työ on kirjoitettu lukijalle, joka tuntee henkivakuutusmatematiikan perusteet. Se ei edellytä pitkälle meneviä matematiikan taitoja, mutta sujuvasta kaavanlukutaidosta on varmasti hyötyä.

Hyvään matemaattiseen esitystapaan kuuluva kaavojen pätevyysalueen osoittaminen ja operaatioiden suorittamisedellytysten voimassaolon toteaminen on laiminlyöty mahdollisimman usein. Lukijan oletetaan ilman muuta olettavan esim. että vastuukertamaksun "nykyikä" on korkeintaan "pääteikä" tai että kuolevuus on jatkuva funktio ja sitä merkitään μ:llä.

Helsingissä helmikuussa 1988

Onerva Savolainen

1. SÄÄSTÖVAKUUTUS V

1.1. MAKSUOHJELMA ANNETULLE TURVALLE

Tarkastellaan säästövakuutusta jonka rahasto maksetaan vakuutetulle iässä w joko kertasummana tai elinkorkona. Normeerataan turva eli säästö hetkellä w ykköseksi. Vakuutuksen vastuukertamaksu ajatellaan lasketuksi kuolevuudella μ_V ja maksujen pääoma-arvo (mahdollisesti eri) kuolevuudella μ_K. Alaindekseillä V ja K erotetaan ao. kuolevuuksien avulla lasketut suureet.

Jos vakuutetun nykyikä on x ja maksuaika m, jatkuva kuormittamaton vuosimaksu on silloin

$$(1.1.1.)\quad P_J = \frac{\dfrac{D_V(w)}{D_V(x)}}{a_K(x.x+m)} .$$

Suomen yksilöllisessä henkivakuutuksessa käytetään tästä jakajan 1.025 avulla diskretisoitua muunnosta

$$(1.1.2)\quad P'_J = \frac{\dfrac{D_V(w)}{D_V(x)}}{1.025\ a_K(x.x+m)} = \frac{1}{1.025} P_J ,$$

Tämän kaavan mukainen maksu merkitsee oikeastaan kokonaista maksuohjelmaa, jossa hetkillä x+v ,v=0,..,m-1 kullakin erääntyy P_J:n suuruinen maksu (käytännössä tietenkin lisättynä kuormituksella).

Kolmanneksi voimme lähteä joustavasta maksuohjelmasta, jossa hetkillä

$$(1.1.3)\quad x+t_v ,\ t_1 = 0 \le t_2 \le \ldots \le t_k < w-x$$

erääntyvät maksut P_v , $v = 1,..,k$. Tällaisten maksujen yhteenlaskettu pääoma-arvo on

$$(1.1.4)\qquad \sum_{v=1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} P_v ,$$

ja maksuohjelma (1.1.3) tuottaa saman turvan kuin maksuohjelma (1.1.2) jos

$$(1.1.5)\qquad \sum_{v=1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} P_v = \frac{D_V(w)}{D_V(x)} .$$

Jos erityisesti P_v:t ovat identtisiä, ts. $P_v = P_D$ kaikilla v, saamme maksuohjelmaan (1.1.3) liittyvän <u>diskreetin tekniikan mukaisen tasamaksun</u>

$$(1.1.6)\qquad P_D = \frac{\dfrac{D_V(w)}{D_V(x)}}{\sum_{v=1}^{k} \dfrac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)}} .$$

1.2. MAKSUOHJELMASTA TAKAISIN TURVAAN

Hetkellä x+t erääntyvän kertamaksun P ja sen ansaitseman vakuutusturvan S(t) (=rahasto hetkellä w) sitoo toisiinsa (1.1.5):n muunnelma

$$(1.2.1)\qquad P = \frac{D_V(w)}{D_V(x+t)} S(t).$$

Jos siis tunnetaan P, niin

$$(1.2.2) \qquad S(t) = \frac{D_V(x+t)}{D_V\,(w)}\ P\ .$$

Jos nyt lähdemme liikkeelle vakuutusturvasta (=1), laskemme tälle maksuohjelman joko (1.1.2):n tai (1.1.5):n mukaan, ja sitten katsomme kunkin maksun tuottavan (1.2.2):n mukaisen "viipaleen", onko viipaleiden yhteenlaskettu määrä alkuperäisen turvan suuruinen?

Tarkastellaan ensin (1.1.5):n mukaista maksuohjelmaa. Turvaviipaleiden summa on silloin

$$(1.2.3) \qquad \sum_{v=1}^{k} S(t_v) = \sum_{v=1}^{k} \frac{D_V(x+t_v)}{D_V(w)}\ P_v$$

$$= \frac{D_V(x)}{D_V(w)} \sum_{v=1}^{k} \frac{D_V(x+t_v)}{D_V(x)}\ P_v$$

$$= \left[\sum_{v=1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)}\ P_v\right]^{-1} \cdot \left[\sum_{v=1}^{k} \frac{D_V(x+t_v)}{D_V(x)}\ P_v\right]$$

Saatu suhde ei ole välttämättä =1, ts. viipalekäsittelyllä ei päästä siihen turvaan, josta lähtien maksuohjelma alunperin määritettiin. Jos teemme sen sovellutuksia ajatellen luonnollisen oletuksen, että K-kuolevuus on korkeampi kuin V-kuolevuus, kaikilla v:n arvoilla pätee

$$\frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} < \frac{D_V(x+t_v)}{D_V(x)},$$

ja niin ollen

$$\sum_{v=1}^{k} S(t_v) > 1 .$$

Jos kuitenkin laskemme maksujen pääoma-arvon ja säästösuorituksen pääoma-arvon samalla kuolevuudella, diskreetti maksuohjelma (1.1.5) ja viipalekäsittely (1.2.2) tuottavat saman turvan

Entä kuinka käy, jos maksut ovatkin ohjelman (1.1.2) jatkuvasta diskretisoidut maksut? Jotain osviittaa antaa lausekkeiden (1.1.2) ja (1.1.6) vertailu: osoittajat (vastuukertamaksut) ovat samat ja (1.1.2):n nimittäjä voidaan kirjoittaa muodossa

$$1.025\ a_K(x.x+m) = 1.025 \sum_{v=0}^{m-1} \frac{D_K(x+v)}{D_K(x)}\ a_K(x+v.x+v+1)$$

$$= \sum_{v=0}^{m-1} \frac{D_K(x+v)}{D_K(x)}\ 1.025 \cdot a_K(x+v:1)$$

$$\approx \sum_{v=1}^{m-1} \frac{D_K(x+v)}{D_K(x)},$$

koska diskretisointikerroin 1.025 on alunperin valittu niin, että se on suunnilleen yhden vuoden jatkuvan elinkoron käänteisluku.

Koko maksuohjelman (1.1.2) turva viipaleittain muodostettuna on silloin

$$(1.2.4) \qquad \sum_{v=0}^{m-1} S(v) = \sum_{v=0}^{m-1} \frac{D_V(x+v)}{D_V(w)} P_J$$

$$= \frac{\dfrac{D_V(w)}{D_V(x)} \displaystyle\sum_{v=0}^{m-1} \frac{D_V(x+v)}{D_V(w)}}{1.025\ a_K(x.x+m)}$$

$$= \frac{\displaystyle\sum_{v=0}^{m-1} \frac{D_V(x+v)}{D_V(x)}}{\displaystyle\sum_{v=0}^{m-1} \frac{D_K(x+v)}{D_K(x)} \quad 1.025 \cdot a_K(x+v:1)} .$$

Eroa alkuperäiseen ykköseen nähden syntyy paitsi kahden kuolevuuden käytöstä myös joka tapauksessa diskretisoinnin likimääräisyydestä.

1.3. NÄKÖKOHTIA RAHASTON MÄÄRITTÄMISESTÄ

Jatkuvan tasamaksun (1.1.1) ideaan sopii hyvin jatkuva vakuutusmaksuvastuu tai lyhyemmin rahasto. Kun vakuutusaikaa on kulunut t vuotta, rahasto on jatkuvan ajattelun mukaan

$$(1.3.1) \qquad V(t) = \frac{D_V(w)}{D_V(x+t)} - P_J' a_K(x+t.x+m).$$

Elinkorko on tässä ymmärrettävä niin, että $a_K(z,z') = 0$ kun $z' \le z$.

Samaa menettelyähän sovelletaan Suomessa yleisesti silloinkin kun maksuohjelma on (1.1.2):n mukainen diskretisoitu tasamaksu. Maksun "tasaisuus" ei tosin ole tässä välttämätöntä. Olennaisempaa on se, että tulevien maksujen pääoma-arvo on tarkasteluhetken jatkuva funktio. Niin ollen myös V(t) on t:n jatkuva funktio.

Jatkuvan rahaston heikkoutena voidaan pitää sitä, ettei rahasto reagoi mitenkään suureenkaan vakuutuksenomistajan suoritukseen vakuutusyhtiölle (paitsi kertamaksuisessa tapauksessa). Asialla lienee vain vähäinen merkitys sellaisissa riskityyppisissä vakuutuksissa joiden rahasto pysyy koko vakuutusajan vähäisenä ja maksutkin ovat pienet ainakin verrattuna nyt tässä käsiteltäviin säästövakuutuksiin.

Asia korjaantuu jos maksujen pääoma-arvot lasketaan diskreetisti kuten (1.1.5):ssä on tehty. Lausekkeen (1.3.1) diskreetti vastine on

$$(1.3.2) \qquad V(t) = \frac{D_V(w)}{D_V(x+t)} - \sum_{v=h+1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x+t)} P_v,$$

missä t_h on laskentahetkeä t lähinnä edeltänyt maksun eräpäivä (ja $\Sigma = 0$ kun $h+1 > k$).

Tavallisesti vakuutusmaksuvastuuta laskettaessa jatkuvaan rahastoon lisätään maksunsiirtovaraus, jolloin koko vakuutusmaksuvastuu on lähellä diskreetin tekniikan mukaista vastuuta. Kuormitusten osalta lopputulos voi olla erilainen käytettäessä toisaalta diskreettiä tekniikkaa tai jatkuvaa tekniikkaa ja maksunsiirtovarausta.

2. SÄÄSTÖVAKUUTUS JA MAKSUNPALAUTUS VP

Tarkastellaan edellisen luvun säästövakuutukseen liitettyä maksunpalautusvakuutusta P, jonka mukaan vakuutetun kuollessa ennen ikää w maksetaan edunsaajille kuolinhetkeen mennessä maksetuista (erääntyneistä) maksuista annettu osa.

Mm. elinkorkovakuutuksen yhteydessä P-turvaa on luontevaa jatkaa vielä eläkeiän jälkeenkin.

Luvussa 2 verrataan turvan ja maksuohjelman suhdetta kun maksut on määritetty toisaalta ankarassa mielessä tasamaksuina ja toisaalta viipaletekniikalla. Maksujen pääoma-arvoa tarkastellaan vain diskreetillä periaatteella määritettynä. Jatkuva tekniikka ei toisi mitään uutta luvun 1 toteumusten lisäksi.

Koska maksunpalautus riippuu koko bruttomaksusta, otetaan tällä kertaa huomioon kuormituksetkin. Kuolemanvaraturvan "omat" kuormitukset oletetaan sisällytetyiksi vastuukertamaksuihin. Näiden lisäksi luvun 1 tapaiseen "rahastomaksuun" lisätään suomalaisittain ilmaisten æ-kuormitus (kuormitushan voi olla määritetty miten tahansa mutta se voidaan ilmaista muodossa kerroin kertaa bruttomaksu B).

Tilannetta tutkitaan olettamalla, että säästöosan vastuuta laskettaessa käytetään "säästökuolevuutta" ja P-osan vastuun puolella "riskikuolevuutta". Erotetaan kuolevuudet ja niiden avulla lasketut suureet alaindekseillä V (säästö) ja K (kuolemanvara).

Maksujen pääoma-arvoa laskettaessa voidaan kummassakin komponentissa käyttää vielä muuta kuolevuutta. Merkitään säästökomponentin maksuihin sovellettavalla kuolevuudella laskettuja suureita alaindeksillä 1 ja P-osan maksuihin sovellettavia kuolevuudella laskettuja suureita alaindeksillä 2.

2.1. MAKSUOHJELMAN MÄÄRITYS

Vakuutuksen "turva" olkoon edelleen normeerattu niin, että säästöosan rahasto iässä w on ykkösen suuruinen ja kuolemantapauksessa palautetaan osa θ maksetuista maksuista. Voimme olettaa, että $0 \le \theta \le 1$ vaikka oletus onkin epäolennainen kaavojen kannalta. Tapauksessa $\theta = 0$ saadaan tietenkin luvussa 1 käsitelty tilanne.

Oletamme, että eräpäivinä $x+t_1 = x \le \ldots \le x+t_k$ erääntyvät säästöosan bruttomaksut $B_v(V)$ ja P-osan bruttomaksut $B_v(P)$, $v=1,..,k$. Maksujen $B_v(V)$ ja $B_v(P)$ kuormituskerroin olkoon $æ_v$. Oletamme siis, että säästöosan ja P-osan kertoimet ovat samat kunakin eräpäivänä, mutta eri eräpäivien kertoimet voivat erota.

Säästöosan maksujen tulee toteuttaa yhtälö (vrt. (1.1.5)).

$$(2.1.1) \qquad \sum_{v=1}^{k} \frac{D_1(x+t_v)}{D_1(x)} (1-æ_v)\, B_v(V) = \frac{D_V(w)}{D_V(x)} \, .$$

Maksunpalautuskomponentin maksujen määritysyhtälö on puolestaan

$$(2.1.2) \qquad \sum_{v=1}^{k} \frac{D_2(x+t_v)}{D_2(x)} (1-æ_v) B_v(P)$$

$$= \sum_{v=1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} \cdot\theta\cdot [B_v(V)+B_v(P)] \cdot A_K(x+t_v.w|K)$$

$$+ \frac{D_K(w)}{D_K(x)} \cdot\theta\cdot [\sum_{v=1}^{k} B_v(V)+B_v(P)] \cdot A_K(JP).$$

Yhtälön vasemmalla puolella on rahastomaksujen pääoma-arvo alussa eli hetkellä x. Oikean puolen ensimmäinen yhteenlaskettava on P-turvan vastuukertamaksu karttumisajalta [x,w]. Jälkimmäinen termi edustaa iän w jälkeiseltä ajalta suoritettavien P-korvausten sekä mahdollisesti joidenkin rahastoitavien kuormitusten (Suomessa ϵ ja ϕ) pääoma-arvoa. Erityisesti symboli A(JP) tarkoittaa em. pääoma-arvoa hetkellä w alkavaa P-turvan yksikköä kohti ja hetkeen w diskontattuna. Suureen A(JP) tarkemmalla muodolla ei ole tässä tarkastelussa merkitystä. Kuitenkin A(JP)=0 kun P-turva ei jatku karttumisajan jälkeen.

Yhtälöt (2.1.1) ja (2.1.2) muodostavat yhtälöryhmän jossa on kaksi yhtälöä ja 2k tuntematonta maksua. Joissakin kuormitusmalleissa voivat jopa kuormituskertoimet $æ_V$ olla tuntemattomia. Oletetaan kuitenkin tällä kertaa, että $æ_V$:t ovat tunnettuja.

Yhtälöryhmällä (2.1.1-2) on yleensä äärettömän monta ratkaisua joista tietenkin suuri osa kelpaa vakuutusmaksuohjelmiksi. Tarkastellaan nyt erikseen kolmea lisäehtoa, joiden vallitessa (2.1.1-2):lla on yksikäsitteinen ratkaisu.

2.2. KERTAMAKSU

Kun k=1, yhtälöt (2.1.1) ja (2.1.2) supistuvat muotoon (æ=æ$_1$)

$$(2.1.1)' \quad (1-æ)B(V) = \frac{D_V(w)}{D_V(x)}$$

$$(2.1.2)' \quad (1-æ)B(P)$$

$$= \theta\cdot[B(V)+B(P)] \cdot [A_K(x.w|K) + \frac{D_K(w)}{D_K(x)} A_K(JP)]$$

Merkitään viimeistä hakasulkulauseketta lyhyyden vuoksi $\alpha(x)$:llä; silloin

$$
(2.2.1)\quad \begin{cases} B(V) = \dfrac{1}{1-æ} \cdot \dfrac{D_V(w)}{D_V(x)} \\[2ex] B(P) = \dfrac{\theta \cdot \dfrac{\alpha(x)}{1-æ}}{1-\theta \cdot \dfrac{\alpha(x)}{1-æ}} \; B(V) \,. \end{cases}
$$

Osien maksut lausuttuna koko VP-yhdistelmän maksun $B(VP)=B(V)+B(P)$ avulla ovat odotetusti

$$
(2.2.2)\quad \begin{cases} B(P) = \dfrac{\theta\alpha(x)}{1-æ} \; B(VP) \\[2ex] B(V) = \left[1 - \dfrac{\theta\alpha(x)}{1-æ}\right] B(VP) \,. \end{cases}
$$

Kääntäen, jos hetkellä $x+t$ maksetaan VP-yhdistelmän kertamaksu B, säästöosan rahasto iässä w on

$$
(2.2.3)\quad S(t) = \frac{D_V(x+t)}{D_V(w)} \,(1-æ) \left[\, 1 - \frac{\theta\alpha(x+t)}{1-æ} \,\right] B
$$

$$
= \frac{D_V(x+t)}{D_V(w)} \; [(1-æ) - \theta\alpha(x+t)] \cdot B \,.
$$

2.3. TASAMAKSUOHJELMA

Rajoitetaan sitten (2.1.1-2):n ratkaisuja vaatimalla että $B_v(V)=B(V)$ ja $B_v(P)=B(P)$ sekä $æ_v=æ$ kaikilla $v=1,\dots,k$. Silloin tuntemattomien määrä supistuu kahteen ja ilmeisesti löytyy yksikäsitteinen lisäehdon toteuttava yhtälöryhmän ratkaisu.

Yhtälöstä (2.1.1) saadaan B(V) kuten luvussa 1:

$$(2.3.1) \qquad (1-æ)B(V) = \frac{\dfrac{D_V(w)}{D_V(x)}}{\sum\limits_{v=1}^{k} \dfrac{D_1(x+t_v)}{D_1(x)}}$$

Tämän jälkeen B(P) ratkaistaan yhtälöstä (2.1.2). Lausekkeen kehittämiseksi muokataan ensin (2.1.2):n oikeaa puolta nyt voimassa olevat lisäoletukset huomioon ottaen (merk. tarvittaessa lyhyesti B(V)+B(P)=B):

$$(2.3.2) \qquad \sum_{v=1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} \theta[B(V)+B(P)]A_K(x+t_v.w|K)$$

$$+ \frac{D_K(w)}{D_K(x)} \theta \cdot \left[\sum_{v=1}^{k} B(V)+B(P)\right] A_K(JP)$$

$$= \theta\ B \sum_{v=1}^{k} \left[\frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} A_K(x+t_v.w|K) + \frac{D_K(w)}{D_K(x)} A_K(JP)\right]$$

$$= \theta\ B \sum_{v=1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} \left[A_K(x+t_v.w|K) + \frac{D_K(w)}{D_K(x+t_v)} A_K(JP)\right]$$

$$= \theta\ B \sum_{v=1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} \alpha(x+t_v).$$

Sijoitetaan tämä yhtälöön (2.1.2)

$$B(P) \sum_{v=1}^{k} \frac{D_2(x+t_v)}{D_2(x)} (1-æ) = \theta[B(V)+B(P)] \sum_{v=1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} \alpha(x+t_v)$$

Saamme B(P):n lausutuksi jo tunnetun B(V):n avulla

$$(2.3.3) \quad B(P) = \frac{\theta \cdot \alpha \beta}{1 - \theta \alpha \beta} \cdot B(V) \; ,$$

missä termiä

$$(2.3.4) \quad \alpha = \sum_{v=1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} \alpha(x+t_k)$$

voisi kutsua P-osan vastuukertamaksuksi yksikköä kohti, ja termi

$$(2.3.5) \quad \beta = \left[(1-æ) \sum_{v=1}^{k} \frac{D_2(x+t_v)}{D_2(x)} \right]^{-1}$$

on se kerroin, jolla kertomalla "vastuukertamaksusta" saadaan eräpäivittäinen tasamaksu.

Koko VP-yhdistelmän maksu B(V):n avulla saadaan kaavasta

$$(2.3.6) \quad B(VP) = B(P) + B(V) = \frac{B(V)}{1-\theta \alpha \beta} \; ,$$

ja toisaalta osien maksut yhdistelmän maksun avulla ovat

$$(2.3.7) \quad \begin{cases} B(P) = \theta \alpha \beta \cdot B(VP) \\ B(V) = (1-\theta \alpha \beta) B(VP). \end{cases}$$

Lausekkeita (2.3.7) ja (2.3.3) voi verrata kertamaksun lausekkeisiin (2.2.2) ja (2.2.1). Selvästi on kyse samasta kaavasta kunhan todetaan että $\alpha=\alpha(x)$ ja $\beta=1/(1-æ)$ kertamaksun tapauksessa.

Merkille pantavaa on myös se, että koko kappaleessa 2.3 ei ole tarvinnut tehdä eräpäiviä $t_1,..,t_k$ koskevia säännöllisyysoletuksia. Osa eri indeksillä merkityistä eräpäivistä voi jopa yhtyä. Silloin itse asiassa maksuohjelma ei olekaan tasamaksuinen vaan vaihtuvamaksuinen. Kuitenkin joka eräpäivän kokonaismaksussa V-osan ja P-osan suhde on sama. Tämä on se piirre, joka olennaisimmin erottaa tämän kappaleen tasamaksun kappaleen 2.5 viipalemaksusta.

2.4. TASAMAKSUN KÄSITTELY KERTAMAKSUN TAPAAN

Tarkastellaan edelleen kappaleen 2.3 tasamaksuohjelmaa, jossa B(V) on (2.3.1):n ja B=B(VP) kaavan (2.3.6) mukainen. Tulkitaan kuitenkin kukin maksu kappaleen 2.2 mukaisena kertamaksuna joka kerryttää säästöä kaavan (2.2.3) osoittaman määrän. Kertyykö näistä viipaleista yhteensä alkuperäinen turva eli ykkösen suuruinen rahasto hetkellä w? (Merkintä ks. (1.2.2))

$$\sum_{v=1}^{k} S(t_v) = \sum_{v=1}^{k} \frac{D_V(x+t_v)}{D_V(w)} (1-æ) \left(1- \frac{\theta\ \alpha(x+t_v)}{1-æ}\right) B$$

$$= \sum_{v=1}^{k} \frac{D_V(x+t_v)}{D_V(w)} \left((1-æ) - \theta\ \alpha(x+t_v)\right) \frac{B(V)}{1-\theta\ \alpha\ \beta}$$

$$= \sum_{v=1}^{k} \frac{D_v(x+t_v)}{D_v(w)} \cdot \frac{(1-æ)-\theta\ \alpha\ (x+t_v)}{1-\theta\ \alpha\ \beta} \cdot \frac{\dfrac{D_v(w)}{D_v(x)}}{(1-æ)\sum\limits_{v=1}^{k} \dfrac{D_1(x+t_v)}{D_1(x)}}$$

$$= \frac{1}{1-\theta\ \alpha\ \beta} \cdot \frac{(1-æ)\sum\limits_{v=1}^{k} \dfrac{D_v(x+t_v)}{D_v(x)} - \theta \sum\limits_{v=1}^{k} \dfrac{D_v(x+t_v)}{D_v(x)}\ \alpha(x+t_v)}{(1-æ)\sum\limits_{v=1}^{k} \dfrac{D_1(x+t_v)}{D_1(x)}}$$

$$= \frac{\dfrac{(1-æ)\sum\limits_{v=1}^{k} \dfrac{D_v(x+t_v)}{D_v(x)} - \theta \sum\limits_{v=1}^{k} \dfrac{D_v(x+t_v)}{D_v(x)}\ \alpha(x+t_v)}{(1-æ)\sum\limits_{v=1}^{k} \dfrac{D_1(x+t_v)}{D_1(x)}}}{1 - \dfrac{\theta \cdot \alpha}{(1-æ)\sum\limits_{v=1}^{k} \dfrac{D_2(x+t_v)}{D_2(x)}}}$$

$$= \frac{\dfrac{(1-\text{æ}) \sum_{v=1}^{k} \dfrac{D_V(x+t_v)}{D_V(x)} - \theta \sum_{v=1}^{k} \dfrac{D_V(x+t_v)}{D_V(x)} \alpha(x+t_v)}{(1-\text{æ}) \sum_{v=1}^{k} \dfrac{D_1(x+t_v)}{D_1(x)}}}{\dfrac{(1-\text{æ}= \sum_{v=1}^{k} \dfrac{D_2(x+t_v)}{D_2(x)} - \theta \sum_{v=1}^{k} \dfrac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} \alpha(x+t_v)}{(1-\text{æ}) \sum_{v=1}^{k} \dfrac{D_2(x+t_v)}{D_2(x)}}}$$

Vaikka saatu lauseke näyttää ensin mutkikkaalta, sillä on selkeä rakenne: osoittaja ja nimittäjä ovat "samanmuotoiset". Erona ovat kuolevuudet, jotka osoittajassa ovat säästöpuolelta (lukuunottamatta α-termejä) ja nimittäjässä P-osaan sovellettuja kuolevuuksia.

On siis ilmeistä, että lauseke yleensä poikkeaa yhdestä, jos kuolevuudet poikkeavat. (Laskettaessa lausekkeen arvoja "mahdollisesti kysymykseen tulevilla kuolevuuksilla" erot olivat pahimmillaan parin promillen luokkaa - suuntaan tai toiseen.)

Toisaalta on helppo nähdä, että $\Sigma S(t_v)=1$ eli tasamaksutekniikalla määritetyt maksut käsiteltyinä kertamaksun tapaan johtavat samaan turvaan kuin se mistä lähdettiin alunperin liikkeelle <u>silloin kun kaikki käytetyt kuolevuudet ovat samat</u>.

2.5. VIIPALETEKNIIKKA

Tarkastellaan edelleen VP-yhdistelmän maksuohjelmaa (parametrina θ), jossa bruttomaksut B_v erääntyvät hetkillä $t_1 = 0 \le t_2 \le \ldots \le t_k$, $v=1,\ldots,k$. Jaamme kunkin maksun P- ja V-osiin kertamaksun tapaan (vrt. (2.2.2)):

$$(2.5.1)\quad \begin{cases} B_v(P) = \dfrac{\theta \cdot \alpha(x+t_v)}{1-æ_v}\, B_v \\[2ex] B_v(V) = \left(1- \dfrac{\theta\, \alpha(x+t_v)}{1-æ_v}\right) B_v. \end{cases}$$

Oletamme maksut normeeratuiksi niin, että yhtälö (2.1.1) toteutuu, ts.

$$(2.5.2)\quad \frac{D_V(w)}{D_V(x)} = \sum_{v=1}^{k} \frac{D_1(x+t_v)}{D_1(x)} (1-æ_v)B_v(V)$$

$$= \sum_{v=1}^{k} \frac{D_1(x+t_v)}{D_1(x)} \left((1-æ_v) - \theta\, \alpha(x+t_v)\right)B_v$$

Toteutuuko silloin myös P-maksujen määritysyhtälö (2.1.2)? Kyseinen yhtälöhän sanoo että P-osan (netto)maksujen pääoma-arvon tulee olla sama kuin P-korvausten pääoma-arvo.

P-osan maksujen pääoma-arvo on nyt

$$(2.5.3)\quad \sum_{v=1}^{k} \frac{D_2(x+t_v)}{D_2(x)} (1-æ_v) \cdot \frac{\theta\, \alpha\, (x+t_v)}{1-æ_v}\, B_v$$

$$= \theta \sum_{v=1}^{k} \frac{D_2(x+t_v)}{D_2(x)} \alpha(x+t_v)B_v.$$

P-korvausten pääoma-arvo on (2.3.2):n tapaan kehitettynä

$$(2.5.4) \quad \sum_{v=1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} \; \theta B_v A_K(x+t_v.w|K)$$

$$+ \frac{D_K(w)}{D_K(x)} \cdot \theta\left(\sum_{v=1}^{k} B_v\right) \cdot A_K(JP)$$

$$= \theta \cdot \sum_{v=1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} B_v \cdot \alpha(x+t_v)$$

Yhtälö (2.1.2) on siis tällä kertaa seuraavan näköinen:

(2.5.5)

$$\theta \cdot \sum_{v=1}^{k} \frac{D_2(x+t_v)}{D_2(x)} \alpha(x+t_v)B_v = \theta \cdot \sum_{v=1}^{k} \frac{D_K(x+t_v)}{D_K(x)} \alpha(x+t_v)B_v.$$

On ilmeistä, että (2.5.5) toteutuu kaikilla maksuohjelmilla (ja kaikilla $\theta \in [0,1]$) jos ja vain jos K-kuolevuus ja 2-kuolevuus ovat samat.

2.6. JOUSTAVAMAKSUISUUS

Näihin päiviin asti henkivakuutus, niin säästö- kuin kuolemanvaravakuutus on melkein aina kustannettu säännöllisin väliajoin maksettavilla tasasuurilla vakuutusmaksuilla. Poikkeamat säännöstä on nähty tosiaan poikkeuksina, ja nekin käsitelty tasamaksutekniikan hengessä. Tyypillisenä esimerkkinä voisi olla maksuajan alussa tai lopussa esiintyvän poikkeavan mittaisen ns. maksukauden poikkeava maksu.

Jos tässä "perinteisessä" tekniikassa on haluttu muutoksia maksuohjelmaan, käytettävissä on ollut ns. yksilöllisen muutoslaskennan menetelmä, erityisesti sen erikoistapaus vapaakirjaksi muuttaminen. Käsittelyssä päähuomio on siinä vakuutussäästössä joka aikanaan erääntyy suoritettavaksi kunhan sovittua maksuohjelmaa noudatetaan.

Perinteinen menettely on varsin kömpelö varsinaisen maksujouston toteuttamiseen, ts. siihen että vakuutuksenottaja saa maksaa maksuja ennalta määräämättöminä aikoina ja vaihtelevan suuruisina. Säästövakuutuksen maksujousto näyttää tämän kirjoittajan mielestä vaativan laskentamenettelyä jossa tavalla tai toisella seurataan jo ansaittua kertymää.

Eräs tapa on Universal life -tekniikka, jossa seurataan rahaston muutosta hetkestä toiseen Thielen differentiaaliyhtälön mukaisesti. Tämä tekniikkahan sopii myös riskivakuutuksiin.

Toinen menettely, joka sopii vain säästövakuutuksille mukaan lukien vanhuuseläkevakuutus, on maksujen käsittely (periaatteessa) kertamaksuina. Tässä ajattelussa seurataan maksu maksulta miten vakuutusturva karttuu. "Vakuutusturvalla" ymmärretään kuitenkin Universal life -ideasta poiketen rahaston määrää ei tarkasteluhetkellä vaan eräänä kiinteänä eräpäivänä tulevaisuudessa tai ekvivalentisti tällä rahastolla saatavan elinkoron määrää aikayksikköä kohti.

Ajatellaan edelleen, että VP-vakuutukseen maksetut (mahdollisesti epäsäännölliset) maksut käsitellään kertamaksun tapaan, ts. maksusta vähennetään ensin tätä maksua vastaavan maksunpalautuksen (kerta)maksu, ja lopulla rahalla ostetaan sovittuna aikana erääntyvää säästöä tai elinkorkoa (vrt. (2.5.1) ja (2.2.3)).

Vakuutussopimusta tehtäessä pitäisi kuitenkin voida ilmoittaa vakuutuksenottajalle millaisen turvan hän aikomallaan maksuohjelmalla saa (laskenta "maksu edellä") tai kääntäen pitäisi voida laskea ainakin jokin maksuohjelma, joka tuottaa halutun turvan (laskenta "turva edellä").

Vastaus edelliseen kysymykseen saadaan suoraan laskemalla. Jälkimmäisessä tapauksessa on haettava jokin ratkaisu $(B_v)_{v=1}^{k}$ yhtälölle (2.5.2) (normeerausta vaille).

Luvussa 1 todettiin, että säästövakuutuksen maksujen ja korvausten pääoma-arvot on laskettava samalla kuolevuudella, jotta viipaletekniikka (2.5.2):n mielessä ja toisaalta saapuneiden maksujen käsittely (2.2.3):n tapaan kertamaksuina johtaisivat samaan turvaan. Tämän luvun merkinnöillä siis pitää olla $\mu_V = \mu_1$. Toisaalta kappaleessa 2.5 päädyttiin vastaavaan tulokseen P-osan kohdalla.

Asetelma on oikeastaan se, että kun maksut käsitellään viipaletekniikkaan kiinteästi liittyvällä tavalla ikäänkuin kyseessä olisi kertamaksu (vrt. (2.2.3)), tulee samalla automaattisesti maksujen pääomituksessa käytetyksi korvausten kuolevuutta.

Jos kuitenkin halutaan määrittää maksuohjelma kappaleessa 2.3 kuvaillulla "ankaralla" tasamaksulaskennalla ja toisaalta kerryttää turvaa kertamaksutekniikan periaatteella (2.2.3), on vielä P-osan ja V-osan kuolevuusoletusten oltava identtiset kuten kappaleessa 2.3. todettiin.-Muistettakoon, että tässä tarkastelussa korko ja kuormitus pidetään vakioa.

Luvun 1 lopussa todettiin, että rahasto voidaan periaatteessa laskea jatkuvasti tai diskreetisti riippumatta siitä kumpi menettely on käytössä maksuja määriteltäessä. Kuten luvussa 1 nähtiin, maksujen pääoma-arvojen laskeminen diskreetisti parantaa rahaston ja maksuohjelman yhteensopivuutta.

Kokonaan toinen asia on sitten se, että joustavamaksuisessa sopimuksessa ei ole mieltä laskea rahastoa prospektiivisesti alunperin suunnitellun kokonaisturvan ja "jäljellä olevan maksuohjelman" mukaan. Laskenta pitää perustaa kertyneeseen turvaan eikä tulevia maksuja tarvitse silloin ottaa huomioon. Aina uuden maksun tullessa sisään kertynyt turva kasvaa hyppäyksenomaisesti. Itse asiassa V-osan rahaston taso on täsmälleen sama kuin jos toteutunut maksuohjelma käsitettäisiin kiinteänä ohjelmana ja rahasto laskettaisiin vähentämällä diskreetti "tulevien maksujen pääoma-arvo" kokonaisturvan nykyarvosta. Kokonaisturva on ymmärrettävä sekä rahastonlaskentahetkeä edeltävien että sen jälkeisten maksujen yhteensä kerryttämänä turvana.

3. SÄÄSTÖVAKUUTUS JA RAHASTONPALAUTUS VR

Maksunpalautusehdolla täydennetyn kertamaksuisen säästövakuutuksen VP rahasto on "alussa" periaatteessa sama kuin kertamaksu vähennettynä sellaisilla kuormituksilla, joita ei rahastoida (Suomessa æ-kuormitus). P-turva siis ylittää alussa rahaston. Jos karttumisaika ei ole aivan lyhyt, rahasto ehtii kasvaa P-turvaa suuremmaksi, sitä suuremmaksi mitä pitempi on karttumisaika.

Säästövakuutukseen liitetty lisäehto tai -vakuutus, jonka mukaan karttumisaikana on voimassa rahaston suuruinen kuolemanvaraturva, on siis monessa tapauksessa selvästi erilainen kuin maksunpalautusvakuutus. Merkitsemme rahastonpalautusvakuutusta symbolilla R. Oletamme että rahasto palautetaan kokonaan, jos vakuutettu kuolee karttumisaikana [x,w]. Säästön eräännyttyä tai eläkkeen alettua turva lakkaa kerralla kokonaan.

Pohdimme VR-vakuutuksesta samantapaisia asioita kuin luvussa 2 VP-vakuutuksesta. Kysymyksenasettelut ovat hieman toiset, koska P- ja R-turvat määräytyvät perin erilaisilla tavoilla. Jopa jatkuvaa tekniikkaa tarkastellaan, tosin lähinnä rahaston määrittämiseen liittyvistä syistä. Luvun antiin kuuluu myös VR:n maksujen laskentakaavojen johtaminen.

3.1. VR-VAKUUTUS ILMAN VARMUUSLISÄÄ JA KUORMITUKSIA

Kun kuolevuus on määritetty, on luonnollista ajatella, että kertamaksuisen VR-sopimuksen rahasto kasvaa karttumisaikana (=väli [x,w]) pelkällä korolla. Samaan johtopäätökseen tullaan tarkastelemalla Thielen differentiaaliyhtälöä, jossa VR-vakuutuksen riskisumma on nolla. Silloin VR:n vastuukertamaksu on yksinkertaisesti

$$(3.1.1) \quad e^{-\int_0^{w-x} \delta \, du},$$

kun taas puhtaan säästövakuutuksen maksu on

$$(3.1.2) \quad e^{-\int_0^{w-x} \mu(x+u)+\delta \, du}.$$

Tällöin pelkän R-osan maksuksi jää

$$(3.1.3) \quad e^{-\int_0^{w-x} \delta \, du} - e^{-\int_0^{w-x} \mu(x+u) + \delta \, du}.$$

R- ja V-osien maksujen suhde, ts. kerroin jonka avulla V-osan maksusta saadaan R-osan maksu, on

$$(3.1.4) \quad e^{+\int_0^{w-x} \mu(x+u) \, du} - 1.$$

Nähdään, että korko ei vaikuta kertoimeen (3.1.4).

Kuormitukset on tässä jätetty huomiotta. Maksuun verrannollinen kuormitus, jos se on sama molemmille osille, ei vaikuta kertoimeen (3.1.4.), ja laskennallisesti se voitaisiin lisätä jälkikäteen maksuihin (3.1.1.)-(3.1.3.).

Toisin on muiden kuormitusten laita. Edellähän on oikeastaan laskettu kuolemanvaraturvan (R-komponentin) maksu ilman ϵ- ja ϕ-kuormitusta ja säästövakuutuksen kuolevuudella.

3.2. THIELEN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖ

Tarkastellaan sitten VR:n maksuja olettamalla että kuolemanvaraturvaan liittyy Suomen yksilöllisen henkivakuutuksen kuormitusmallin mukaiset ϵ- ja ϕ-kuormitukset. Samalla jätetään mahdollisuus varmuuslisiin (kuolevuudessa) käyttämällä säästöpuolella yhtä kuolevuutta (μ_V) ja kuolemanvaraturvan osalta toista (μ_K). Kummassakin komponentissa käytetään samaa kuolevuutta korvausten ja niitä vastaavien maksujen diskonttauksessa. [1]

Oletetaan taas, että V:n rahasto kasvaa hetkeen w mennessä ykköseksi. Itse asiassa koko VR:n rahasto hetkellä w on silloin yksi, koska tuleva R-turva lakkaa silloin. Aloitamme tarkastelun jatkuvista maksuista: VR:n maksu hetkellä x+t olkoon P(t), joka jakautuu V- ja R-osien maksuiksi $P(t) = P_V(t) + P_R(t)$.

Näillä valmisteluilla voimme kirjoittaa koko VR:n rahaston hetkellä x+t aidon prospektiiviseen tapaan

(3.2.1.)

$$V(t) = e^{-\int_{x+t}^{w} \mu_V(u) + \delta \, du} + (1+\phi) \int_{x+t}^{w} V(s-x)\mu_K(s) e^{-\int_{x+t}^{s} \mu_K(u)+\delta du} ds$$

$$+ \epsilon \cdot \int_{x+t}^{w} V(s-x)\, e^{-\int_{x+t}^{s} \mu_K(u) + \delta \, du} ds$$

---

[1]Tässä luvussa on luontevampaa käyttää peruslukujen suhteiden sijaan niiden laskulausekkeita. Luvussa 2 oli yhtä lailla luontevaa käyttää peruslukuja.

$$- \int_{x+t}^{w} P_V(s-x) \cdot e^{\bar{\int}_{x+t}^{s} \mu_V(u)+\delta\, du}\, ds - \int_{x+t}^{w} P_R(s-x) \cdot e^{\bar{\int}_{x+t}^{s} \mu_K(u)+\delta\, du}\, ds.$$

Otetaan lyhyyden vuoksi käyttöön seuraavat merkinnät

$$A_K^*(x+t.w) = \int_{x+t}^{w} V(s-x)\mu_K(s) e^{\bar{\int}_{x+t}^{s} \mu_K(u)+\delta\, du}\, ds$$

$$a^*(x+t.w) = \int_{x+t}^{w} V(s-x) e^{\bar{\int}_{x+t}^{s} \mu_K(u)+\delta du}\, ds$$

$$a_V(x+t.w) = \int_{x+t}^{w} P_V(s-x) e^{\bar{\int}_{x+t}^{s} \mu_V(u)+\delta du}\, ds$$

$$a_R(x+t.w) = \int_{x+t}^{w} P_R(s-x) e^{\bar{\int}_{x+t}^{s} \mu_K(u)+\delta du}\, ds.$$

Rahaston lauseke (3.2.1.) saa näiden merkintöjen avulla muodon

$$(3.2.1)' \qquad V(t) = e^{\bar{\int}_{x+t}^{w} \mu_V(u)+\delta du} + A_K^*(x+t.w)$$

$$+ \epsilon \cdot a^*(x+t.w) + \phi \cdot A_K^*(x+t.w)$$

$$- a_V(x+t.w) - a_R(x+t.w).$$

Yhtälö (3.2.1.) on oikeastaan integraaliyhtälö, jossa tuntemattomana on funktio V. Derivoimalla (3.2.1) saadaan V:lle uusi yhtälö (ks. liite)

$$V'(t) = (\mu_V(x+t) + \delta) \cdot e^{\int_{x+t}^{w} \mu_V(u) + \delta \, du} \tag{3.2.2}$$

$$+ (1+\phi)(\mu_K(x+t)+\delta) \cdot A_K^*(x+t.w) - (1+\phi) \cdot \mu_K(x+t) \cdot V(t)$$

$$+ \epsilon(\mu_K(x+t) + \delta) \cdot a^*(x+t.w) - \epsilon \cdot V(t)$$

$$- [(\mu_V(x+t) + \delta)a_V(x+t.w) - P_V(t)]$$

$$- [(\mu_K(x+t) + \delta)a_R(x+t.w) - P_R(t)].$$

Ryhmitellään (3.2.2):n oikean puolen termit uudelleen

$$V'(t) = [\quad]_1 + [\quad]_2,$$

missä

$$[\quad]_1 = (\mu_V(x+t)+\delta) \cdot [e^{\int_{x+t}^{w} \mu_V(u)+\delta \, du} - a_V(x+t.w)] + P_V(t).$$

Ei ole vaikea huomata, että yllä on oikeastaan pelkän V-osan käsittävän vakuutuksen Thielen yhtälän oikea puoli: onhan

$$V_V(t) = e^{\int_{x+t}^{w} \mu_V(u)+\delta \, du} - a_V(x+t.w) , \tag{3.2.4}$$

missä V_V tarkoittaa V-osan rahastoa. Erotus $V-V_V$ on tietenkin R-osan rahasto, jota voimme merkitä V_R:llä:

$$V_R(t) = (1+\phi)A_K^*(x+t.w)+\epsilon a^*(x+t.w)-a_R(x+t.w)$$

Jatketaan sitten yhtälön (3.2.2) analysointia:
(3.2.5)

$$[\ ]_2=(\mu_K(x+t)+\delta)\cdot[(1+\phi)A_K^*(x+t.w)+\epsilon a^*(x+t.w)-a_R(x+t.w)]$$

$$-\ (1+\phi)\mu_K(x+t)\cdot V(t)-\epsilon\cdot V(t)+P_R(t)$$

$$= (\mu_K(x+t)+\delta)\cdot V_R(t) + P_R(t)$$

$$-\ [(1+\phi)\mu_K(x+t) + \epsilon] \cdot [V_R(t) + V_V(t)]$$

$$= [\mu_K(x+t)+\delta-\epsilon-(1+\phi)\mu_K(x+t)]\cdot V_R(t)+P_R(t)$$

$$-\ [(1+\phi)\mu_K(x+t)+\epsilon] \cdot V_V(t).$$

Niin ollen (3.2.2) hajoaa differentiaaliyhtälöryhmäksi

(V) $$V_V'(t) = (\mu_V(x+t)+\delta) \cdot V_V(t) + P_V(t)$$

(R) $$V_R'(t) = [\mu_K(x+t)+\delta - (\epsilon+(1+\phi)\mu_K(x+t))] \cdot V_R(t)$$

$$+\ P_R(t) - [\epsilon+(1+\delta)\mu_K(x+t)] \cdot V_V(t).$$

Yhtälössä (V) esiintyy vain säästöosan rahasto, joka toki tunnetaan muutenkin (kaava (3.2.4)). Kun (V) on ratkaistu, saadaan yhtälöstä (R) ratkaistuksi myös R-osan rahasto V_R. Lausekkeiden pituuden pysyttämiseksi kohtuuden rajoissa otetaan käyttöön lyhennemerkinnät

(3.2.6) $$\begin{cases} d(u) = \mu_K(x+u)+\delta \\ k(u) = \epsilon + (1+\phi)\mu_K(x+u) \end{cases}$$

("diskonttaus" d sekä "kuormitus ja kuolevuus" k). Näillä merkinnöillä yhtälö (R) saa esitysmuodon

(R)' $$V_R'(t) = (d(t)-k(t))\cdot V_R(t)+P_R(t)-k(t)\cdot V_V(t).$$

Alkuehdon

(3.2.7) $$V_R(h) = T$$

toteuttava (R):n ratkaisu on silloin tunnetun V_V:n ja tunnetun tai tuntemattoman P_R:n funktiona

(3.2.8)

$$V_R(t)=e^{\int_h^t d(u)-k(u)du}[T+\int_h^t (P_R(s)-k(s)V_V(s))e^{-\int_h^s d(u)-k(u)du} ds].$$

3.3. KERTAMAKSU

Sovelletaan kaavaa (3.2.8) ensin kertamaksun määrittämiseen. Oletamme siis että $P_R(t)=0$ kaikilla t ja alkuehto on

$$V_R(w-x) = 0 \tag{3.3.1}$$

Haettu (æ-kuormittamaton) kertamaksu P_R on silloin

(3.3.2)

$$P_R = V_R(0) = e^{\int_{w-x}^{0} d(u)-k(u)du} \int_{w-x}^{0} -k(s)\cdot e^{-\int_{w-x}^{s} d(u)-k(u)du} V_V(s)\, ds$$

$$= \int_{0}^{w-x} k(s) \cdot e^{-\int_{0}^{s} d(u)-k(u)du} V_V(s)\, ds$$

Lausekkeessa esiintyy myös V_V. Oletetaan V-osakin kertamaksuiseksi kertamaksuna P_V, ja käytetään rahaston retrospektiivistä esitysmuotoa:

$$V_V(t) = P_V \cdot e^{\int_{0}^{t} \mu_V(x+u) + \delta\, du} \tag{3.3.3}$$

Kun (3.3.3) sijoitetaan (3.3.2):een, saadaan muotoa $P_R = P_V$ x kerroin oleva yhtälö

(3.3.4)

$$P_R = \int_0^{w-x} k(s) \cdot e^{\int_0^s k(u)du} \cdot e^{-\int_0^s \mu_K(x+u)+\delta\, du} e^{-\int_0^s \mu_V(x+u)+\delta\, du} P_V ds$$

$$= P_V \int_0^{w-x} k(s) \cdot e^{\int_0^s k(u)du} \cdot e^{-\int_0^s \mu_K(x+u)-\mu_V(x+u)\, du} ds$$

Muokataan sitten saadun kaavan kerrointa numeerisesti laskettavampaan muotoon.

(3.3.5)

$$\frac{P_R}{P_V} = \int_0^{w-x} (\epsilon+(1+\phi)\cdot\mu_K(x+s))\cdot e^{\int_0^s \epsilon+\phi\cdot\mu_K(x+u)+\mu_V(x+u)\, du} ds$$

$$= \int_0^{w-x} [\epsilon+(1+\phi)\cdot\mu_K(x+s)]\cdot e^{s\epsilon}\cdot\left[\frac{l_K(x)}{l_K(x+s)}\right]^{\phi}\cdot\left[\frac{l_V(x)}{l_V(x+s)}\right] ds.$$

Tästä voidaan edetä jollakin numeerisen integroinnin menetelmällä. Kaavasta voi myös ottaa tekijäksi osoittajassa olevat l-luvut, ja laskea lopusta valmiita apulukuja.

Näin saadaan osien maksut ja kokonaismaksu $P=P_R+P_V$ ilmaistuiksi toistensa avulla. Merkitään lyhyesti,(vrt. (3.3.4):n oikea puoli)

(3.3.6) $$c(x,h,w) = \int_h^{w-x} k(s) e^{\int_h^s k(u)du} e^{\int_h^s \mu_K(x+u)-\mu_V(x+u)du} ds.$$

Halutut muunnoskaavat ovat nyt c:n avulla lausuttuina

$$(3.3.7)\qquad \begin{cases} P_R = P_V \cdot c(x,0,w) \\ P = P_R + P_V = P_V \cdot (1+c(x,0,w)) \\ P_V = \dfrac{P}{1+c(x,0,w)} \\ P_R = \dfrac{c(x,0,w)\cdot P}{1+c(x,0,w)} \end{cases}$$

Nämä tulokset pätevät siis kun sekä V- että R-osa ovat kertamaksuisia.

Erityisen yksinkertainen lauseke saadaan jos $\mu_V = \mu_K$. Silloinhan c:n määritelmässä esiintyvä funktio

$$(3.3.8)\qquad s \rightarrow e^{-\int_h^s \mu_K(x+u)-\mu_V(x+u)du}$$

on identtisesti yksi. Niin ollen integraali voidaan esittää suljetussa muodossa

$$(3.3.9)\quad \frac{P_R}{P_V} = \int_0^{w-x} k(s)\cdot e^{\int_0^s k(u)\,du}\,ds = \Big|_0^{w-x} e^{\int_0^s k(u)du}$$

$$= e^{\int_0^{w-x} \epsilon+(1+\phi)\cdot\mu_K(x+u)\,du} - 1$$

$$= e^{\epsilon(w-x)}\cdot\left[e^{\int_0^{w-x} \mu_K(x+u)du} \right]^{1+\phi} - 1$$

$$= e^{\epsilon(w-x)}\cdot \left[\frac{l_K(x)}{l_K(w)} \right]^{1+\phi} - 1 \,.$$

Kaava (3.3.9) antaa maksukertoimen tavanomaisten peruslukujen avulla esitettynä käsinlaskuun soveltuvana lausekkeena.

Kaava (3.3.9) paljastaa myös periaatteellisen samankaltaisuuden kappaleen 3.1 vastaavan kertoimen (3.1.4) kanssa: odotetusti kaavassa (3.3.9) on eri kuolevuus ja lisänä kuormitustekijät - viimeksimainitut tosin hieman yllättävissä paikoissa.

3.4. JATKUVA VUOSIMAKSU

Saatu kertamaksu ei kelpaa osamaksuilla maksettavan sopimuksen vastuukertamaksuksi, koska turvakin riippuu maksuohjelmasta.

Ratkaistaan ensin jatkuva vakiomaksu, jota maksetaan hetkeen x+m asti, $P_R(t) = P_R$ kun $0 \le t \le m$.

Haetaan yhtälö P_R:n ratkaisemiseksi tarkastelemalla ensin R-osan rahastoa.

Rahasto hetkellä x+m saadaan kaavalla (3.2.8) ja alkuarvolla $V_R(0)=0$.

(3.4.1)

$$V_R(m)=e^{\int_0^m d(u)-k(u)\,du} \cdot \int_0^m P_R \cdot e^{-\int_0^s d(u)-k(u)\,du}\,ds$$

$$- e^{\int_0^m d(u)-k(u)\,du} \int_0^m k(s) \cdot V_V(s) \cdot e^{-\int_0^s d(u)-k(u)\,du}\,ds$$

$$\underset{=}{\text{merk}} \quad A \cdot P_R - B\,,$$

missä A:n ja B:n merkitys ilmenee edeltävästä lausekkeesta.

Sitten otetaan (3.4.1) alkuehdoksi, oletetaan maksu nollaksi välillä [x+m,w] sekä asetetaan ehto $V_R(w-x)=0$. Saadusta yhtälöstä ratkaistaan P_R

(3.4.2)

$$0 = e^{\int_m^{w-x} d(u)-k(u)\,du} [A \cdot P_R - B - \int_m^{w-x} k(s) \cdot V_V(s) \cdot e^{-\int_m^s d(u)-k(u)du}\,ds]$$

$$= P_R \cdot e^{\int_m^{w-x} d(u)-k(u)du} e^{\int_0^m d(u)-k(u)du} \int_0^m e^{\int_0^s d(u)-k(u)du} ds$$

$$- e^{\int_m^{w-x} d(u)-k(u)du} e^{\int_0^m d(u)-k(u)du} \int_0^m k(s)V_V(s)e^{-\int_0^s d(u)-k(u)du} ds$$

$$- e^{\int_m^{w-x} d(u)-k(u)du} \int_m^{w-x} k(s)V_V(s)e^{-\int_m^s d(u)-k(u)du} ds$$

$$= e^{\int_0^{w-x} d(u)-k(u)du} \cdot \Bigg[P_R \cdot \int_0^m e^{-\int_0^s d(u)-k(u)du} ds$$

$$- \int_0^{w-x} k(s)V_V(s)e^{-\int_0^s d(u)-k(u)du} ds \Bigg],$$

mistä saadaan

$$(3.4.3) \qquad P_R = \frac{\int_0^{w-x} k(s)\cdot V_V(s)\cdot e^{-\int_0^s d(u)-k(u)\,du}\,ds}{\int_0^m e^{-\int_0^s d(u)-k(u)\,du}\,ds}.$$

Osoittajassa on muodollisesti sama lauseke kuin kertamaksun kaavassa (3.3.2) ennen V_V:n sijoittamista! Nimittäjä on puolestaan "kuormitettu aikakorko", onhan (vrt. (3.2.6))

$$d(u)-k(u) = \delta - (\epsilon + \phi\mu_K(x+u)).$$

Toistaiseksi (3.4.3):n osoittajan vastuukertamaksu riippuu tarkemmin määrittämättömästä säästöosan rahastosta V_V. Oletetaan nyt, että säästöosalla on samanlainen maksuohjelma kuin R-osalla, ts. jatkuva (tasa)maksu P_V ajalle [x,x+m]. Silloin V-komponentin rahasto on

$$(3.4.4) \qquad V_V(t) = P_V\cdot e^{\int_0^t \mu_V(x+u) + \delta\,du}\,a(x.x+\min(t,m))$$

missä a on "tavallinen" jatkuva elinkorko säästövakuutuksen kuolevuudella muodostettuna.

Kun tämä lauseke sijoitetaan (3.4.3):een, saadaan P_R:lle esitys (kerroin) x (V-osan maksu):

(3.4.5)

$$P_R = P_V \cdot \left[\int_0^m k(s) \cdot a(x.x+s) \cdot e^{\int_0^s k(u)-\mu_K(x+u)+\mu_V(x+u)\,du} ds \right.$$

$$\left. + a(x.x+m) \cdot \int_m^{w-x} k(s) \cdot e^{\int_0^s k(u)-\mu_K(x+u)+\mu_V(x+u)\,du} ds \right] \div H,$$

$$H = \int_0^m e^{-\int_0^s d(u)-k(u)\,du} ds.$$

Kerroin (3.4.5) lähestyy kertamaksun kerrointa (3.3.5) kun $m \to 0^+$.

3.5. DISKREETTI R-MAKSUOHJELMA

Palataan hetkeksi VR:n rahaston alkuperäiseen esitysmuotoon (3.2.1). Ajattelemme että jatkuvan maksun $s \to P_R(s)$ sijaan R-osalla on diskreetti maksuohjelma jossa hetkillä $t_1 \leq t_2 \leq \ldots \leq t_m < w-x$ erääntyy maksut $P_R^{(v)}, v=1,\ldots,m$.

Tulevien R-osan maksujen pääoma-arvo hetkellä x+t on silloin

$$(3.5.1) \qquad \sum_{v=i+1}^{m} P_R^{(v)} e^{-\int_{x+t}^{x+tv} \mu_K'(u)+\delta\, dy},$$

missä i on se indeksi jota vastaava eräpäivä lähinnä edeltää x+t:tä.

Kun tämä sijoitetaan (3.2.1):een R-osan saatavaksi, derivoidaan ja erotetaan "derivoidusta yhtälöstä" V-osaa koskevat suureet molemmin puolin saadaan seuraava yhtälöryhmä, joka siis pätee välin]0,w-x[muissa pisteissä t kuin t_v, joiden kohdalla lausekkeen (3.5.1) määräämä funktio on epäjatkuva.

$$(V) \qquad V_V'(t) = (\mu_V(x+t)+\delta)V_V(t)+P_V(t)$$

$$(R) \qquad V_R'(t)=(\mu_K(x+t)+\delta-\epsilon-(1+\phi)\mu_K(x+t))V_R(t)$$
$$- (\epsilon+(1+\phi)\mu_K(x+t))V_V(t) \qquad (t \neq t_V).$$

Niin ollen kappaleen 3.1 ratkaisukaavaakin voi soveltaa millä tahansa välin]0,w-x[osavälillä, jolla (3.5.1) on jatkuva.

Jokaisessa pisteessä t_v V_R:n arvo "hyppää" saman verran kuin lauseke (3.5.1). Portaan suuruus on $P_R^{(v)}$, ts.

$$(3.5.2) \qquad V_R(t_v^+) = P_R^{(v)} + V_R(t_v^-).$$

Näiden valmistelujen jälkeen voimme ryhtyä laskemaan rahastoa V_R iteroiden eräpäivästä toiseen.

Alkuehto on (3.5.2):n ja (3.2.1):n mukaan (ol. t_1=0)

$$(3.5.3) \qquad V_R(0) = P_R^{(1)} .$$

Ratkaisemalla (R) tällä alkuehdolla ja nollamaksulla saadaan rahasto "juuri ennen seuraavaa maksua"

(3.5.4)

$$V_R(t_2^-) = e^{-\int_0^{t_2} d(u)-k(u)du} \left[P_R^{(1)} - \int_0^{t_2} k(s)V_V(s)e^{-\int_0^{s} d(u)-k(u)du} ds \right]$$

ja edelleen rahasto "heti seuraavan maksun tultua"

$$V_R(t_2^+) = P_R^{(2)} + V_R(t_2^-). \tag{3.5.5}$$

Otetaan (3.5.5) alkuehdoksi ja ratkaistaan $V_R(t_3^-)$ jne. Induktiopäättelyä apuna käyttäen nähdään, että

$$V_R(t) = \sum_{v=1}^{k} P_R^{(v)} e^{\int_{t_v}^{t} d(u)-k(u)du} \tag{3.5.6}$$

$$- e^{\int_0^{t} d(u)-k(u)du} \int_0^{t} k(s)V_V(s)\, e^{-\int_0^{s} d(u)-k(u)du} ds,$$

missä k on se indeksi jolle pätee $t_k<t<t_{k+1}$ ($t_{m+1}=w-x$). Erityisesti

$$(3.5.7)\quad V_R(w-x) \overset{def}{=} V_R(w-x-) = \sum_{v=1}^{m} P_R^{(v)}\, e^{\int_{t_v}^{w-x} d(u)-k(u)du}$$

$$- e^{\int_0^{w-x} d(u)-k(u)du} \int_0^{w-x} k(s)V_V(s)e^{-\int_0^{s} d(u)-k(u)du}\, ds,$$

Toisaalta R-turva päättyy iässä w=x+(w-x), joten

$$(3.5.8)\qquad V_R(w-x) = 0.$$

Yhdistämällä (3.5.7) ja (3.5.8) saadaan "maksujen määritysyhtälö"

$$(3.5.9)\qquad \sum_{v=1}^{m} P_R^{(v)}\, e^{\int_{t_v}^{w-x} d(u)-k(u)du}$$

$$= e^{\int_0^{w-x} d(u)-k(u)du} \int_0^{w-x} k(s)V_V(s)\, e^{-\int_0^{s} d(u)-k(u)du}\, ds$$

mikä voidaan kirjoittaa yhtäpitävässä muodossa

(3.5.9)'

$$\sum_{v=1}^{m} P_R^{(v)}\, e^{-\int_0^{t_v} d(u)-k(u)du} = \int_0^{w-x} k(s)V_V(s)\, e^{-\int_0^{s} d(u)-k(u)du}\, ds$$

On mielenkiintoista joskaan ei järin yllättävää, että (3.5.9):n oikea puoli on identtinen kappaleessa 3.3 johdetun VR:n kertamaksun (3.3.2) kanssa.

Tarkastellaan erityisesti kahta (3.5.9):n erikoistapausta.

Ensiksi oletamme että maksut ovat identtiset $P_R^{(v)} = P_R$ kaikilla $v=1,\ldots,m$, ja ratkaisemme P_R:n

$$(3.5.10) \qquad P_R = \frac{\int_0^{w-x} k(s)V_v(s)\, e^{-\int_0^s d(u)-k(u)du}\, ds}{\sum_{v=1}^{m} e^{-\int_0^{t_v} d(u)-k(u)du}}$$

Saatu lauseke eroaa jatkuvan tasamaksun lausekkeesta (3.4.3) vain nimittäjän osalta.

Toiseksi katsotaan mitä jää jäljelle, kun kuormitukset nollataan, s.o. asetetaan $\epsilon=\phi=0$. Silloin kaikilla t

$$(3.5.11) \quad \begin{cases} d(t) - k(t) = \delta \\ k(t) = \mu_K(x+t), \end{cases}$$

ja yhtälön (3.5.9) vasemmalla puolella on maksujen nykyarvo hetkellä x pelkällä korolla diskontattuna. Oikean puolen lauseke on (3.5.11):n vallitessa

$$\int_0^{w-x} \mu_K(x+s)V_V(s)e^{-\delta s}\, ds.$$

3.6. DISKREETTI VR-MAKSUOHJELMA

Edellisessä kappaleessa ei otettu avoimesti kantaa itse perusvakuutuksen V rahaston muotoon. Tosin kappaleen päättelyt eivät mene sellaisenaan läpi ellei V_V ole jatkuva jokaisella (avoimella) välillä jonka yli (R) integroitiin.

Tarkastellaan sitten sitä luontevaa erikoistapausta, että V-osankin rahasto on laskettu diskreetillä tekniikalla. Oletamme lisäksi että V-osan maksut $P_V^{(v)}$ erääntyvät samoilla hetkillä kuin R-osankin.

Kappaleessa 1.3 jo käsitelty "diskreetti" V-rahasto on tämän luvun merkinnöin ilmaistuna

(3.6.1)

$$V_V(t) = e^{\int_{x+t}^{w} \mu_V(u)+\delta du} - \sum_{v=k+1}^{m} P_V^{(v)} e^{\int_{x+t}^{x+tv} \mu_V(u)+\delta du}$$

$$= \sum_{v=1}^{k} P_V^{(v)} e^{\int_{x+tv}^{x+t} \mu_V(u)+\delta\, du}$$

missä k on se indeksi jolle pätee $t_k \le t < t_{k+1}$ $(t_{m+1}=w-x)$. Edelleen yksikkö on valittu niin, että $V_V(w-x) = 1$.

Esitys (3.6.1) pätee siis kun $t \neq t_v$. Pisteissä t_v

$$V_V(t_v^+) = P_V^{(v)} + V_V(t_v^-) = V_V(t_v). \tag{3.6.2}$$

Valitaanko $V_V(t_v)$:n arvoksi raja-arvo oikealta vai vasemmalta lähestyttäessä on oikeastaan samantekevää.

Sijoitetaan säästökomponentin rahaston retrospektiivinen lauseke (= (3.6.1):n jälkimmäinen lauseke) R-maksujen määritysyhtälöön (3.5.9):

$$\sum_{v=1}^{m} P_R^{(v)} e^{-\int_0^{tv} d(u)-k(u)du} \tag{3.6.3}$$

$$= \sum_{v=1}^{m} P_V^{(v)} \int_{tv}^{w-x} k(s) e^{\int_{x+tv}^{x+s} \mu_V(u)+\delta du} e^{-\int_0^{s} d(u)-k(u)du} ds$$

$$= \sum_{v=1}^{m} P_V^{(v)} e^{-\int_0^{tv} d(u)-k(u)du} \int_{tv}^{w-x} k(s) e^{\int_{tv}^{s} k(u)du} e^{-\int_{tv}^{s} \mu_K(x+u)-\mu_V(x+u)du} ds$$

Kyseessä on alkuperäisen diskreetin R-maksuohjelman määritysyhtälön (3.5.9) erikoistapaus. Vaikka (3.6.3):ssa ei olekaan mitään uutta periaatteelliselta kannalta, se tarjoaa mahdollisuuksia numeerisen laskennan kehittelyyn. Ideat on esitelty jo kappaleessa 3.3, eikä niitä ryhdytä tässä enää toistamaan.

Tarkastellaan sitten vielä kääntäen sellaista koko VR-yhdistelmän maksuohjelmaa $P^{(v)}$, joka tuottaa annetun suuruisen säästön (=rahaston) ikään w tultaessa, <u>kun kukin maksu ymmärretään kertamaksuna</u>. Kyseessä on siis viipaletekniikka, joka edellyttää myös säästökomponentilta diskreettisyyttä.

Hetkellä t_V erääntynyt tai maksettu maksu $P^{(v)}$ jakautuu V-osan ja R-osan maksuksi kappaleen 3.3 kaavan (3.3.7) periaatteella:

$$(3.6.4) \qquad \begin{cases} P_V^{(v)} = \dfrac{P^{(v)}}{1+c(x,t_V,w)} \\[2ex] P_R^{(v)} = \dfrac{c(x,t_V,w)\cdot P^{(v)}}{1+c(x,t_V,w)} \end{cases}$$

Kaavan c määriteltiin kappaleessa 3.3

$$c(x,h,w) = \int_h^{w-x} k(s) e^{\int_h^s k(u)du} e^{-\int_h^s \mu_K(x+u)-\mu_V(x+u)du} ds.$$

Tämän muotoisia lausekkeita esiintyy myös määritysyhtälössä (3.6.3).

Jos nyt kokonaismaksuista $P^{(v)}$ erotetaan (3.6.4):n mukainen osa säästöosan maksuksi, toteuttaako jäljelle jäävä osa määritysyhtälön (3.6.3) eli muodostuuko jäännöksistä R-osan (eräs) maksuohjelma? Lähdetään liikkeelle (3.6.3):n oikeasta puolesta

$$\sum_{v=1}^{m} P_V^{(v)} e^{-\int_0^{tv} d(u)-k(u)du} \int_{tv}^{w-x} k(s) e^{\int_{tv}^{s} k(u)du} e^{-\int_{tv}^{s} \mu_K(x+u)-\mu_V(x+u)du} ds$$

$$= \sum_{v=1}^{m} P_V^{(v)} e^{-\int_0^{tv} d(u)-k(u)du} c(x,tv,w)$$

$$= \sum_{v=1}^{m} e^{-\int_0^{tv} d(u)-k(u)du} \frac{P^{(v)}}{1+c(x,tv,w)} c(x,tv,w)$$

$$= \sum_{v=1}^{m} e^{-\int_0^{tv} d(u)-k(u)du} \cdot P_R^{(v)} .$$

Saatiin (3.6.3):n vasen puoli eli (3.6.3) toteutuu.

Johtopäätös on hyvinkin odotettu kun muistetaan millä periaatteella (integroiden eräpäivästä toiseen) maksunmääritysyhtälöön (3.6.3) päädyttiin.

3.7. VR:N JA VP:N VERTAILUA

Jos vertaamme maksunpalautuksen maksuohjelman määritystä luvusta 2 tämän luvun rahastonpalautuksen maksuihin, nousee esiin kaksi merkittävää huomiota.

Ensiksi, maksunpalautuksen turva riippuu vain maksuohjelmasta. Rahastonpalautus riippuu rahastosta ja rahasto voidaan määrittää useammalla kuin yhdellä tavalla vaikka maksuohjelma olisi annettu. Merkittävin ero rahastonpalautusturvaan tulee siitä, lasketaanko rahasto diskreetillä vai jatkuvalla tekniikalla.

Toiseksi, jo kappaleessa 3.1 tehtiin se rajoitus että R-osassa ja säästöosassa käytetään kummassakin omaansa mutta vain yhtä kuolevuutta. Kun maksujen pääoma-arvo ja turvan pääoma-arvo muodostetaan samalla kuolevuusoletuksella, eräät luvussa 2 pohditut kysymykset voidaan kokonaan ohittaa.

Syy rajoitukseen on ilmeinen. Jos käytettäisiin kahta kuolevuutta, alkuperäisessä differentiaaliyhtälössä (3.2.2) esiintyisi siinä nyt olevien termien lisäksi muotoa "elinkorko kertaa kahden kuolevuuden erotus" olevia termejä, ja koko integroimisprosessi olisi toisenlainen. Käsillä oleva kirjoitus piti rajata jollakin tavalla, eivätkä luvun 2 tulokset rohkaise yrittämään kahden eri kuolevuuden suuntaan.

LIITE 1

Kuolemanvaravakuutuksen kuormittamaton vastuukertamaksu, kun turva vakuutetun iässä x+s on S(s) (=0 kun s>w-x), on hetkellä x+t

$$A^*(x+t.w)= \int_{x+t}^{w} \mu(s)\ S(s-x)e^{-\int_{x+t}^{s}\mu(u)+\delta du} ds.$$

Johdetaan derivaatta

$$\frac{d}{dt}\ A^*(x+t.w)=\frac{d}{dt} \int_{x+t}^{w} \mu(s)\ S(s-x)e^{-\int_{x+t}^{s}\mu(u)+\delta du} ds$$

$$= \frac{d}{dt}\ [\ e^{+\int_{x}^{x+t} \mu(u)+\delta du} \int_{x+t}^{w} \mu(s)\ S(s-x)e^{-\int_{x}^{s}\mu(u)+\delta du} ds]$$

$$= (\mu(x+t)+\delta)e^{+\int_{x}^{x+t} \mu(u)+\delta du} \int_{x+t}^{w}\mu(s)\ S(s-x)e^{-\int_{x}^{s}\mu(u)+\delta du} ds$$

$$- e^{\int_{x}^{x+t} \mu(u)+\delta du} \mu(x+t)\ S(t)e^{-\int_{x}^{x+t}\mu(u)+\delta du}$$

$$= (\mu(x+t)+\delta)A^*(x+t.w)-\mu(x+t)\ S(t)$$

Elinkoron pääoma-arvo, kun "maksutiheys" iässä x+s on p(s) (p(s)=0 kun s>y-x), on

$$a^{*}(x+t.y)=\int_{x+t}^{y} p(s-x)e^{-\int_{x+t}^{s}\mu(u)+\delta du}ds.$$

Johdetaan derivaatta (kuten edellä)

$$\frac{d}{dt}\,a^{*}(x+t.y)=\frac{d}{dt}\,[\;e^{\int_{x}^{x+t}\mu(u)+\delta du}\int_{x+t}^{y}p(s-x)e^{-\int_{x}^{s}\mu(u)+\delta du}ds\;]$$

$$=(\mu(x+t)+\delta)e^{\int_{x}^{x+t}\mu(u)+\delta du}\int_{x+t}^{y}p(s-x)e^{-\int_{x}^{s}\mu(u)+\delta du}ds$$

$$-\;e^{\int_{x}^{x+t}\mu(u)+\delta du}p(t)e^{-\int_{x}^{x+t}\mu(u)+\delta du}$$

$$=(\mu(x+t)+\delta)a^{*}(x+t.y)-p(t).$$