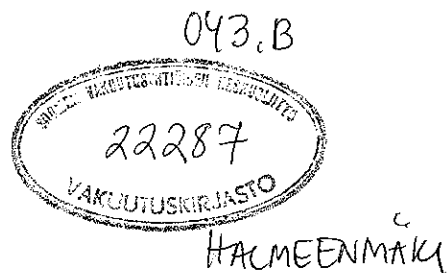


VAPAAEHTOISEN HENKI- JA ELÄKEVAKUUTUKSEN
LASKUPERUSTEISSA SOVELLETTAVAA MATEMATIIKKAA



SHV-Harjoitustyö
Juha-Pekka Halmeenmäki
18.7.1992

The paper deals with the mathematical model used in the voluntary life and pension insurance in Finland.

The first part of the paper presents the theoretical background. Time-homogenous and time-inhomogenous Markov-chains are defined. Some basic properties and examples are presented.

The main part of the paper deals with derivation of risk premiums from the presented Markov-chain model. Especially risk premiums for death and disability insurance are considered. Different types of loadings used in life and pension insurance are also presented. The premium reserve in classical life and pension insurance with fixed premiums is calculated by using prospective technique. In the modern universal life insurance the premium reserve is calculated straight from the Thiele's differential equation. Both techniques are presented in the paper.

VAPAAEHTOISEN HENKI- JA ELÄKEVAKUUTUKSEN LASKUPERUSTEISSA SOVELLETTAVAA MATEMATIIKKAA

Työssä esitetään kokonaiskuva siitä matematiikasta, jota sovelletaan Suomessa myönnettävien vapaaehtoisten henki- ja eläkevakuutuksen laskuperusteissa. Työ yhdessä laskuperusteiden kanssa antaa cum-laude -tason todennäköisyyslaskennan hallitsevalle opiskelijalle sellaisen perehtyneisyyden kuolevuus- ja työkyvyttömyysmalleihin sekä laskuperusteisiin, jota SHV-tutkinnon suorittaminen edellyttää.

Ensin esitellään kuolevuus- ja työkyvyttömyysmallin teoreettinen perusta. Tämä tehdään määrittelemällä ajan suhteen homogeeniset ja epähomogeeniset Markov-ketjut, johtamalla niiden perusominaisuuksia sekä käsittelemällä henkivakuutuksiin liittyviä esimerkkejä. Tämän jälkeen siirrytään tarkastelemaan varsinaisia laskuperusteita.

Pääpaino esityksessä on riskimaksun määräytymisperusteissa, ja niistäkin erityisesti kuolevuus- ja työkyvyttömyysmallien perusteella saatavien vastuukertamaksujen ja elinkorkojen johtamisessa. Työkyvyttömyysmalleista esitetään intensiteettimalli ja Z-malli. Muiden vakuutusten riskimaksujen määräytymisperusteet ja kuormitusperusteet esitellään. Vakuutusmaksuvastuun perusteissa esitetään erikseen perinteiseen kiinteämaksuiseen vakuutukseen liittyvä prospektiivinen tekniikka, ja joustavamaksuisia vakuutuksia koskeva Thielen differentiaaliyhtälöön perustuva tekniikka. Lopuksi luodaan katsaus lisätujen laskentaperusteisiin ja henkivakuutusyhtiöiden analyysiin.

SISÄLLYSLUETTELO

1. STOKASTISET PROSESSIT JA MARKOV-KETJUT	1
2. YLEISTÄ LASKUPERUSTEIDEN SISÄLLÖSTÄ	10
3. VAKUUTUSMAKSUJEN LASKENTAPERUSTEET	13
3.1 Ikälasku	13
3.2. Korkoperuste	14
3.3. Kuolevuusperuste	21
3.4. Pitkäaikaisen työkyvyttömyyden peruste	32
3.4.1 Z-mallin perusperiaatteita ja yhteys intensiteettimal- liin	34
3.4.2. Intensiteettimalli ja työkyvyttömyyden peruste yksi- öllisessä eläkevakuutuksessa	39
3.4.3. Työkyvyttömyys yksilöllisessä henkivakuutuksessa	45
3.5. Muut sairauteen ja työkyvyttömyyteen liittyvät perus- teet	47
3.6. Kuormitusperuste	49
4. VASTUUVELAN LASKENTAPERUSTEET	54
5. MUUT LASKUPERUSTEISSA ESITETTÄVÄT ASIAT	60
6. LISÄETUJEN PERUSTEET	62
7. TUTKIMUS HENKIVAKUUTUSYHTIÖN VAKUUTUSLIIKKEESTÄ	63

1. STOKASTISET PROSESSIT JA MARKOV-KETJUT

Henki- ja eläkevakuutuksen laskuperusteet perustuvat pääosin todennäköisyyslaskentaan ja erityisesti stokastisiin prosesseihin. Niinpä ennen laskuperusteisiin syventymistä määritellään tarvittavia peruskäsitteitä.

Stokastisella prosessilla tarkoitetaan matemaattista mallia, jonka avulla kuvataan satunnaisesti ajan, pituuden, pinta-alan tai muun sellaisen mukaan muuttuvaa ilmiötä. Eksaktimmin asia ilmaistaan sanomalla, että stokastinen prosessi on todennäköisyysavaruudessa (Ω, S, P) määritelty joukko satunnaismuuttujia $\{X(t) | t \in T\}$, missä T on jokin indeksijoukko. Satunnaismuuttujan $X(t)$ mahdollisten arvojen joukkoa kaikilla $t \in T$ kutsutaan prosessin tila-avaruudeksi E . Sekä indeksijoukko T että tila-avaruus E voivat olla jatkuvia tai diskreettejä. Lisäksi ne voivat olla äärettömiä tai äärellisiä. Stokastiselle prosessille määriteltyä todennäköisyyttä $P(X(t)=x)$, missä $x \in E$ ja $t \in T$, kutsutaan tilatodennäköisyydeksi. Vakuutusmatematiikassa yleensä ja tässä esityksessä erityisesti tarkastellaan sellaisia stokastisia prosesseja, joiden indeksijoukkona on jatkuva aikaväli $[0, \infty)$. Käytännössä aikaväliä rajoittaa esimerkiksi ihmisen suurin oletettavissa oleva elinikä tai vakuutuksen voimassaoloaika. Tila-avaruus on diskreetti ja äärellinen eli $x \in \{0, 1, \dots, n\}$. Kuolevuusmallissa tilojen lukumäärä rajoittuu kahteen ja työkyvyttömyysmallissakin kolmeen. Seuraavassa tilatodennäköisyydestä käytetään merkintää $P_i(t) = P(X(t)=i)$.

Olkoon $X = \{X(t) | t \in T\}$ stokastinen prosessi, jolle $P(X(t) \in E) = 1$, kun $E \subset \{0, 1, \dots, n\}$. Prosessia X kutsutaan Markov-ketjuksi, jos

$$P(X(t_n)=x_n | X(t_{n-1})=x_{n-1}, \dots, X(t_1)=x_1) = P(X(t_n)=x_n | X(t_{n-1})=x_{n-1})$$

aina, kun $t_1 < t_2 < \dots < t_n$ ja $x_i \in E$, $t_i \in T$ kaikilla $i=0, 1, 2, \dots, n$. Tämä tarkoittaa käytännössä sitä, että tulevaisuus ei riipu menneisyydestä, jos nykyhetki on tunnettu. Jos prosessi X on Markov-ketju, niin todennäköisyyttä $P(X(t)=x | X(s)=y)$ kutsutaan siirtymätodennäköisyydeksi. Edellä $x, y \in E$ ja $t, s \in T$ sekä $s < t$.

Seuraavaksi esitetään joitakin Markov-ketjujen perusominaisuuksia.

Ensinnäkin ominaisuus, jonka avulla tilatodennäköisyydet saadaan johdettua, jos tunnetaan tilatodennäköisyydet alkutilanteessa hetkellä $t=0$ ja siirtymätodennäköisyydet.

Lause 1. Markov-ketjulle $X=\{X(t), t \in T\}$ on voimassa

$$P(X(t)=x) = \sum_{y \in E} P(X(0)=y) P(X(t)=x | X(0)=y), \quad \forall x \in E, t \in T. \quad (1.1)$$

Tod. Yksinkertaisuuden vuoksi käytetään merkintöjä $A=\{X(t)=x\}$ ja $B_y=\{X(0)=y\}$. Koska $B_y \cap B_z = \emptyset$ aina, kun $y \neq z$, niin todennäköisyysfunktion additiivisuutta ja ehdollisen todennäköisyyden määritelmää käyttäen saadaan

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap (\bigcup_{y \in E} B_y)) = P(\bigcup_{y \in E} (A \cap B_y)) \\ &= \sum_{y \in E} P(A \cap B_y) = \sum_{y \in E} P(A | B_y) P(B_y). \end{aligned} \quad (1.2)$$

Lause 2. (Chapman-Kolmogorovin lause). Oletetaan, että $\{X(t) | t \in T\}$ on Markov-ketju. Kaikilla $s, t, u \in T$ ($s < u < t$) ja $x, y \in E$ on voimassa

$$P(X(t)=x | X(s)=y) = \sum_{z \in E} P(X(u)=z | X(s)=y) P(X(t)=x | X(u)=z), \quad (1.3)$$

kun $s < u < t$.

Tod. Käytetään merkintöjä $A=\{X(t)=x\}$, $B_z=\{X(u)=z\}$ ja $C=\{X(s)=y\}$. Tällöin

$$\begin{aligned} P(A|C) &= P(A \cap (\bigcup_{z \in E} B_z) | C) = P(\bigcup_{z \in E} (A \cap B_z) | C) \\ &= \sum_{z \in E} P(A \cap B_z | C) = \sum_{z \in E} P(A | B_z, C) P(B_z | C) \\ &= \sum_{z \in E} P(A | B_z) P(B_z | C) \end{aligned} \quad (1.4)$$

Edellä toiseksi viimeinen yhtäsuuruus seuraa ehdollisen todennäköisyyden määritelmästä ja viimeinen Markov-ominaisuudesta.

Markov-ketju on ajan suhteen homogeeninen, jos siirtymätodennä-

köisyys $P(X(t+h)=x|X(t)=y)$ ei riipu ajanhetken t valinnasta, vaan ainoastaan ajanhetkien välisestä erosta h . Merkitään tällöin $P_{ij}(h) = P(X(t+h)=j|X(t)=i)$, kun $i, j \in E$. Vastaavasti mikäli siirtymätodennäköisyys riippuu myös ajanhetkestä t , niin prosessia kutsutaan ajan suhteen epähomogeeniseksi ja siirtymätodennäköisyydestä käytetään merkintää $P_{ij}(t, h) = P(X(t+h)=j|X(t)=i)$, kun $i, j \in E$.

Rajoitetaan nyt tarkasteltavien Markov-ketjujen joukkoa olettamalla, että siirtymätodennäköisyydet saadaan yhtälöstä

$$P_{ij}(t, h) = \mu_{ij}(t)h + o(h), \quad (1.5)$$

missä $i \neq j$, $\mu_{ij}(t)$ on ei-negatiivinen jatkuva funktio ja $o(h)$ on funktio, joka toteuttaa yhtälön

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h)}{h} = 0$$

Koska prosessi on ajan h kuluttua jossakin tilassa, niin kaavasta (1.5) seuraa, että

$$P_{ii}(t, h) = 1 - \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^n \mu_{ij}(t)h + o(h). \quad (1.6)$$

Johdetaan seuraavaksi differentiaaliyhtälöt tilatodennäköisyyksien ratkaisemiseksi. Alkuehtoina oletetaan, että $P_j(0) = \alpha_j$ kaikilla $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ ja $\sum \alpha_j = 1$. Tarkastellaan tilaa k . Tällöin

$$\begin{aligned} P_k(t+h) &= \sum_{i=0}^n P_i(t) P_{ik}(t, h) \\ &= P_k(t) \left[1 - \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \mu_{kj}(t)h + o(h) \right] + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n P_i(t) [\mu_{ik}(t)h + o(h)] \end{aligned} \quad (1.7)$$

Järjestelemällä termejä saadaan tilatodennäköisyyden oikeanpuoleiselle derivaatalle lauseke

$$\frac{P_k(t+h) - P_k(t)}{h} = -P_k(t) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \mu_{kj}(t) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n P_i(t) \mu_{ik}(t) + \frac{o(h)}{h}. \quad (1.8)$$

Tarkastelemalla todennäköisyyttä $P_k(t-h)$ saadaan tilatodennäköisyyden vasemmanpuoleiselle derivaatalle vastaasti lauseke

$$\frac{P_k(t) - P_k(t-h)}{h} = -P_k(t-h) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \mu_{kj}(t-h) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n P_i(t-h) \mu_{ik}(t-h) + \frac{o(h)}{h} \quad (1.9)$$

Annetaan nyt $h \rightarrow 0$, niin saadaan tilatodennäköisyyden derivaataksi

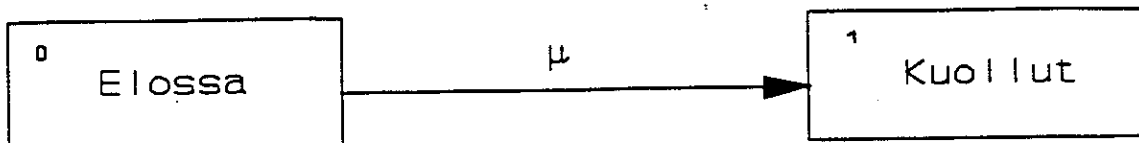
$$\frac{d}{dt} P_k(t) = -P_k(t) \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq k}}^n \mu_{kj}(t) + \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^n P_i(t) \mu_{ik}(t), \quad (1.10)$$

kun $k=0, 1, 2, \dots, n$.

Nämä differentiaaliyhtälöt eivät ole yleisesti ratkaistavissa, mutta tämän kappaleen lopussa on esitetty muutamia henkivakuutuksiin liittyviä erikoistapauksia, joissa yhtälöiden ratkaiseminen onnistuu.

Edellä esitetyt oletukset ja tulokset ovat voimassa myös ajan suhteen homogeenisille Markov-ketjuille. Tällöin siirtymätodennäköisyyksien lausekkeista voidaan jättää aika-argumentti t pois.

Yksilöllisen henki- ja eläkevakuutuksen laskuperusteissa käytetty kuolevuusmalli on edellä esitellyn ajan suhteen epähomogeenisen Markov-ketjun sovellutus. Tarkastellaan ensin yksinkertaistettua versiota, joka on ajan suhteen homogeeninen. Mallissa on kaksi tilaa, joiden tilatodennäköisyyksille annetaan tulkinnat $P_0(t) = P(\text{'Henkilö on elossa iässä } t')$ ja $P_1(t) = P(\text{'Henkilö on kuollut iässä } t')$. Alkutilanteessa $P_0(0) = 1$ ja $P_1(0) = 0$. Parametrit ovat $\mu_{10} = 0$ ja $\mu_{01} = \mu > 0$, jota kutsutaan kuolevuusintensiteetiksi. Tilannetta voidaan havainnollistaa seuraavalla kuvalla



Kysymyksessä on siis yksinkertainen kuolevuusmalli, jossa kuoleminen tapahtuu iästä riippumattomalla intensiteetillä μ . Differentiaaliyhtälöryhmä (1.10) saadaan muotoon

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} P_0(t) = -P_0(t) \mu \\ \frac{d}{dt} P_1(t) = P_0(t) \mu \end{cases} \quad (1.11)$$

Ensimmäinen yhtälöstä saadaan

$$\frac{P_0'(t)}{P_0(t)} = -\mu \Rightarrow P_0(t) = e^{-\mu t}, \quad (1.12)$$

kun otetaan huomioon oletus $P_0(0) = 1$. Sijoitetaan tämä toiseen yhtälöön, integroidaan ja otetaan huomioon alkuehto $P_1(0) = 0$. Tällöin

$$P_1(t) = 1 - e^{-\mu t} = 1 - P_0(t). \quad (1.13)$$

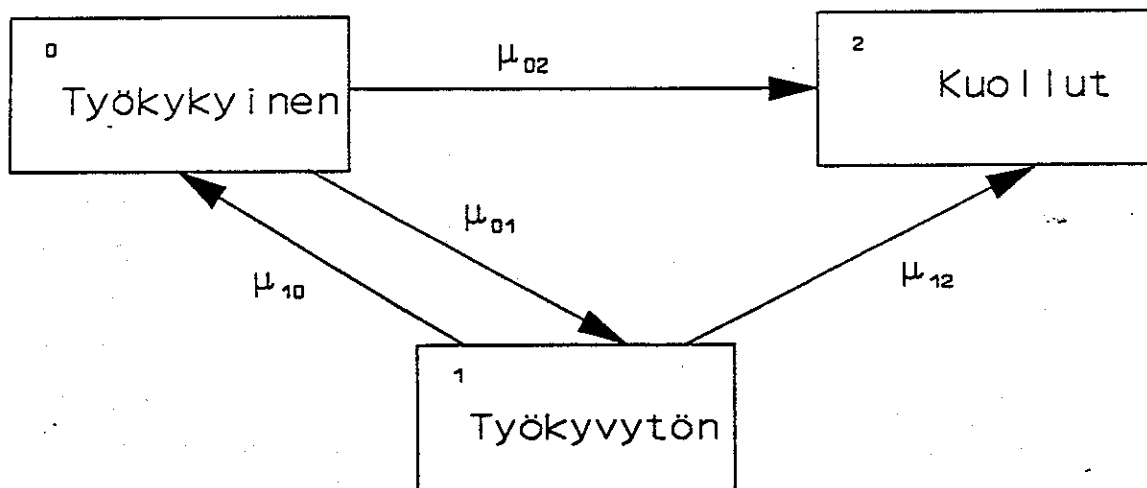
Oletetaan seuraavaksi, että esimerkin prosessi ei ole ajan suhteen homogeeninen, vaan kuolevuusintensiteetti on ajasta riippuvainen. Tällöin saadaan laskuperusteissa käytettävä kuolevuusmalli. Tähän malliin palataan lähemmin kuolevuusperusteen yhteydessä, mutta esitetään tässä yhteydessä tilatodennäköisyydet lähtien kaavasta (1.10). Saatava differentiaaliyhtälöryhmä poikkeaa ryhmästä (1.11) ainoastaan siinä, että vakiointensiteetti μ korvataan ajasta riippuvalla intensiteetillä $\mu(t)$. Integroimalla ja alkuehdot sijoittamalla päädytään tilatodennäköisyyksiin

$$\begin{cases} P_0(t) = e^{-\int_0^t \mu(\tau) d\tau} \\ P_1(t) = \int_0^t \mu(s) e^{-\int_0^s \mu(\tau) d\tau} ds. \end{cases} \quad (1.14)$$

Erityisesti siis

$$P_0(t) + P_1(t) = e^{-\int_0^t \mu(s) ds} - \int_0^t \frac{d}{ds} e^{-\int_0^s \mu(\tau) d\tau} ds = 1. \quad (1.15)$$

Yksilöllisen henki- ja eläkevakuutuksen laskuperusteissa käytettävässä työkyvyttömyysmallissa, niin sanotussa intensiteettimallissa, laajennetaan tilojen määrä kolmeen. Tällöin tilatodennäköisyyksille annetaan tulkinnat $P_0(t) = P(\text{'Henkilö on elossa ja työkykyinen iässä } t')$, $P_1(t) = P(\text{'Henkilö on elossa, mutta työkyvytön iässä } t')$ ja $P_2(t) = P(\text{'Henkilö on kuollut iässä } t')$. Alkuehdot ovat kuten kuolevuusmallissa eli $P_0(0) = 1$. Tarkastellaan ensin yksinkertaistettua ajan suhteen homogeenista mallia, jossa siirtyminen tilasta i tilaan j tapahtuu vakiointensiteetillä $\mu_{ij} \geq 0$. Kuten intuitiivisesti on selvää, niin tila 2 on absorboiva eli $\mu_{20} = \mu_{21} = 0$. Seuraava kuva havainnollistaa mallia



Kaavasta (1.10) saadaan seuraava differentiaaliyhtälöryhmä

$$\begin{cases} P_0'(t) = -P_0(t)(\mu_{01} + \mu_{02}) + P_1(t)\mu_{10} \\ P_1'(t) = -P_1(t)(\mu_{12} + \mu_{10}) + P_0(t)\mu_{01} \\ P_2'(t) = P_0(t)\mu_{02} + P_1(t)\mu_{12} \end{cases} \quad (1.16)$$

Ratkaistaan ensimmäisestä yhtälöstä $P_1(t)$

$$P_1(t) = \frac{1}{\mu_{10}} [P_0'(t) + P_0(t)(\mu_{01} + \mu_{02})], \quad (1.17)$$

jonka derivaataksi saadaan

$$P_1'(t) = \frac{1}{\mu_{10}} [P_0''(t) + P_0'(t)(\mu_{01} + \mu_{02})]. \quad (1.18)$$

Sijoitetaan nämä lausekkeet yhtälöryhmän (1.16) toiseen yhtälöön. Sieventämällä saadaan toisen kertaluvun homogeeninen vakioker-toiminen differentiaaliyhtälö

$$P_0''(t) + (\mu_{01} + \mu_{02} + \mu_{12} + \mu_{10})P_0'(t) + (\mu_{12}\mu_{01} + \mu_{12}\mu_{02} + \mu_{10}\mu_{02})P_0(t) = 0 \quad (1.19)$$

joka on helposti ratkaistavissa. Saatu ratkaisu sijoitetaan lau-sekkeeseen (1.17) ja edelleen yhtälöryhmän (1.16) kolmanteen yhtälöön. Koska ratkaisu on kuitenkin melko työläs, niin tyydytään seuraavassa vain esimerkkiin, jossa $\mu_{01} = 0,006$; $\mu_{02} = 0,002$; $\mu_{10} = 0,048$ ja $\mu_{12} = 0,022$. Sijoitetaan nämä yhtälöön (1.19), jolloin karakteristiseksi yhtälöksi saadaan

$$r^2 + 0,078r + 0,000272 = 0, \quad (1.20)$$

jonka ratkaisut $r_1 \approx -0,004$ ja $r_2 \approx -0,074$. Differentiaaliyhtälön ratkaisuksi saadaan siis

$$P_0(t) = Ae^{-0,004t} + Be^{-0,074t}, \quad (1.21)$$

jossa kertoimet A ja B toteuttavat alkuehdon $P_0(0) = A+B = 1$.

Edelleen

$$P_1(t) = \frac{1}{0,048} [0,004Ae^{-0,004t} - 0,066Be^{-0,074t}]. \quad (1.22)$$

Alkuehdosta $P_1(0) = 0$ saadaan vakioille A ja B arvot

$$\begin{cases} A = \frac{33}{35} \\ B = \frac{2}{35} \end{cases} \quad (1.23)$$

Sijoitetaan saadut lausekkeet $P_0(t)$ ja $P_1(t)$ yhtälöryhmän kolmannen lausekkeeseen, integroidaan lauseke ja otetaan huomioon alkuehto $P_2(0) = 0$. Tällöin saadaan yhtälöryhmän ratkaisuksi

$$\begin{cases} P_0(t) = \frac{33}{35}e^{-0,004t} + \frac{2}{35}e^{-0,074t} \\ P_1(t) = \frac{11}{140}e^{-0,004t} - \frac{11}{140}e^{-0,074t} \\ P_2(t) = -\frac{759}{840}e^{-0,004t} + \frac{113}{5180}e^{-0,074t} + \frac{261}{296} \end{cases} \quad (1.24)$$

Edellä esitetty työkyvyttömyysmalli saadaan realistisemmaksi olettamalla, että siirtymäintensiteetit ovat ajan t funktioita. Tällöin saadaan siis ajan suhteen epähomogeeninen Markov-ketju, ja yhtälöryhmässä (1.16) siirtymäintensiteetit ovat ajan t funktioita. Tällöin differentiaaliyhtälöryhmä ei ole enää yleisesti ratkaistavissa, mutta kahdesta ensimmäisestä yhtälöstä saadaan

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} [P_0(t) e^{\int_0^t \mu_{01}(\tau) + \mu_{02}(\tau) d\tau}] = P_1(t) \mu_{10}(t) e^{\int_0^t \mu_{01}(\tau) + \mu_{02}(\tau) d\tau} \\ \frac{d}{dt} [P_1(t) e^{\int_0^t \mu_{10}(\tau) + \mu_{12}(\tau) d\tau}] = P_0(t) \mu_{01}(t) e^{\int_0^t \mu_{10}(\tau) + \mu_{12}(\tau) d\tau} \end{cases} \quad (1.25)$$

Integroimalla saadaan

$$\begin{cases} P_0(t) = e^{-\int_0^t \mu_{01}(\tau) + \mu_{02}(\tau) d\tau} \left[\int_0^t P_1(s) \mu_{10}(s) e^{\int_0^s \mu_{01}(\tau) + \mu_{02}(\tau) d\tau} ds + 1 \right] \\ P_1(t) = e^{-\int_0^t \mu_{10}(\tau) + \mu_{12}(\tau) d\tau} \int_0^t P_0(s) \mu_{10}(s) e^{\int_0^s \mu_{10}(\tau) + \mu_{12}(\tau) d\tau} ds. \end{cases} \quad (1.26)$$

Yksilöllisen henki- ja eläkevakuutuksen laskuperusteissa käytettävässä intensiteettimallissa oletetaan, että siirtymäintensiteetit tilasta 1 ovat kokonaisajan t lisäksi riippuvaisia siitä ajanhetkestä, jolloin edellinen siirtyminen on tapahtunut. Tämän seurauksena prosessi ei enää olekaan Markov-ketju. Differentiaaliyhtälöryhmän (1.10) käyttäminen ei siis ole mahdollista, ja kappaleessa 3.4.2 tarvittavat todennäköisyydet johdetaankin muulla tavoin. Tällaista stokastista prosessia, jossa siirtyminen tilasta toiseen riippuu paitsi tilasta, jossa ollaan myös siitä kauanko tilassa ollaan oltu, kutsutaan Semi-Markov -prosessiksi.

2. YLEISTÄ LASKUPERUSTEIDEN SISÄLLÖSTÄ

Tässä esityksessä henkivakuutuksiksi katsotaan vakuutus kuoleman varalta, vakuutus elämän varalta eli säästövakuutus ja näiden yhdistelmät sekä erilaiset sairauden ja työkyvyttömyyden varalta voimassa olevat vakuutukset, joita voidaan myöntää joko itsenäisinä tai yhdessä kuolemanvara- ja säästövakuutusten kanssa. Henkivakuutusta on myös kuolemanvaravakuutuksen yhteyteen liitettävissä olevat vakuutukset tapaturmaisen kuoleman ja tapaturmaisen pysyvän invaliditeetin varalta.

Eläkevakuutukset ryhmitellään lakisääteiseen eläkevakuutukseen, yksilölliseen eläkevakuutukseen ja ryhmäeläkevakuutukseen. Eläkevakuutukseen voi sisältyä vanhuuseläkevakuutus, työkyvyttömyyseläkevakuutus, työttömyyseläkevakuutus ja erilaisia vakuutetun kuoleman jälkeen maksettavia eläkkeitä, kuten huoltoeläke, leskeneläke tai perhe-eläke. Joillakin yhtiöillä yksilölliseen eläkevakuutukseen voidaan liittää myös maksuvapautusetu, jossa vakuutuksenottaja vapautuu maksuista vakuutetun tullessa työkyvyttömäksi. Lisäksi eläkevakuutukseen on mahdollista liittää palautusvakuutus, joka palauttaa vakuutetun kuolintapauksessa yhtiöstä riippuen joko maksetut maksut tai kertyneen rahaston.

Henki- ja eläkevakuutukset ovat pitkäaikaisia sopimuksia, joissa maksut sovitaan jopa vuosikymmeniksi eteenpäin. Tällöin maksuja määrättäessä pyritään ennustamaan tulevaisuuden vahinkokehitys mahdollisimman tarkasti. Pyrkimyksenä on, että maksuja ei vakuutusaikana muuteta. Kuitenkin vakuutusyhtiöt ovat 1970-luvun alussa lisänneet vakuutusehtoihin pykälän, joka sallii yhtiöiden korjata maksutasoa vakuutusaikana paremmin korvausmenoa vastaavaksi. Tämän pykälän lisääminen johtui pääosin sairaskuluvakuutuksen korvausmenon hallitsemattoman suuresta kasvusta.

Henki- ja eläkevakuutuksella on vakuutuksenottajalle poikkeuksellisen suuri merkitys. Yhtiön joutuessa maksukyvyttömäksi saattaa olla, että vakuutetut eivät enää huonontuneen terveydentilansa takia saa uutta vakuutusta. Eläkevakuutuksessa yhtiön joutuminen

maksukyvyttömäksi saattaa vaaraan vakuutuksenottajien järjestämän vanhuuden turvan. Edellä mainituista seikoista johtuen on vakuutusyhtiölaissa erityisesti kiinnitetty huomiota vakuutettujen etujen turvaamiseen. Laissa on nimittäin säädetty, että henki- ja eläkevakuutuksessa on noudatettava sosiaali- ja terveysministeriön vahvistamia perusteita, joissa määrätään:

- 1) Miten vakuutusmaksut lasketaan
- 2) Miten vastuovelka lasketaan
- 3) Vapaakirjasta ja takaisinostosta
- 4) Vakuutusmaksun laiminlyönnin seuraamuksista
- 5) Vakuutuksenottajan oikeuksista, kun vakuutus muun syyn kuin takaisinoston takia ennen sovittua aikaa lakkaa tai yhtiö muuten vapautuu vastuustaan.

Lisäksi todetaan, että sitä mitä edellä on sanottu henkivakuutuksen perusteista on soveltuvin osin noudatettava myös annettaessa sellaisia vakuutukseen liittyviä lisäetuja, joihin yhtiö vakuutussopimuksessa ei ole sitoutunut.

Kohdat 1) ja 2) tulee laatia pitäen silmällä lähinnä vakuutettujen etujen turvaamista ja kohdat 3) - 5) silmällä pitäen lähinnä niiden kohtuullisuutta. Kun perusteille haetaan vahvistusta, niin hakemukseen tulee liittää haettavien perusteiden lisäksi perustelut sille, että haettavat perusteet ovat lainmukaiset sekä vakuutusehdot, kun on kyse maksu- takaisinosto- tai vapaakirjaperusteista. Lisäksi perustehakemuksessa on oltava selvitys siitä, mihin vakuutettujen ryhmään huomioon ottaen asianomaisen terveydentila ja muut yhtiön vastuuseen vaikuttavat seikat mitäkin maksua sovelletaan.

Vakuutusmaksujen laskuperusteissa määritellään ensin se miten vakuutetun ikä lasketaan. Seuraavaksi määritellään korkoperuste, jonka avulla eri aikoina tapahtuvat suoritukset diskontataan tarkasteltavaan ajanhetkeen. Riskiperusteissa määritellään perusteet sille, miten lasketaan eri riskilajien todennäköinen korvausmeno tulevaisuudessa. Riskiperusteisiin liitetään myös perustelut, joista käy ilmi miten esitettäviin perusteisiin on päädytty. Maksuperusteisiin kuuluu vielä vakuutusmaksuihin sisällytettävän yhtiön liikekulukuormituksen laskuperuste. Vakuutusyh-

tiöt käyttivät aiemmin yhteisesti laadittuja laskuperusteita ns. henkivakuutusyhtiöiden yhteisperusteita. Kuitenkin 1980-luvulla yhtiöiden erilainen tuotekehitys ja keskinäinen kilpailu erityisesti yksilöllisissä eläkevakuutuksissa saivat aikaan sen, että yhteisperusteista osittain luovuttiin. Koska yhtiöiden riskiperusteet edelleen perustuvat samaan yhtiöiden riskiperusteanalyysin yhteenvetoon, niin pääosin yhtiöiden riskiperusteet ovat edelleen pysyneet yhteisinä. Myös korkoperuste on pysynyt yhtenäisenä, joten maksuperusteiden kohdalla eroja on lähinnä kuormitusperusteissa.

Vastuuvelan laskentaperusteissa määrätään miten lasketaan yhtiön tilinpäätökseen vastuuvelka, johon kuuluu vakuutusmaksuvastuu ja korvausvastuu. Vakuutusyhtiölain mukaan vakuutusmaksuvastuu on laskettava prospektiivisesti, eli se vastaa voimassa olevissa vakuutussopimuksissa tarkoitetuista tulevista vakuutustapahtumista johtuvien suoritusten ja näistä vakuutuksista aiheutuvien muiden menojen pääoma-arvoa, vähennettynä tulevien maksujen pääoma-arvolla ja lisättynä kesken vakuutusajan rauenneista vakuutuksista ehkä aiheutuvan vastuun pääoma-arvolla. Korvausvastuulla tarkoitetaan sattuneiden vakuutustapahtumien johdosta suoritettavia, maksamatta olevia korvaus- ja muita määriä sekä runsasvahinkoisten vuosien varalta vastuupillillisesti laskettavaa tasoitusmäärää.

Vakuutuksenottajan irtisanoessa vakuutuksen hänellä on oikeus laskuperusteissa kerrotuin edellytyksin saada vakuutuksensa vakuutussäästöt niin sanottuna takaisinostoarvona. Vapaakirjalla tarkoitetaan vakuutusta, josta ei enää peritä maksuja, mutta vakuutusturvaa pidetään kertyneen vakuutussäästön avulla voimassa.

Kun vakuutusmaksut määrätään turvaaviksi, niin normaalioloissa maksut ovat suurempia kuin korvausmeno. Näin syntyy ylijäämää, joka on kohtuusperiaatteen mukaisesti palautettava vakuutuksenottajille. Käytännössä tämä tehdään antamalla erilaisia lisäetuja, joiden perusteet vahvistetaan vuosittain. Vakuutusyhtiölain mukaan lisäetuja varten tehtävä varaus kirjataan tilinpäätöksessä vakuutusmaksuvastuuseen. Kilpailun kiristyttyä 1980-luvulla on yhtiöiden myöntämistä lisäeduista tullut keskeinen kilpailutekijä.

3. VAKUUTUSMAKSUJEN LASKENTAPERUSTEET

3.1 Ikälasku

Vakuutetun ikä on vakuutusmatematiikassa suurin vakuutusmaksuihin vaikuttava tekijä, sillä kuolintodennäköisyys ja työkyvyttömäksi tulon todennäköisyys kasvavat voimakkaasti iän mukana. Tällä voidaan arkisessa kielenkäytössä tarkoittaa montaa asiaa ja ikä voidaan määrittää eri tarkkuudella. Tätä varten laskuperusteissa määritellään miten vakuutetun ikä lasketaan vakuutusvuoden alussa ja myöhemmin vakuutusvuoden aikana. Ennen vuotta 1973 voimassa olleissa henkivakuutuksen yhteisperusteissa vakuutetun iäksi vakuutusvuoden alussa katsottiin hänen ikänsä seuraavana syntymäpäivänä. Tämä laskentatapa aiheutti kuitenkin sekaannusta, joten vuonna 1973 hyväksytyissä laskuperusteissa ikälaskua yksinkertaistettiin. Tällöin otettiin käyttöön vielä 1986 hyväksytyissä viimeisimmissä yhteisperusteissa käytetty määritelmää, jonka mukaan ikä vakuutusvuoden alussa on kulumassa olevan kalenterivuoden ja vakuutetun syntymävuoden erotus. Vakuutusvuoden alussa laskettua ikää käytetään koko vakuutusvuoden ajan, joten siis vakuutetun ikä on aina täysiä vuosia. Vapaaehtoisen eläkevakuutuksen laskuperusteissa ikä vakuutusvuoden alussa ja myöhemmin vakuutusvuoden aikana lasketaan kuukauden tarkkuudella. Tämä johtuu siitä, että eläkevakuutuksessa kertyy yleensä suuria säästöosuuksia, jolloin jo muutaman kuukauden ero iässä saattaa aiheuttaa merkittäviä eroja maksussa. Tietotekniikan kehittyminen ja joustavamaksuisten vakuutusten markkinoille tulo ovat vaikuttaneet siihen, että 1980-luvun loppupuolelta lähtien yhtiöt ovat siirtyneet yhä enenevässä määrin henkivakuutuksen laskuperusteissakin kuukauden tarkkuudella tapahtuvaan ikälaskuun.

3.2. Korkoperuste

Henki- ja eläkevakuutuksessa syntyy vakuutuksenottajien maksamista maksuista yleensä vakuutussäästöä, jolle yhtiö maksaa korkoa. Käytettävä korkokanta määrätään laskuperusteissa etukäteen koko vakuutusajaksi, ja se otetaan huomioon maksuja alentavana tekijänä. Koska henki- ja eläkevakuutusten vakuutussopimusten sopimusaika on usein jopa kymmenien vuosien mittainen, niin käytettävän korkokannan valinta on tehtävä riittävää varovaisuutta noudattaen, sillä yhtiön on koko vakuutusajan saatava sijoituksilleen vähintään valitun korkokannan suuruinen tuotto. Tästä johtuen korkoperuste valitaan niin alhaiseksi, että normaaliaikoina vakuutusyhtiöiden sijoituksilleen saama tuotto ylittää huomattavasti laskuperustekorona. Tällöin syntynyt korkoylijäämä palautetaan vakuutusyhtiölaissa ilmenevän kohtuusperiaatteen mukaisesti vakuutuksenottajille erilaisina lisäetuina ja vakuutusturvan indeksikorotuksina. Näihin palataan tarkemmin viidennessä kappaleessa. Vaikka yhtiöllä olisikin vakuutusehtojen mukaan oikeus muuttaa vakuutukseen sovellettavia laskuperusteita vakuutusaikana, niin käytettävän laskuperustekorona muuttaminen voi aiheuttaa vakuutusmaksuvastuun täydennystarpeen niissä vakuutuksissa, joihin liittyy säästöjä. Tämä täydennystarve on huomattava varsinkin silloin, kun säästö on vakuutuksen keskeisenä elementtinä. Tällaisia vakuutuksia ovat kaikki eläkevakuutukset ja huomattava osa henkivakuutuksista. Laskuperustekorona suuruutta määrättäessä tulee ottaa huomioon kansantaloudessa vallitseva reaalikorkotaso ja odotettavissa oleva inflaatio. Näihin molempiin vaikuttaa Suomessa tulevaisuudessa tehtävien talouspoliittisten päätösten lisäksi myös maailmantalouden kehitys.

Laskuperusteissa käytetään koron laskennassa periaatetta, jonka mukaan korkoutuminen tapahtuu jatkuvasti. Jos siis merkitään

$$K(\tau) = \text{pääoma hetkellä } \tau$$

$$\delta(\tau) = \text{korkoutuvuus hetkellä } \tau,$$

niin differentiaalin $d\tau$ aikana tapahtuva muutos pääomassa

$$dK(\tau) = K(\tau) \cdot \delta(\tau) \cdot d\tau. \quad (3.2.1)$$

Tästä saadaan korkoutuvuudelle

$$\frac{\frac{d}{d\tau} K(\tau)}{K(\tau)} = \delta(\tau) \quad (3.2.2)$$

Integroimalla tämä puolittain yli välin (t_0, t) saadaan hetkellä t olevan pääoman määrä $K(t)$.

$$\ln\left(\frac{K(t)}{K(t_0)}\right) = \int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau \quad (3.2.3)$$

$$\Leftrightarrow K(t) = K(t_0) e^{\int_{t_0}^t \delta(\tau) d\tau}$$

Oletetaan seuraavaksi, että aikaväli (t_0, t_n) on jaettu osaväleihin (t_0, t_1) , (t_1, t_2) , ..., (t_{n-1}, t_n) . Osavälit ovat keskenään yhtä pitkiä, ja kunkin osavälin alussa pääoma vähenee sellaisella määrällä A , että viimeisen hetkellä t_{n-1} tehtävän vähennyksen jälkeen pääoma on nolla. Merkitään $K(t_i)$, $i=0, 1, \dots, n-1$ pääoman määrää hetkellä t_i ennen kuin annuiteetti A on siitä vähennetty. Tällöin

$$K(t_1) = (K(t_0) - A) e^{\int_{t_0}^{t_1} \delta(\tau) d\tau} \quad (3.2.4)$$

$$= K(t_0) e^{\int_{t_0}^{t_1} \delta(\tau) d\tau} - A e^{\int_{t_0}^{t_1} \delta(\tau) d\tau}$$

Seuraavaksi osoitetaan, että

$$K(t_i) = K(t_0) e^{\int_{t_0}^{t_i} \delta(\tau) d\tau} - A \sum_{j=0}^{i-1} e^{\int_{t_j}^{t_i} \delta(\tau) d\tau}, \quad (3.2.5)$$

kun $i = 1, 2, \dots, n-1$.

Oletetaan ensin, että

$$K(t_{i-1}) = K(t_0) e^{\int_{t_0}^{t_{i-1}} \delta(\tau) d\tau} - A \sum_{j=0}^{i-2} e^{\int_{t_j}^{t_{i-1}} \delta(\tau) d\tau} \quad (3.2.6)$$

Tällöin

$$\begin{aligned} K(t_i) &= [K(t_{i-1}) - A] e^{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \delta(\tau) d\tau} \\ &= K(t_{i-1}) e^{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \delta(\tau) d\tau} - A e^{\int_{t_{i-1}}^{t_i} \delta(\tau) d\tau} \\ &= K(t_0) e^{\int_{t_0}^{t_i} \delta(\tau) d\tau} - A \sum_{j=0}^{i-1} e^{\int_{t_j}^{t_i} \delta(\tau) d\tau} \end{aligned} \quad (3.2.7)$$

Edellä olevan mukaisesti erityisesti siis

$$K(t_{n-1}) = K(t_0) e^{\int_{t_0}^{t_{n-1}} \delta(\tau) d\tau} - A \sum_{j=0}^{n-2} e^{\int_{t_j}^{t_{n-1}} \delta(\tau) d\tau} = A, \quad (3.2.8)$$

josta saadaan annuiteetille tai esimerkiksi tasasuuruksena etukäteisenä aikakorkona maksettavalle erälle A lauseke

$$A = K(t_0) \frac{e^{\int_{t_0}^{t_{n-1}} \delta(\tau) d\tau}}{\sum_{j=0}^{n-1} e^{\int_{t_j}^{t_{n-1}} \delta(\tau) d\tau}} \quad (3.2.9)$$

Käytännössä laskuperusteissa oletetaan, että korkoutuvuus on vakio koko vakuutuksen voimassaoloajan. Laskennassa tarvittava $\delta(\tau) = \delta$

saadaan valitsemalla $t - t_0 = 1$. Tällöin lausekkeesta (3.2.3) saadaan

$$K(t) = K(t_0) e^{\delta} \quad (3.2.10)$$

Korkoutuvuus δ määrätään sellaiseksi, että jatkuvan koron ja vuotuisen koron p mukaisen pääomat ovat vuoden lopussa yhtä suuret eli

$$\begin{aligned} K(t) &= \left(1 + \frac{p}{100}\right) K(t_0) = K(t_0) e^{\delta} \\ \Leftrightarrow e^{\delta} &= 1 + \frac{p}{100} \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

Merkitsemällä

$$1 + \frac{p}{100} = 1 + i, \quad (3.2.12)$$

saadaan $\delta = \ln(1+i)$. Sekä yksilöllisessä henki- että eläkevakuutuksessa $i = 0,045$, joten $\delta = \ln(1,045) \approx 0,0440169$.

Vakuutusmatematiikassa tarkastellaan yleensä tulevaisuudessa erääntyviä suorituksia, ja tällöin ollaan kiinnostuneita näiden suoritusten pääoma-arvoista tarkasteluhetkellä. Määritellään seuraavaksi ns. ekonomisten funktioiden avulla joitakin henkivakuutuksissa tavallisesti käytettävien suoritusten pääoma-arvoja. Ensinnäkin hetkellä t maksettavan yksikön suuruisen kertosuorituksen pääoma-arvo hetkellä t_0 ($t_0 < t$) saadaan käyttämällä vakiokorkoutuvuutta δ lausekkeessa (3.2.3). Tällöin

$$\begin{aligned} K(t) &= 1 = K(t_0) e^{\delta(t-t_0)} \\ \Leftrightarrow K(t_0) &= e^{-\delta(t-t_0)}. \end{aligned} \quad (3.2.13)$$

Kun vielä asetetaan $t_0=0$, niin saadaan kertasumman ekonomiseksi funktioksi

$$E(t) = e^{-\delta t}. \quad (3.2.14)$$

Jos korkoutuvuus oletetaan vakioksi, ja aikayksikkö vuodeksi lausekkeessa (3.2.9), niin

$$A = K(t_0) \frac{e^{(t_{n-1}-t_0)\delta}}{\sum_{j=0}^{n-1} e^{(t_{n-1}-t_j)\delta}}. \quad (3.2.15)$$

Kun valitaan $A=1$ ja $t_0=0$ saadaan annuiteettien pääoma-arvoksi

$$K(0) = e^{-t_{n-1}\delta} \sum_{j=0}^{n-1} e^{(t_{n-1}-t_j)\delta}. \quad (3.2.16)$$

Kun annuitetteja maksetaan m vuoden ajan s kertaa vuodessa, niin (3.2.16) saadaan muotoon

$$\begin{aligned} K(0) &= e^{-(n-\frac{1}{s})\delta} \sum_{j=0}^{ms-1} e^{(m-\frac{j+1}{s})\delta} \\ &= \sum_{j=0}^{ms-1} e^{-\frac{j}{s}\delta}, \end{aligned} \quad (3.2.17)$$

josta ekonominen funktio

$$\begin{aligned} \bar{\theta}(m, s) &= \sum_{j=0}^{ms-1} e^{-\frac{j}{s}\delta} \\ &= \frac{1-e^{m\delta}}{1-e^{-\frac{1}{s}\delta}}. \end{aligned} \quad (3.2.18)$$

Edellä sarja suppenee, ja viimeinen yhtäsuuruus on voimassa, jos $\delta > 0$. Tätä lauseketta kutsutaan etukäteisen aikakoron pääoma-arvoksi.

Tarkastellaan lausekkeessa (3.2.15) kuvattua tapausta, mutta oletetaan nyt, että pääoman väheneminen tapahtuu jatkuvana prosessina. Tällöin lausekkeessa (3.2.15) summa on korvattava integraalilla yli välin $(0, t)$, missä t on pääoman vähenemisen päättymishetki. Jos edelleen oletetaan, että annuiteetin suuruus on vuodessa yksi rahayksikkö, niin päädytään lausekkeeseen

$$K(0) = e^{-\delta t} \int_0^t e^{\delta \tau} d\tau = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta}. \quad (3.2.19)$$

Tämän jatkuvan aikakoron pääoma-arvon ekonominen funktio on siis

$$e(t) = \frac{1 - e^{-\delta t}}{\delta} = \frac{1 - E(t)}{\delta}. \quad (3.2.20)$$

Näiden perusfunktoiden avulla voidaan johtaa myös muita tarvittavia ekonomisia funktioita. Esim. hetkestä t_1 alkaen ajan t_2 jatkuvan $(0 < t_1 < t_2)$ aikakoron ekonomiseksi funktioksi saadaan kaavat (3.2.15) ja (3.2.20) yhdistämällä $e(t_1, t_2) = E(t_1)e(t_2)$.

Seuraavassa joitakin esimerkkejä

Esimerkki 1.

Taulukossa on 10.000 markan kertasuorituksen pääoma-arvoja muutamalla eri korkoprosenteilla

Aika vuotta	Korko prosenttia				
	0,00	3,50	4,25	4,50	5,50
5	10.000	8.420	8.121	8.025	7.651
10	10.000	7.089	6.595	6.439	5.854
15	10.000	5.969	5.356	5.167	4.479
20	10.000	5.026	4.350	4.146	3.427
25	10.000	4.231	3.533	3.327	2.622
30	10.000	3.563	2.869	2.670	2.006

Esimerkki 2.

Heti alkavan N vuoden ajan kuukausittain etukäteen maksettavan suorituksen pääoma-arvoja.

N	Korko prosenttia				
	0,00	3,50	4,25	4,50	5,50
5	60.000	55.202	54.262	53.955	52.758
10	120.000	101.681	98.330	97.252	93.124
15	180.000	140.815	134.118	131.995	124.010
20	240.000	173.765	163.182	159.874	147.642
25	300.000	201.508	186.785	182.247	165.723
30	360.000	224.867	205.954	200.199	179.558

Esimerkki 3

Heti alkavan N vuoden ajan jatkuvana maksettavan suorituksen pääoma-arvoja.

N	Korko prosenttia				
	0,00	3,50	4,25	4,50	5,50
5	60.000	55.123	54.168	53.856	52.640
10	120.000	101.536	98.159	97.073	92.917
15	180.000	140.614	133.885	131.753	123.734
20	240.000	173.516	162.899	159.582	147.313
25	300.000	201.219	186.462	181.913	165.354
30	360.000	224.545	205.597	199.832	179.158

3.3. Kuolevuusperuste

Kuolevuusperusteessa kuvataan vakuutusmaksujen laskennassa käytettävä kuolevuusmalli. Kappaleessa 1 mainittiin jo, että laskuperusteissa käytetään mallina ajan suhteen epähomogeenista Markovketjua, jossa on kaksi tilaa, ja siirtymistä tapahtuu ainoastaan tilasta 'elossa' tilaan 'kuollut'. Siirtymätodennäköisyys on lausekkeen (1.5) mukaisesti

$$P_{01}(t, h) = \mu_{01}(t)h + o(h), \quad (3.3.1)$$

missä funktiota $\mu_{01}(t)$ kutsutaan kuolevuusintensiteetiksi, kuolevuusfunktiksi tai kuolevuudeksi. Tähän malliin liitetään vielä korkoutuvuus, joka mallinnetaan edellä esitettyjen ekonomisten funktoiden avulla.

Vakuutusyhtiölaissa ilmenevän kohtuusperiaatteen mukaisesti vakuutettavan riskin tulee olla oikeassa suhteessa siitä perittävään maksuun. Tämän takia seuraavaksi pohditaan sitä, millaisiin ryhmiin populaatio tulisi jakaa, jotta kultakin ryhmään kuuluvalta vakuutetulta voitaisiin periä samaa maksua. Toisin sanoen selvitetään mitkä ovat henkilön kuolevuuteen vaikuttavia seikkoja, ja arvioidaan onko niiden vaikutus niin merkittävä, että ne tulee ottaa mallissa huomioon.

Voimakkaimmin kuolevuuteen vaikuttaa henkilön ikä, joka otetaan laskuperusteiden kuvaamassa mallissa muuttujana huomioon. Kaavassa (3.3.1) kuolevuusfunktion argumenttina on ainoastaan aikamuuttuja t , joka kuvaa aikaa prosessin alusta. Koska vakuutetut voivat ottaa vakuutuksen haluamassaan iässä, niin käytetään jatkossa kuolevuusfunktion ikäargumenttia $x+t$, missä x on henkilön ikä prosessin alussa eli vakuutuksen alkaessa ja aika vakuutuksen alusta tarkasteluhetkeen on t . Samanikäiset henkilöt voidaan vielä jakaa alaryhmiin, joilla on erilainen kuolevuus. Laskuperusteissa on vuodesta 1973 lähtien otettu huomioon henkilön sukupuoli kuolevuuteen vaikuttavana tekijänä. Kuten tämän kappaleen lopussa olevista kuolevuusfunktioiden kuvaajista huomataan, tätä ennen

voimassa ollut naisille ja miehille yhteinen kuolevuusperuste oli naisille liian korkea ja miehille liian matala. Vuonna 1988 hyväksytyssä kuolevuusperusteessa sukupuolten välinen ero kuolevuudessa otetaan huomioon käyttämällä naisella kuolintodennäköisyyttä, joka vastaa häntä seitsemän vuotta nuoremman miehen kuolintodennäköisyyttä.

Iän ja sukupuolen lisäksi kuolintodennäköisyyteen vaikuttaa henkilön terveydentila. Tämä otetaan henkivakuutuksessa huomioon pyytämällä vakuutuksen piiriin pyrkivältä selvitys hänen terveydentilastaan, sekä tarpeen vaatiessa myös lääkärintodistus. Saadun selvityksen perusteella vakuutettu luokitellaan normaalivastuuksi tai johonkin erikoisvastuuluokkaan. Erikoisvastuuluokan perusteella määräytyy yhtiön korkeampaan riskiin perustuva maksunkorotus, joka voi olla voimassa korkeintaan kymmenen vuotta. Yhtiö voi myös kieltäytyä kokonaan myöntämästä vakuutusta. Henkivakuutuksessa ei vakuutuksen ottamisen jälkeinen terveydentilassa tapahtuva muutos vaikuta vakuutuksen maksuihin. Näin vakuutusta myönnettäessä valittu vastuuluokka ei huonone vakuutusaikana.

Voidaan erottaa myös monia muita ryhmiä esimerkiksi ammatin, asuinpaikan, harrastusten ja elintapojen mukaan, joiden kuolleisuutta olisi erikseen tutkittava, jotta kuolevuusperuste saataisiin vastaamaan tarkalleen vakuutetun riskiä. Kuitenkin tämän tyyppisten seikkojen huomioiminen aiheuttaisi sen, että kaikista vastuuluokista ei enää olisi saatavissa riittävää tilastoaineistoa. Lisäksi edellä mainitut ominaisuudet eivät ole koko vakuutusaikaa vakioita, joten olosuhteiden muuttuminen vakuutusaikana tulisi ottaa mallissa ja käytännön vakuutustoiminnassa huomioon. Näistä syistä johtuen ei edellä mainittuja tekijöitä ole yleisesti otettu henki- ja eläkevakuutustoiminnassa Suomessa huomioon joitakin tupakoimattomuuteen liittyviä poikkeuksia lukuunottamatta.

Samanikäisten henkilöiden kuolevuuteen eri aikoina vaikuttaa myös kuolevuudessa ilmenevät trendit. Lääketieteellisten menetelmien kehittymisen ja yleisen elintason nousun myötä ihmisten keski-ikä on noussut, joten kuolevuus riippuu henkilön iän lisäksi hänen syntymävuodestaan. Tätä ilmiötä kutsutaan kohorttikuolevuudeksi ja

se otetaan kuolevuusmallissa huomioon tekemällä siihen määrääjoin tarkistuksia uusimpien tilastojen perusteella. Suomessa henkivakuutettujen kuolevuutta koskevia tilastoja on kerätty vuodesta 1890 alkaen. Kuolevuusperusteen tarkistukset on tehty vuosina 1919, 1936, 1957, 1973, 1986 ja 1988. Tämän kappaleen lopussa on kuvio, jossa on piirretty vuosien 1957, 1973, 1986 ja 1988 kuolevuusfunktiot samaan kuvaan.

Edellä jo viitattiin henkivakuutuksen ottamisen yhteydessä vakuutetun terveydentilan perusteella tehtävään vastuunvalintaan. Tämä vastuunvalinta saa aikaan sen, että juuri henkivakuutuksen ottanut henkilö on keskimäärin terveempi kuin samanikäinen vakuutettu, jonka vakuutus on ollut voimassa jonkin aikaa. Tällöin siis vakuutetun tarkasteluhetken iän lisäksi tulisi kuolevuusperusteessa huomioida myös se ikä, jolloin vakuutus on otettu. Valinnan vaikutus näkyy vakuutusajan alussa, mutta myöhemmin sen merkitys häviää. Henki- ja eläkevakuutuksen laskuperusteissa ei tätä selektikuolevuudeksi kutsuttua ilmiötä oteta huomioon. Tätä perustellaan sillä, että vakuutettujen ikä vakuutusta otettaessa on yleensä alhainen ja vakuutusaika niin pitkä, että selektikuolevuudella ei ole vakuutusmaksun suuruuden kannalta merkitystä. Näin ollen kuolevuusmallia on yksinkertaistettu jättämällä selektikuolevuus huomiotta.

Yhteenvetona edellä olevasta on, että Suomen vakuutustoiminnassa käytettävässä kuolevuusmallissa vaikuttavia tekijöitä ovat henkilön ikä ja sukupuoli. Vakuutetuksi pyrkivältä pyydetään selvitys hänen terveydentilastaan, jotta hänet voidaan sijoittaa johonkin vastuuluokkaan, jossa sitten hänen kuolintodennäköisyytensä katsotaan riippuvan ainoastaan hänen iästään ja sukupuolestaan.

Tarkastellaan henkilöä, jonka ikä tarkasteluhetkellä on x . Henkilön jäljellä oleva elinikä T on satunnaismuuttuja, jonka jakautumafunktiosta käytetään merkintää $G(t) = P(T \leq t)$, $t \geq 0$. Siis $G(t)$ on todennäköisyys sille, että x -ikäinen henkilö on kuollut hetkellä t ja $1-G(t)$ todennäköisyys sille, että henkilö on elossa hetkellä t . Nämä todennäköisyydet vastaavat kappaleessa 1 esitettyjä tilatodennäköisyyksiä, nyt vain jäljellä olevan eliniän

jakautumafunktion avulla esitettyinä. Tällöin kaavan (1.14) mukaisesti saadaan todennäköisyys sille, että henkilö on elossa hetkellä t

$$P(T > t) = 1 - G(t) = P_0(t) = e^{-\int_0^t \mu(x+\tau) d\tau} \quad (3.3.2)$$

Edelleen todennäköisyys sille, että x -ikäinen henkilö elää ikään $x+t$ ja kuolee differentiaalin dt aikana on

$$\begin{aligned} P(t \leq T \leq t+dt) &= \mu(x+t) [1-G(t)] dt \\ &= \mu(x+t) e^{-\int_0^t \mu(x+\tau) d\tau} dt = dG(t). \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Tarkastellaan seuraavaksi x -ikäiselle henkilölle myönnettyä säästövakuutusta, jossa vakuutussumma maksetaan mikäli vakuutettu on elossa vakuutusajan päättyessä n vuoden kuluttua. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että vakuutussumman suuruus on yksi rahayksikkö. Vakuutusta kuvaava ekonominen funktio on lausekkeen (3.2.14) merkinnöin

$$K(T) = \begin{cases} E(n), & \text{jos } T > n \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \quad (3.3.4)$$

Tämä ekonominen funktio on nyt siis satunnaismuuttujan funktio. Funktion odotusarvo on vakuutuksesta todennäköisesti syntyvän korvausmenon pääoma-arvo vakuutusajan alussa. Tätä odotusarvoa kutsutaan säästövakuutuksen kuormittamattomaksi vastuukertämäksi, ja merkitään

$$\begin{aligned} A'(x, x+n/V) &= EK(T) = \int_0^\infty K(t) dG(t) = \int_n^\infty E(n) dG(t) \\ &= E(n) P(T > n) = e^{-\int_0^n \mu(x+\tau) d\tau}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Mikäli rahayksikön suuruinen summa maksetaan vakuutetun kuoleman sattua vakuutusaikana, on kysymyksessä puhdas kuolemanvaravakuutus. Sen ekonominen funktio on

$$K(T) = \begin{cases} E(T), & \text{jos } T \leq n \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Yhtiölle todennäköisesti aiheutuvan korvausmenon pääoma-arvo eli vakuutuksen kuormittamaton vastuukertamaksu saadaan ekonominen funktion odotusarvona

$$\begin{aligned} A(x, x+n/K) &= EK(T) = \int_0^{\infty} K(t) dG(t) = \int_0^n E(t) dG(t) \\ &= \int_0^n \mu(x+t) e^{-\int_0^t \mu(x+\tau) + \delta d\tau} dt. \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Jos x -ikäiselle elossa olevalle vakuutetulle maksetaan n vuoden ajan jatkuvaa suoritusta, jonka suuruus on yksi rahayksikkö vuodessa, niin ekonominen funktio on muotoa

$$K(T) = \begin{cases} e(T), & \text{jos } T \leq n \\ e(n), & \text{jos } T > n \end{cases} \quad (3.3.8)$$

Tämän odotusarvoa

$$\begin{aligned} a(x, x+n) &= \int_0^{\infty} K(t) dG(t) = \int_0^n a(t) dG(t) + \int_n^{\infty} a(n) dG(t) \\ &= \int_0^n \frac{1-E(t)}{\delta} dG(t) + \int_n^{\infty} \frac{1-E(n)}{\delta} dG(t) \\ &= \frac{1}{\delta} \left[1 - \int_0^n \mu(x+t) e^{-\int_0^t \mu(x+\tau) + \delta d\tau} dt - e^{-\int_0^n \mu(x+\tau) + \delta d\tau} \right] \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

kutsutaan jatkuvan elinkoron pääoma-arvoksi, ja siitä käytetään merkintää $a(x, x+n)$. Sitä käytetään laskettaessa tulevien vanhuus-

lesken- ja orvoneläkkeiden sekä tulevien vakuutusmaksujen pääoma-arvoja.

Edellä esitetyn funktion G jakautuma, vastuukertamaksut ja elinkorko saadaan määrättyä, mikäli tunnetaan kuolevuusfunktio $\mu(x+t)$. Koko väestöä koskevia kuolevuustilastoja ei voida sellaisenaan käyttää, sillä henkivakuutettujen joukkoon tapahtuu valintaa vakuutusta otettaessa tehtävän vastuunvalinnan yhteydessä. Niinpä käytetään henkivakuutettujen kuolevuudesta kerättyä tilastoaineistoa, eli yleensä yhtiöiden tekemän riskiperusteanalyysin yhteenve-toa.

Kuolevuusfunktion muoto perustuu Gompertzin vuonna 1825 julkaisemaan tutkimukseen, jossa hän esittää, että henkilön iän kasvaessa hänen voimansa vastustaa tautien tuhoja vähenee. Tämän voiman hän totesi vähenevän määrällä, joka on suhteessa tähän voimaan itseensä. Hän käytti kuolevuuden käänteisarvoa $1/\mu(x)$ mittana ihmisen kyvylle vastustaa kuolemaa. Silloin hän päätyi edellä mainitun periaatteen mukaan kaavaan

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{\mu(x)} = -h \frac{1}{\mu(x)}, \quad (3.3.10)$$

missä $h>0$ on vakio. Ratkaisemalla $\mu(x)$ saadaan $\mu(x) = Be^{\alpha x}$. Vaikka Gompertzkin oli huomannut kuoleman riippuvan myös puhtaasta sattumasta, niin hän ei ottanut tätä huomioon mallissaan. Vasta vuonna 1860 Makeham laajensi Gompertzin kehittämää mallia ottamalla mukaan tapaturmaista kuolemaa kuvaavan vakiotekijän, jolloin kuolevuusfunktio sai muodon $\mu(x) = A + Be^{\alpha x}$. Tämän muotoisena kuolevuusfunktio on vieläkin käytössä sekä henkivakuutuksessa että vapaaehtoisessa eläkevakuutuksessa. TEL:n mukaisessa eläkevakuutuksessa ei vakiotermiä A käytetä.

Kun kuolevuusfunktiolle on löydetty sopiva muoto, niin sovitetaan funktion parametrit tilastoaineistoon sopiviksi. Sovitus tehdään normaalein tilastotieteen keinoin, eikä siihen tässä yhteydessä

puututa kuin toteamalla, että lausekkeen (3.3.2) merkinnöin

$$P_0(t) = \frac{l(x+t)}{l(x)}, \quad (3.3.11)$$

missä $l(x)$ on tilastotutkimukseen valittujen x -ikäisten vakuutettujen lukumäärä tarkasteluajan alussa, ja $l(x+t)$ näistä elossa olevien lukumäärä ajan t kuluttua.

Vuonna 1957 vahvistetuissa henkivakuutuksen laskuperusteissa kuolevuusfunktio oli sekä naisilla että miehillä

$$10^3 \mu(x+h) = \begin{cases} 1,50 & , \text{ kun } x+h \leq 33 \\ 0,0737424 \cdot 10^{0,0396477(x+h)} & , \text{ kun } x+h > 33 \end{cases} \quad (3.3.12)$$

Vuonna 1973 otettiin kuolevuudessa huomioon sukupuolten välinen ero. Laskutekniikan yksinkertaistamiseksi kummallakin sukupuolella käytettiin samaa funktiota ja ero otettiin huomioon tekemällä ns. ikäsiirto, jonka mukaan naisen kuolevuus vastaa häntä kahdeksan vuotta nuoremman miehen kuolevuutta. Kuolevuusfunktio oli muotoa

$$\mu(x+h) = 0,0006 + 10^{0,05(x+h-91,5)} \quad (3.3.13)$$

Vuonna 1986 otettiin havaitun kuolevuuden edelleen alennuttua uusi peruste käyttöön. Naisen kuolevuuden laskettiin näissä perusteissa vastaavan häntä seitsemän vuotta nuoremman miehen kuolevuutta. Vuoden 1986 kuolevuusfunktio on muotoa

$$\mu(x+h) = 1,15(0,00048 + 10^{0,055(x+h-92,5)}) \quad (3.3.14)$$

Vuonna 1988 korjattiin kuolevuusfunktioita kaikilla iäjillä edelleen alaspäin ja lisäksi otettiin käyttöön η -funktio, joka korjaa ikää 72 vanhempien henkilöiden kuolevuutta alaspäin. Korjattu funktio on muotoa

$$\mu(x+h) = 1,15(0,00048 + 10^{0,055(x+h-94,5)-0,02(x+h-72)^2}) \quad (3.3.15)$$

Henkivakuutuksessa on käytetty samaa kuolevuusfunktioita laskettiinpa sitten vakuutusmaksujen pääoma-arvoa tai säästövakuutuksen

tai kuolemanvaravakuutuksen vastuukertamaksuja, vaikka turvaavuus-periaatteen mukaan tulisikin kahdessa ensin mainitussa tapauksessa käyttää havaittua alhaisempaa kuolevuutta, ja kuolemanvaravakuutuksen vastuukertamaksua laskettaessa havaittua korkeampaa kuolevuutta.

Vapaaehtoisessa yksilöllisessä eläkevakuutuksessa käytetään samaa kuolevuusfunktia, kuin henkivakuutuksessa. Koska kuitenkin eläkevakuutuksessa säästöosuuden merkitys on huomattavasti suurempi, niin vanhuuseläkeen pääoma-arvoja laskettaessa käytetään eri kuolevuutta kuin perhe-eläkkeen pääoma-arvoja laskettaessa. Käytännössä tämä on hoidettu ikäsiirtojen avulla. Niinpä perhe-eläkkeen pääoma-arvoa laskettaessa käytetään samaa kuolevuutta kuin henkivakuutuksessa, mutta vanhuus- ja työkyvyttömyyseläkkeen pääoma-arvoja laskettaessa muutetaan vakuutettu mies kuusi vuotta, ja vakuutettu nainen viisitoista vuotta todellista ikäänsä nuoremmaksi.

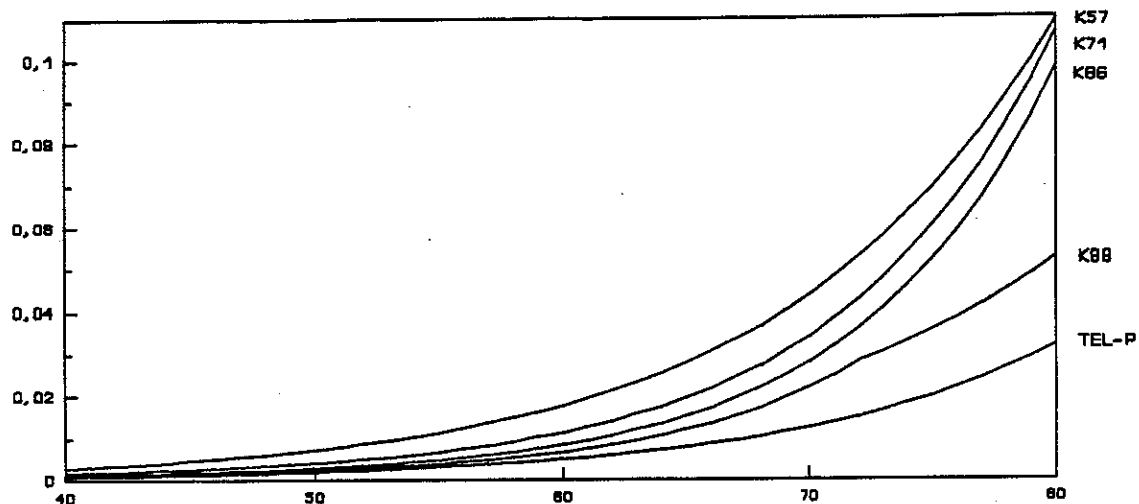
Lakisääteisessä TEL-eläkevakuutuksessa käytetään Gompertzin kehittämää kuolevuusfunktia puhtaimmillaan. Miesten kuolevuusfunktio on nimittäin määritelty seuraavasti :

$$\mu(x) = 0,00005 e^{0,095(x+k)}, \quad (3.3.16)$$

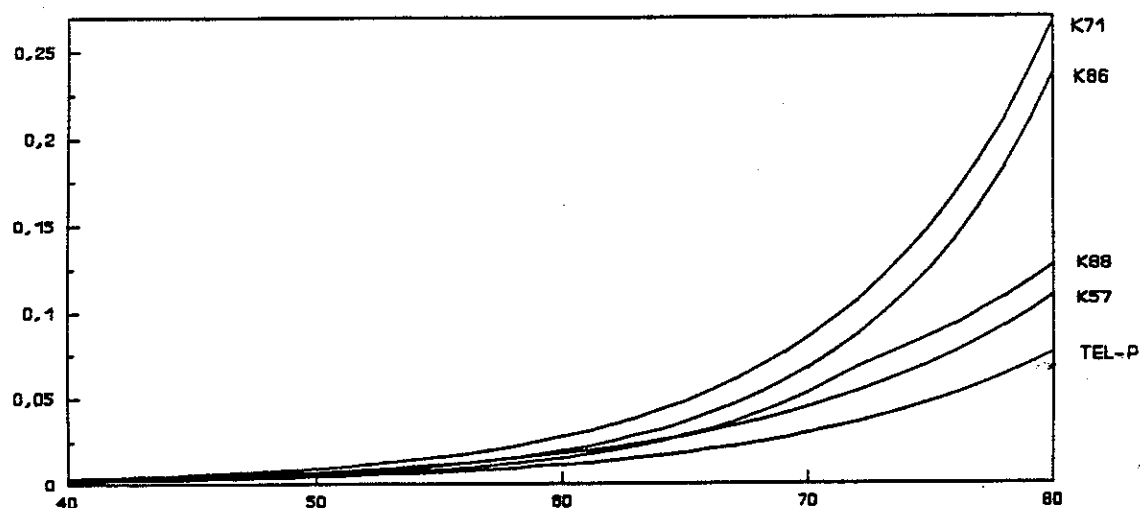
missä k on jokin luvuista $-2, -3, \dots$ riippuen vakuutetun syntymävuodesta. Naisten pienempi kuolevuus otetaan huomioon käyttämällä laskuissa naisilla yhdeksän vuotta hänen ikäänsä nuoremman miehen kuolevuutta. Kuten myöhemmin käy ilmi, niin TEL:n työkyvyttömyysmallissa käytetään laskennan yksinkertaistamiseksi vakiokuolleisuutta.

Seuraavissa kuvissa on havainnollistettu henkivakuutuksessa käytettyjen kuolevuusfunktioiden kehittymistä. Samaan kuvaan on piir-

retty myös TEL:n mukainen kuolevuusfunktio, jossa vakio $k = -3$.
Ensin naisten kuolevuusfunktioita



Ja sitten miesten kuolevuusfunktioita



Kun kuolevuusfunktio on saatu määrättyä, niin voidaan etukäteen laskea ja taulukoida joukko käsin tehtäviä laskelmia helpottavia apulukuja. Ensinnäkin määritellään teoreettinen elossa olevien lukumäärä skaalaamalla lausekkeessa (3.3.11) iässä 0 olevien luku-

määräksi $l(0) = 10^6$. Tällöin

$$l(x) = l(0) e^{-\int_0^x \mu(\tau) d\tau} = 10^6 e^{-\int_0^x \mu(\tau) d\tau} \quad (3.3.17)$$

Edelleen

$$D(x) = l(x) e^{-\delta x} = 10^6 e^{-\int_0^x \mu(\tau) + \delta d\tau} \quad (3.3.18)$$

ja

$$N(x) = \int_x^\infty D(t) dt. \quad (3.3.19)$$

Nyt voidaan säästövakuutuksen vastuukertamaksu (3.3.5) ja elin-korko (3.3.7) kirjoittaa uudestaan muotoon

$$A'(x, x+n/V) = e^{-\int_0^n \mu(x+\tau) + \delta d\tau} = e^{-\int_x^{x+n} \mu(\tau) + \delta d\tau} = \frac{e^{-\int_0^{x+n} \mu(\tau) + \delta d\tau}}{e^{-\int_0^x \mu(\tau) + \delta d\tau}} = \frac{D(x+n)}{D(x)} \quad (3.3.20)$$

$$a(x, x+n) = \int_0^n \frac{D(x+t)}{D(x)} dt = \frac{\int_x^{x+n} D(t) dt - \int_x^x D(t) dt}{D(x)} = \frac{N(x) - N(x+n)}{D(x)}.$$

Tarkastellaan lopuksi kahta ensimmäisessä kappaleessa esitettyä esimerkkiä. Jätetään nyt korko huomiotta, ja tarkastellaan vain kuolevuuden vaikutusta.

Esimerkki 1.

Seuraavassa on laskettu 35-vuotiaalle mieshenkilölle 10.000 markan säästövakuutuksen kertamaksu, kun ainoastaan kuolevuuden vaikutus huomioidaan

5	vuoden vakuutus, kertamaksu on	9.930 mk
10	vuoden vakuutus, kertamaksu on	9.823 mk
15	vuoden vakuutus, kertamaksu on	9.648 mk
20	vuoden vakuutus, kertamaksu on	9.350 mk
25	vuoden vakuutus, kertamaksu on	8.834 mk
30	vuoden vakuutus, kertamaksu on	7.959 mk

Esimerkki 2.

Saman henkilön heti alkavan eläkevakuutuksen kertamaksu, kun vuosieläke on 12.000 mk. Edelleen on otettu huomioon vai kuolevuuden vaikutus

5	vuoden vakuutus, kertamaksu on	59.734 mk
10	vuoden vakuutus, kertamaksu on	118.678 mk
15	vuoden vakuutus, kertamaksu on	175.878 mk
20	vuoden vakuutus, kertamaksu on	229.239 mk
25	vuoden vakuutus, kertamaksu on	274.446 mk
30	vuoden vakuutus, kertamaksu on	303.341 mk

Kuten esimerkeistä huomataan, niin korkoutuvuuteen verrattuna kuolevuuden vaikutus ei ole kovin merkittävä.

3.4. Pitkäaikaisen työkyvyttömyyden peruste

Työkyvyttömyysmallilla kuvataan populaatiossa havaittua sen jäsenten työkyvyttömyyttä jäsenten ominaisuuksien avulla. Kuten kappaleessa 1 jo todettiin, niin työkyvyttömyyttä voidaan mallintaa stokastisella prosessilla, jossa henkilö voi olla kolmessa tilassa 'työkykyinen', 'työkyvytön', tai 'kuollut'. Siirtymistä tilasta 'työkykyinen' tilaan 'työkyvytön' kutsutaan sairastumiseksi ja siirtymistä tilasta 'työkyvytön' tilaan 'työkykyinen' paranemiseksi.

Työkyvyttömyys on ilmiönä monimutkaisempi kuin kuolevuus. Siihen liittyvät samat vastuunvalintaan, trendeihin ja selektiivisyyteen liittyvät asiat, joita jo kuolevuuden yhteydessä käsiteltiin. Lisäksi työkyvyttömyys käsitteenä ei ole itsestään selvä, vaan siihen liittyy useita valinnaisia määritelmiä. Esimerkiksi TEL-eläkelain mukaisen työkyvyttömyyseläkeen edellyttämää työkyvyn alenemista arvioitaessa otetaan huomioon työntekijän jäljellä oleva kyky hankkia itselleen ansiotuloja saatavissa olevalla sellaisella työllä, jonka suorittamista voidaan häneltä kohtuudella edellyttää silmällä pitäen hänen koulutustaan, aiempaa toimintaansa, ikäänsä, asumisolosuhteitaan sekä niihin verrattavia seikkoja. Saman lain mukaisen yksilöllisen varhaiseläkkeen saamisen edellytyksenä on, että työntekijän työkyky huomioon ottaen sairaus, vika tai vamma, ikääntymiseen liittyvät tekijät, ammatissaolon pitkäaikaisuus, hänelle työstä aiheutunut rasittuneisuus ja kuluneisuus sekä työolosuhteet, on pysyvästi siinä määrin alentunut, ettei hänen kohtuudella voida edellyttää enää jatkavan ansiotyötään. Henkivakuutuksessa pysyvää työkyvyttömyyttä koskevan vakuutuksen vakuutussumma maksetaan, jos vakuutettu on pysyvästi menettänyt kykynsä tehdä tavallista työtään eikä kaiken todennäköisyyden mukaan enää kykene muuhunkaan työhön, jota ikä ja ammattitaito huomioon ottaen on pidettävänä hänelle sopivana ja kohtuullisen toimeentulon turvaavana.

Työkyvyttömyys ei useinkaan ole täydellistä. Henkilö voi esimerkiksi olla kyvytön jatkamaan sitä työtä, jota hän teki ennen

työkyvyttömäksi tuloaan, mutta hän voi silti olla kykenevä johonkin muuhun työhön. Työkyvyttömyyden alku ja kesto ovat riippuvaisia sellaisista vaikeasti matemaattisesti mallinnettavista asioista kuin tutkivan lääkärin tekemä arvio ja työkyvyttömänä saatavien etujen määrä ja laatu. Lisäksi yhteiskunnan taholta voi esimerkiksi suuren työttömyyden vallitessa tai yhteiskuntarakenteen muuttuessa olla painetta siirtää ikääntyneitä työntekijöitä eläkkeelle normaalia eläkeikää aiemmin.

Paraneminen mutkistaa työkyvyttömyysmallin matemaattista käsittelyä. Paraneminen aiheuttaa sen, että siirtyminen tilasta työkykyinen tilaan työkyvytön ei olekaan peruuttamaton, vaan henkilö voi siirtyä useita kertoja tilasta toiseen. Tällöin mallin suunnittelussa tulee ottaa huomioon henkilön tarkasteluhetken iän lisäksi se ikä, jossa henkilö on tullut työkyvyttömäksi ja lisäksi henkilön mahdollisten aiempien työkyvyttömyyksien ajankohta ja kesto. Paranemiseen ei ole yksikäsitteistä, vaan siinä voi olla aste-eroja, jotka riippuvat työkyvyttömäksi tuloiästä ja työkyvyttömyyden asteesta. Lisäksi aiemmat työkyvyttömyydet vaikuttavat taas siihen todennäköisyyteen, jolla uudelleen sairastutaan. Edellä mainittujen seikkojen huomioon ottaminen tekisi mallin matemaattisen käsittelyn jos ei täysin mahdottomaksi, niin ainakin niin monimutkaiseksi, että se ei enää käytännön vakuutustoiminnassa olisi tarkoituksenmukaista.

Suomessa vakuutustoiminnassa käytetään kahdenlaista työkyvyttömyysmallia. Vapaaehtoisen eläkevakuutuksen yhteydessä myönnettävässä työkyvyttömyyseläkevakuutuksessa käytetään ns. intensiteettimallia, jonka peruseriaatteita jo kappaleessa 1 esiteltiin.

Toinen niin sanottu Z-malli on käytössä TEL:n mukaisessa työkyvyttömyyseläkevakuutuksessa. Z-mallissa pyritään ensin löytämään matemaattinen esitys funktiolle $Z(x,u)du$, joka tarkoittaa todennäköisyyttä, että vastasyntynyt on elossa iässä x ja on tällöin ollut yhdenjaksoisesti työkyvytön ajan, jonka pituus on välillä $(u,u+du)$. Tämän todennäköisyyden avulla johdetaan sitten muut tarvittavat todennäköisyydet ja vastuukertamaksut.

3.4.1 Z-mallin perusperiaatteita ja yhteys intensiteettimalliin

TEL:n laskuperusteissa määritellään Z-funktio seuraavien kahden lausekkeen avulla

$$\int_0^x Z(x, u) du = e^{-a_1 x} \quad (3.4.1.1)$$

ja

$$Z(x, u) = \sum_{j=0}^2 Z_j(x, u) = \sum_{j=0}^2 a_j e^{b_j x - c_j u}, \quad (3.4.1.2)$$

kun $x > u > e_0$. Tässä e_0 on raja, jota lyhyemmistä työkyvyttömyysjaksoista ei eläkettä makseta. Integraali (3.4.1.1) ilmoittaa todennäköisyyden sille, että vastasyntynyt on elossa iässä x . Työkyvyttömyysmallissa käytetään vakiokuolevuutta, kuten voidaan helposti huomata yhdistettäessä lausekkeessa (3.3.2) saatu tulos integraaliin (3.4.1.1). Kaavasta (3.4.1.2) seuraa käytännön laskennassa käyttökelpoinen ominaisuus

$$Z_j(t+h, u+k) = Z_j(t, u) e^{b_j h} e^{-c_j k} \quad (3.4.1.3)$$

Tarkastellaan seuraavaksi x -ikäistä henkilöä, joka on ollut työkyvytön ajan u , ja määritellään satunnaismuuttuja $T^p(x, u)$ kuvaamaan työkyvyttömyyden vastaista kestoa. Z-funktion määritelmän mukaan ja kaavaa (3.4.1.3) soveltamalla saadaan

$$\begin{aligned} P(T^p(x, u) > h) &= Z(x+h, u+h) / Z(x, u) \\ &= \sum_{j=0}^2 \frac{Z_j(x, u)}{Z(x, u)} e^{(b_j - c_j)h} \end{aligned} \quad (3.4.1.4)$$

Työkyvyttömyyden vastaisen keston jakautumafunktio $F(x,u,h) = P(T^p(x,u) \leq h) = 1 - P(T^p(x,u) > h)$, kun $h > 0$. Tiheysfunktioiksi saadaan

$$f(x,u,h) = \sum_{j=0}^2 \frac{Z_j(x,u)}{Z(x,u)} (c_j - b_j) e^{(b_j - c_j)h}. \quad (3.4.1.5)$$

Kaavasta huomataan, että muuttujan $T^p(x,u)$ jakautuma on sekoitus kolmesta eksponenttijakautumasta, joiden parametreina ovat lausekkeet $(c_j - b_j)$. Kunkin jakautuman odotusarvo eli työkyvyttömyyden vastaisen keston odotusarvo tämän komponentin osalta on jakautuman parametrin käänteisluku $1/(c_j - b_j)$. Kun kertoimien c_j ja b_j arvoiksi sijoitetaan laskuperusteiden 1.1.1987 mukaiset arvot, niin Z -funktion komponentteihin liittyvät vastaisen keston odotusarvot ovat 1.6, 62.5 ja 20 vuotta. Siis Z -funktion komponenteista ensimmäinen kuvaa lyhyitä, toinen pitkiä ja kolmas keskipitkiä työkyvyttömyyden kestoja.

Työkyvyttömyyseläkkeen vastaisen keston avulla määritetään x -ikäisen vakuutetun iässä $x-u$ alkaneen työkyvyttömyyseläkkeen pääoma-arvo, kun eläkettä maksetaan korkeintaan ikään w saakka

$$\bar{a}^{III} = \int_0^{w-x} P(T^p(x,u) > h) e^{-\delta h} dh = \sum_{j=0}^2 \frac{Z_j(x,u)}{Z(x,u)} \int_0^{w-x} e^{(b_j - c_j - \delta)h} dh. \quad (3.4.1.6)$$

Seuraavaksi johdetaan vastaisen työkyvyttömyyseläkkeen pääoma-arvo eli x -ikäisen työkykyisen henkilön työkyvyttömyyseläkkeen vastuukertamaksi. Z -funktion määritelmän mukaan todennäköisyys sille, että vastasyntynyt on iässä x työkykyinen, iässä s työkyvytön ($x < s$) ja on lisäksi ollut työkyvytön ajan, jonka pituus on välillä $(u, u+du)$, saadaan lausekkeesta $Z(s,u)du$, kun $e_0 < u < s-x$. Ehdollisen

todennäköisyyden määritelmän mukaan

$$P(\text{'Vastasyntynyt on iässä } s \text{ työkyvytön ja ollut sitä ajan } (u, u+du) \mid \text{vastas. on iässä } x \text{ työkykyinen'}) \quad (3.4.1.7)$$

$$= \frac{Z(s, u) du}{P^A(x)},$$

ja $e_0 \leq u \leq s-x$. Integroimalla muuttujan u suhteen saadaan

$$P(\text{'Vastasyntynyt on iässä } s \text{ työkyvytön} \mid \text{vastasyntynyt on iässä } x \text{ työkykyinen'}) \quad (3.4.1.8)$$

$$= \frac{\int_{e_0}^{s-x} Z(s, u) du}{P^A(x)}.$$

Integroimalla tämä lauseke muuttujan s suhteen saadaan x -ikäisen henkilön työkyvyttömyyseläkkeen vahinkomenon odotusarvo, kun vuosieläke on yhden rahayksikön suuruinen. Kuormittamaton vastuukertamaksu saadaan diskonttaamalla hetkellä s maksettava suoritus vakuutuksen alkuhetkeen korkotekijällä $e^{-\delta(s-x)}$, eli

$$\bar{A}(x, w) = \frac{1}{P^A(x)} \int_{x+e_0}^w e^{-\delta(s-x)} \int_{e_0}^{s-x} Z(s, u) du ds. \quad (3.4.1.9)$$

Laskuperusteissa todennäköisyyttä $P^A(x)$ approksimoidaan elossa-olotodennäköisyydellä (3.4.1.1), jolloin vastuukertamaksun lauseke saadaan muotoon

$$\bar{A}(x, w) = e^{(a_0+\delta)x} \int_{x+e_0}^w e^{-\delta s} \int_{e_0}^{s-x} Z(s, u) du ds. \quad (3.4.1.10)$$

Koska $Z(x, u)$ on määritelty ainoastaan kun $u > e_0$, niin mallista ei saada selville intensitettimallin mukaisia siirtymäintensiteettejä. Kuitenkin mallista saadaan selville joitakin sellaisen prosessin siirtymäintensiteettejä, jossa henkilö katsotaan työkyvyttömäksi vasta odotusajan e_0 kuluttua. Tästä prosessista, jota

jatkossa kutsutaan Z-prosessiksi saadaan kiinnitettyä sairastumisintensiteetti sekä työkyvyttömyyden päättymisintensiteetti, joka on työkyvyttömän kuolevuus- ja paranemisintensiteetin summa. Käytetään sairastumisintensiteetistä merkintää μ_s ja työkyvyttömyyden päättymisintensiteetistä merkintää μ_p . Esitetään ensin kaksi laskennassa tarvittavaa aputulosta. Todennäköisyys sille, että x-ikäinen henkilö on työkyvyttömän Z-prosessin mielessä on Z-funktion määritelmän perusteella

$$\begin{aligned} P_I^Z(x) &= \int_0^x Z(x, u) du \\ &= \sum_{j=0}^2 a_j e^{b_j x} \frac{1}{c_j} (e^{-c_j e_0} - e^{-c_j x}) \\ &= \sum_{j=0}^2 \frac{1}{c_j} (Z_j(x, e_0) - Z_j(x, x)). \end{aligned} \quad (3.4.1.11)$$

Todennäköisyys sille, että x-ikäinen henkilö on Z-prosessin mielessä työkykyinen saadaan vähentämällä elossaolotodennäköisyydestä edellä esitetty työkyvyttömyystodennäköisyys eli

$$P_A^Z(x) = e^{-a_0 x} - \sum_{j=0}^2 \frac{1}{c_j} (Z_j(x, e_0) - Z_j(x, x)). \quad (3.4.1.12)$$

Näiden lausekkeiden avulla voidaan nyt johtaa siirtymätodennäköisyydet. Todennäköisyys sille, että x-ikäinen Z-prosessin mielessä työkykyinen henkilö tulee differentiaalin dx aikana Z-prosessin mielessä työkyvyttömäksi on Z-funktion määritelmän ja kaavan (3.4.1.3) perusteella

$$\begin{aligned} \lim_{dx \rightarrow 0} Z(x+dx, e_0+dx) &= \lim_{dx \rightarrow 0} \sum_{j=0}^2 Z_j(x+dx, e_0+dx) \\ &= \lim_{dx \rightarrow 0} \sum_{j=0}^2 Z_j(x, e_0) e^{(b_j - c_j) dx} \\ &= \sum_{j=0}^2 Z_j(x, e_0) = Z(x, e_0). \end{aligned} \quad (3.4.1.13)$$

Toisaalta sama todennäköisyys voidaan esittää myös siirtymäintensiteetin avulla

$$\mu_s(x) P_A^Z(x) dx. \quad (3.4.1.14)$$

Kun todennäköisyydet asetetaan yhtäsuuriksi ja otetaan huomioon kaavassa (3.4.1.12) saatu tulos, niin Z-prosessin mukaiselle sairastumisintensiteetille saadaan lauseke

$$\mu_s(x) = \frac{Z(x, e_0)}{e^{-a_1 x} - \sum_{j=0}^2 \frac{1}{c_j} (Z_j(x, e_0) - Z_j(x, x))}. \quad (3.4.1.15)$$

Seuraavaksi johdetaan x-ikäisen työkyvyttömän työkyvyttömyyden päättymisintensiteetti $\mu_p(x)$. Todennäköisyyden $P_I^Z(x)$ muutos differentiaalin dx aikana saadaan lausekkeesta

$$dP_I^Z(x) = -\mu_p(x) P_I^Z(x) dx + \mu_s(x) P_A^Z(x) dx$$

$$\Rightarrow \mu_p(x) = \frac{\mu_s(x) P_A^Z(x) - \frac{dP_I^Z(x)}{dx}}{P_I^Z(x)} \quad (3.4.1.16)$$

$$\Rightarrow \mu_p(x) = \frac{Z(x, e_0) - \frac{dP_I^Z(x)}{dx}}{\sum_{j=0}^2 \frac{1}{c_j} (Z_j(x, e_0) - Z_j(x, x))}.$$

Edelleen

$$\begin{aligned}
 \frac{dP_I^Z(x)}{dx} &= \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^2 \left[\frac{1}{c_j} Z_j(x, e_0) - Z_j(x, x) \right] \\
 &= \frac{d}{dx} \sum_{j=0}^2 \frac{a_j}{c_j} (e^{b_j x - c_j e_0} - e^{(b_j - c_j)x}) \\
 &= \sum_{j=0}^2 \left[\frac{a_j b_j}{c_j} e^{b_j x - c_j e_0} - \frac{a_j (b_j - c_j)}{c_j} e^{(b_j - c_j)x} \right] \\
 &= \sum_{j=0}^2 \left[\frac{b_j}{c_j} Z_j(x, e_0) - \frac{b_j - c_j}{c_j} Z_j(x, x) \right].
 \end{aligned} \tag{3.4.1.17}$$

Kun tämä sijoitetaan kaavaan (3.4.1.16), niin saadaan työkyvyttömyyden kestosta riippumaton työkyvyttömyyden päättymisintensiteetti

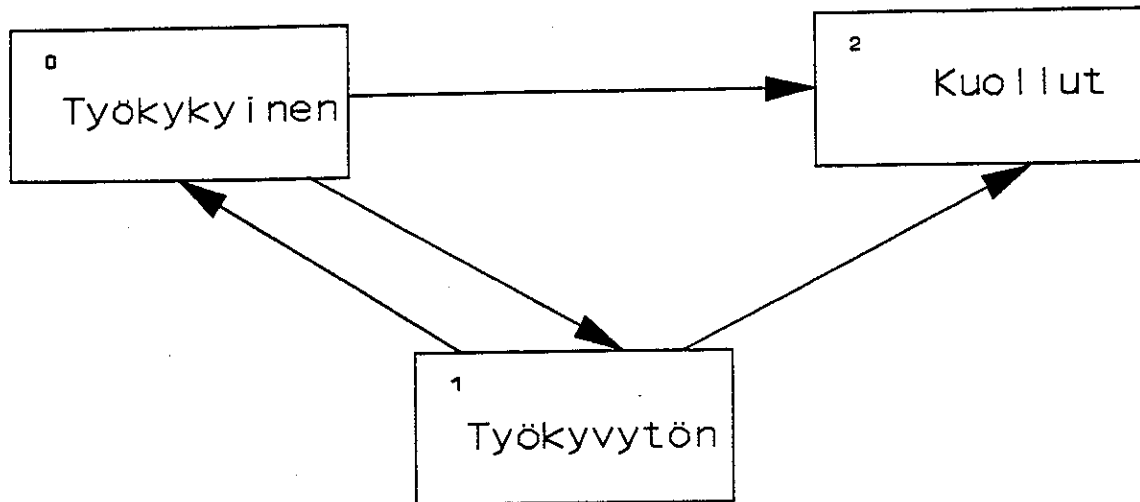
$$\mu_p(x) = \frac{\sum_{j=0}^2 \frac{c_j - b_j}{c_j} [Z_j(x, e_0) - Z_j(x, x)]}{\sum_{j=0}^2 \frac{1}{c_j} [Z_j(x, e_0) - Z_j(x, x)]} \tag{3.4.1.18}$$

Teoreettisissa tarkasteluissa Z-prosessin intensiteeteistä saadaan raja-arvona intensiteettimallin intensiteetit, kun $e_0 \rightarrow 0$.

3.4.2. Intensiteettimalli ja työkyvyttömyyden peruste yksilöllisessä eläkevakuutuksessa

Vapaaehtoiseen yksilölliseen eläkevakuutukseen liitettävässä työkyvyttömyyseläkevakuutuksessa on käytössä intensiteettimalli. Malli on kolmitilainen Semi-Markov -prosessi, jossa siirtymistodennäköisyys tilasta 'työkyvytön' riippuu siitä hetkestä, jolloin

tilaan on tultu. Mallin rakennetta havainnollistaa seuraava kuva



Siirtymätodennäköisyydet ovat lausekkeessa (1.5) esitetyn mukaisia, joten

$P_{02}(t, dt) = \mu_2(x+t)dt + o(dt)$ on todennäköisyys sille, että $x+t$ -ikäinen työkykyinen henkilö kuolee differentiaalin dt aikana.

$P_{12}(t, s, dt) = \mu_1(x+t, x+s)dt + o(dt)$ on todennäköisyys sille, että $x+t$ -ikäinen iässä $x+s$ työkyvyttömäksi tullut ($s < t$) henkilö kuolee differentiaalin dt aikana

$P_{01}(t, dt) = \nu(x+t)dt + o(dt)$ on todennäköisyys sille, että $x+t$ -ikäinen työkykyinen henkilö sairastuu differentiaalin dt aikana

$P_{10}(t, s, dt) = \nu(x+t, x+s)dt + o(dt)$ on todennäköisyys sille, että $x+t$ -ikäinen iässä $x+s$ työkyvyttömäksi tullut ($s < t$) henkilö paranee differentiaalin dt aikana.

Kuten näistä todennäköisyyksistä huomataan, niin mallissa ei oteta huomioon mahdollisten aikaisempien työkyvyttömyyksien ajankohtia ja kestoja.

Tarkastellaan seuraavaksi x -ikäistä työkykyistä henkilöä. Olkoon $T^A(x)$ satunnaismuuttuja, joka kertoo ajan tarkasteluhetkestä siihen, kun henkilö siirtyy tilasta työkykyinen johonkin toiseen tilaan. Silloin siis $F(t) = P(T^A(x) \leq t)$ on todennäköisyys sille,

että henkilö on ajan t kuluessa siirtynyt joko tilaan kuollut tai tilaan työkyvytön. Jos oletetaan, että funktio $F(t)$ on derivoituva ja $f(t) = F'(t)$, niin $f(t)dt = F(t+dt) - F(t) = P(t \leq T^A(x) \leq t+dt)$ edellyttäen, että dt on niin pieni, että kyseisenä aikana voi tapahtua ainoastaan yksi siirtyminen tilasta toiseen. Toisaalta $1-F(t) = P(T^A(x) > t)$ on todennäköisyys sille, että hetkeen t mennessä ei henkilön tilassa ole tapahtunut muutosta. Koska työkykyinen henkilö voi mallissa joko tulla työkyvyttömäksi tai kuolla, niin todennäköisyys sille, että $x+t$ -ikäinen työkykyinen henkilö siirtyy differentiaalin dt aikana tilasta toiseen on $P_{01}(t, dt) + P_{02}(t, dt) = [\mu_+(x+t) + \lambda(x+t)]dt$. Yhdistämällä edellä esitetyt tulokset saadaan

$$\begin{aligned} P(t \leq T^A(x) \leq t+dt) &= f(t)dt \\ &= [1-F(t)] [\mu_+(x+t) + \lambda(x+t)]dt, \end{aligned} \quad (3.4.2.1)$$

josta voidaan johtaa todennäköisyys sille, että henkilö pysyy työkykyisenä ikään $x+t$ saakka.

$$\begin{aligned} \mu_+(x+t) + \lambda(x+t) &= \frac{f(t)}{1-F(t)} = -\frac{d}{dt} \ln[1-F(t)] \\ \Leftrightarrow 1-F(t) &= e^{-\int_0^t [\mu_+(x+\tau) + \lambda(x+\tau)] d\tau} \end{aligned} \quad (3.4.2.2)$$

Edelleen $\lambda(x+t)[1-F(t)]dt$ on todennäköisyys sille, että x -ikäinen työkykyinen henkilö tulee seuraavan kerran työkyvyttömäksi iässä $x+t$. Samoin $\mu_+(x+t)[1-F(t)]dt$ on todennäköisyys sille, että x -ikäinen työkykyinen henkilö kuolee iässä $x+t$ olematta sitä ennen työkyvyttömänä. Kun vakuutus aika on n vuotta, niin todennäköisyys, että vakuutettu tulee vakuutus aikana työkyvyttömäksi on

$$\int_0^n \lambda(x+t) [1-F(t)] dt = \int_0^n \lambda(x+t) e^{-\int_0^t [\mu_+(x+\tau) + \lambda(x+\tau)] d\tau} dt \quad (3.4.2.3)$$

Tätä todennäköisyyttä käytetään myös henkivakuutuksessa pysyvää työkyvyttömyyttä koskevan vakuutuksen vastuukertamaksua määrättäessä.

Tarkastellaan seuraavaksi x -ikäisenä työkyvyttömäksi tulevaa henkilöä ja merkitään satunnaismuuttujalla $T^I(x)$ aikaa, jonka henkilö tarkasteluhetkestä eteenpäin on yhtäjaksoisesti työkyvytön. Käytämällä satunnaismuuttujan $T^I(x)$ jakautumafunktiosta merkintää $H(t)$ saadaan samoin kuin edellä todennäköisyys sille, että henkilö pysyy yhdenjaksoisesti työkyvyttömänä ikään $x+t$ saakka

$$P(T^I(x) > t) = 1 - H(t) = e^{-\int_0^t \mu_1(x+t, x) + v(x+t, x) dt} \quad (3.4.2.4)$$

Tämä on todennäköisyys sille, että iässä x maksettavaksi tulevaa työkyvyttömyyseläkettä maksetaan ikään $x+t$ saakka. Edelleen todennäköisyys sille, että x -ikäisenä työkyvyttömäksi tullut henkilö pysyy työkyvyttömänä ikään $x+t$, ja paranee sitten differentiaalin dt aikana on $v(x+t, x) [1 - H(t)] dt$. Todennäköisyys sille, että x -ikäisenä työkyvyttömäksi tullut henkilö kuolee parantumatta iässä $x+t$ on $\mu_1(x+t, x) [1 - H(t)] dt$.

Jos iässä x alkavassa työkyvyttömyystapauksessa maksetaan rahayksikön suuruista työkyvyttömyyseläkettä, niin eläkkeen ekonominen funktio on

$$K(T^I) = \begin{cases} e(t) & , \text{ jos } T^I \leq w-x \\ e(w-x) & , \text{ jos } T^I > w-x, \end{cases} \quad (3.4.2.5)$$

missä w on se ikä, johon työkyvyttömyyseläkettä korkeintaan mak-

setaan. Alkaneen työkyvyttömyyseläkkeen pääoma-arvo saadaan tämän ekonomisen funktion odotusarvona

$$\begin{aligned}
 EK(T^I) &= \int_0^{\infty} K(t) dH(t) = \int_0^{w-x} e(t) dH(t) + \int_{w-x}^{\infty} e(w-x) dH(t) \\
 &= \int_0^{w-x} \frac{1-E(t)}{\delta} dH(t) + \int_{w-x}^{\infty} \frac{1-E(w-x)}{\delta} dH(t) \\
 &= \frac{1}{\delta} \left[1 - \int_0^{w-x} (\mu_1(x+t, x) + v(x+t, x)) e^{-\int_0^t \mu_1(x+\tau, x) + v(x+\tau, x) + \delta d\tau} dt \right. \\
 &\quad \left. - e^{-\int_0^{w-x} \mu_1(x-\tau, x) + v(x+\tau, x) - \delta d\tau} \right] \\
 &= \int_0^{w-x} e^{-\int_0^t \mu_1(x+\tau, x) + v(x+\tau, x) + \delta d\tau} dt
 \end{aligned} \tag{3.4.2.6}$$

Kun saatu pääoma-arvo yhdistetään kaavassa (3.4.2.3) olevaan työkykyisen henkilön työkyvyttömyyseläkkeen alkamistodennäköisyyteen, saadaan x-ikäisen työkykyisen vakuutetun korkeintaan ikään w maksettavan työkyvyttömyyseläkkeen kuormittamattomaksi vastuukertamaksuksi

$$\begin{aligned}
 A'(x, s, w) &= \int_0^w l(x+s) [1-F(s)] \int_s^{w-x-s} e^{-\int_s^t \mu_1(x+\tau, x+s) + v(x+\tau, x+s) + \delta d\tau} dt ds \\
 &= \int_0^w l(x+s) e^{-\int_0^s \mu_1(x+\tau) + v(x+\tau) d\tau} \int_s^{w-x-s} e^{-\int_s^t \mu_1(x+\tau, x+s) + v(x+\tau, x+s) + \delta d\tau} dt ds.
 \end{aligned} \tag{3.4.2.7}$$

Vuonna 1960 hyväksytyissä yksilöllisen eläkevakuutuksen laskupöytäkirjoissa työkyvyttömyysturva koostui ensimmäisen korvausvuoden aikana maksettavasta sairauspäivärahasta ja sen jälkeen maksettavasta työkyvyttömyyseläkkeestä. Laskuissa käytettiin sekä työky-

kyisille että työkyvyttömille samaa kuolevuutta. Työkyvyttömyyden alkavuus oli kummallekin sukupuolelle sama, ja se oli muotoa

$$10^3 i(x) = \begin{cases} 110 + 0,044(x-30)^3, & \text{jos } x > 30 \\ 0 & , \text{ jos } x \leq 30 \end{cases} \quad (3.4.2.8)$$

Työkyvyttömien poistuvuus oli laskelmien helpottamiseksi iästä riippumaton, eli ainoana muuttujana oli työkyvyttömyyden kesto t . Poistuvuus oli tällöin muotoa

$$p(t) = \mu_i(x+t, x) + v(x+t, x) = \begin{cases} \frac{1,39}{t+0,04} - 0,306, & \text{kun } 0 < t \leq 4 \\ 0,08 - \ln 1,0425, & \text{kun } t > 4 \end{cases} \quad (3.4.2.9)$$

Vuonna 1974 hyväksytyistä laskuperusteista työkyvyttömyyseläke puuttui kokonaan johtuen työkyvyttömyyseläkkeiden alkavuuden voimakkaasta kasvamisesta 1970-luvun alkupuolella. Vuonna 1980 tehtiin perusteisiin kuitenkin muutos, jossa vahvistettiin taas perusteet työkyvyttömyyseläkkeelle. Tällöin otettiin käyttöön työkyvyttömille työkykyisiä korkeampi kuolevuus. Työkyvyttömien kuolevuus saatiin lisäämällä työkykyisten kuolevuuteen vakiotermi α . Sairastuvuus määriteltiin erikseen miehille ja naisille, ja se oli muotoa

$$i(x) = \begin{cases} 10^{-3} 0,08580 e^{0,108x}, & \text{miehille} \\ 10^{-3} 0,03432 e^{0,123x}, & \text{naisille} \end{cases} \quad (3.4.2.10)$$

Paraneminen määriteltiin riippuvaiseksi sekä vakuutetun iästä x että iästä s , jolloin hän on tullut työkyvyttömäksi. Paranemisfunktio oli sukupuolesta riippumaton

$$v(x, s) = \frac{0,58 f(s) e^{-0,58(x-s)}}{1 - f(s) + f(s) e^{-0,58(x-s)}}, \quad (3.4.2.11)$$

missä $f(s) = 0,32(s-14)e^{-0,083s}$.

3.4.3. Työkyvyttömyys yksilöllisessä henkivakuutuksessa

Henkivakuutuksessa pitkäaikaisen työkyvyttömyyden varalta myönnetään vakuutusta, jossa vakuutetulle maksetaan kertasumma pysyvän työkyvyttömyyden sattuessa. Vielä vuonna 1973 voimassa olleiden yhteisperusteiden mukaan maksettu summa alensi kuoleman varalta voimassa olevaa vakuutussummaa, mutta tästä luovuttiin vuoden 1986 perusteissa. Koska siis vakuutetun kuoleman ajankohta ei vaikuta maksettavan korvauksen suuruuteen, ja pysyvän työkyvyttömyyden kysymyksessä ollessa ei paranemistakaan tarvitse huomioida, niin ainoa työkyvyttömyysmallissa vaikuttava tekijä on vakuutetun sairastuvuus. Vakuutuksen ekonomisen funktiona on $E(t)$, jos vakuutettu sairastuu ennen vakuutusajan päättymistä, ja nolla muulloin. Ekonomisen funktion odotusarvoksi eli vakuutuksen kuormittamattomaksi vastuukertamaksuksi saadaan lauseketta (3.4.2.3) soveltaen

$$\begin{aligned} A'(x.w/TS) &= \int_0^{\infty} v(x+t) [1-F(t)] e^{-\delta t} dt \\ &= \int_0^{\infty} v(x+t) e^{-\int_0^t \mu_s(x+s) + \delta(x+s) ds} dt. \end{aligned} \quad (3.4.2.12)$$

Henkivakuutuksen yhteyteen voidaan myös liittää maksuvapautusetu. Maksuvapautusedulla tarkoitetaan sellaista henki- tai eläkevakuutukseen liitettävää etuutta, jonka perusteella vakuutuksenottajalle myönnetään vapautus vakuutusmaksuista vakuutetun ollessa työkyvyttömänä. Etuuteen liittyy omavastuu-aika, jonka ylittäviltä työkyvyttömyysjaksoilta vakuutuksenottaja on oikeutettu korvaukseen. Maksuvapautusedun kuormittamattomaksi vastuukertamaksuksi tulisi periaatteessa määrätä kunakin vuonna todennäköisesti alkavien maksuvapautusten johdosta tulevaisuudessa todennäköisesti vapautettavien vakuutusmaksujen pääoma-arvo, joten vastuukertamaksu tulisi siis laskea kaavan (3.4.2.7) mukaisesti. Käytännön laskennan yksinkertaistamiseksi on laskuperusteissa kuitenkin määrätty iästä ja sukupuolesta riippumaton kerroin h , jolla vakuutuksen bruttovuosimaksu kerrotaan silloin, kun siihen liittyy maksuvapautusetu. Kerroin on määritetty laskemalla edellä mainittu

pääoma-arvo ikäryhmittäin käyttäen vuosimaksuna yhtiöiden analyyssiyhdistelmästä saatua maksuvapautusedun sisältävien vakuutusten maksukantaa.

3.5. Muut sairauteen ja työkyvyttömyyteen liittyvät perusteet

Pysyvän työkyvyttömyyden varalta myönnettävän vakuutuksen ja maksuvapautusedun lisäksi voidaan yksilölliseen henkivakuutukseen liittää työkyvyttömyysvakuutus, josta korvaus maksetaan päivärahan omavastuun ylittävältä, mutta kuitenkin korkeintaan 365 tai 730 päivän ajalta. Sairaalahoidon varalta myönnetään sekä sairaalavakuutusta että sairaalahoitovakuutusta. Edellisessä korvauksena maksetaan vakuutusmääränä oleva päiväraha kultakin sairaalassaolopäivältä. Jälkimmäisessä korvataan sairaalan hoitopäivämaksut kuitenkin korkeintaan vakuutusmääränä olevaan päivää kohti laskettuun markkamäärään saakka. Näiden lisäksi on olemassa sairaanhoitovakuutus, josta korvataan sairaanhoitokustannuksia yhtiöille toimitettujen tositteiden perusteella. Edellä kuvatut vakuutukset ovat yhtiöillä samanlaisia lukuunottamatta sairaanhoitovakuutusta, jossa 1980-luvulla ilmenneiden kannattavuusongelmien helpottamiseksi on käytetty yhtiökohtaisia korvauspiirin rajoituksia ja maksujen korotuksia.

Kaikkien edellä mainittujen vakuutusten maksujen laskuperusteet on laadittu samaa periaatetta noudattaen. Ikävälillä $(x, x+dx)$ vakuutetun riskimaksu saadaan lausekkeesta $s(x)dx = (a+bx^5)dx$. Parametrit a ja b määrätään vakuutuskohtaisesti yhtiöiden riskiperusteanalyysistä saatavan tilastoaineiston perusteella. Työkyvyttömyys- ja sairaalavakuutuksessa riskimaksu on vakuutuksen perusteella maksettavan korvausmenon odotusarvo, kun työkyvyttömyys tai sairaalahoido alkaa x -ikäisenä ja päiväkorvauksen määrä on yksi markka. Toisin sanoen riskimaksu on omavastuuajan ylittävien työkyvyttömyys- tai sairaalapäivien lukumäärän odotusarvo. Työkyvyttömyysvakuutukseen voi valita useita erilaisia omavastuita, ja parametrit a ja b on määrätty kullekin omavastuuajalle erikseen. Koska sairaalahoido- ja sairaanhoitovakuutuksissa ei ole päiväkorvausta, niin riskimaksu on suoraan maksettavan korvausmenon odotusarvo. Muista edellä mainituista vakuutuksista poiketen ei sairaalavakuutuksessa ole miesten ja naisten maksujen välillä eroa.

Kaikkien edellä mainittujen vakuutusten kuormittamattomat vastuukertamaksut x -ikäiselle vakuutetulle saadaan samalla periaatteella. Koska korvausta voidaan maksaa vain elossa olevalle vakuutetulle, niin lauseketta (3.3.2) soveltamalla saadaan todennäköisyys sille, että $x+t$ -ikäiselle vakuutetulle aletaan differentiaalin dt aikana maksaa vakuutuksesta korvausta

$$[1-G(t)]s(x+t) = s(x+t) e^{-\int_0^t \mu(x+\tau) d\tau} dt. \quad (3.5.1)$$

Ekonomista funktiota $E(t)$ soveltamalla saadaan kuormittamattomaksi vastuukertamaksuksi

$$A'(x, x+n/s) = \int_0^n s(x+t) e^{-\int_0^t \mu(x+\tau) + \delta d\tau} dt. \quad (3.5.2)$$

3.6. Kuormitusperuste

Vakuutusyhtiölle syntyy vakuutusten hoidosta ja myynnistä liikekuluja. Kuluja syntyy vakuutusajan alussa erityisesti vakuutuksen myynnistä maksettavista palkkioista, vastuunvalinnasta ja vakuutushakemuksen käsittelystä. Vakuutusaikana ja sen päättyessä syntyy kustannuksia vakuutuksen hoidosta, vakuutusmaksujen perinnästä, korvaushakemusten käsittelystä ja eläkkeen maksannasta. Osa kustannuksista on verrannollisia vakuutuksen suuruuteen, kuten esimerkiksi myyntipalkkiot ja osa vastuunvalintaan liittyvistä kustannuksista. Toisaalta esimerkiksi ATK-kustannukset ja perintäkustannukset ovat riippumattomia vakuutuksen suuruudesta.

Syntyvät liikekulut katetaan lisäämällä edellä esitettyjen maksuperusteiden pohjalta laskettaviin nettomaksuihin kustannuseriä, joita kutsutaan kuormitukseksi. Vakuutusyhtiölaista ilmenevän turvaavuusperiaatteen mukaan kuormitusperusteiden pyrkimyksenä on ensisijaisesti kattaa yhtiön liikekulut kokonaisuudessaan. Lisäksi voidaan kohtuusperiaatteen nojalla vaatia, että kuormitus tulee jakaa vakuutusten kesken niin, että kuormitus kohdistetaan niihin vakuutuksiin, jotka kustannuksia aiheuttavat. Liikekulujen jakamiseksi eri vakuutusten kesken on kehitetty erilaisia kuormitusmalleja. Yhtiöt alkoivat 1980-luvulla osittain luopua siihen asti käytössä olleesta periaatteestaan soveltaa kaikille yhteisesti vahvistettuja laskuperusteita. Kaikkien yhtiöiden riskiperusteet perustuvat samaan tilastoaineistoon, joten niissä ei ole mahdollisuutta suureen yhtiökohtaiseen vaihteluun. Niinpä yhtiöiden väliseksi kilpailutekijäksi on noussut kuormitusmallin ja erityisesti sen parametrien valinta. Parametrien valinta vaikuttaa kuormituksen jakautumiseen eri vakuutuskannan osiin, ja suuntaa siten myyntiä niille vakuutuksenottajille, joille vakuutuksen hinta muodostuu edullisimmaksi. Seuraavassa esitetään käytössä olevia kuormitusmalleja.

Vuonna 1936 vahvistetuissa henkivakuutuksen laskuperusteissa oli käytössä kolme kuormituserää. Vakuutuksen alkuhetkeen kohdistettiin kertakaikkinen kustannuserä, joka oli verrannollinen vakuu-

tussummaan S. Tämä kuormituserä αS oli tarkoitettu kattamaan vakuutuksen hankintakustannuksia. Kuhunkin vakuutusvuoteen oli kohdistettu hoitokustannuksia kattamaan tarkoitettu vakuutussummaan verrannollinen kuormituserä βS . Lisäksi vakuutuksen maksuaikana perittiin vakuutusmaksuun B verrannollinen kuormituserä γB . Suureilla α , β ja γ oli vakuutusmuodosta riippuvat arvonsa.

Edellä mainitun menetelmä aiheutti käytännössä hoito-ongelmia, joten vuonna 1957 kuormitusperustetta yksinkertaistettiin ja siirryttiin kahden parametrin järjestelmään. Koko vakuutusajalta perittiin vakuutussummaan verrannollista kuormituserää ϵS ja vakuutuksen maksuajalta perittiin vakuutusmaksuun verrannollista kuormituserää κB . Myyntikustannuksia kattava α -kuormituksen katsottiin kuuluvan yksinomaan vakuutusmaksuvastuun perusteisiin, ja niinpä se korvattiin zillmeerauksella, jota käsitellään tarkemmin vastuuvelan laskentaperusteiden yhteydessä. Tälle samalle periaatteelle rakentuu vuonna 1986 vahvistetuissa ja vuonna 1988 täydennetyissä yhtiöiden yhteisissä henkivakuutuksen laskuperusteissa oleva kuormitusmalli. Vuonna 1973 mallia täydennettiin ottamalla käyttöön työkyvyttömyys- sairaala- ja sairaanhoitovakuutuksen vakuutusturvaan K verrannollinen kuormituserä λK . Samalla kuormituserä ϵS muutettiin koskemaan vain kuoleman varalta voimassa olevaa vakuutussummaa. Aiemmin kyseinen erä kuormitti ns. perusvakuutuksen vakuutusmäärää, joka oli käsitteenä jonkin verran laajempi. Vuonna 1986 otettiin myös käyttöön vakuutuksen riskimaksuun $r(u)$ verrannollinen kuormituserä $\phi r(u)$, joka on tarkoitettu ensisijassa peittämään korvauskäsittelystä aiheutuvia kuluja.

Suuruudeltaan λ -kuormitus on työkyvyttömyysvakuutuksessa 50 penniä ja sairaalavakuutuksessa 30 penniä kutakin päivärahan markkaa kohti vuodessa. Sairaalahoitovakuutuksessa vuotuinen λ -kuormitus on 30 penniä vakuutuskorvauksen päivittäisestä ylärajasta ja sairaanhoitovakuutuksessa vuosittain indeksillä tarkistettava markkamäärä. Kuolemanvaravakuutuksen vakuutussummaan suhteutettu ϵ -kuormitus on suuruudeltaan promille vakuutussummasta vuodessa. Riskimaksuun suhteutettua ϕ -kuormitusta peritään vuodessa 10% riskimaksusta. Kuormitustulosta merkittävin osa muodostuu κ -kuor-

mituksesta. Viimeisimmissä henkivakuutuksen yhteisperusteissa x -kuormitus riippuu maksuajasta seuraavan kaavan mukaisesti

$$x(m) = \begin{cases} x & , \text{ jos } m=w-x \\ x(0) + \frac{m(x-x(0))}{10} & , \text{ jos } m < w-x \end{cases} \quad (3.6.1)$$

missä m on vakuutuksen maksuaika vuosina, x vakuutetun ikä vakuutuksen alkaessa, w vakuutetun ikä vakuutuksen päättyessä sekä

$x = 0,1$ ja $x(0) = 0,05$ liikevakuutuksissa ja

$x = 0,2$ ja $x(0) = 0,075$ muissa vakuutuksissa.

Edellä liikevakuutuksella tarkoitetaan vakuutusta, jonka vakuutuksenottajana on yritys tai muu juridinen henkilö, ja vakuutuksenottaja maksaa vakuutusmaksuista puolet. Maksuajan lisäksi x -kuormituksen suuruus riippuu myös vakuutuksen maksujen suuruudesta. Yleisesti nimittäin käytetään vakuutuksen maksuajasta riippuvaa maksurajaa B_0 , jonka ylittävästä maksujen yhteismäärästä kuormitusta ei enää peritä.

Kun ϕ , ε ja λ -kuormitus lisätään kappaleessa 3 esitettyihin kuormittamattomiin vastuukertamaksuihin, saadaan kuormitetut vastuukertamaksut. Lausekkeesta (3.3.7) saadaan siis kuolemanvaravakuutuksen kuormitettu vastuukertamaksu yhden markan suuruista vakuutussummaa kohti

$$\begin{aligned} A(x, x+n/K) &= \int_0^n [(1+\phi)\mu(x+t) + \varepsilon] e^{-\int_0^t \mu(x+\tau) + \delta d\tau} dt \\ &= \int_0^n (1+\phi)\mu(x+t) e^{-\int_0^t \mu(x+\tau) + \delta d\tau} dt + \varepsilon a(x, x+n) \\ &= (1+\phi)A'(x, x+n/K) + \varepsilon a(x, x+n). \end{aligned} \quad (3.6.2)$$

Vastaavasti työkyvyttömyys- ja sairausvakuutusten osalta

$$A(x, x+n/s) = (1+\phi)A'(x, x+n/s) + \lambda a(x, x+n). \quad (3.6.3)$$

Koska säästövakuutuksesta ei ϕ , ε tai λ -kuormituksia peritä, niin

$$A(x.x+n/V) = A'(x.x+n/V).$$

(3.6.4)

Maksuun suhteutettu x -kuormituksen vaikutusta vakuutusmaksuun käsitellään kappaleessa 4.

Vuonna 1974 vahvistetuissa ja vuonna 1980 täydennetyissä yksilöllisen eläkevakuutuksen yhteisperusteissa käytetään kahden parametrin kuormitusmallia, johon kuuluu vakuutusmaksuun B verrannollinen kuormituserä x_B ja vuosieläkkeeseen E verrannollinen kuormituserä ϕE . Yksilöllisen eläkevakuutuksen yhteisperusteissa $x = 0,1$. Kilpailun kiristyttyä 1980-luvulla erityisesti yksilöllisessä eläkevakuutuksessa yhtiöt käyttivät erityisesti x -kuormitusta kuormitusperusteen alentamiseen. Niinpä yhtiöllä on käytössä perusteita, joissa x -kuormitukselle on vahvistettu erilaisia arvoja riippuen vakuutusmaksujen suuruudesta. Esimerkiksi $x = 0,17$ maksujen yhteismäärään B_0 saakka, $0,07$ maksujen yhteismäärään B_1 saakka ja niin edelleen.

Joissakin joustavamaksuisissa henki- ja eläkevakuutuksissa, joissa vakuutuksenottaja saa maksaa haluamiaan vakutusmaksuja haluamanaan aikana edellyttäen, että vakuutukselle kertynyt säästöosuus riittää kattamaan voimassa olevan vakuutusturvan, on x -kuormitus osittain korvattu y -kuormituksella. Tämä kuormitus on suhteessa vakuutuksen säästöosuuteen, ja on suuruudeltaan esimerkiksi kaksi prosenttia vuodessa. Lisäksi voidaan määrätä, että kuormitusta peritään kuitenkin korkeintaan jokin kiinteä markkamäärä vuodessa. Näissä tapauksissa x -kuormitusta peritään ainoastaan riskimaksusta.

Turvaavuusperiaatteen mukaan kuormitusperiaatteen tulee olla riittävä. Tämän selvittämiseksi suoritetaan viiden vuoden välein erillinen yhtiökohtainen selvitys siitä, että tietyin olettamuksin laskettu kuormitustulon pääoma-arvo riittää palkkioiden ja muiden kustannusten pääoma-arvon kattamiseen. Laskentaa varten on kehitetty malli, joka vertaa yhtiön vakuutuskannasta laskuperusteiden

mukaan saatavaa kuormitustuloa yhtiön hoitokustannuksiin. Kuormitustuloa laskettaessa otetaan yhtiökohtaisilla parametrien valinnoilla huomioon vakuutusten raukeaminen ja vakuutuksille todennäköisesti annettavat indeksikorotukset. Hoitokustannusten suuruutta määritettäessä otetaan huomioon niiden oletettu yhtiökohtainen nousuvauhti. Mallissa raukeamisen, indeksikorotusten ja kustannusten nousun oletetaan olevan vakioita.

4. VASTUUVELAN LASKENTAPERUSTEET

Edellä kuvattujen korko-, riski- ja kuormitusperusteiden mukaiset vakuutuksenottajalta perittävät vakuutusmaksut määrätään vakuutusajan alussa yhtälöstä 'tulevien vakuutusmaksujen pääoma-arvo' = 'tulevien vakuutus-suoritusten pääoma-arvo'. Perinteisessä kiinteämaksuisessa henkivakuutuksessa yleensä oletetaan, että vakuutusmaksuja maksetaan tasasuuruuisina erinä koko vakuutuksen maksuajan. Tarkastellaan henkilöä, joka ottaa henkivakuutuksen iässä x , maksuaika on m vuotta ja jatkuvana maksettavan vakuutusmaksun suuruus on B , markkaa vuodessa. Tulevien vakuutusmaksujen pääoma-arvo saadaan poistamalla maksusta kuormitusperusteen mukainen kappakuormitus κ , ja kertomalla saatu nettomaksu jatkuvalla elinkorolla $a(x, x+m)$. Laskelmissa vakuutusmaksu oletetaan maksettavaksi kerran vuodessa etukäteen. Iässä $x+i$ tämä etukäteinen vuosimaksu $B = B_a(x+i, x+i+1)$, mutta laskuperusteissa on yhden vuoden elinkoron likiarvona käytetty lukua $1/1,025$. Tulevien maksujen pääoma-arvo saadaan siis lausekkeesta $1,025(1-\kappa)a(x, x+m)B$. Tulevien vakuutus-suoritusten pääoma-arvo vakuutussumman tai päivärahan yhtä markkaa kohti etuuden u osalta on suoraan aiemmin määriteltä kuormitettu vastuukertamaksu $A(x, x+n/u)$. Etuuden vakuutusmaksun määräävä yhtälö saadaan muotoon

$$A(x, x+n/u) = 1,025(1-\kappa)a(x, x+m)B. \quad (4.1)$$

Edellä kuvattua tasamaksuperiaatetta noudatettaessa vakuutuksenottaja maksaa vakuutusmaksuja ennen kuin vakuutus-suoritukset eraantuvat. Täten yhtiöön kertyy vakuutusajan alussa vakuutussäästöä eli rahastoa, joka käytetään tulevaisuudessa maksettaviin vakuutus-suorituksiin. Erityisesti vanhuuseläkevakuutuksessa, jossa kaikki vakuutusmaksut maksetaan ennen eläkkeen alkamista, ovat rahastot huomattavan suuria. Samanlainen on tilanne niissä henkivakuutuksissa, jotka sisältävät vakuutusajan päättyessä maksettavan säästösumman. Henkivakuutukset, jotka eivät sisällä säästösummaa keräävät myös rahastoa, sillä vakuutusten odotettavissa oleva vahinkomeno kohoaa voimakkaasti iän mukana, joten tasasu-

ruisena maksettavista maksuista kertyy vakuutusajan alussa rahastoa, joka käytetään kasvaviin korvausmenoihin vakuutusajan lopussa. Ainoa henkivakuutus, jossa ei rahastoa kerry on ryhmähenkivakuutus. Siinä vuotuiset vakuutusmaksut määrätään, niin että ne vastaavat sinä vuonna todennäköisesti sattuvaa korvausmenoa.

Yhtiön tilinpäätökseen kirjattavan vakuutusmaksuvastuun pääosa muodostuu vakuutuskohtaisten rahastojen summasta. Lisäksi vakuutusmaksuvastuuseen kirjataan maksunsiirtovastuu, jolla tarkoitetaan sitä osaa tilittyneestä vakuutusmaksusta, joka kohdistuu tilivuotta seuraavaan vuoteen. Rahastoinnista johtuen henki- ja eläkevakuutusyhtiön tase poikkeaa vahinkovakuutusyhtiön taseesta sikäli, että henki- ja eläkevakuutusyhtiöillä vakuutusmaksuvastuu on yleensä taseen suurin erä, kun taas vahinkovakuutusyhtiöissä korvausvastuulla on suurempi merkitys. Tämä siitäkin huolimatta, että esimerkiksi alkaneiden eläkkeiden pääoma-arvot kirjataan korvausvastuuseen.

Tarkastellaan ensin vakuutuksen rahaston ja sitä kautta siis yhtiön koko vakuutusmaksuvastuun laskemista perinteisessä kiinteämaksuisessa vakuutuksessa, jossa vakuutuksenottajan tulee vakuutuksen raukeamisen uhalla maksaa vakuutusmaksut maksuajan kuluessa. Kuten jo kappaleessa 2 todettiin, on vakuutusmaksuvastuu vakuutusyhtiölain mukaan laskettava prospektiivisesti eli niin, että tarkasteluhetken jälkeen maksettavien vakuutussuoritusten pääoma-arvosta vähennetään tarkasteluhetken jälkeen erääntyvien vakuutusmaksujen pääoma-arvo. Lausekkeessa (4.1) käytettyjä merkintöjä noudattaen saadaan x -ikäisenä vakuutuksen ottaneen vakuutetun iässä $x+t$ ($t < m < n$) laskettu rahasto muotoon

$$V(x, x+t, x+n/u) = A(x+t, x+n/u) - 1,025(1-x)a(x+t, m)B$$

$$= \int_t^n [(1+\phi)u(x+s) + \lambda(u)] e^{-\int_t^s \mu(x+r) + \delta dr} ds - \int_t^m P e^{-\int_t^s \mu(x+r) + \delta dr} ds$$

(4.2)

missä $P = 1,025(1-x)B$, $u(s)$ on kyseessä olevaan etuuteen liittyvän korvauksen alkamisintensiteetti ja $\lambda(u)$ on etuudesta riippuen joko

ε - tai λ -kuormitus. Toisin sanoen siis edellisen pykälän merkin-
töjä käyttäen esimerkiksi kuolemanvaravakuutuksessa $u(s) = \mu(s)$ ja
 $\lambda(e) = \varepsilon$. Säästövakuutuksessa $u(s) = 0$, kun $s < n$ ja $u(n) = 1$ sekä
 $\lambda(u) = \varphi = 0$. Koko vakuutuksen rahasto saadaan etuuskohtaisten
rahastojen summana. Tätä rahaston laskentatapaa kutsutaan prospek-
tiiviseksi, ja se on käytössä sekä kiinteämaksuisissa henki- että
eläkevakuutuksessa.

Joustavamaksuisissa vakuutuksissa vakuutuksenottaja voi maksaa
haluamiaan maksuja haluaminaan aikoina. Näissä tapauksissa tarkas-
tellaankin rahaston muutosta differentiaalin dt aikana Thielen
differentiaaliyhtälön avulla. Muutetaan lauseke (4.2) muotoon

$$V(x, x+t, x+n/u) = e^{\int_0^t \mu(x+\tau) + \delta d\tau} \left[(1+\varphi) \int_t^n u(x+s) e^{-\int_0^s \mu(x+\tau) + \delta d\tau} ds \right. \\ \left. + \lambda(u) \int_t^n e^{-\int_0^s \mu(x+\tau) + \delta d\tau} ds - P \int_t^n e^{-\int_0^s \mu(x+\tau) + \delta d\tau} ds \right] \quad (4.3)$$

Koko vakuutuksen rahaston laskemiseksi lasketaan etuuskohtaiset
rahastot yhteen. Merkitään lisäksi $P = P(t)$ kuvaamaan hetekillä t
rahastoon maksettavaa vakuutusmaksua ja $S(u)$ etuuden u riskisum-
maa. Tällöin rahaston lauseke saadaan muotoon

$$V(x, x+t, x+n) = e^{\int_0^t \mu(x+\tau) + \delta d\tau} \left[\sum_u (1+\varphi) S(u) \int_t^n u(x+s) e^{-\int_0^s \mu(x+\tau) + \delta d\tau} ds \right. \\ \left. + \sum_u S(u) \lambda(u) \int_t^n e^{-\int_0^s \mu(x+\tau) + \delta d\tau} ds - P(t) \int_t^n e^{-\int_0^s \mu(x+\tau) + \delta d\tau} ds \right], \quad (4.4)$$

missä summeeraus käy yli vakuutukseen kuuluvien etuuksien. Tar-
kastellaan rahastoa aikavälillä $0 < t < n$, jolloin säästövakuutuksen

osalta $u(t) = 0$. Derivoidaan tämä lauseke muuttujan t suhteen.

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(x, x+t, x+n)}{dt} &= \left[\sum_u (1+\varphi) S(u) \int_t^n u(x+s) e^{-\int_0^s (\mu(x+\tau) + \delta) d\tau} ds \right. \\
 &\quad + \sum_u \lambda(u) S(u) \int_t^n e^{-\int_0^s (\mu(x+\tau) + \delta) d\tau} ds \\
 &\quad - P(t) \int_t^n e^{-\int_0^s (\mu(x+\tau) + \delta) d\tau} ds \left. \right] (\mu(x+t) + \delta) e^{-\int_0^t (\mu(x+\tau) + \delta) d\tau} \\
 &\quad + e^{-\int_0^t (\mu(x+\tau) + \delta) d\tau} \left[- \sum_u (1+\varphi) S(u) u(x+t) e^{-\int_0^t (\mu(x+\tau) + \delta) d\tau} \right. \\
 &\quad \left. - \sum_u \lambda(u) S(u) e^{-\int_0^t (\mu(x+\tau) + \delta) d\tau} + P(t) e^{-\int_0^t (\mu(x+\tau) + \delta) d\tau} \right] \\
 &= (\mu(x+t) + \delta) V(x, x+t, x+n) \\
 &\quad - \sum_u S(u) [(1+\varphi) u(x+t) + \lambda(u)] + P(t)
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Tästä saadaan rahaston muutokselle lauseke

$$\begin{aligned}
 dV(x, x+t, x+n) &= (\mu(x+t) + \delta) V(t) dt - \sum_u S(u) [(1+\varphi) u(x+t) + \lambda(u)] dt \\
 &\quad + P(t) dt \\
 &= (\mu(x+t) + \delta) V(t) dt - \sum_u S(u) RJ(x+t/u) dt \\
 &\quad + P(t) dt,
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

missä $RJ(x+t/u)$ on etuuden u kuormitettu riskimaksu iässä $x+t$. Mikäli vakuutukseen kuuluu rahaston arvoon suhteutettu γ -kuoritus, niin lausekkeesta (4.6) tulee vielä vähentää termi

$\gamma(x, x+t)dt$. Mikäli vakuutuksessa on riskimaksuun suhteutettu x -kuormitus, niin

$$RJ(x+t/u) = \frac{(1+\phi)S(x+t/u) + \lambda(u)}{1-x} \quad (4.7)$$

Kaavaa (4.6) kutsutaan Thielen differentiaaliyhtälöksi, ja sitä käyttäen voidaan alkuehdosta $V(0) = 0$ lähtien tarkastella rahaston arvossa vakuutusaikana tapahtuvia muutoksia.

Kuormitusperusteen yhteydessä tuli esille, että vuoden 1936 laskuperusteissa esiintyi vakuutuksen alkamisvuoteen kohdistuva kerta-kaikkinen vakuutussummaan verrannollinen kuormituserä αS . Tästä kuormituserästä luopuminen saa aikaan sen, että vakuutuksen rahastosta ei vähennetä vakuutuksen alussa syntyviä kustannuksia silloin, kun ne syntyvät, vaan ne kuoletetaan tasaisesti vakuutus-aikana. Kuitenkin kyseiset kustannukset joudutaan kirjaamaan yhtiön liikekuluiksi sinä vuonna, kun ne maksetaan. Tilinpäätöksessä tämä epäkohta korjataan kirjaamalla vakuutuksen vakuutusmaksuvastuuta vähentäväksi eräksi tilinpäätöshetkellä kuolettamattomat hankintakustannukset eli ns. zillmeeraus. Vakuutuksen zillmeeraus lasketaan sitä varten vahvistettuja laskuperusteita noudattaen. Sosiaali- ja terveysministeriön ohjeiden mukaan zillmeerauksen tulee näkyä taseen liitteissä omana eränään eroteltuna henki- ja eläkevakuutuksen zillmeeraukseen. Vakuutuksenottajalle zillmeeraus konkretisoituu silloin, jos hän ostaa vakuutuksensa takaisin tai muuttaa sen vapaakirjalle. Vakuutuksen takaisinostoarvo ja vapaakirja-arvo lasketaan nimittäin vähentämällä rahastosta zillmeeraus.

Henki- ja eläkevakuutusyhtiön korvausvastuun suurimman erän muodostaa alkaneiden eläkkeiden tulevaisuudessa maksettavien eläkeerien pääoma-arvo, joka lasketaan edellä kuvattuja korko-, riski- ja kuormitusperusteita käyttäen. Korvausvastuuseen kirjataan myös tilinpäätöshetkellä tiedossa olevat, mutta vielä maksamattomat korvaukset, jotka yleensä pystytään laskemaan tapaus kerrallaan. Kolmantena eränä korvausvastuuseen kuuluu varaus niitä korvauksia varten, jotka eivät tilinpäätöstä tehtäessä vielä ole tiedossa, mutta joita kokemukseräisesti tiedetään ilmaantuvan. Tämä ns.

tuntemattomien varaus lasketaan sitä varten vahvistettuja laskuperusteita noudattaen.

Vakuutustoiminnan luonteesta johtuen vakuutusyhtiön satunnaistulos saattaa heilahdella peräkkäisinä tilivuosina. Satunnaistuloksella tarkoitetaan tilivuodelle kohdistettuja maksutuottoja ja sijoitusten nettotuottoa ilman arvonnkorotuksia vähennettynä korvaus- ja liikekuluilla. Näitä heilahteluja varten korvausvastuun yhtenä osana on tasoitusvastuu, joka mahdollistaa satunnaistappioiden kattamisen aikaisempien vuosien satunnaisylijäämästä. Tasoitusvastuun merkitys henki- ja eläkevakuutusyhtiöiden tilinpäätöksessä ei ole yhtä suuri kuin vahinkovakuutusyhtiöillä henki- ja eläkevakuutustoiminnan stabiilista luonteesta johtuen. Kuitenkin henki- ja eläkevakuutusyhtiöidenkin on haettava vahvistus käyttämilleen tasoitusvastuun perusteille. Tasoitusvastuun laskuperuste koostuu kahdesta osasta. Ensin määritellään, miten lasketaan tasoitusvastuun ylä- ja alaraja. Tämän jälkeen esitetään varsinainen tasoitusvastuun laskentaperusteet. Tilinpäätösasiakirjoissaan tulee yhtiön esittää, että vahvistettujen laskuperusteiden mukainen tasoitusvastuu on ylä- ja alarajansa välissä.

5. MUUT LASKUPERUSTEISSA ESITETTÄVÄT ASIAT

Vakuutuksenottajan irtisanoessa yksilöllisen henkivakuutuksen hänellä on oikeus saada laskuperusteiden mukainen takaisinosto-arvo. Yksityishenkilön ottamassa vakuutuksessa takaisinosto on mahdollinen aikaisintaan kun kaksi vuotta on kulunut vakuutuksen alkamisesta. Takaisinostoarvo on vastuuvelan laskentaperusteissa määritellyllä tavalla laskettu rahasto vähennettynä zillmeerauksella. Kuitenkin takaisinostoarvona maksetaan korkeintaan se määrä, joka edunsaajalle maksettaisiin vakuutetun kuolemantapauksessa. Takaisinosto-oikeutta ei ole silloin, jos henkivakuutus on pantattu, tai siihen on liitetty sitoumus, jonka mukaan vakuutuksenottajalla ei ole oikeutta muuttaa edunsaajaa ilman edunsaajan suostumusta. Yksilöllisessä eläkevakuutuksessa takaisinosto on mahdollinen ainoastaan eräissä erikoistapauksissa. Sekä henkivakuutus että yksilöllinen eläkevakuutus on mahdollista ostaa takaisin silloin, kun vakuutuksenottaja ei hyväksy vakuutusehtojen muutosta tai vakuutusmaksujen korotusta. Tällöin takaisinostovasta ei vähennetä zillmeerausta.

Vakuutetulla on mahdollisuus muuttaa vakuutuksensa vapaakirjaksi. Vapaakirjaan jää ainoastaan turva kuoleman varalta sekä mahdollinen säästö. Voimaan jäävä vakuutusturva lasketaan niin, että tulevien vakuutussuoritusten pääoma-arvo on yhtä suuri kuin vakuutuksen takaisinostoarvo muutoshetkellä. Toisin sanoen etuudet määrätään kuten vakuutukselle, johon ainoana maksuna maksetaan takaisinostoarvon suuruinen kertamaksu.

Perinteisessä kiinteämaksuisessa henki- ja eläkevakuutuksessa, jossa on sovittu maksettavan vakuutusmaksun suuruus ja maksun eräpäivät sopimusta tehtäessä, vakuutus raukeaa ellei vakuutusmaksuja makseta maksuajan kuluessa. Vakuutuksen laskuperusteissa on kuitenkin usein määrätty, että mikäli vakuutuksesta on maksettu vähintään kolmen vuoden maksut, niin tällöin vakuutusturvaa pidetään voimassa vielä vuoden erääntyneen maksun maksuajan päättymisestä. Vakuutuksen rauetessa se muutetaan automaattisesti vapaakirjaksi. Rauennut sopimus on mahdollista saattaa voimaan maksa-

mallalla viivästyneet vakuutusmaksut viivästyskorkoineen määrääjässä. Myöhemminkin vakuutuksen voi saattaa voimaan, mikäli vakuutetun terveydentila ei ole raukeamisen jälkeen heikentynyt yhtiön vastuuseen vaikuttavasti.

Joustavamaksuisessa henki- ja eläkevakuutuksessa, jossa vakuutuksenottaja saa maksaa haluamansa suuruisia vakuutusmaksuja haluaminaan aikoina, ei maksun viivästymisellä yleensä ole seuraamuksia ennen kuin siinä vaiheessa, kun vakuutuksen rahasto on käytetty vakuutukseen kuuluvasta riskiturvasta laskuperusteiden mukaan todennäköisesti syntyvän korvausmenon kattamiseen. Varsinkin eläkevakuutuksessa, jossa vanhuuseläkettä varten kerätyn rahaston osuus yleensä on suuri verrattuna vakuutukseen mahdollisesti sisältyvän kuolemantapausturvan tai työkyvyttömyys- ja jälkieläkkeiden todennäköiseen korvausmenoon, ei vakuutusmaksun maksamatta jättämisellä välttämättä ole muuta seuraamusta kuin suunniteltua pienempi vanhuuseläke.

Mikäli vakuutus lakkaa muun syyn kuin takaisinoston takia ennen sovittua aikaa tai yhtiö muuten vapautuu vastuustaan, vakuutuksenottajalle maksetaan vakuutuksen takaisinostoarvo.

6. LISÄETUJEN PERUSTEET

Henkivakuutusyhtiön toiminnassa voi ylijäämää syntyä kolmesta lähteestä. Riskiperusteet pyritään laatimaan turvaaviksi, joten normaalioloissa ne tuottavat ylijäämää. Toisaalta ylijäämää kertyy, kun sijoituksille saatava tuotto ylittää laskuperustekorona. Ylijäämää voi lisäksi syntyä, jos todelliset liikekulut alittavat vahvistetun kuormitusperusteen. Vakuutusyhtiölaista ilmenevän kohtuusperiaatteen mukaisesti ylijäämä on palautettava vakuutussenottajille. Ylijäämä tulee palauttaa vakuutusryhmille siinä suhteessa kuin ne ovat sitä tuottaneet. Näin ollen korkoperusteen ylijäämä tulee palauttaa vakuutuksenottajille suhteessa vakuutuksen säästöosuuteen eli rahastoon. Riskiperusteiden ylijäämä tulee palauttaa suhteessa ylijäämää tuottaneiden riskivakuutusten vakuutussummaan ja kustannusperusteesta mahdollisesti syntyvä ylijäämä tulee palauttaa yhdenmukaisesti ylijäämää kerryttävän kuormituksen kanssa.

Ylijäämä voidaan jakaa vakuutuksenottajille antamalla joko vuotuisia tai pysyviä lisäetuja. Vuotuisia ovat lisäedut, jotka koskevat vain esim. kyseisenä vuonna maksettavia vakuutusmaksuja tai erääntyviä vakuutussuorituksia. Tällaisia etuja ovat erilaiset maksunalennukset ja kuolemantapaus- tai säästösummiin liitettävät lisäsummat.

Pysyvillä lisäeduilla kasvatetaan vakuutuksen rahastoa. Tällaisia lisäetuja ovat indeksikorotukset ja erilaiset asiakashyvitykset. Koska henki- ja eläkevakuutukset ovat pitkäaikaisia sopimuksia, niin vakuutuksenottajan rahojen arvon säilyttämiseksi indeksikorotuksilla ja lisäeduilla on keskeinen merkitys.

7. TUTKIMUS HENKIVAKUUTUSYHTIÖN VAKUUTUSLIIKKEESTÄ

Vakuutusyhtiölain mukaan on jokaisen henkivakuutusyhtiön suoritettava tilikausittain tutkimus vakuutusliikkeestään. Tämä tutkimus on tehtävä sosiaali- ja terveysministeriön antamien ohjeiden mukaan, ja sen on valmistuttava viimeistään tilikautta seuraavan elokuun loppuun mennessä. Tutkimuksen avulla sosiaali- ja terveysministeriö voi valvoa vakuutusyhtiöiden toimintaa. Toisaalta, kuten riskiperusteiden yhteydessä monesti mainittiin, sillä on merkitystä yhtiön omaa toimintaa ja laskuperusteiden uusimistartetta suunniteltaessa. Tutkimukseen, josta yleisesti käytetään nimitystä henkivakuutuksen analyysi, kuuluu neljä osaa nimittäin liikutulosanalyysi, perusteanalyysi, riskiperusteiden yksityiskohdainen analyysi ja tila-analyysi.

Liikutulosanalyysissä selvitetään, miten tilikauden tulos muodostuu eri vakuutuslajien liikutuloista. Siihen sisältyy myös erittelyjä, joilla voidaan kontrolloida vakuutusmaksuvastuun laskennan oikeellisuutta sekä tilastollisten ja kirjanpidollisten tietojen yhteensopivuutta. Näitä erittelyjä ovat laskelma säästömaksutulosta, tilastollisen ja kirjanpidollisen maksutulon erotus, laskelma vakuutusmaksuvastuun bruttolisäyksestä sekä laskelma laskutekniikan tarkkuudesta.

Perusteanalyysin tarkoituksena on selvittää riski-, kustannus- ja korkoperusteiden paikkaansapitävyyttä eri vakuutuslajien osalta. Riskiperusteiden yksityiskohtaisessa analyysissä selvitetään kunkin riskiperusteen osalta erikseen perusteiden oikeellisuutta. Selvitysten avulla saadaan tarkempi kuva eri riskiperusteiden oikeellisuudesta ja mahdollisista kehityssuunnista. Tietoja voidaan sitten hyödyntää uusia laskuperusteita haettaessa ja uusia tuotteita suunniteltaessa.

Tila-analyysin tarkoituksena on antaa selvitys yhtiön toimintapääomasta sekä vakuutusten indeksisidonnaisuudesta aiheutuvasta vastuusta ja sen kattamisesta.

Analyysit kohdistuvat tilivuoden tapahtumiin tarkasteltuna tilivuoden keskellä. Ennen tilivuoden alkua voimaan tulleet indeksikorotukset sisältyvät sellaisenaan analyysilukuihin. Tilivuoden aikana syntyneet indeksikorotukset otetaan huomioon laskemalla kuinka suuren osan vuotta ne ovat olleet voimassa.

LÄHDELUETTELO

1. H.U. Gerber: Lebensversicherungsmathematik, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg 1986.
2. Henki- ja eläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa, SHY, Helsinki 1982
3. W. S. Jewell: Generalized Models of the Insurance Business (Life and/or Non-Life Insurance). Report of introduction by W. S. Jewell. Transactions of the 21st International Congress of Actuaries, Zurich & Lausanne, 1980.
4. A. Junnila: Vakuutusmatematiikan perusteet, vakuutustutkinnon oppikirjamoniste 37, Suomen vakuutusyhtiöiden keskusliitto Vakuutusalan koulutuskeskus, Helsinki 1977.
5. S. Karlin, H.M. Taylor: A first course in stochastic processes, Academic Press, New York 1975
6. O. Savolainen: Viipaletekniikan ja vuosimaksutekniikan yhteensopivuus, SHV-Harjoitustyö, Helsinki 1988.
7. J. Tuomikoski: TEL:n työkyvyttömyysmalli: Z-pinnan parametrien määrittäminen pinnansovitustehtävän, SHV-harjoitustyö, Helsinki 1986.

