WORKING PAPERS ISSN 0781-4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

11

Lasse Heiniö

VANHUUSELÄKELIIKKEEN SIMULOINTIMALLI
(1984)

In this research, the Monte Carlo -method is used to examine the effect of the changes in mortality and in the interest to the funds on the development of the old age pension business in the long run.

The research examines a hypothetical group of insured, consisting of people who are of the same age at beginning of the research. Withdrawal from the group is only through death or leaving for pension. In a year, these people are replaced by a new group of people of the same age, the number of active group-members thus remaining the same.

The Gompertz -mortality pattern has been used and the parameters have been selected to correspond to those in accordance with the calculation bases of the compulsory employees' pension in Finland.

Using a simulation pattern, we have examined the most characteristic features of old age pension when mortality or interest presumptions change, and have examined the development of the old age pension business of the above-mentioned group. The powerful effect of the "large" age groups born in regular time intervals is characteristic of this development, if, for example, the mortality presumptions prove unsustainable. Finally, we have used the model by example when trying to find a "safe" return limit for distributing the surplus to the insured.

S H V – T Y Ö

VANHUUSELÄKELIIKKEEN SIMULOINTIMALLI

Lasse Heiniö

SISÄLTÖ

1. JOHDANTO

Riskiteoreettisten tarkastelujen käyttö vakuutusmatemaattisten ongelmien tutkimiseen soveltuu epäilemättä parhaiten vahinkovakuutukseen liittyvien ongelmien yhteyteen. Mikään ei kuitenkaan estä vastaavien metodien hyväksikäyttöä esimerkiksi tutkittaessa henki- ja eläkevakuutusliikkeessä esiintyvää satunnaisvaihtelua ja perusoletuksissa tapahtuvien muutosten vaikutuksia pitkällä aikavälillä.

Tämä eläkevakuutuksen vanhuuseläkeliikettä tutkiva työ liittyykin professori Teivo Pentikäisen vastaaviin henkivakuutusta käsitteleviin riskiteoreetisiin tuloksiin [1]*. Saamani tehtäväkuvauksen mukaisesti on tarkastelut rajoitettu yksinkertaisuuden vuoksi koskemaan vain vanhuuseläkeliikettä. Edelleen sovittiin alkutilannetta yksinkertaistettavan olettamalla alkuhetkellä kaikki tarkasteltavan lähtöjoukon jäsenet saman ikäisiksi; 30 vuotiaiksi.

*[ ] viittaukset liittyvät työn lopussa esitettyihin lähdeteoksiin

Lähdettäessä simuloimaan Monte Carlo menetelmällä kuolevuusliikettä syntyy, kohdassa 3 selostetulla tavalla , kunkin vuoden aikana kuolleiden tilalle otettavista uusista jäsenistä joukko, jonka kehitystä ryhdytään seuraamaan. Mikäli näin ajan kuluessa syntyvien joukkojen jäsenien lähtöikien sallittaisiin vaihdella paisuisi tarkasteltavina olevien joukkojen lukumäärä varsin nopeasti hyvin suureksi. Siksi on tilannetta yksinkertaistettu olettamalla, että uusien joukkojen jäsenet ovat alussa aina kaikki 30 vuotiaita. Tehdyistä yksinkertaistuksista huolimatta voidaan käytetyn mallin avulla saaduista tuloksista löytää tarkasteltavalle liikkeelle luonteenomaisimmat piirteet. Lisäksi tarjoaa käytetty malli erään apuneuvon tutkittaessa kuinka aika- ajoin syntyvät tavallista suuremmat joukot - "suuret ikäluokat" - voivat vaikuttaa vanhuuseläkeliikkeen kehitykseen. Tämä käy päinsä koska alkutilanteessa oletetaan kaikki jäsenet saman ikäisiksi, jolloin alkuvuosina syntyvät uudet joukot ovat lähtöjoukon alhaisen kuolevuuden vuoksi kooltaan lähtöjoukkoa merkittävästi pienempiä. Vasta kun lähtötilanteen joukko siirtyy eläkkeelle syntyy tilalle otetuista uusista jäsenistä jälleen muihin ikäluokkiin nähden suuri joukko. Näin 35 vuoden aikavälein syntyvien "suurten ikäluokkien" vaikutus paljastuu varsin mielenkiintoiseksi, jos esimerkiksi kuolevuusoletuksissa tehdyt oletukset osoittautuvat ajan kuluessa pitämättömiksi.

2. ALUSTAVIA TARKASTELUJA

2.1. Alkuoletukset

Tarkastelujen lähtökohtana on n:stä jäsenestä koostuva joukko. Kaikki joukkoon kuuluvat ovat lähtötilanteessa saman ikäisiä. Merkitään yhteistä lähtöikää x:llä ja alkuvuotta 0:lla. Oletetaan lisäksi, että eläkeikä on kaikilla 65 vuotta ja vuosieläke 1:n suuruinen.

2.2. Kuolevuusmalli

Kuolevuusmallina on käytetty TEL:n kuolevuusmallia

$$(1) \qquad \mu(x+t) = 5\times 10^{-5} \exp(0.095(x+t)), \quad t=0,1,2,...$$

Tästä on johdettu mallin mukaiset vuoden t alussa hengissä olevien x+t ikäisten lukumäärää kuvaavat l(x+t)-luvut, t=0,1,2,... , algoritmilla

$$(2) \qquad l(x+t+1) = l(x+t)[\,1 - q(x+t)] \quad , \; t=0,1,2,...$$

käyttäen alkuarvoina suureita $x = 30$, $l(x+0) = 1000$. Vuoden aikana kuolleiden suhteellista osuutta kuvaavat luvut $q(x+t)$ on arvioitu karkeaa approksimaatiota $q(x+t) \doteq \mu(x+t)$ käyttäen. Koska tehdyt tarkastelut tulevat olemaan luonteeltaan puhtaasti teoreettisia, eikä kuolevuustodennäköisyyksiä sovelleta mihinkään todelliseen aineistoon ei tehty yksinkertaistus liene haitaksi. Oleellista tulevissa tarkasteluissa ei ole niinkään se kuinka tarkasti mallin rahastoja ja maksusuureita laskettaessa käytetyt kuolevuusluvut vastaavat todellisuutta kuin se mikä on mallissa valitun kuolevuuden ja vuoden aikana kuolleiden lukumäärää simuloitaessa käytetyn kuolevuuden - toisen kertaluvun kuolevuus - suhde toisiinsa.

Kuolevuuteen tuodaan stokastiikka mukaan siten, että vuosittain kuolevien määrä

(3) $d(x+t) = l(x+t)\ q(x+t)$, $t=0,1,2,...$

on satunnaistettu poiminnaksi Poisson $[d(x+t)]$ - jakaumasta. Kone tuottaa kullekin vuodelle satunnaisluvun väliltä (0,1), joka muunnetaan vastaavaksi Poisson - muuttujan arvoksi, [2]. Kuolemantapausten lukumäärää simuloitaessa käytetään rahastoja ja maksusuureita laskettaessa käytettyjen q-lukujen sijasta toisen kertaluvun kuolevuutta kuvaavia q´-lukuja

(4) $q'(x+t) = \text{Myymuutos} \cdot q(x+t)$, $t = 0,1,2,...$,

missä Myymuutos on kerroin, jonka arvoa vaihtelemalla, voidaan tutkia kuolevuusoletuksessa tapahtuvien muutosten vaikutusta.

2.3. Vastuuvelka

Vastuuvelka vuoden t alussa lasketaan rekursiivisesti kaavasta

$$(5) \quad l(x+t+1)\cdot V(x+t+1) = r \cdot l(x+t)\cdot[V(x+t) + B(x)\cdot(x+t<65) - 1\cdot(x+t>64)]$$

missä

$V(x+t)$ = yksittäisen joukon jäsenen osalta laskettu vastuuvelka vuoden t alussa, $t = 0,1,2,...$

$B(x)$ = alkuikää x vastaava yksikön suuruista vuotuista eläkettä vastaava yhdelle jäsenelle laskettu nettomaksu vuotta kohti

r = rahastoille laskettava vuotuinen korko

$(x+t<65)$ = funktio, joka saa arvon 1, kun $x+t<65$ ja muulloin arvon nolla.

Koska jatkossa tullaan tarkastelemaan vain kuolevuusoletusten ja korkotekijöiden vaikutusta liikkeen kehitykseen, ei rahastolaskentaan ole otettu mukaan kuormitustekijää.

Vuosimaksu B(x) määräytyy yksikäsitteisesti ehdoista

$$(6) \quad V(x+0) = 0 \text{ ja } l(65)\cdot V(65) = \sum_{\tau\geq 0} l(x+(65-x)+\tau)\cdot r^{-\tau},$$

joita käyttäen B(x) voidaaan ratkaista kaavasta

$$(7) \quad l(65)\cdot V(65) = \sum_{t=0}^{65-x-1} r^{65-(x+t)}\cdot l(x+t)B(x)$$

eli ajatuksena on, että 65:een ikävuoteen mennessä kerättyjen maksujen tulee korkoineen riittää tuleviin eläkkeisiin.

2.4. Satunnaisvoitto

Korvataan kaavan (2) mukaiset l-luvut satunnaistetuilla $\underset{\sim}{l}$-luvuilla:

$$(8) \qquad \underset{\sim}{l}(x+t+1) = \underset{\sim}{l}(x+t) - \underset{\sim}{d}(x+t) \qquad ; \ \underset{\sim}{l}(x+0) = l(x+0)$$

missä $\underset{\sim}{d}(x+t)$ on edellä kuvatulla tavalla Poisson - jakauman avulla saatu satunnainen t:nnen vuoden aikana kuolleiden x+t ikäisten lukumäärä.Satunnaisvoitto vuodelta t lasketaan tällöin kaavasta

$$(9) \quad \underset{\sim}{Y}(x+t) = r\cdot\underset{\sim}{l}(x+t)\cdot[V(x+t)+B(x)\cdot(x+t<65)-1\cdot(x+t>64)] - \underset{\sim}{l}(x+t+1)\cdot V(x+t+1) \quad , \qquad t=0,1,2,\ldots$$

Kumuloitunut satunnaisvoitto vuosilta 0,...,t vuoden t lopussa saadaan kaavasta

$$(10) \quad \underset{\sim}{Y}_{tot}(x+t) = \sum_{\tau=0}^{t} \underset{\sim}{Y}(x+\tau)\cdot r^{\,t-\tau}$$

3. TÄYDENTYVÄ JOUKKO

3.1. Deterministisiä tarkasteluja

Tarkastellaan 1000:n hengen joukkoa, jonka kaikki jäsenet ovat 30 vuotiaita. Oletetaan, että vuosittain kuoleman, tai eläkkeelle siirtymisen kautta poistuneiden tilalle otetaan kooltaan täsmälleen poistuneiden lukumäärää vastaava uusi joukko 30 vuotiaita jäseniä. Tämän kunakin vuonna syntyvän uuden joukon jäsenten lukumäärä riippuu näin ollen aiemmin syntyneistä joukoista vuoden aikana kuolleiden lukumäärästä sekä vuoden lopussa eläkkeelle siirtyvien lukumäärästä. Vuoden aikana kuolleiden jo eläkkeellä olevien tilalle ei luonnollisesti oteta uusia jäseniä. Aktiivivaiheessa olevien, jotka siis ovat elossa, mutta eivät vielä eläkkeellä, lukumäärä pysyy näin ollen koko ajan muuttumattomana.

Kuvassa (1) on esitetty, kuinka tarkasteltavien joukkojen lukumäärä ja toisaalta kunkin joukon jäsenten lukumäärä kehittyy ajan kuluessa. Lähtöhetkellä eli 0:nnen vuoden alussa on siis yksi 1000:n hengen joukko ja $x=30$

Katsotaan aluksi kuinka herkkä kaavan (10) mukainen kumuloitunut voitto on korkoa ja kuolevuutta koskeville oletusten muutoksille. Jätetään kuolemiseen liitetty stokastiikka aluksi tarkastelun ulkopuolelle ja tutkitaan kumuloituneen voiton lauseketta, kun kaavassa (9) on

$$\underset{\sim}{l}(x+t) = l(x+t) , \qquad t=0,1,2,\ldots$$

missä l-luvut on saatu kaavoista (2) ja (4) korvaamalla q-luvut q´-luvuilla. Suhteutetaan kertynyt voitto tai tappio maksutuloon, joka pysyy edellä todetun nojalla vuosittain vakiona ja seurataan lausekkeen

$$(11) \quad \mathbf{y}(0,t) = \sum_{j=0}^{t} \sum_{\tau=j}^{t} \mathbf{Y}(x+\tau-j)\cdot r^{t-\tau}/1000\cdot B(30) \qquad ,t=0,1,2,\ldots$$

kehitystä. Kaavassa (11) tarkoittaa $\mathbf{Y}(x+\tau-j)$ j:nnen vuoden alussa syntyneen joukon τ:nnen vuoden kuolevuusliikkeestä syntynyttä voittoa.

Kuvasta (2) käy selvästi ilmi kuinka voimakas vaikutus rahastoille saatavalla korolla on liikkeen kehitykseen. Kun esimerkiksi korko ylittää rahastoille laskettavan koron 0,5 prosenttiyksiköllä eli, kun voitoa kuvaavissa lausekkeissa korvataan korkotekijä $r = 1{,}05$ kertoimella $r'=1{,}055$, alkaa kaavan (11) mukainen voitto paisua varsin jyrkästi. Kumuloitunut ylijäämä ylittää vuotuisen maksutulon jo 16 :nnen vuoden lopussa. Vastaavasti mikäli rahastoille saatu korkotuotto alittaa laskuperusteiden mukaisen 5 %:n koron laskee käyrä voimakkaasti.

Kuvassa (3) on esitetty kuolevuusoletuksessa tehtyjen muutosten vaikutusta. Kun kuolleiden lukumäärää laskettaessa käytetään kaavassa (4) kertoimelle Myymuutos arvoa 1.05 eli toisen kertaluvun kuolevuus on 5 % rahastoja laskettaessa käytettyä kuolevuutta suurempi, alkaa voittoa kumuloitua.

0:s vuosi | 1.vuosi | 2.vuosi

$$l(x+0-0) + l(x+1-0) = l(x+0-0)-d(x+0-0) + l(x+2-0) = l(x+1-0)-d(x+1-0) + \quad \ldots$$

$$\underline{l(x+1-1)} = d(x+0-0) \qquad + l(x+2-1) = l(x+1-1)-d(x+1-1) + \quad \ldots$$

$$\sum_{j=0}^{1} l(x+1-j) = 1000 \qquad \underline{l(x+2-2)} = d(x+1-0)-d(x+1-1) + \quad \ldots$$

$$\sum_{j=0}^{2} l(x+2-j) = 1000$$

34:s vuosi | 35:s vuosi

$$+ l(x+35-0) = l(x+34-0)-d(x+34-0) \qquad + l(x+36-0) = l(x+35-0)-d(x+35-0) + \quad \ldots$$

$$+ l(x+35-1) = l(x+34-1)-d(x+34-1) \qquad + l(x+36-1) = l(x+35-1)-d(x+35-1) + \quad \ldots$$

$$\vdots \qquad \vdots$$

$$+ l(x+35-34) = l(x+34-34)-d(x+34-34)$$

$$\underline{l(x+35-35)} = l(x+35-0) + d(x+34-0) + \ldots + d(x+34-34) + l(x+36-35) = l(x+35-35)-d(x+35-35) + \quad \ldots$$

$$\sum_{j=1}^{35} l(x+35-j) = 1000 \qquad \underline{l(x+36-36)} = l(x+36-1)+d(x+35-1)+\ldots+d(x+35-35)+\ldots$$

$$\sum_{j=2}^{36} l(x+36-j) = 1000$$

KUVA (1) Täydentyvän joukon kehitystä kuvaava kaavio. Koska 34:nnen vuoden lopussa siirtyy joukko l(x+35-0) eläkkeelle, 35:nnen vuoden lopussa vastaavasti joukko l(x+36-1) jne. pysyy aktiivien yhteismäärä kunkin vuoden alussa vakiona 1000.

KUVA (4)

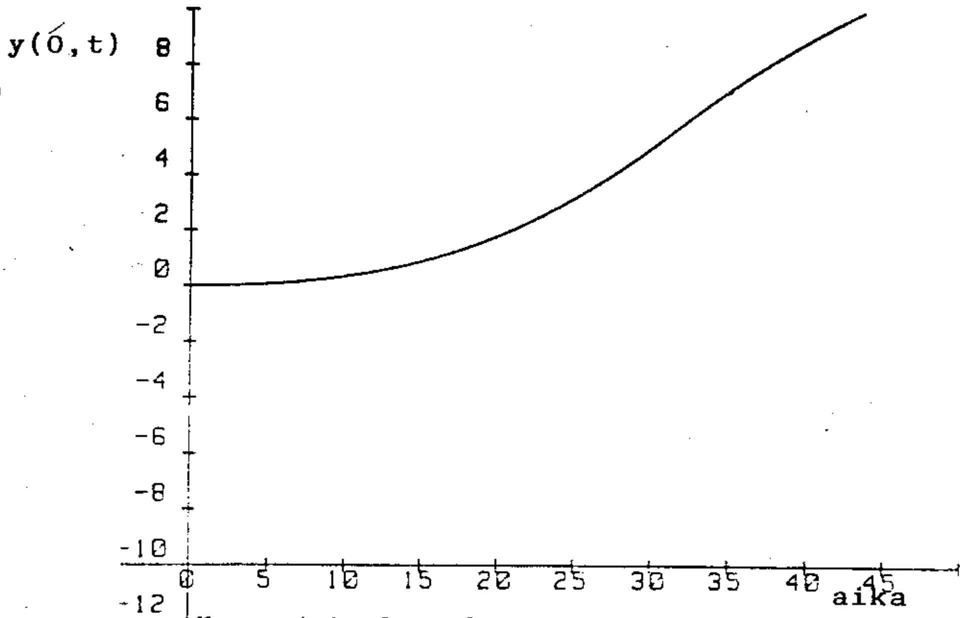
IKÄ	D(x+t)	D_(x+t)	Erotus
30	1.36	1.19	.17
31	1.44	1.25	.19
32	1.54	1.33	.21
33	1.64	1.41	.23
34	1.75	1.5	.25
35	1.88	1.6	.28
36	2.01	1.71	.3
37	2.16	1.83	.33
38	2.33	1.96	.37
39	2.5	2.11	.39
40	2.7	2.26	.44
41	2.91	2.44	.47
42	3.15	2.63	.52
43	3.4	2.83	.57
44	3.69	3.06	.63
45	3.99	3.31	.68
46	4.33	3.58	.75
47	4.69	3.88	.81
48	5.09	4.2	.89
49	5.52	4.55	.97
50	6	4.94	1.06
51	6.51	5.36	1.15
52	7.07	5.82	1.25
53	7.67	6.31	1.36
54	8.33	6.86	1.47
55	9.03	7.44	1.59
56	9.8	8.08	1.72
57	10.62	8.77	1.85
58	11.5	9.51	1.99
59	12.45	10.31	2.14
60	13.46	11.17	2.29
61	14.54	12.09	2.45
62	15.69	13.08	2.61
63	16.9	14.13	2.77
64	18.18	15.25	2.93
65	19.51	16.44	3.07
66	20.91	17.69	3.22
67	22.35	19.01	3.34
68	23.83	20.38	3.45
69	25.33	21.8	3.53
70	26.85	23.27	3.58
71	28.36	24.76	3.6
72	29.83	26.27	3.56
73	31.25	27.78	3.47
74	32.57	29.27	3.3
75	33.78	30.71	3.07
76	34.82	32.07	2.75
77	35.66	33.32	2.34
78	36.26	34.42	1.84
79	36.58	35.33	1.25
80	36.57	36.02	.55
81	36.2	36.44	-.24
82	35.44	36.55	-1.11
83	34.28	36.31	-2.03
84	32.71	35.69	-2.98
85	30.75	34.67	-3.92
86	28.42	33.25	-4.83
87	25.78	31.42	-5.64
88	22.9	29.22	-6.32
89	19.87	26.68	-6.81
90	16.79	23.88	-7.09
91	13.79	20.9	-7.11
92	10.96	17.83	-6.87
93	8.41	14.8	-6.39
94	6.21	11.9	-5.69
95	.5	.5	0

Kertoimen Myymuutos = 1.1 vaikutus vuosittain kuolevien lukumäärään. Luvut D(x+t) vastaavat mallin mukaisia ensimmäisen kertaluvun kuolevuuden mukaisia vuosittain kuolleiden lukumääriä d(x+t) ja luvut D_(x+t) vastaavia toisen kertaluvun kuolevuuteen liityviä kuolleiden lukumääriä **d**(x+t).

Kuten kuvasta (3) kävi ilmi synnyttää kuolevuusoletuksen pettäminen esimerkiksi 10 %-yksiköllä jyrkästi laskevan käyrän. Tällöin herää luonnollisena kysymyksenä ajatus korkotuoton kompensoivasta vaikutuksesta ko. tilanteessa. Kuva (5) osoittaa, että vaikka kuolevuus olisi 20 %-yksikköä oletettua pienempi(Myymuutos =0,80) niin jo 0,5 %-yksikön lisä korkotuottoon(r´= 1,055) eliminoi kuolevuudesta syntyvät tappiot. Voittokäyrä nousee aluksi pelkästään korkovoittojen ansiosta aivan kuin kuvassa (2). Toisen kertaluvun kuolevuuden aiheuttama ero d-lukuihin alkaa kuitenkin vaikuttaa noin 30:n vuoden kuluttua ja kuvan (2) mukainen jyrkkä nousu alkaa loiventua. Käyrän taipuminen viittaa siihen, että on ehkä löydettäövissä sopivalla korkotuotolla ainakin suhteellisen pitkälle aikavälille tasapaino koron tuottamalle voitolle ja kuolevuuden aiheuttamalle tappiolle.

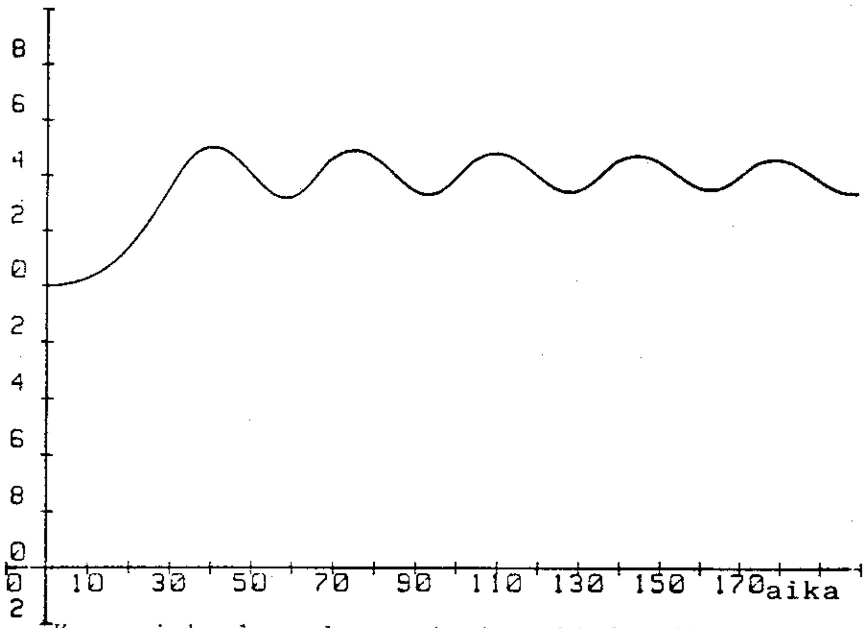
Kuvassa (6) on korkoa hieman kuvan (5) tilanteesta alentamalla jatkettu simulointia 200 vuoden aikavälille. Kuvasta havaitaan mielenkiintoinen täydentyvälle joukolle ominainen piirre:kumuloitunut voitto muodostaa aaltoliikettä muistuttavan käyrän.

KUVA(5)



Koron ja kuolevuuden muutosten yhteisvaikutus:
Myymuutos = 0,80 , r´ = 1,055 , palautus = 0

KUVA (6)



Koron ja kuolevuuden muutosten yhteisvaikutus:
Myymuutos = 0,80 , r´ = 1,054 , palautus = 0

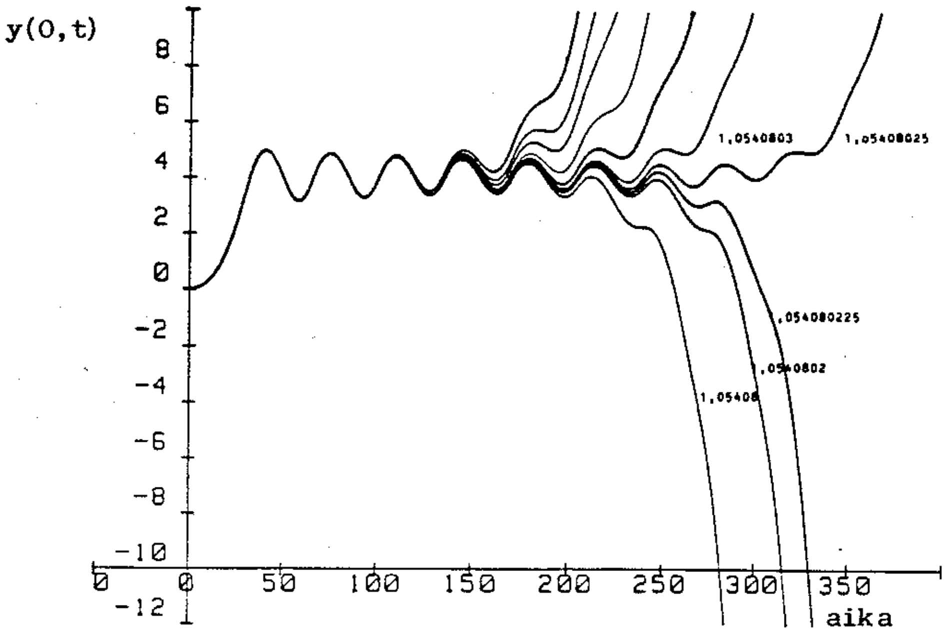
Ilmiön selitys on seuraava. Ensimmäisen 35:n vuoden aikana kumuloituu koroista syntyvä voitto voimakkaasti. Lähtöjoukon lähetessä eläkeikää alkaa kuolevuusoletuksessa oleva ero vaikuttaa voimakkaasti tappiota tuottavasti ja käyrä painuu laskuun , kunnes noin 57 vuoden kohdalla (lähtöpopulaation elossa olevat jäsenet ovat 87 vuotiaita) ovat kuolevuusoletuksesta aiheutuneet tappiot pääosin realisoituneet. Koska kuolleiden ja eläkkeelle siirtyneiden tilalle tulleet ovat vielä varsin nuoria, pääosa noin 40 vuotiaita, ei kuolevuustappioita vielä heidän osaltaan synny merkittävissä määrin ja korkovoitot kääntävät käyrän jälleen nousuun, kunnes noin vuoden 70 kohdalla, kun edellisen suuren eläkkeelle siirtyneen ikäluokan tilalle tulleet saavuttavat eläkeiän alkavat kuolevuusoletuksesta johtuvat tappiot jälleen painaa käyrän laskuun.

Käyrä pysyy koko tarkkailuvälin 0-tason yläpuolella ja tuntuisi varsin luontevalta tulkita liikkeen olevan käytännöllisesti katsoen tasapainoinen tarkasteluvälin puitteissa.

On kuitenkin muistettava, että esitetyt voittoa kuvaavat käyrät pohjautuvat keskiarvoliikkeeseen perustuvaan laskentaan. Kun otamme tarkasteluun mukaan kuolemantapausten lukumäärässä esiintyvän satunnaisvaihtelun paljastuu kauniilla tavalla kuinka virheellisiin johtopäätöksiin voisi yllä havaittu näennäinen tasapainotila johtaa. Tästä antaa jo ennakkoaavistuksen kuvassa (7) esitetyt eri korkotuotolla r´synnytetyt kumuloitunutta voittoa kuvaavat käyrät 400:n vuoden tarkasteluvälillä.

Jo varsin pienet korko-oletuksessa tehdyt muutokset suistavat käyrän jyrkkään laskuun tai vastaavasti voimakkaaseen nousuun. Tämä havainnollistaa kuinka "veitsen terällä" liikkeen näennäinen tasapaino itse asiassa on. Jo tästä voitaneen ounastella, että pienetkin kuolevien lukumäärässä tapahtuvat heilahtelut suistavat käyrän tasapainotilasta mikä käykin myöhemmin selvästi ilmi, kun stokastisoimme kuolemantapausten lukumäärän.

KUVA (7)



Koron ja kuolevuuden muutosten yhteisvaikutus:
Myymuutos = 0,80 , r´:n eri arvot on merkitty vastaavan käyrän viereen , palautus = 0

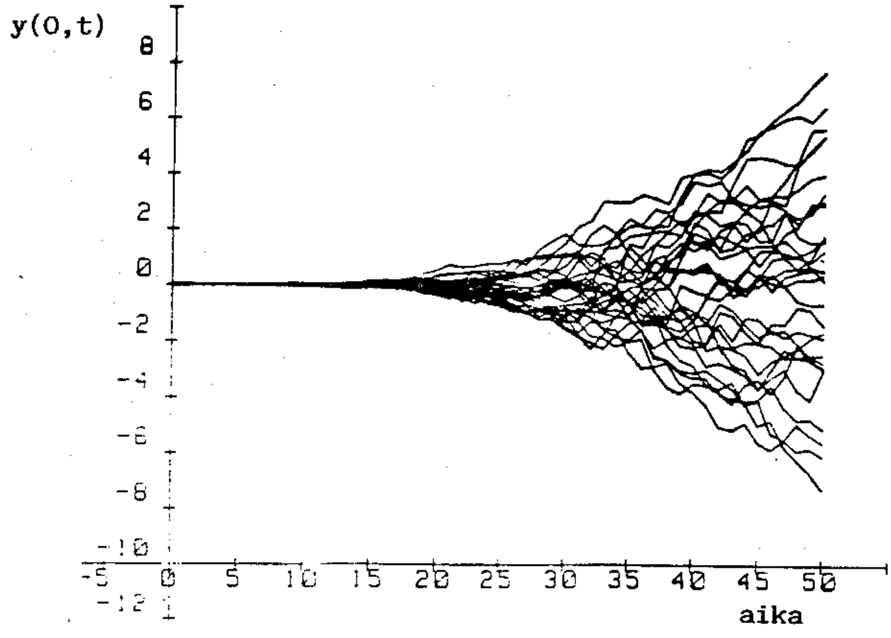
3.2. Kuolleiden lukumäärän satunnaistaminen

Satunnaistetaan vuosittain kuolleiden lukumäärä edellä kuvattua menettelyä käyttäen. Kullekin tarkasteltavalle joukolle arvotaan siis erikseen vuoden aikana kuolevien lukumäärä.

Kuvassa (8) on oletettu rahastoille saatavan korkotuoton ja todellisen kuolevuuden vastaavan täsmälleen rahastojen ja maksujen laskennassa käytettyjä arvoja eli r´= r = 1,05 ja Myymuutos = 1,00. Kuten tunnettua hajoaa voittoa kuvaavien realisaatioiden parvi voimakkaasti. Syy on kuolevuudessa esintyvän satunnaisvaihtelun kautta syntyneelle voitolle tai tappiolle laskettavassa korossa, jolle on ominaista voittoa kuvaavan käyrän painaminen nousuun tai laskuun mikäli voittoa tai tappiota pääsee vähänkään merkittävämmässä määrässä syntymään.

Kuvan (8) mukainen hajoava viuhka on luonnollisesti varsin epäsuotava, koska se jättää liikkeen tulevan kehityksen arvioimisen täysin ennustamattomaan valoon.

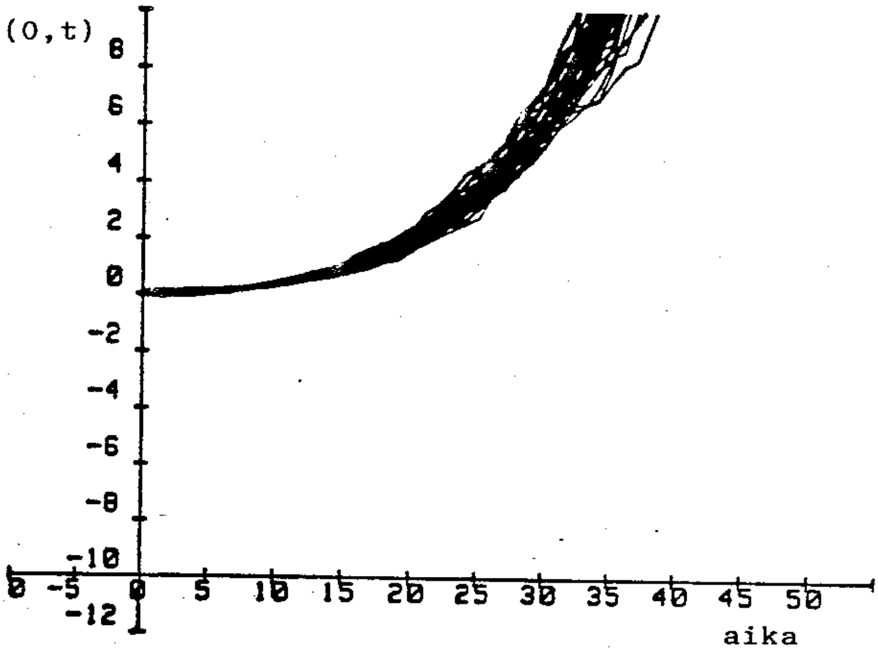
KUVA (8)



Vuosittain kuolevien lukumäärän satunnaistamisen vaikutus
Myymuutos = 1,00 , r´ = 1,05 , palautus = 0

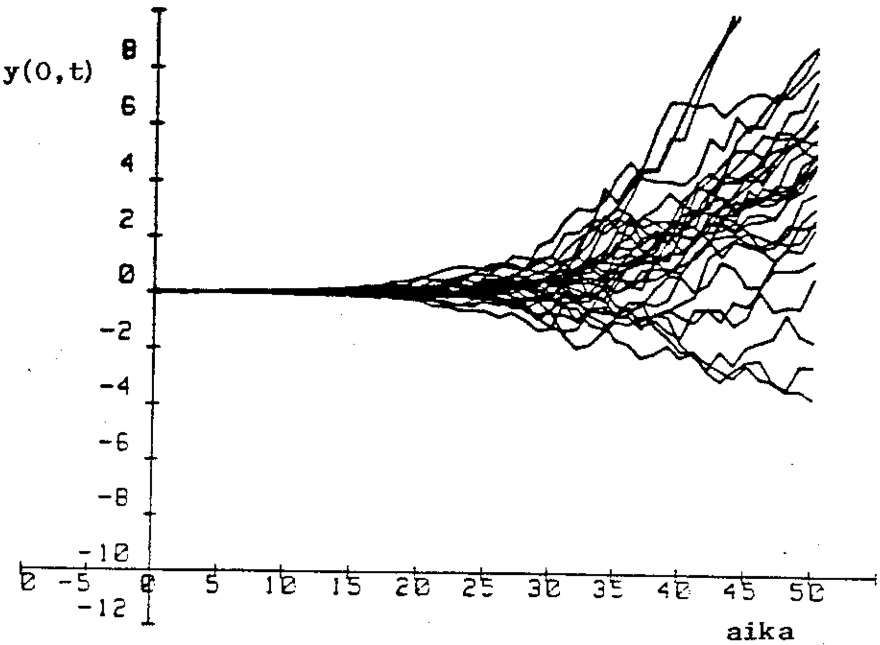
Kuvien (9) ja (10) realisaatioparvet vastaavat kuvissa (2) Ja (3) tehtyjä oletuksia. Kuolevuudessa tapahtuvat heilahtelut eivät sanottavammin pysty vaikuttamaan syntyneeseen voittoon, kun korkotuotto on kuvan (9) tapauksessa oletettu 1,055:ksi. Sen sijaan oletus Myymuutos =1,05 tosin nostaa realisaatioparven kuten kuvia (8) ja (10 vertailemalla voi havaita, mutta epäsuotuisa kuolevuuskehitys voi vielä painaa kumuloituneen voiton alle 0-tason.

KUVA (9)



Vuosittain kuolevienlukumääränsatunnaistamisen vaikutus.
Myymuutos = 1,00 , r´ = 1,055 , palautus = 0

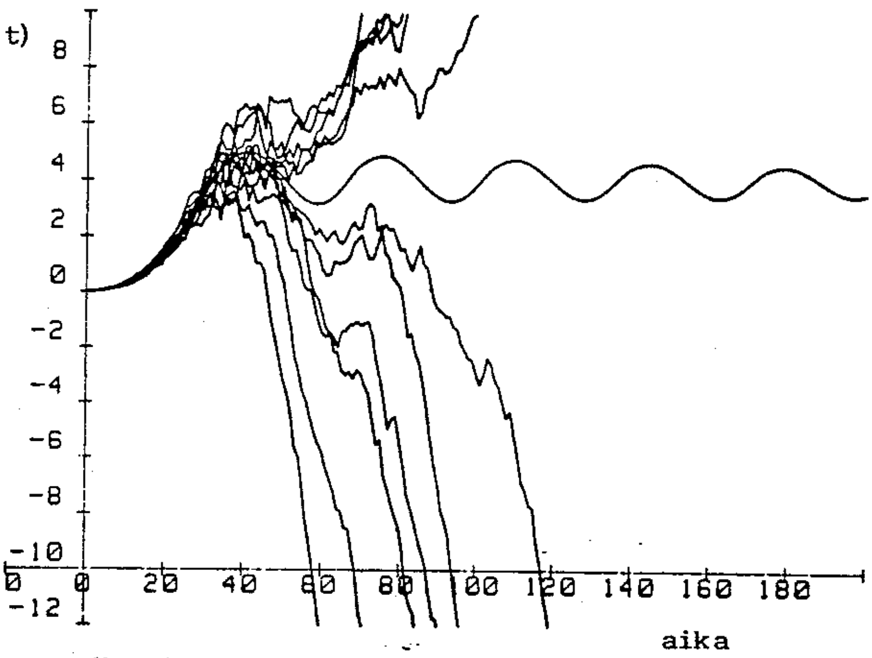
KUVA (10)



Vuosittain kuolevien lukumäärän satunnaistamisen vaikutus.
Myymuutos = 1,05 , r´ = 1,00 , palautus = 0

Jo edellä todettu kokonaisliikkeen varsin epästabiili luonne käy selvästi ilmi vertailtaessa kuvia (6) ja (11). Korkoa ja kuolevuutta koskevat oletukset ovat niissä samat, mutta kuvassa (11) on kuolemantapausten lukumäärä satunnaistettu. Deterministisen käyrän tasapainoinen aaltoliike rikkoontuu jo pienistäkin kuolemantapausten lukumäärässä tapahtuvista satunnaispoikkeamista.

KUVA (11)



Vuosittain kuolevien lukumäärän satunnaistamisen vaikutus.
Myymuutos = 0,80 , r´ = 1,054 , palautus = 0

3.3. Voiton palauttaminen

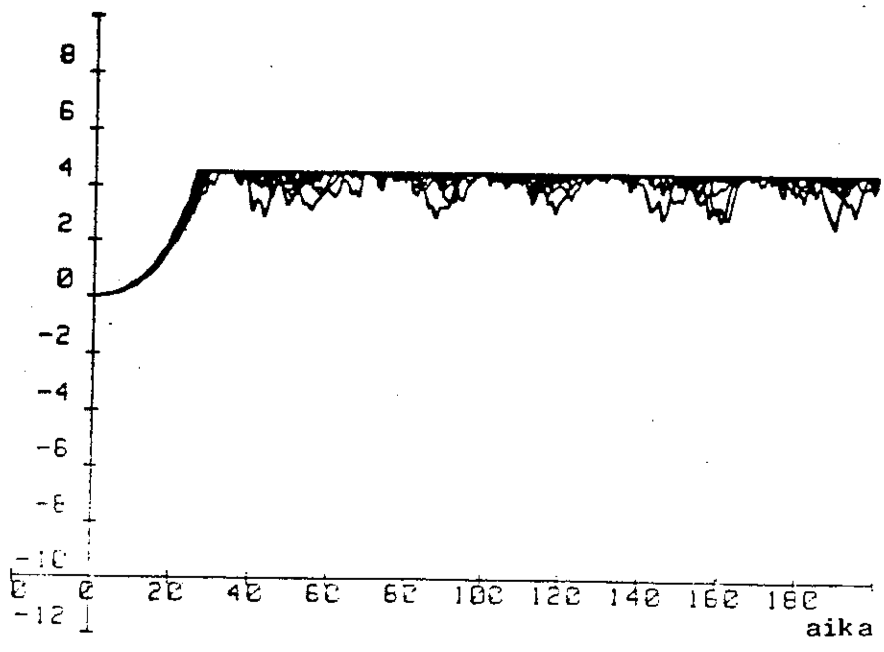
Koska jo melko pienellä rahastoille saatavalla korkotuotto-oletuksella voidaan ensimmäisten kahdenkymmenen vuoden aikana saada aikaan kumuloituneen voiton kerääntymistä melko nopeasti, voitaisiin ajatella menettelyä, jolla koron avulla pyrittäisiin tavoittamaan tietty kumuloituneen voiton taso, jonka jälkeen tämän tason ylittävä voitto palautettaisiin.

Ongelmaksi muodostuu tällöin kuinka korkealle tasolle voitonpalautusraja tulisi asettaa, jotta liikkeen voidaan tarpeeksi suurella varmuudella olettaa pysyvän 0 - tason yläpuolella. Vastaus riippuu muun muassa siitä kuinka suureen kuolevuusoletuksessa tapahtuvaan "erehdykseen" haluamme varautua.

Kuvat (12) - (14) esittävät eri palautusrajalla saatuja realisaatioparvia. Kuolevuusoletuksen on oletettu "pettävän 15 % - yksiköllä eli Myymuutos = 0,85 ja korko-oletuksena o käytetty r´= 1,055. Palautusrajan ollessa 4,5 x vuosimaksu vaikuttaa siltä, että kuolevuudessa tapahtuvat heilahtelut eivät voita korkotuottoa ja liike pysyy 0:n turvallisella puolella. Sen sijaan palautusrajan laskeminen tasolle 4,0 x vuosimaksu muuttaa liikkeen luonteen selvästi tasapainottomaan suuntaan (kuva(13)). Kuvassa (14) on 50:n realisaation parvi, kun palautusrajaksi on asetettu 4,25 x vuosimaksutulo. Liike tuntuu melko suurella varmuudella pysyvän tasapainossa.

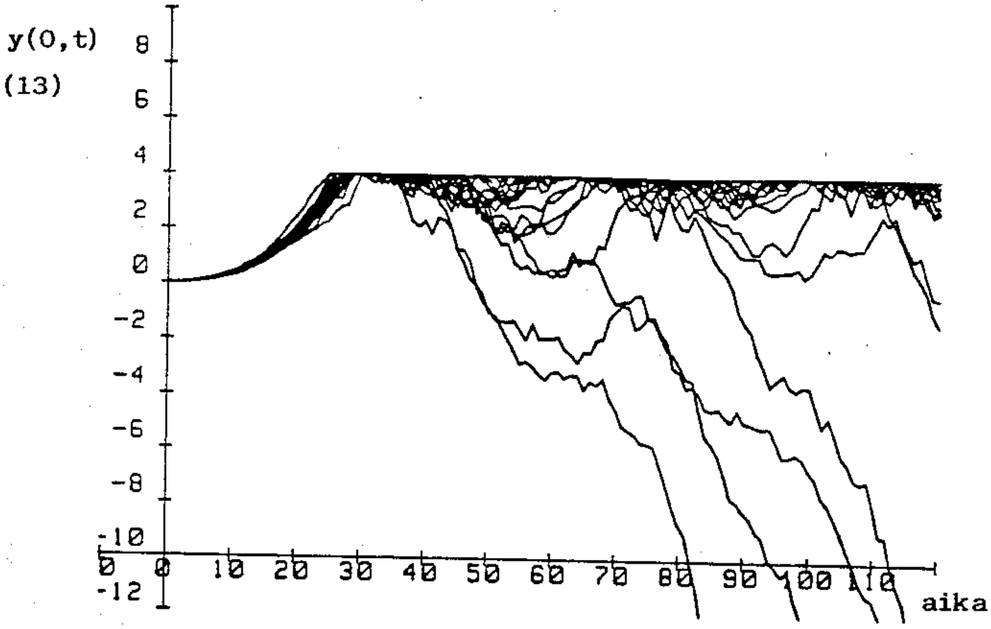
y(0,t)

KUVA (12)



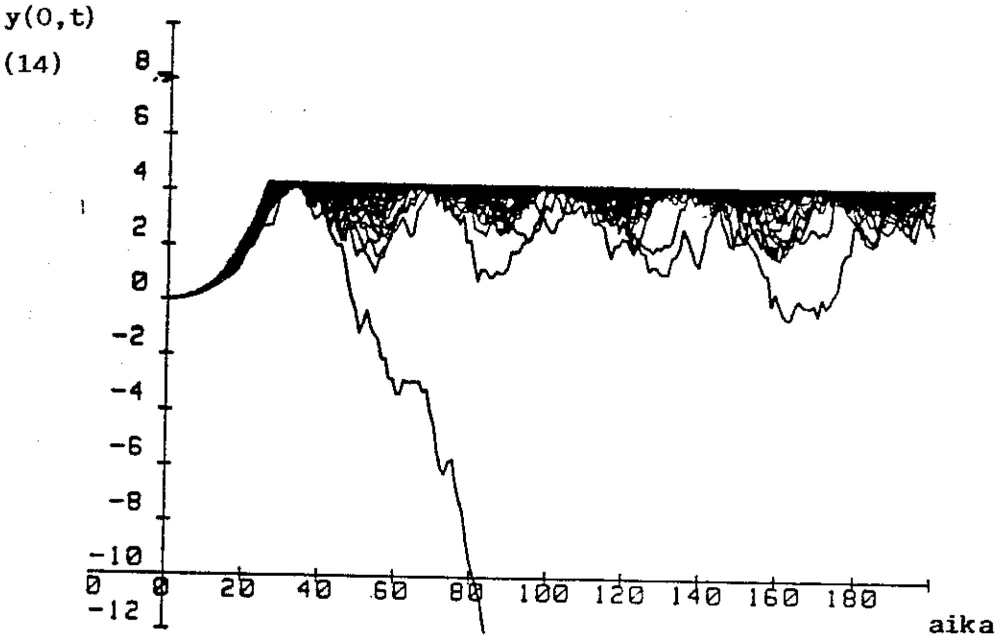
Palautusrajan vaikutus satunnaistettuun liikkeeseen
Myymuutos = 0,85 , r´= 1,055 , palautus = 4,5

KUVA (13)



Palautusrajan vaikutus satunnaistettuun liikkeeseen.
Myymuutos = 0,85 , r´ = 1,055 , palautus = 4,0

KUVA (14)



Palautusrajan vaikutus satunnaistettuun liikkeeseen
Myymuutos = 0.85 , r´ = 1,055 , palautus = 4,25

4. YHTEENVETO

Edellä esitetyt pelkistetyt tarkastelut osoittavat kuinka helposti voidaan Monte Carlo menetelmää hyväksi käyttäen saada tuntuma varsin monimutkaisiakin piirteitä omaaviin kysymyksiin. On selvää, että jo yllä kuvatun täydentyvän joukon analyyttinen käsittely olisi varsin työlästä tarkasteltavien joukkojen jatkuvasti lisääntyessä vuosien kuluessa ja koska voittoa kuvaavat lausekkeet sisältävät paljon toisistaan riippuvia muuttujia.

Mitä enemmän yleistämme mallia esimerkiksi sallimalla alkuiän vaihdella sekä lähtöjoukossa, että vuosittain mukaan tulevissa joukoissa tai antamalla eläkkeiden määrän tai eläkeiän vaihdella sitä vaikeammaksi muodostuisi tilanteen analyyttinen hallinta ja yllä kuvatun metodin käyttökelpoisuus korostuisi.

Mielenkiintoisen näkokulman tarjoaisi mallin laajentaminen koskemaan myös työkyvyttömyys ja perhe-eläkkeitä. Edelleen voitaisiin täydentyvän joukon sijasta sallia poistuminen muistakin syistä kuin kuoleman tai eläkkeelle siirtymisen johdosta, jolloin nousisi myös mahdollinen vapaakirjojen vaikutus tutkinnan kuohteeksi.

Myös inflaation tai esimerkiksi reaalikasvun vaikutusten tarkastelu on mahdollista ottamalla malliin sopivat näitä kuvaavat tekijät.

Kaikki yllä kuvatut ja monet muut mielenkiintoiset kysymykset, jotka nousevat mieleen mallia konstruoitaessa on jätetty alkuperäisen tehtäväkuvauksen puitteissa tarkastelun ulkopuolelle, mutta niiden tutkiminen olisi epäilemättä opettavaista ja voisi paljastaa mielenkiintoisia lainalaisuuksia eri tyyppisten joukkojen käyttäytymisestä olosuhteiden muuttuessa vuosien kuluessa.

Tekstissä on viitattu seuraaviin lähteisiin:

[1] Beard, Pentikäinen, Pesonen: Risk Theory, The Stochastic Basis of Insurance, uusimman vielä ilmestymättömän painoksen käsikirjoitus.

[2] Beard, Pentikäinen, Pesonen: Risk Theory, The Stochastic Basis of Insurance, Second Edition