WORKING PAPERS ISSN 0781-4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

17

Olli Pusa

VERTAILU ESSCHERIN JA NP MENETELMÄN KÄYTTÖKELPOISUUDESTA (1985)

Sisällys

1. Johdanto

Tässä työssä tutkitaan Esscherin kaavan käyttökelpoisuutta verrattuna NP-menetelmään. Testifunktiolle lasketaan tarkkoja arvoja rekursiokaavalla sekä vastaavat arvot tutkittavillä menetelmillä, jolloin voidaan suorittaa tarvittavat vertailut.

Testijakautumana käytetään mixed compound Poisson jakaumaa, jossa vahinkojen suuruuden jakaumafunktio on pareto-tyyppinen ja vahinkojen lukumäärän huojunnan struktuurifunktio on Polya-tyyppiä. Tutkimuksessa on pyritty selvittämään myös jakaumien ääripäät sekä suuret vinouden arvot. Nämä saadaan muuntelemalla Polya-parametria k ja Pareto-parametria α.

2. Testifunktio

Poisson jakauma määritellään pistetodennäköisyyden avulla seuraavasti:

$$P_k(n) = e^{-n}\frac{n^k}{k!}$$

missä $P_k(n)$ antaa todennäköisyyden, että sattuu k-vahinkoa kun vahinkojen odotusarvo on n.

Jos oletamme, että yksittäisen vahingon suuruus voi vaihdella jakaumafunktion S(z) mukaisesti, saadaan kokonaisvahingon suuruudelle lauseke

$$F(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n}\frac{n^k}{k!} S^{k*}(x)$$

misä, $S^{k*}(x)$ tarkoittaa k:n S:n konvoluutiota. Tätä lauseketta kutsutaan compound-poisson funktioksi.

Kun vielä oletamme, että vahinkojen lukumäärä vaihtelee odotusarvonsa ympärillä struktuurifunktion H(q) mukaisesti saamme

$$F_{nq}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-nq}\frac{(nq)^k}{k!} S^{k*}(x)$$

ja

$$G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F_{nq}(x)\, dH(q)$$

Tätä lauseketta kutsumme mixed compound poisson funktioksi.

3. Rekursiokaava tarkan arvon laskemiseksi

Rekursiokaavan käyttö edellyttää, että yksittäisen vahingon suuruuden jakaumafunktio on tasavälisesti diskreetti. Testifunktiossa voimme päästä tähän diskretisoimalla sen 21:ssä pisteessä (1,2,...,21). Diskretisointi aiheuttaa laskentaan jonkin verran epätarkkuutta, jonka vaikutusta on pyritty pienentämään origomomenttien käsittelyllä. Diskretisoinnin vaikutusta on käsitelty BPP-2:ssa (s.103-104). Periaatteessa diskretisointi voitaisiin suorittaa mielivaltaisen monessa pisteessä, mutta rekursion vaatimien laskutoimitusten määrän pitäminen kohtuullisena vaatii rajoittamaan diskretisointipisteiden lukumäärää.

Testifunktiolle on voimassa

$$S(z) = \begin{cases} 1 - z^{-\alpha} & 1 \leq z < 21 \\ 1 & z \geq 21 \end{cases}$$

Diskretisointipisteisiin liitämme seuraavat todennäköisyydet

$$q_1 = S(1 + 1/2)\ , \quad q_{21} = 1 - S(20{,}5)$$

$$q_{s+1} = S(1 + s + 1/2) - S(1 + s - 1/2)$$

Testifunktiomme pistetodennäköisyyksille saamme polya-tapauksessa (BPP-2 s.40-41)

$$p_0 = \left(\frac{k}{k+n}\right)^k$$

ja

$$p_s(n) = (a + b/s)\ p_{s-1}(n)$$

missä $a = \dfrac{n}{n+k}$ ja $b = \dfrac{n\ (k-1)}{n+k}$

Edellä k on polya-parametri

4. NP-menetelmä

NP-menetelmän ideana on käyttää hyväksi normaalijakaumaa kertymäfunktion laskemiseen. Koska normaalijakauma ei pysty huomioimaan jakauman vinoutta, ei arvoja lasketa alkuperäisessä pisteessä vaan sen vieressä olevassa pisteessä. Uusi piste saadaan laskettua käyttämällä jakauman vinoutta hyväksi.

BPP-2:ssa on johdettu lausekkeet NP-menetelmän käyttöä varten. Olkoon X vahinkomeno. Vastaava standardoitu muuttuja saadaan:

$$x = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}$$

Nyt NP-menetelmän mukainen arvo saadaan lausekkeesta:

$$F(x) \approx N(y)$$

missä y määrätään seuraavista lausekkeista (BPP-2 s.117)
$(g = \gamma/6,\ x_0 = -\sqrt{7/4}\ )$

$$y = \sqrt{1 + \frac{1}{4g^2} + \frac{x}{g}} - \frac{1}{2g}\ , \quad x \geq 1$$

$$= x - g\cdot(x^2 - 1) + g^2\cdot(4x^3 - 7x)\cdot \varepsilon(x_0 - x)\ , \quad x < 1$$

Myös pitempiä versioita on olemassa, mutta niitä ei käytetty tässä työssä.

Edelleen

$$E_0(u) = (1 - N(u))\cdot e^{u^2/2} \qquad (\text{ N on normaalijakauma})$$

$$E_3(u) = (1 - N(u))\cdot u^3\cdot e^{u^2/2} + (1-u^2)/\sqrt{2\pi}$$

Kun otetaan huomioon vahinkojen lukumäärän huojunta, on Esscherin menetelmää muokattava.

Merkitään $C = \int_0^{\infty} e^{-nq(1-\beta_0)}\, dU(q)$

$$\mu_2 = N_1\beta_2 + N_2\beta_1^2 - N_1^2\beta_1^2$$

$$\mu_3 = N_1\beta_3 + 3N_2\beta_1\beta_2 + N_3\beta_1^3 - 3N_1N_2\beta_1^3 - 3N_1^2\beta_1\beta_2 + 2N_1^3\beta_1^3$$

Missä $N_i = \frac{1}{C}\int_0^{\infty} e^{-nq(1-\beta_0)}\, n^i q^i\, dU(q)$

Lisäksi merkitään $u = h\sqrt{\mu_2}$ ja $c_3 = -\frac{\mu_3}{6(\mu_2)^{3/2}}$

Kertymälle saadaan nyt lauseke (Ammeter 1948):

$$1 - G(x) \approx C\cdot e^{-hx}\cdot(E_0(u) + c_3 E_3(u)) \qquad , \qquad x \geq E(\underset{\sim}{x})$$

$$G(x) \approx C\cdot e^{-hx} (E_0(-u) - c_3E_3(-u)) \qquad , \qquad x < E(\underset{\sim}{x})$$

Polya tapauksessa voidaan edellä olevia lausekkeita laskea eksplisiittisesti, jolloin saadaan (BPP-1 s.123,127 ja Bohman-Esscher 1963 s.193)

$$C = \left(\frac{x}{n\beta_1}\right)^k \qquad u = h\sqrt{\frac{x\beta_2}{\beta_1} + \frac{x^2}{k}}$$

$$c_3 = -\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\beta_1}{kx}}\cdot\frac{k^2\beta_3 + 3kx\beta_2 + 2x^2\beta_1}{(k\beta_2 + x\beta_1)^{3/2}}$$

Seuraavaksi tutkittiin tapauksia, joissa vinous vaihteli välillä 0.4 - 0.64. (taulukot 13 - 15). Tuloksista on havaittavissa, että vinouden kasvaessa Esscherin kaavan luvut tulevat luotettavammaksi Ilmiö on havaittavissa positiivisilla arvoilla, mutta varsinkin negatiivisilla arvoilla jossa NP-menetelmän luvut ovat huonoja. Selvimmin ero näkyy taulukossa 15, jossa käytettiin n:lle arvoa 150. Muuten kyseesä oli "vaarallinen" jakauma. Arvolla x=4 ei laskenta kuitenkaan onnistunut. Syynä suuren h:n arvon aiheuttamat ongelmat h:n määräävässä yhtälössä.

Lopuksi tutkittiin tapauksia, joissa n oli hyvin pieni ja vinoudet suuria (taulukot 16 - 18). Tulokset ovat näissä tapauksissa jonkin verran ristiriitaisia. Positiivisilla arvoilla Esscherin kaavan tulokset ovat jonkin verran parempia kuin NP:ssä vinouden kasvaessa lähelle arvoa 1.5. Negatiivisilla arvoilla ovat Esscherin tulokset selvästi parempia kuin NP:n arvot. Esscherinkään arvot eivät ole kovin hyviä.

Johtopäätökset:
NP-menetelmä on yksinkertaisempi ja laskennallisesti kevyempi, joten Esscherin kaavaa kannattaa käyttää vain jos sen antamat tulokset ovat parempia. Kun jakauman vinous ei ole kovin suuri (0.3 - 0.4) näyttää Esscher antavan parempia tuloksia jakauman negatiivisessa ääripäässä. Jos jakauman vinous on kohtalainen (0.5 - 0.6) ja vahinkojen lukumäärän odotusarvo melko suuri (n. 150) antaa Esscher parempia tuloksia sekä positiivisilla että negatiivisilla arvoilla. Kun vahinkojen lukumäärän odotusarvo on pieni ja jakauman vinous suuri (n. 1.5) antaa Esscher parempia tuloksia kuin NP sekä positiivisilla että negatiivisilla arvoilla. Negatiivisilla arvoilla ei kumpikaan menetelmä ole tarkka ja rekursiokaava on suositeltavin vaihtoehto.

Kirjallisuus

BPP-1 : Beard, Pentikäinen, Pesonen Risk Theory 2. painos

BPP-2 : " 3. painos

Bohman-Esscher 1963 : Studies in risk theory with numerical illustrations concerning distribution functions and stop loss premiums
Scandinavisk Aktuarietidskrift 1963

Ammeter H. 1948 : A generalization of the collective theory of risk in regard to fluctuating basic probabilities
Skandinavisk Aktuarietidskrift 1948

Taulukko 1

vah lkm	pareto	polya	vinous
100.0000	1.2000	100.0000	0.3177

kertyman arvot F kun muuttuja < 0 ja 1-F kun muuttuja >= 0
muuttujan arvoilla -3 -2.5 -2 -1.5 -1 0 1 2 3 4

rekursio	NP	Esschér
0.0001116	0.0001225	0.0001174
0.0018253	0.0018413	0.0018395
0.0136200	0.0135762	0.0134163
0.0557218	0.0586524	0.0564874
0.1579982	0.1586554	0.1578143
0.4804161	0.4788859	0.4788755
0.1598715	0.1586554	0.1580255
0.0303471	0.0308703	0.0305886
0.0036793	0.0037447	0.0036804
0.0002977	0.0003018	0.0002928

Virhe verrattuna rekursiokaavaan prosentteina samoilla arvoilla

NP-rekursio	Esscher-rekursio
9.72	5.16
0.87	0.77
-0.32	-1.50
5.26	1.37
0.42	-0.12
-0.32	-0.32
-0.76	-1.15
1.72	0.80
1.78	0.03
1.38	-1.64

Taulukko 2

vah lkm	pareto	polya	vinous
100.0000	1.5000	100.0000	0.3375

kertyman arvot F kun muuttuja < 0 ja 1-F kun muuttuja >= 0
muuttujan arvoilla -3 -2.5 -2 -1.5 -1 0 1 2 3 4

rekursio	NP	Esscher
0.0000956	0.0000976	0.0000989
0.0015952	0.0016536	0.0016737
0.0131348	0.0130176	0.0128434
0.0558386	0.0581718	0.0556210
0.1565356	0.1586554	0.1574501
0.4746757	0.4775727	0.4775558
0.1585980	0.1586554	0.1578342
0.0305650	0.0313460	0.0310399
0.0038843	0.0039226	0.0038683
0.0003193	0.0003316	0.0003249

Virhe verrattuna rekursiokaavaan prosentteina samoilla arvoilla

NP-rekursio	Esscher-rekursio
2.08	3.44
3.66	4.92
-0.89	-2.22
4.18	-0.39
1.35	0.58
0.61	0.61
0.04	-0.48
2.56	1.55
0.99	-0.41
3.86	1.75

Taulukko 3

vah lkm	pareto	polya	vinous
100.0000	2.0000	100.0000	0.3325

kertyman arvot F kun muuttuja < 0 ja 1-F kun muuttuja >= 0
muuttujan arvoilla -3 -2.5 -2 -1.5 -1 0 1 2 3 4

rekursio	NP	Esscher
0.0001374	0.0001035	0.0001287
0.0018616	0.0016996	0.0018373
0.0129591	0.0131577	0.0131744
0.0540612	0.0582925	0.0557621
0.1598566	0.1586554	0.1570281
0.4805108	0.4779037	0.4778975
0.1559220	0.1586554	0.1574901
0.0314081	0.0312265	0.0309322
0.0038130	0.0038775	0.0038756
0.0003378	0.0003240	0.0003302

Virhe verrattuna rekursiokaavaan prosentteina samoilla arvoilla

NP-rekursio	Esscher-rekursio
-24.69	-6.32
-8.70	-1.30
1.53	1.66
7.83	3.15
-0.75	-1.77
-0.54	-0.54
1.75	1.01
-0.58	-1.52
1.69	1.64
-4.08	-2.26

Taulukko 4

vah lkm	pareto	polya	vinous
100.0000	4.0000	100.0000	0.2323

kertyman arvot F kun muuttuja < 0 ja 1-F kun muuttuja >= 0
muuttujan arvoilla -3 -2.5 -2 -1.5 -1 0 1 2 3 4

rekursio	NP	Esscher
0.0003224	0.0002907	0.0003288
0.0027966	0.0027966	0.0029316
0.0151862	0.0160510	0.0161428
0.0632185	0.0607634	0.0596146
0.1627704	0.1586554	0.1580150
0.4841516	0.4845579	0.4845523
0.1617088	0.1586556	0.1580671
0.0273795	0.0287769	0.0286083
0.0029683	0.0030106	0.0030061
0.0002052	0.0001922	0.0001948

Virhe verrattuna rekursiokaavaan prosentteina samoilla arvoilla

NP-rekursio	Esscher-rekursio
-9.81	2.00
0.00	4.83
5.69	6.30
-3.88	-5.70
-2.53	-2.92
0.08	0.08
-1.89	-2.25
5.10	4.49
1.43	1.27
-6.33	-5.07

Taulukko 5

vah lkm	pareto	polya	vinous
100.0000	6.0000	100.0000	0.2188

kertyman arvot F kun muuttuja < 0 ja 1-F kun muuttuja >= 0
muuttujan arvoilla -3 -2.5 -2 -1.5 -1 0 1 2 3 4

rekursio	NP	Esscher
0.0003130	0.0003279	0.0003646
0.0028236	0.0029679	0.0030908
0.0157715	0.0164480	0.0165276
0.0590292	0.0611022	0.0600901
0.1581129	0.1586554	0.1581248
0.4794142	0.4854542	0.4854494
0.1514671	0.1586554	0.1581842
0.0293172	0.0284402	0.0283000
0.0029110	0.0029000	0.0028914
0.0001770	0.0001776	0.0001783

Virhe verrattuna rekursiokaavaan prosentteina samoilla arvoilla

NP-rekursio	Esscher-rekursio
4.77	16.51
5.11	9.46
4.29	4.79
3.51	1.80
0.34	0.01
1.26	1.26
4.75	4.43
-2.99	-3.47
-0.38	-0.67
0.34	0.74

Taulukko 6

vah lkm	pareto	polya	vinous
100.0000	2.0000	25.0000	0.4439

kertyman arvot F kun muuttuja < 0 ja 1-F kun muuttuja >= 0
muuttujan arvoilla -3 -2.5 -2 -1.5 -1 0 1 2 3 4

rekursio	NP	Esscher
0.0000176	0.0000237	0.0000172
0.0008197	0.0008603	0.0008128
0.0097596	0.0101580	0.0097384
0.0511029	0.0556390	0.0511327
0.1558078	0.1586554	0.1560821
0.4723296	0.4705130	0.4704871
0.1585851	0.1586554	0.1567745
0.0338448	0.0338476	0.0332510
0.0047670	0.0049242	0.0048679
0.0005162	0.0005215	0.0005282

Virhe verrattuna rekursiokaavaan prosentteina samoilla arvoilla

NP-rekursio	Esscher-rekursio
34.89	-2.23
4.94	-0.85
4.08	-0.22
8.88	0.06
1.83	0.18
-0.38	-0.39
0.04	-1.14
0.01	-1.75
3.30	2.12
1.04	2.33

Taulukko 7

vah lkm	pareto	polya	vinous
100.0000	2.0000	50.0000	0.3657

kertyman arvot F kun muuttuja < 0 ja 1-F kun muuttuja >= 0
muuttujan arvoilla -3 -2.5 -2 -1.5 -1 0 1 2 3 4

rekursio	NP	Esscher
0.0000707	0.0000693	0.0000764
0.0014304	0.0014079	0.0014706
0.0121132	0.0122330	0.0121133
0.0552370	0.0574910	0.0544624
0.1600009	0.1586554	0.1568990
0.4779467	0.4756987	0.4756861
0.1565254	0.1586554	0.1573687
0.0323046	0.0320192	0.0316390
0.0041537	0.0041812	0.0041542
0.0003681	0.0003772	0.0003815

Virhe verrattuna rekursiokaavaan prosentteina samoilla arvoilla

NP-rekursio	Esscher-rekursio
-2.00	8.12
-1.57	2.81
0.99	0.00
4.08	-1.40
-0.84	-1.94
-0.47	-0.47
1.36	0.54
-0.88	-2.06
0.66	0.01
2.48	3.64

Taulukko 9

vah lkm	pareto	polya	vinous
10.0000	2.0000	100.0000	1.0320

kertyman arvot F kun muuttuja < 0 ja 1-F kun muuttuja >= 0
muuttujan arvoilla -3 -2.5 -2 -1.5 -1 0 1 2 3 4

rekursio	NP	Esscher
0.0000000	0.0000000	0.0000000
0.0000000	0.0000011	0.0000000
0.0004391	0.0011498	0.0006269
0.0179222	0.0431722	0.0240266
0.1443897	0.1586554	0.1355885
0.4499168	0.4317174	0.4313801
0.1454294	0.1586554	0.1498035
0.0406936	0.0460770	0.0441112
0.0113671	0.0113394	0.0113124
0.0024146	0.0024621	0.0025897

Virhe verrattuna rekursiokaavaan prosentteina samoilla arvoilla

NP-rekursio	Esscher-rekursio
—	—
—	—
161.88	42.79
140.89	34.06
9.88	-6.10
-4.05	-4.12
9.09	3.01
13.23	8.40
-0.24	-0.48
1.97	7.25

Taulukko 10

vah lkm	pareto	polya	vinous
25.0000	2.0000	100.0000	0.6476

kertyman arvot F kun muuttuja < 0 ja 1-F kun muuttuja >= 0
muuttujan arvoilla -3 -2.5 -2 -1.5 -1 0 1 2 3 4

rekursio	NP	Esscher
0.0000010	0.0000005	0.0000006
0.0002562	0.0001648	0.0001969
0.0062753	0.0056459	0.0053769
0.0456215	0.0510325	0.0415153
0.1590884	0.1586554	0.1501093
0.4471196	0.4570221	0.4569435
0.1507782	0.1586554	0.1543809
0.0364634	0.0383770	0.0374494
0.0068730	0.0070137	0.0070532
0.0010670	0.0010268	0.0010858

Virhe verrattuna rekursiokaavaan prosentteina samoilla arvoilla

NP-rekursio	Esscher-rekursio
-43.59	-39.79
-35.69	-23.13
-10.03	-14.32
11.86	-9.00
-0.27	-5.64
2.21	2.20
5.22	2.39
5.25	2.70
2.05	2.62
-3.77	1.76

Taulukko 17

vah lkm	pareto	polya	vinous
5.0000	2.0000	5.0000	1.4870

kertyman arvot F kun muuttuja < 0 ja 1-F kun muuttuja >= 0
muuttujan arvoilla -1.4 -1.3 -1.2 -1.1 -1 0 1 2 3 4

rekursio	NP	Esscher
0.0000000	0.0507197	0.0000000
0.0000000	0.0706454	0.0000000
0.0312500	0.0952597	0.0385617
0.0746528	0.1246516	0.0711273
0.1330440	0.1586554	0.1108475
0.3994728	0.4021338	0.4011303
0.1445615	0.1586554	0.1438940
0.0514358	0.0539770	0.0487932
0.0146617	0.0167177	0.0154042
0.0045044	0.0048272	0.0045701

Virhe verrattuna rekursiokaavaan prosentteina samoilla arvoilla

NP-rekursio	Esscher-rekursio
—	—
—	—
204.83	23.40
66.98	-4.72
19.25	-16.68
0.67	0.41
9.75	-0.46
4.94	-5.14
14.02	5.06
7.17	1.46

Olli Pusa

Comparison between NP approximation and Esscher approximation

Summary

In this work the accuracy of NP approximation and Esscher approximation is compared when we want to approximate generalized Poisson function. The comparison is made by calculating values of these two methods with different values of standardized variable and comparing them with values calculated with recursion formula. Values of the recursion formula are assumed to be correct. Methods have been described in the second and third edition of Beard-Pentikäinen-Pesonen Risk Theory. Test function was mixed compound Poisson function where claim size distribution is truncated Pareto distribution ($1 \leq x \leq 21$) and expectation value of claims is fluctuating according to Polya distribution. For recursion formula claim size distribution is discretized at points 1,2,...,21. Different test distributions used in this work we get when we vary Pareto and Polya parameters and expectation value of claim number.

Results. If the skewness of the distribution is small there is not noticeable difference in the accuracy of the methods. When skewness becomes larger (over 0.5) gives Esscher method more accurate results at positive values and especially at negative values where NP method does not work satisfactory. When expectation value of claims is small differ values calculated with Esscher method from those calculated with recursion formula at negative values. Partially reason for this can be the discrete nature of recursion formula.