

J a r m o J a c o b s s o n

V A K U U T U S Y H T I Ö N K O R V A U S V A S T U U S T A

Helsinki
31.8.1992

ESIPUHE

Esitän parhaat kiitokseni Suomen Aktuaaritoiminnan Kehittämissäätiölle apurahasta, joka mahdollisti tämän työn tekemisen.

Työtä koskevista keskusteluista ja hyödyllisistä kommenteista kiitän lämpimästi Olli Hämäläistä, Harri Nyrhistä sekä Pertti Savijokea sekä erinomaisesta konekirjoitustyöstä Anja Jaakkolaa.

Helsingissä 30.8.1992

Jarmo Jacobsson

Jarmo Jacobsson:

About loss reserving

Abstract

The loss reserving problem of an insurance company distinguishing between so-called IBNR- and IBNER-reserve is defined. The role of the loss reserve in accounting and the concept of the run-off-error is presented. The prediction problem of the number of unknown claims is then presented with a credibility-model solution. The loss reserve is dealt with using a general structural model and so-called development distributions. Discounting and the problem of inflation is also briefly considered. The structural model is extended to a credibility-model and the estimation of the development distributions is considered with help of run-off-triangle. Also some wellknown loss reserving methods (Bornhutter-Ferguson, Chain-ladder, de Vylder) with examples are presented.

S I S Ä L L Y S L U E T T E L O

YHTEENVETO SISÄLLÖSTÄ LUVUTTAIN

LUKU I	s.1	<u>Vakuutusyhtiö ja korvausvastuu</u>
	I.1.	Korvausvastuu vakuutusyhtiölaissa
	I.2.	Korvausvastuun tehtävät
	I.2.1.	Korvausvastuu ja vakavaraisuus
	I.2.2.	Korvausten kohdistaminen
	I.3.	Korvausvastuun matemaattinen määrittely
	I.4.	Korvausvastuun ennustuskriteerit
LUKU II	s.13	<u>Korvausvastuun ennustusongelmasta</u> (vahinkojen lukumäärä)
	II.1.	Vahinkojen lukumäärä
	II.2.	Estimointiasetelma
	II.3.	Tuntemattomien vahinkojen lukumäärän ennustaminen
	II.4.	Tuntemattomien vahinkojen lukumäärän credibility-malli
LUKU III	s.28	<u>Korvausvastuu ja vastuunmuodostuksen aikataulu</u>
	III.1.	Korvauskulu ja run-off-virhe
	III.2.	Korvausvastuun aikataulu ja korvauskulujen tuloutus
	III.3.	Esimerkki korvausvastuun riittävyyslaskennasta
LUKU IV	s.38	<u>Korvausvastuun rakennemalli</u>
	IV.1.	Johdanto ja oletukset
	IV.2.	Selviämisjakauma ja odotusarvo
	IV.2.1.	Maksetut korvaukset $x(t)$
	IV.2.2.	Maksetut/vahinkokohtaisesti varatut vahingot $x^-(t)$
	IV.2.3.	Maksetut korvaukset $x(t; t+1)$
	IV.3.	Maksamattoman korvauksen odotusarvo
	IV.4.	Selviämisjakauma ja varianssi
	IV.5.	Yhteenveto selviämisjakaumista
	IV.6.	Korvausvastuun diskonttaus
	IV.7.	Inflaatio ja selviämisjakauma
	IV.8.	Korvausvastuu ja selviämisjakauma
	IV.9.	Numeerinen esimerkki
LUKU V	s.66	<u>Korvausvastuun run-off-malli</u>
	V.1.	Run-off-kolmio
	V.2.	Sattumis/suoritusvuosi-malli
	V.3.	Korvausvastuun credibility-malli
	V.3.1.	Oletukset, malli ja ennuste
	V.3.2.	Estimointi
	V.3.3.	Esimerkkejä

LUKU VI s.90

Korvausvastuun määrittäminen

- VI.1. Johdanto
- VI.2. Odotusarvoennuste
- VI.3. Chain-ladder-menetelmä
 - VI.3.1. Malli ja ennustaminen
 - VI.3.2. Estimointi ja esimerkki
- VI.4. De-Vylderin menetelmä
- VI.5. Tunnettujen vahinkojen korvausvastuu ja vahinkokokoh-
tainen varaus
- VI.6. Tuntemattomien vahinkojen lukumäärä ja korvausvas-
tuu
- VI.7. Regressiomallit
- VI.8. Peruste-esimerkki

LÄHDELUETTELO

LIITTEET A-D

YHTEENVETO SISÄLLÖSTÄ LUVUTTAIN

Luvussa I määritellään korvausvastuu ja tarkastellaan Suomessa omaksuttuja korvausvastuunennusteen kriteerejä. Kaikki keskeiset merkinnät otetaan myös käyttöön tässä luvussa.

Luvussa II lähestytään korvausvastuuseen liittyvää ennustusongelmaa tuntemattomien (= yhtiölle raportoitumattomien) vahinkojen lukumäärän ennustamista tarkastelemalla. Luvun tulokset ovat kuitenkin keskeisiltä osiltaan yleistettävissä tapaukseen, jossa tarkastellaan myös korvauksia. Luvussa esitellään ns. negatiivisen credibility-kertoimen käsite. Luku muodostaa oman kokonaisuutensa siten, että sen tuloksia ei suoranaisesti käytetä muualla.

Luvussa III käsitellään korvausvastuun roolia maksettujen korvausten kohdistamisessa oikeaan ajankohtaan eli ko. vakuutetun riskin kirjanpidollista tuloustusta. Tällainen kohdistus ja vastuunmuodostuksen aikataulu ovat sidoksissa korvausvastuuperusteen oikeellisuuteen. Luvussa määritellään ns. run-off-virhe ja korvausvastuun riittävyys. Luku muodostaa oman kokonaisuutensa siten, että sen tuloksia ei käytetä muualla.

Luvussa IV tarkastellaan kiinteän sattumisvuoden korvausvastuun erästä rakennemallia. Luvun keskeinen tarkoitus on näin esitellä korvausvastuun syntymekanismia ja sitä kuvaavien parametrien luontevaa ja käyttökelpoista tulkin-taa. Luvussa määritellään ns. selviämisjakauma, jolla on eri muodoissa esitettynä keskeinen asema korvausvastuuta koskevilla tarkasteluilla.

Luvussa V otetaan käyttöön ns. run-off-kolmio ja laajennetaan luvun IV tarkastelu useammalle sattumisvuodelle, mikä mahdollistaa selviämisjakaumia koskevan estimoinnin. Luvussa esitellään myös eräs korvausvastuun ns. credibility-malli. Luku sisältää esimerkkejä.

Luvussa VI esitetään yhteenvedonomaaisesti keskeisimpiä korvausvastuun määrittämismenetelmiä, joista ns. odotusarvo-ennuste perustuu lukuihin IV ja V. Luku sisältää esimerkkejä.

I. VAKUUTUSYHTIÖ JA KORVAUSVASTUU

I.1. Korvausvastuu vakuutusyhtiölaissa

Vakuutusyhtiölain (10 luku 2 § 3 mom.) mukaan "korvausvastuu vastaa sattuneiden vakuutustapahtumien johdosta suoritettavia, maksamatta olevia korvaus- ja muita määriä sekä runsasvahinkoisten vuosien varalta vastuuopillisesti laskettavaa tasoitusmäärää."

Sitä osaa korvausvastuusta, joka ei sisällä tasoitusmäärää, kutsutaan usein varsinaiseksi korvausvastuuksi. Tasoitusmäärä taas koostuu tasoitusvastuusta ja ns. liikennevakuutuksen saldovastuusta. Koska tässä työssä käsitellään varsinaista korvausvastuuta, tarkoitetaan korvausvastuulla jatkossa ellei muuta mainita ainoastaan varsinaista korvausvastuuta. Korvausten ohella vakuutusyhtiölaissa mainittu "muut määrät" ovat pääasiassa vahinkojen välittömiä selvittelykustannuksia, jotka vahinkoihin kohdistettavissa olevina kirjataan maksettuihin korvauksiin. Korvausvastuun määrittely on riippumaton siitä, onko kyseessä vahinko- vai henkivakuutusyhtiö. Korvausvastuun osuus vakuutusyhtiön koko vastuuvélasta on kuitenkin vahinkovakuutuksessa huomattavasti suurempi kuin henkivakuutuksessa ja muutenkin lähestymistapa tässä työssä on vahinkovakuutuskeskeinen.

Korvausvastuun määritelmästä seuraa välittömästi, että kunakin hetkenä

- korvausvastuu vastaa korvauksia (ja muita määriä) ainoastaan sellaisista vakuutustapahtumista, jotka jo ovat sattuneet ja
- odottavat jostain syystä maksamistaan menorästin luonteisena velkana vakuutusyhtiön tilinpäätöksessä.

Edellä olevan perusteella korvausvastuun määrääminen edellyttää mahdollisuutta määrätä vakuutustapahtuman sattumishetki. Perinteisten vahinkovakuutusten vahingot vakuutustapahtumina ovatkin usein selkeästi ajoitettavissa. Esimerkkinä tällaisesta vahingosta käy autokolari, jonka sattumishetki yleensä on kiistaton. Jos vakuutustapahtumana sitä vastoin on esim. tuotevastuuvakuutuksen perusteella korvattava tuotevahinko, niin yleensä (!) vakuutusehtoja tulkitsemalla voidaan päästä yhteisymmärykseen vakuutustapahtuman ajoituksesta. Kysymys on kuitenkin usein vaikea; tuotevahingon sattumishetkenä voidaankin pitää esim. hetkeä, jolloin tuotteen tuotanto alkoi, hetkeä, jolloin tuotevahingon aiheuttama tuote oli myyty tai vaikkapa hetkeä, jolloin vahingonkärsijä kääntyi vakuutusyhtiön puoleen. Vastuullisen vakuutusyhtiön löytäminen onkin vastuuvakuutuksessa usein jäänyt juristien asiaksi.

Korvausvastuun kannalta asian tekee ongelmalliseksi se, että korvausvastuun määrittävä sattumishetki ei riipu siitä, onko vakuutustapahtuma vakuutusyhtiön tiedossa vai ei. Näin ollen korvausvastuu vastaa sekä ns. tunnettuja että tuntemattomia vahinkoja (vakuutustapahtumia).

Korvausvastuuta muodostuu koska korvausta ei voida maksaa pääasiassa seuraavista syistä:

- vahingon lopullinen korvausmäärä ei ole tiedossa tai vain osa siitä on tiedossa ja mahdollisesti jo maksettukin (keskeneräinen korvaus)
- vahinko on luonteeltaan tarkoitettu korvattavaksi pitkän ajan kattavana toistuvaiskorvauksena. Tästä esimerkkinä on tapaturmavakuutuksen tapaturmaeläke, jota maksetaan vahingoittuneelle työkyvyn palautumiseen tai kuolemaan asti (pysyvä / jatkuva korvaus)

- vahinko ei ole vielä edes vakuutusyhtiön tiedossa tai se on perustellusti kirjattu jo maksetuksi mutta viriää jostain syystä uudestaan (tuntematon vahinko).

I.2. Korvausvastuun tehtävät

Korvausvastuun tehtävinä on

- antaa (omalta keskeiseltä osaltaan) oikea kuva vakuutusyhtiön velka-asemasta (tase) ja
- maksettavien korvausten kohdistaminen oikeaan tilikauteen (tuloslaskelma).

I.2.1. Korvausvastuu ja vakavaraisuus

Vakavaraisuuden arviointi varojen ja velkojen erotuksena on epäonnistunut ellei varojen oikean arvostamisen lisäksi myös velkoja ole arvostettu oikein. Keskeisimmän osan vahinkovakuutusyhtiön velasta muodostaa juuri korvausvastuu. Koska korvausvastuu vastaa tulevaisuudessa maksettavaksi tulevia korvauksia, joita ei siis tunneta niin korvausvastuun määrääminen on aina ennustamista.

Vakuutusyhtiölain 13 luvun 7 §:n mukaan vastuuvelan laske-
misessa noudatettavat perusteet on laadittava silmälläpitä-
en lähinnä vakuutetujen etujen turvaamista.

Suomessa omaksutun käytännön mukaan maksettavaksi tulevien korvausten määrää ennustetaan harhattomasti, mikä tarkoittaa korvausvastuun mitoittamista maksettavaksi tulevien korvausten odotusarvon mukaiseksi (vrt. kohta I.3). Siltä osin kun maksettavaksi tulevat korvaukset poikkeavat odotusarvostaan ne tällöin osallistuvat omalta osaltaan tasoi-
tusvastuujärjestelmän mukaiseen korvausmenon tasoitukseen (vrt. ns. run-off-virhe luku III). Tasoitusvastuun tehtävä onkin näin ollen turvata myös jo sattuneiden vahinkojen

maksamista, mistä johtuen (varsinaiseen) korvausvastuuseen harhattomana ennusteena ei tarvitse sisällyttää erillistä varmuusmarginaalia.

Maksettavaksi tulevien korvausten odotusarvonkin ennustaminen edellyttää kuitenkin ennusteessa käytettyjen parametrien estimointia. Estimoinnissa tällöin käytetty turvaavuusperiaate, jota voi pitää yleisenä varovaisuusperiaatteena, varmistaa yhdessä tasoitusvastuujärjestelmän kanssa vakuutusyhtiölain korvausvastuuta koskevan turvaavuusperiaatteen toteutumisen.

Turvaavuussyistä useissa maissa sisällytetään korvausvastuuseen avoimesti erilaisia marginaaleja ellei verottaja ole niitä kieltänyt. Näiden marginaalien mitoitus jää kuitenkin usein epämääräiseksi.

Joskus korvausvastuun harhattomuusperiaatteesta kuitenkin tietoisesti luovutaan. Tällöin maksettaviksi tulevien korvausten rahoituksesta osa suunnitellaan maksettavaksi tuotosta, joka on seurausta korvausvastuun katteena olevien varojen sijoittamisesta. Menettely vastaa tällöin maksettavaksi ennustettujen korvausten muodostavan kassavirran diskonttausta eli pääoma-arvon määrittämistä. Diskonttauksen korkokantana käytetään tällöin ns. perustekorkoa, joka varovaisuussyistä valitaan pieneksi (yleensä 3-7 %). Korvausvastuun diskonttaus luonnollisesti pienentää korvausvastuuta ja edellyttääkin aina perusteltua näkemystä tulevien korvausten keskimääräisestä maksuaikataulusta. Tätä maksuaikataulua kuvataan mm. ns. selviämisjakauksen avulla (vrt. luku IV).

Diskonttauksen vaikutus on luonnollisesti sitä suurempi mitä kauemmin korvauksia arvioidaan tulevan maksettavaksi. Suurin merkitys sillä onkin Suomessa lakisääteisissä vahinkovakuutuksissa, jossa käytetty perustekorko on 5 %. Myös muussa vahinkovakuutuksessa (mm. vastuuvakuutus) käytetään joskus diskonttausta, jolloin yleisimmin käytetty korkokanta on 3 % tai 4,5 %. Korkokanta 4,5 % vastaa henkivakuutuksessa käytettyä perustekorkoa.

Koska diskonttauksessa sitoudutaan tulevaisuudessa saattavaan sijoitustoiminnan tuottoon, niin sen käyttö vakavaraisuutta vaarantavana on varsin kiisteltä. Sen taitamaton soveltaminen voikin johtaa korvausvastuun vaaralliseen alimitoitukseen, varsinkin silloin kun sitä sovelletaan ilman selvää näkemystä korvausten maksuaikataulusta (ns. implicit discounting).

I.2.2. Korvausten kohdistaminen

Maksettujen korvausten kohdistaminen oikeaan tilikauteen vastaa kirjanpidon suoriteperustetta. Tässä tapauksessa se tarkoittaa vahingon kirjaamista kuluksi kun velvollisuus sen maksamiseen on syntynyt. Tällainen velvollisuus syntyy yhtiön korvattavaksi kuuluvan vahingon sattumishetkellä, jolloin tilikauden lopussa vielä maksamatta oleva korvaus kirjataan korvausvastuuseen vakuutusyhtiön velaksi.

Korvausten kohdistaminen tapahtuu korvausvastuun muutoksen avulla. Tilivuonna maksettujen mutta aikaisempiin sattumisvuosiin kuuluvien korvausten vaikutus saadaan eliminoidua, jos niistä vähennetään vastaava korvausvastuun pieneneminen tilivuoden aikana. Tilivuonna sattuneet vahingot taas kohdistuvat sekä maksettuina korvauksina että niitä koskevana korvausvastuuna sellaisenaan oikein. Jos kaikkia tilivuonna maksettuja korvauksia merkitään $C(t)$ ja korvausvastuuta tilivuonna $K(t)$ ja edellisenä vuonna $K(t-1)$, niin suoriteperusteen mukaisesti korvauskulut tilivuonna t ovat tällöin

$$C(t) + K(t) - K(t-1).$$

Korvausvastuu ja näin tuloutuvat korvauskulut ohjaavatkin korvauksia oikein ajoittamalla vakuutusyhtiön vastuunmuodostusta (vrt. luku III). Korostettakoon vielä, että korvauskuluihin ei tässä (tuloslaskelmasta poiketen) lueta tasoitusmäärän muutosta. Näin määriteltäviä korvauskuluja kutsutaankin usein varsinaisiksi korvauskuluiksi tai kor-

vauskuluiksi ilman tasoitusmäärän muutosta.

Koska vahinko voidaan maksaa useana osasuorituksena, niin vahingon korvausmenolla tarkoitetaan jatkossa näiden suoritusten summaa. Jos halutaan erityisesti korostaa sitä, että vahinko on kokonaan maksettu, niin puhutaan lopullisesta korvausmenosta. Sattumisvuoden vahinkomenolla tarkoitetaan vastaavasti ko. vuonna sattuneiden vahinkojen korvausmenoa.

Maksettujen korvausten lopullisen määrän arviointi ja oikea kohdistaminen on tärkeätä myös vakuutusliikkeen kannattavuuden arvioinnissa ja oikean riskimaksutason määräämisessä. Koska maksunmääritys yleensä perustuu havaittuun vahinkohistoriaan, joka on täydennettävä lopulliseksi siltä osin kun korvauksia on maksamatta, niin korvausvastuun alimitoitus voikin johtaa tulevia vakuutusmaksuja määrättäessä vakuutusmaksutason alimitoitukseen.

I.3. Korvausvastuun matemaattinen määrittely

Tarkastellaan nyt kiinteänä vahinkojen sattumisvuonna $(0,1]$ (sattumisvuosi 1) sattuneita korvattavaksi tulevia vahinkoja. Sattuneiden vahinkojen kehitystä seurataan hetkinä $t=1$ (sattumisvuosi eli sen loppuhetki), $t=2$ (sattumisvuotta seuraava vuosi eli sen loppuhetki) jne. Jokaiselle vahingolle määritellään vahingon raportoitumisvuodeksi diskreetti satunnaismuuttuja R ($R=1,2,\dots$), eli vuosi, jonka aikana vahinko tulee yhtiön tietoon (raportoittuu).

Määritellään edelleen kullekin vahingolle seuraavat satunnaismuuttujat, kun $t=1,2,\dots$

$Z(t)$ = vahingosta maksetut korvaukset vuoden t loppuun mennessä; jos vahinko ei ole vielä raportoittunut, niin määritellään $Z(t)=0$

Z = vahingon kokonaiskorvaus; $Z(t)$ voidaan olettaa nousevaksi (ei laskevaksi) eli korvauksia ei pa-

lauteta, jolloin $Z(t) \uparrow Z$, kun $t \uparrow$

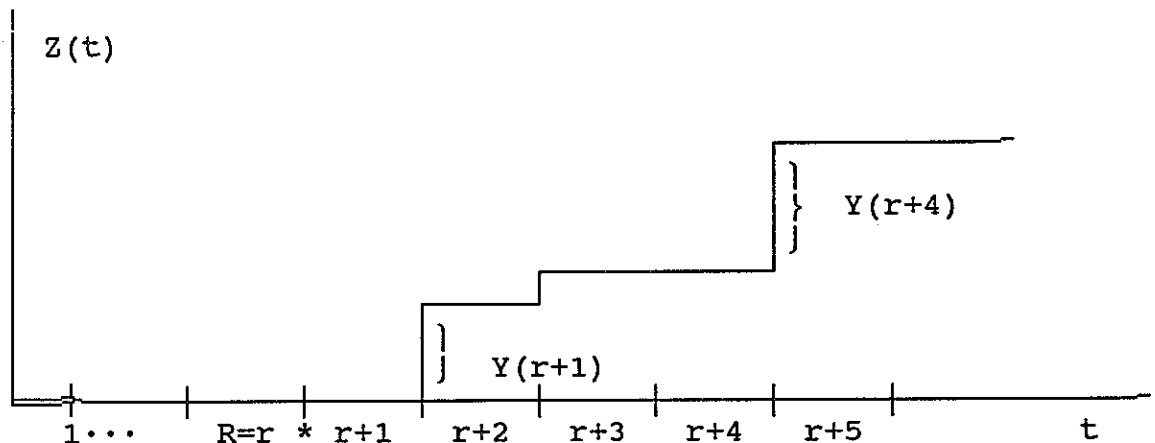
$Y(t) = Z(t) - Z(t-1)$; vahingosta vuoden t aikana maksetut korvaukset ($Z(0)=0$)

$V(t) = Z - Z(t)$; vahingon maksamatta olevat korvaukset vuoden t lopussa.

Tarvittaessa vahinkokohtaiset satunnaismuuttujat varustetaan vahinkoa i kuvaavalla alaindeksillä (esim. $Z_i(t)$).

Tässä työssä käytetään keskeisenä apuvälineenä indikaattorimuuttujaa $I\{R \in \cdot\}$, joka on 1, jos $R \in \cdot$ ja muulloin 0.

Yksittäisen vahingon korvausrealisaatio voisi nyt olla esimerkiksi seuraavan kuvan mukainen.



Vahinko sattuu sattumisvuoden 1 aikana ja raportoituu (*) vuonna $r \geq 1$ (eli sen lopussa). Vahingosta ei vuonna r kuitenkaan makseta vielä korvausta vaan vasta vuonna $r+1$ (korvaus $Y(r+1)$). Vahingosta maksetaan korvausta vielä vuosina $r+2$ ja $r+4$, jonka jälkeen se on korvattu.

Oletetaan lopuksi, että sattuneiden vahinkojen lukumäärää kuvaa satunnaismuuttuja N .

Maksetuiksi korvauksiksi vuoden t ($t \geq 1$) lopussa saadaan

$$\begin{aligned}
X(t) &= \sum_{i=1}^N Z_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^N I\{R_i \leq t\} Z_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^N \sum_{r \leq t} I\{R_i = r\} Z_i(t).
\end{aligned}$$

Satunnaismuuttuja $X(t)$ on t :n suhteen nouseva (ei laskeva) ja käytännössä sillä on raja-arvo $X(X(t) \uparrow X)$, joka on äärellinen ja sattumisvuoden lopullinen korvausmeno.

Tarkastellaan nyt satunnaismuuttujaa

$$\begin{aligned}
W(t) &= X - X(t) \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\sum_r I\{R_i = r\} Z_i - \sum_{r \leq t} I\{R_i = r\} Z_i(t) \right] \\
&= \sum_{i=1}^N \left[\sum_{r \leq t} I\{R_i = r\} (Z_i - Z_i(t)) + \sum_{r > t} I\{R_i = r\} Z_i \right] \\
&= \sum_{i=1}^N I\{R_i \leq t\} V_i(t) + \sum_{i=1}^N I\{R_i > t\} Z_i.
\end{aligned}$$

Merkitään em. summien jäseniä:

$$\begin{aligned}
W^-(t) &= \sum_{i=1}^N I\{R_i > t\} Z_i \quad \text{ja} \\
W^+(t) &= \sum_{i=1}^N I\{R_i \leq t\} V_i(t).
\end{aligned}$$

$W^-(t)$ on tällöin lopullinen korvausmeno kaikista niistä vahingoista, jotka ovat tuntemattomia vuoden t lopussa ja $W^+(t)$ on vuoden t lopussa tunnettuina olevien vahinkojen vielä maksamatta olevat korvaukset.

Laajennetaan tarkastelua useammalle sattumisvuodelle $(s-1, s]$ (sattumisvuodet $s=1, 2, \dots$). Käytössä olevia sattu-

misvuosittaisia symboleja merkitään alaindeksillä s (esim. $N_s(t)$, $X_s(t)$; $t=s, s+1, \dots$).

Merkitään vastaavasti, kun $s, t=1, 2, \dots$

$$X.(t) = \sum_{s \leq t} X_s(t)$$

$$W.(t) = \sum_{s \leq t} W_s(t)$$

$$W.^{\pm}(t) = \sum_{s \leq t} W_s^{\pm}(t) .$$

Korvausvastuu vuonna t määritellään sovitut ennustus-
kriteerit täyttäväksi satunnaismuuttujan $W.(t)$ ennusteeksi.
Tuntemattomien (tunnettujen) vahinkojen korvausvastuu
vuonna t määritellään sovitut ennustuskriteerit täyttäväksi
satunnaismuuttujan $W^-(t)$ ($W^+(t)$) ennusteeksi.
Sattumisvuotta s koskeva korvausvastuu vuonna t ($s \leq t$) määri-
tellään vastaavalla tavalla.

Käytetään korvausvastuulle vastaavasti merkintöjä $K.(t)$, $K.^{\pm}(t)$, $K_s(t)$ ja $K_s^{\pm}(t)$.

Tuntemattomien vahinkojen korvausvastuusta käytetään usein lyhennettä IBNR (Incurred but not reported claims) ja tunnettujen vahinkojen korvausvastuusta IBNER (Incurred but not enough reported claims). Joskus lyhenteellä IBNR tarkoitetaan kuitenkin koko korvausvastuuta.

Todettakoon heti, että juridisessa mielessä korvausvastuu on viime kädessä (tuntematon) $W.(t)$; yhtiöhän on luonnollisesti vastuussa vahingoista ennustuksistaan ja tilinpäätöksestään riippumatta.

I.4. Korvausvastuun ennustuskriteerit

Korvausvastuun määrääminen edellyttää taustalla olevaa vahinkoprosessia koskevien oletusten tekemistä. Nämä oletukset

koskevat yleensä jakaumaominaisuuksia tai odotusarvo-, varianssi- ja kovarianssifunktiota. Tarkastellaan nyt korvausvastuuenustetta yleisesti.

Määritellään aluksi hieman epätäsmällisesti "historia H_t " hetkeen t mennessä kertyneenä käytössä olevana vahinkohistoriana sekä sattumisvuosiin s ($s \leq t$) liittyvänä vakuutusliikkeen laatua koskevana kantatietona, joka on yleensä tiedossa kunkin sattumisvuoden lopussa tai viimeistään tilin päätöstä tehtäessä. Teoreettisesti historiaa H_t vastaa σ -algebra, jonka suhteen mm. hetkeen t kertynyttä vahinkohistoriaa kuvaavat satunnaismuuttujat (esim. $X.(t)$) ovat mitallisia.

Jos maksamattomien korvausten ja käytössä olevan vahinkohistorian yhteisjakauma tunnettaisiin, niin pienimmän keskineliöpoikkeaman mielessä optimaalisena ja harhattomana ennusteena voitaisiin käyttää ehdollista odotusarvoa $E[W.(t) | H_t]$.

Merkitään nyt yleisesti satunnaismuuttujan $W.(t)$ ennustetta $E.(t)$ ja tässä ennusteessa käytössä olevaa vahinkohistoriaa $\bar{H}_t$ ($\bar{H}_t \subset H_t$). On perusteltua valita itse ennuste harhattomaksi siten, että $E[E.(t)] = E[W.(t)]$.

Esimerkki

Valitaan vahinkohistoriaksi $\bar{H}_t$ hetkeen t kertyneet maksetut korvaukset $X.(t)$. Ennusteeksi valitaan maksamattomien korvausten $W.(t)$ pienimmän keskineliöpoikkeaman harhaton lineaarinen ennuste (ns. paras lineaarinen ennustusfunktio):

$$E.(t) = a + bX.(t).$$

Näin saadut parametrit (a ja b) joudutaan vielä estimoimaan erikseen.

Jos ennusteen ns. virhevarianssia merkitään $\sigma_e^2(t)$, niin

$$\sigma_e^2(t) = E[W.(t) - E.(t)]^2.$$

Koska korvausvastuun määrittäminen on ennustamista, niin yleensä on perusteltua ottaa huomioon ennusteen epävarmuus. Epävarmuus otetaan huomioon ennusteen luottamusvälinä, joka perustuu virhevarianssiin. Korvausvastuu, jossa virhevarianssin avulla on otettu huomioon varmuusmarginaali, voidaan (ennen parametriestimointeja) esittää muodossa:

$$K.(t) = E.(t) + g(\sigma_e^2(t)),$$

missä g on ei-negatiivinen ja kasvava funktio.

Korvausvastuun harhattomuusperiaate määritellään nyt tarkoittamaan, että $g \equiv 0$, jolloin korvausvastuulle $K.(t)$ pätee

$$E[K.(t)] = E[W.(t)].$$

Eräs yleisimpiä ennusteita on

$$E.(t) = E[W.(t)],$$

jolloin korvausvastuun määrittämisessä on kysymys odotusvon $E[W.(t)]$ estimoinnista. Huomattakoon, että tällöin $\sigma_e^2(t) = D^2[W.(t)]$ ja jos g on vakio, niin varmuusmarginaali vastaa riskimaksun määrittämisen yhteydessä käytettyä varmuuslisan ns. varianssiperiaatetta (vrt. Beard et al [1], Chapter 4).

Harhattomuusperiaatteesta riippumatta korvausvastuun määrittäminen edellyttää ennusteen parametriestimointiin liittyvän turvaavuusperiaatteen toteutumista, mikä periaate sisältää vaatimuksen ettei "todennäköisyys korvausvastuun osoittautumisesta estimoinnin vuoksi liian pieneksi ole liian suuri". Tällaista turvaavuusperiaatetta voi itse asiassa pitää jonkinlaisena yleisenä varovaisuusperiaatteena (vrt. kohta I.2.1.).

Tässä esitetyt korvausvastuuta koskevat kriteerit ovat

pikemminkin suuntaa-antavia kuin täsmällisiä vaatimuksia. Harhattomuuden lähtökohta on kuitenkin voimakkaan periaatteellinen järjestäessään työnjakoa (varsinaisen) korvausvastuun ja tasoitusvastuun välille.

Korvausvastuulta tulee edellyttää myös tilinpäätöskäytäntöä palvelevaa ennustettavuutta eli ennusteen varianssi ei saisi olla "liian suuri". Tällainen vaatimus koskee korvausvastuun laskuperusteen valintaa siten, että varianssin $D^2[E.(t)]$ suuruus otetaan huomioon. Käytännön tilinpäätöstä edelleen silmälläpitäen harhattomuusvaatimus liittyy korvausvastuun rooliin korvauskulun tulouttamisessa, jota käsitellään luvussa III.

Lopuksi on kiinnitettävä huomiota siihen tuleeko korvausvastuuta koskevat ennustuskriteerit toteutua sattumisvuosittain satunnaismuuttujille $W_s(t)$ ($s \leq t$) vai vain satunnaismuuttujalle $W.(t)$. On luonnollista, että kriteerien toteutuminen kokonaiskorvausvastuulle $K.(t)$ on riittävää, mikä vieläpä yleensä pienentää ennusteen virhevarianssia verrattuna sattumisvuosittaiseen ennustamiseen (Rantala [2] sv. 46). Korvausvastuun määrittäminen silloin kun vahinkoprosessit eivät ole sattumisvuosittain riippumattomia johtaa sattumisvuosien välisen kovarianssirakenteen huomioon ottamiseen. Tässä työssä tarkastellaan kuitenkin sattumisvuosittaisia korvausvastuita, mikä tekee tarkastelun helpommaksi (vrt. Pentikäinen, Rantala [3]).

II. KORVAUSVASTUUN ENNUSTUSONGELMASTA (VAHINKOJEN LUKUMÄÄRÄ)

II.1. Vahinkojen lukumäärä

Oletetaan, että $\{N_t; t \geq 0\}$ on homogeeninen Poisson-prosessi, jonka intensiteetti on λ . Poisson-prosessin hetkellä s_i synnyttämä vahinko i käynnistää omana jälkivaikutuksenaan prosessin $\{J_i(t, s_i); t \geq s_i\}$. Kohdan I.3. mukainen vahingon i korvausprosessin $\{Z_i(t); t \geq 1\}$ jatkuva-aikainen vastine on esimerkki tällaisesta jälkivaikutuksesta. Oletetaan, että jälkivaikutukset ovat sekä keskenään että Poisson-prosessista riippumattomia ja samoin jakautuneita. Lisäksi määritellään $J_i(t, s_i) = 0$, kun $t < s_i$. Kyseessä on tällöin ns. suodatettu Poisson-prosessi (vrt. Parzen [4]) $\{X_t; t \geq 0\}$:

$$X(t) = \sum_{i=1}^{N_t} J_i(t, s_i). \quad (1)$$

Tarkastellaan aikavälillä $(0, T]$ ($T > 0$) sattuneita vahinkoja hetkellä t . Koska korvausvastuu vastaa jo sattuneita vahinkoja, niin voidaan aina olettaa, että vastuun arviointi-hetki $t \geq T$.

Satunnaismuuttujan

$$X_T(t) = \sum_{i=1}^{N_T} J_i(t, s_i) \quad (t \geq T) \quad (2)$$

taustalla on tällöin sattumisaikavälin $(0, T]$ lopussa katkaistu Poisson-prosessi, jonka jälkivaikutuksia tarkastellaan tämän aikavälin jälkeen hetkellä t .

Eräs yksinkertainen jälkivaikutus on vahingon raportoituminen. Kuvatkoon tällöin $\bar{R}_i^*$ vahingon i raportoitusviivettä eli sitä aikaa, jonka vahinko i sattumisensa jälkeen

on tuntemattomana ja merkitään yleisesti $\bar{R}_1^* = \bar{R}^*$. Oletetaan, että $P\{\bar{R}^* = 0\} = 0$.

Tällöin jälkivaikutus on siis

$$J(t, s) = I\{\bar{R}^* \leq t - s\} \quad (t \geq s). \quad (3)$$

Jos merkitään nyt $X_T(t) = N_T(t)$, niin

$$N_T(t) = \sum_{i=1}^{N_T} I\{\bar{R}_i^* \leq t - s_i\} \quad (4)$$

on raportoituneiden välillä $(0, T]$ sattuneiden vahinkojen lukumäärä hetkellä t .

Oletetaan nyt, että vahingon raportoitumisviiveen $\bar{R}^*$ tiheys- ja kertymäfunktio riippuvat viiveparametrasta θ ja ovat vastaavasti $\bar{f}^*(r|\theta)$ ja $\bar{F}^*(r|\theta)$.

Satunnaismuuttuja N_T on Poisson (λT) -jakautunut ja suodatetun Poisson-prosessin karakterista funktiota soveltaen (Parzen [4] sv. 152) voidaan osoittaa, että myös $N_T(t)$ on Poisson-jakautunut parametrinaan $(t \geq T)$

$$\begin{aligned} E[N_T(t)] &= \lambda \int_0^T E[I\{\bar{R}^* \leq t - s\}] ds \\ &= \lambda \int_0^T P\{\bar{R}^* \leq t - s\} ds \\ &= \lambda \int_0^T \bar{F}^*(t - s | \theta) ds \\ &= \lambda \int_{t-T}^t \bar{F}^*(r | \theta) dr. \end{aligned} \quad (5)$$

Homogeenisen Poisson-prosessin $\{N_t; t \geq 0\}$ välillä $(0, T]$ sattuneiden vahinkojen sattumishetket ovat tällä välillä toisistaan riippumattomia ja tasaisesti jakautuneita (Parzen [4] s. 140). Jos välillä $(0, T]$ sattuneen vahingon raportoitumishetkeä kuvaa satunnaismuuttuja $\bar{R}$, niin käyttämällä raportoitumisviivettä ja sattumishetkeä vastaavien argumenttien r ja s kautta määritellyiksi tuleville tiheys-

funktiolle symbolia $p(\dots)$, saadaan, kun $t \geq T$

$$\begin{aligned}
 P\{\bar{R} \leq t\} &= \int_0^T \int_0^{t-s} p(s, s+r) dr ds \\
 &= \int_0^T \int_0^{t-s} p(s|r) \cdot \bar{f}^*(r|\theta) dr ds \\
 &= \int_0^T \int_0^{t-s} \frac{1}{T} \cdot \bar{f}^*(r|\theta) dr ds \quad (6) \\
 &= \frac{1}{T} \int_0^T \bar{F}^*(t-s|\theta) ds \\
 &= \frac{1}{T} \int_{t-T}^t \bar{F}^*(r|\theta) dr = F(t|\theta) \text{ (merkintä)}.
 \end{aligned}$$

Näin saadaan tulkinta Poisson-jakautuneen hetkellä t tiedossa olevien välillä $(0, T]$ sattuneiden vahinkojen lukumäärää kuvaavan satunnaismuuttujan $N_T(t)$ odotusarvolle (vrt. (5) ja (6)) $\lambda T \cdot F(t|\theta)$: λT on välillä $(0, T]$ sattuneiden vahinkojen lukumäärän odotusarvo ja $F(t|\theta)$ todennäköisyys, että välillä $(0, T]$ sattunut vahinko on raportoitunut hetkeen t ($t \geq T$) mennessä.

Normeerataan nyt sattumisaikaväli valitsemalla $T = 1$, jolloin voidaan puhua sattumisvuodesta $(0, 1]$. Merkitään tällöin $N(t) = N_1(t)$ ja $N = N_1$.

Määritellään kiinteätä sattumisvuotta $(0, 1]$ kohden vahingon diskreettiä raportoitumishetkeä kuvaava satunnaismuuttuja eli raportoitusvuosi R :

$R=r$, jos vuonna $(0, 1]$ sattunut vahinko raportoituu vuoden $(r-1, r]$ aikana ($r=1, 2, \dots$).

Tällöin, kun $t = 1, 2, \dots$, saadaan:

$$P\{R \leq t\} = F(t|\theta).$$

Kun $r = 1, 2, \dots$, niin

$$P\{R=r\} = F(r|\theta) - F(r-1|\theta),$$

missä $F(0|\theta)=0$.

Jos edelleen määritellään raportoitumisvuotta R vastaava (diskreetti) raportoitumisviive $R^*=R-1$ ($=0,1,2,\dots$), niin voidaan osoittaa (Kaminsky [5]), että $E[\bar{R}^*|\theta] = E[R^*|\theta]$.

Sekä diskreetin että jatkuvan raportoitumisviiveen odotusarvot ovat siis samat. Raportoituminen vuoden tarkkuudella ei näin ollen aiheuta harhaa raportointiviiveeseen. Koska vahinkoaineisto yleensä esitetään vuositason ns. run-off-kolmiona (vrt. kohta V.1.), niin tällä tuloksella on periaatteellinen merkitys.

II.2. Estimointiasetelma

Tarkastellaan sattumisvuoden $(0,1]$ hetkellä $t \geq 1$ käytössä olevan vahinkohistorian käyttöä sekä vahinkojen lukumäärän että vahinkojen raportoitumisen estimoinnissa. Kyseessä on tällöin Poisson-parametrin λ ja raportoitumisparametrin θ estimointi samasta vahinkojen raportoitumista kuvaavasta realisaatiosta. Tällaisen estimoinnin taustalla on ennustusongelma, jonka eräs versio koskee tietyn tapahtuman esiintymiskertojen lukumäärää kun tapahtumasta on saatu tietoa ainoastaan jollain todennäköisyydellä tai jonkin raportoitumisprosessin kautta (vrt. esim. Yannaros [6]).

Koska $N(t)$ on Poisson $(\lambda \cdot F(t|\theta))$ -jakautunut, niin jos hetkellä t on raportoitu r_t vahinkoa, parametrin λ ML-estimaatti (maximum likelihood-estimaatti) saadaan ehdosta

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} \left[e^{-\lambda \cdot F(t|\theta)} \cdot \frac{(\lambda \cdot F(t|\theta))^{r_t}}{r_t!} \right] = 0.$$

Jos raportoitumisparametri θ tunnetaan niin λ :n ML-estimaattiksi saadaan

$$\hat{\lambda} = \frac{r_t}{F(t|\theta)}. \quad (7)$$

Vahinkojen raportoitusviiveet $\bar{R}_i^*$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita tiheysfunktioaan $\bar{f}^*(r|\theta)$ ja vahingot raportoituvat toisistaan riippumatta hetkeen t mennessä ($t \geq 1$) kukin todennäköisyydellä $F(t|\theta)$. Jos vahinkohistoria hetkeen t mennessä muodostuu raportoitusviiveistä

$$H_t = \{ r^{(i)}; i=1,2,\dots, r_t \} \quad (t \geq 1),$$

niin (ehdolliseksi) likelihood-funktioksi saadaan (Jewell [7] kaava (4.1.))

$$L(H_t | \lambda, \theta, N=n) = \frac{n!}{(n-r_t)!} \left[\prod_{i=1}^{r_t} \bar{f}^*(r^{(i)} | \theta) \right] \left[1-F(t|\theta) \right]^{n-r_t}.$$

Summaamalla yli vahinkojen lukumäärän $N=n$ saadaan johdettua (Jewell [7] kaava (4.2))

$$L(H_t | \lambda, \theta) = \left[\prod_{i=1}^{r_t} \bar{f}^*(r^{(i)} | \theta) \right] \lambda^{r_t} \cdot e^{-\lambda F(t|\theta)}.$$

Sijoittamalla tähän parametrille λ ML-estimaatti (7) saadaan ainoastaan viiveparametrusta θ riippuvaksi likelihood-funktioksi

$$L(H_t | \theta) = r_t^{r_t} \cdot e^{-r_t} \cdot \prod_{i=1}^{r_t} \frac{\bar{f}^*(r^{(i)} | \theta)}{F(t|\theta)}.$$

Derivoimalla vastaava log-likelihood-funktio $\ell(H_t | \theta)$ saadaan

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ell(H_t | \theta) = \sum_{i=1}^{r_t} \frac{\partial}{\partial \theta} \log \bar{f}^*(r^{(i)} | \theta) - r_t \frac{\partial}{\partial \theta} \log F(t|\theta).$$

Asettamalla tämä nolaksi saadaan ML-estimaatille $\hat{\theta}$ ehto

$$\frac{1}{r_t} \sum_{i=1}^{r_t} \frac{\partial}{\partial \theta} \log \bar{f}^*(r^{(i)} | \hat{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta} \log F(t|\hat{\theta}). \quad (8)$$

Kun yhtälössä (7) parametri θ , korvataan ehdon (8) mukaisella ML-estimaatillaan, niin parametrien θ ja λ yhtäaikainen estimointi vahinkohistorian H_t perusteella on ML-menetelmällä suoritettavissa yhtälöiden (7) ja (8) muodostamasta yhtälöparista. Oletetaan nyt esimerkin vuoksi, että raportoitumisviiveen $\bar{R}^*$ jakauma on eksponentiaalinen eli

$$\bar{f}^*(r|\theta) = \theta e^{-\theta r} \quad (\theta, r > 0).$$

Tällöin

$$F(t|\theta) = 1 + \frac{1}{\theta} e^{-\theta t} (1 - e^{\theta}). \quad (t \geq 1)$$

ML-yhtälö (6) voidaan tällöin esittää muodossa ($t \geq 1$)

$$\frac{1}{r_t} \sum_{i=1}^{r_t} r^{(i)} = \frac{1}{\hat{\theta}} - \frac{g(t|\hat{\theta})}{F(t|\hat{\theta})}, \quad (9)$$

missä $g(t|\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} F(t|\theta)$.

Kun t kasvaa, niin $g(t|\theta) \rightarrow 0$ ($F(t|\theta) \rightarrow 1$), jolloin parametrin θ estimaatiksi saadaan havaittujen viipeiden aritmeettinen keskiarvo, mikä vastaa tavallista (viipeetöntä) otantaa ja ML-estimointia eksponenttijakauman tapauksessa.

Yhtälön (9) ratkaisu $\hat{\theta}$ on erittäin herkkä hetkeen t mennessä havaitun keskimääräisen raportointiviiveen $\bar{r} =$

$\frac{1}{r_t} \sum_{i=1}^{r_t} r^{(i)}$ suhteen, mikä tekee estimoinnin epäluotettavaksi (esimerkki liitteenä A).

Estimoinnin epäluotettavuus näkyy myös $\hat{\lambda}$:n määräävästä yhtälöstä (7) ainakin kun t ja sitä myöten yleensä myös raportoitujen vahinkojen lukumäärä r_t on pieni. Parametrin λ estimaattorin varianssiksi saadaankin kun θ oletetaan tunnetuksi ja $F(t|\theta) > 0$

$$D^2 \left[\frac{N(t)}{F(t|\theta)} \right] = \frac{\lambda \cdot F(t|\theta)}{F(t|\theta)^2} = \frac{\lambda}{F(t|\theta)},$$

minkä suuruus silloin kun $F(t|\theta)$ on pieni osoittaa estimaatin $\hat{\lambda}$ huonon luotettavuuden.

Tarkastellaan vielä raportoituneiden vahinkojen lukumäärän odotusarvoa

$$E[N(t)] = \lambda \cdot F(t|\theta) \quad (t \geq 1).$$

Tässä parametri λ kuvaa sattuneiden vahinkojen lukumäärän lopullista tasoa kun taas $F(t|\theta)$ vahinkojen raportoitumista ja jakaumaa $F(t|\theta)$ kutsutaankin vahinkojen lukumäärän selviämisyajakaumaksi. Selviämisyajakauma-käsitteeseen palataan myöhemmin luvussa IV, kun vahinkojen lukumäärän ohella tarkastellaan myös maksettuja korvauksia.

II.3. Tuntemattomien vahinkojen lukumäärän ennustaminen

Jos merkitään hetkellä $t \geq 1$ tuntemattomien vahinkojen lukumäärää $U(t)$, niin vahinkojen kokonaislukumäärä ($N=N_1$) on

$$N = N(t) + U(t).$$

Valitsemalla satunnaismuuttujan (2) määrittelyssä $J(t,s) = I\{\bar{R}^* > t-s\}$, nähdään, että $U(t)$ on niin ikään Poisson-jakautunut parametrinaan

$$\begin{aligned} E[U(t)] &= \lambda \int_0^1 E[I\{\bar{R}^* > t-s\}] ds \\ &= \lambda \int_0^1 P\{\bar{R}^* > t-s\} ds \\ &= \lambda \int_0^1 (1 - \bar{F}^*(t-s|\theta)) ds \\ &= \lambda \cdot (1 - F(t|\theta)). \end{aligned}$$

Odotusarvon $E[U(t)]$ näin saatu hajotelma on useiden korvausvastuumallien taustalla.

Tarkastellaan nyt hetkellä $t \geq 1$ tuntemattomien vahinkojen lukumäärän $U(t)$:n ennustamista aluksi kolmessa eri tilanteessa a-c:

a) λ ja θ tunnetaan.

Tällöin käytetään ennustetta $\hat{U}(t) = E[U(t)] = (1-F(t|\theta)) \cdot \lambda$.

b) λ tuntematon mutta θ tunnetaan.

Käyttämällä kaavan (5) mukaista ML-estimointia saadaan vastaaviksi ennusteiksi, kun $F(t|\theta) > 0$

$$\begin{cases} \hat{N} = \hat{\lambda} = \frac{N(t)}{F(t|\theta)} \\ \hat{U}(t) = E[U(t)] = \hat{N} - N(t) \\ \quad \quad \quad = (1-F(t|\theta)) \cdot \hat{\lambda}. \end{cases}$$

Tällöin

$$\begin{cases} D^2 \hat{N} = \frac{\lambda}{F(t|\theta)} \\ D^2 [\hat{U}(t)] = \frac{(1-F(t|\theta))^2}{F(t|\theta)} \cdot \lambda. \end{cases}$$

Poisson-oletuksesta johtuen ennusteet ovat $N(t)$:hen perustuvia vastaavien Poisson-parametrien λ ja $(1-F(t|\theta))\lambda$ pienimmän varianssin harhattomia estimaattoreita.

c) λ ja θ tuntemattomia.

Kuten kohdassa II.2. todettiin, parametrien θ ja λ yht-aikainen estimointi yhdestä ja samasta sattumisvuosi-realisaatiosta on käytännössä vaikeata. Tällöin täytyy niistä toista pitää joko tunnettuna apriori tai perustaa sen arvo samantyyppisestä vahinkoaineistosta aikaisempien sattumisvuosien perusteella saatuun estimaattiin. Useimmiten voidaan olettaa, että vahinkojen raportoituminen on ainakin sopivasti valitulla vahinkoluokituksella ajallisesti stabiilimpaa kuin vahinkojen sattumisintensiteetti,

jolloin θ estimoidaan aikaisemmilta sattumisvuosilta ja λ esim. kuten edellä b-kohdassa. Bayesiläistä lähestymistapaa hyväksi käyttäen yhtaikainen estimointi on tietyin ehdoin tehtävissä (vrt. Jewell [7]).

II.4. Tuntemattomien vahinkojen lukumäärän credibility-malli

Laajennetaan nyt tarkastelua siten, että oletetaan parametrit λ ja θ satunnaismuuttujiksi, joita merkitään vastaavasti Λ ja Θ .

Edellä tässä luvussa oleva tarkastelu pätee tällöin ehdolisesti kun Λ ja Θ tunnetaan eli "ehdolla (Λ, Θ) ".

Koska $N(t)$ ja $U(t)$ ovat Poisson-jakautuneita ja niiden summa N on Poisson-jakautunut ehdolla (Λ, Θ) niin tunnetusti $N(t)$ ja $U(t)$ ovat ehdolla (Λ, Θ) riippumattomia.

Oletetaan nyt, että selviämisjakaumaa koskeva parametri θ ja vahinkojen lukumäärää kuvaava parametri Λ (Poisson-parametri) ovat riippumattomia. Vahingot voidaan usein tyypitellä siten, että riippumattomuusoletus voidaan kohtuudella tehdä ainakin kullekin vahinkotyyppille erikseen.

Ehdolla $N(t)$ eivät θ ja Λ luonnollisesti enää välttämättä ole riippumattomia. Sitä mukaan kuin vahinkohistoriaa kertyy, parametreja θ , Λ ja mahdollisesti jopa niiden yhteisjakaumaa koskeva päättely voidaan perustaa edellä kohdassa II.3. mainittuun baysiläiseen lähestymistapaan ja havaitulla vahinkohistorialla "päivittävien" ns. dynaamisten lineaaristen mallien käyttöön. (Katso esim. Goovaerts et al [8] s. 256-264). Näiden menetelmien esittely on kuitenkin rajattu tämän esityksen ulkopuolelle. Eräänlaisen vahinkohistoriaa käyttävän jo perinteiseksi katsottavan päivitysmekanismin tarjoaa kuitenkin ns. credibility-teoria (vrt. Beard et al [1] s. 162-170).

Ehdollisen Poisson-oletuksen ja riippumattomuuden nojalla saadaan

$$\begin{aligned}
 E[N(t)] &= E[F(t|\theta)]E\Lambda \\
 E[U(t)] &= (1-E[F(t|\theta)])E\Lambda \\
 D^2[N(t)] &= D^2E[N(t)|\Lambda, \theta] + E D^2[N(t)|\Lambda, \theta] \\
 &= D^2[F(t|\theta)\Lambda] + E[F(t|\theta)\Lambda] \\
 &= E[F(t|\theta)]E\Lambda + E[F(t|\theta)^2]E\Lambda^2 \\
 &\quad - (E[F(t|\theta)])^2(E\Lambda)^2 \\
 &= E[F(t|\theta)]E\Lambda + D^2[F(t|\theta)]E\Lambda^2 \\
 &\quad + (E[F(t|\theta)])^2 D^2\Lambda.
 \end{aligned} \tag{10}$$

Merkitään

$$\left\{ \begin{array}{l} F(t) = E[F(t|\theta)] \\ \sigma_F^2(t) = D^2[F(t|\theta)] \\ \kappa_\Lambda = \frac{D^2\Lambda}{(E\Lambda)^2} \\ \lambda = E\Lambda, \end{array} \right.$$

jolloin (10) saadaan muotoon

$$\begin{aligned}
 E[N(t)] &= F(t) \cdot \lambda \\
 E[U(t)] &= (1-F(t)) \cdot \lambda \\
 D^2[N(t)] &= F(t) \cdot \lambda + \sigma_F^2(t) \cdot \lambda^2 (\kappa_\Lambda + 1) + F(t)^2 \cdot \lambda^2 \kappa_\Lambda \\
 &= F(t) \cdot \lambda + (F(t)^2 + \sigma_F^2(t)) \cdot \lambda^2 \kappa_\Lambda + \sigma_F^2(t) \cdot \lambda^2.
 \end{aligned}$$

Samalla tavalla saadaan

$$D^2[U(t)] = (1-F(t)) \cdot \lambda + ((1-F(t))^2 + \sigma_F^2(t)) \cdot \lambda^2 \kappa_\Lambda + \sigma_F^2(t) \cdot \lambda^2.$$

Koska $N(t)$ ja $U(t)$ ovat ehdolla (Λ, θ) riippumattomia, niin $E[\text{cov}(N(t), U(t)|\Lambda, \theta)] = 0$, ja saadaan helposti johdettua

$$\begin{aligned}\text{cov}[N(t), U(t)] &= \text{cov}[E[N(t) | \Lambda, \theta], E[U(t) | \Lambda, \theta]] \\ &= (F(t)(1-F(t)) - \sigma_F^2(t)) \cdot \lambda^2 \kappa_\Lambda - \sigma_F^2(t) \cdot \lambda^2.\end{aligned}$$

Jos $\sigma_F^2(t) \equiv 0$, niin saadaan klassiset vahinkojen lukumäärää koskevat odotusarvot, varianssit sekä kovarianssi (vrt. Rantala [2] s. 25).

Parametria κ_Λ kutsutaan usein "huojunnan varianssiksi", mikä on tulkittavissa kohdassa V.3. esitetyllä tavalla.

Johdetaan seuraavaksi hetken t jälkeen raportoituvien vahinkojen lukumäärän $U(t)$ hetkellä t tiedossa olevien vahinkojen lukumäärään $N(t)$ perustuva ns. credibility-ennuste $\hat{E}[U(t) | N(t)]$.

Tämä ennuste on itse asiassa $U(t)$:n muotoa $a+b \cdot N(t)$ oleva pienimmän keskineliöpoikkeaman harhaton ennuste eli ns. paras lineaarinen ennustusfunktio (vrt. Sundt [9] sv. 28).

Credibility-ennuste on siis muotoa

$$\hat{E}[U(t) | N(t)] = E[U(t)] + \frac{\text{cov}[N(t), U(t)]}{D^2[N(t)]} (N(t) - E[N(t)]).$$

Termien sopivalla järjestämisellä saadaan

$$\hat{E}[U(t) | N(t)] = c(t) \cdot (1-F(t)) \cdot \frac{N(t)}{F(t)} + (1-c(t)) \cdot (1-F(t)) \cdot \lambda$$

missä

$$\left\{ \begin{aligned} c(t) &= \frac{F(t)(\kappa_\Lambda - d_F(t))}{F(t)(\kappa_\Lambda - d_F(t)) + d_F(t) + \beta_\Lambda} \\ \beta_\Lambda &= \frac{1}{\lambda} \\ d_F(t) &= \frac{\sigma_F^2(t)(\kappa_\Lambda + 1)}{F(t)(1-F(t))} \end{aligned} \right.$$

Lisäksi voidaan sopia, että $N(t)/F(t) = 0$ kun $F(t) = 0$

sekä $c(t) = 0$, kun $F(t)(1-F(t)) = 0$.

Näin saadaan siis edellä kohdassa II.3. esitettyjen ennusteiden

$$(1-F(t)) \cdot \lambda \quad \text{ja} \quad (1-F(t)) \cdot \frac{N(t)}{F(t)}$$

painotettu keskiarvo.

Helposti nähdään, että aina $c(t) < 1$ ja lisäksi aina kun $\text{cov}[U(t), N(t)] < 0$, niin $c(t) < 0$. Toisaalta tämä kovarianssi on negatiivinen, kun

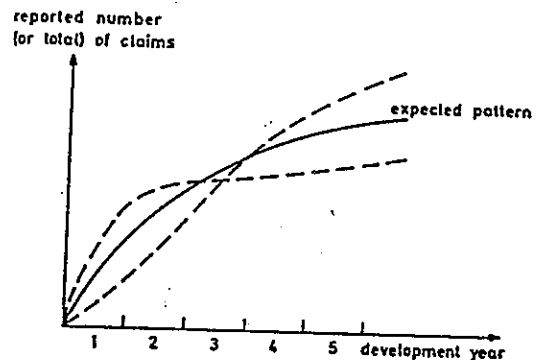
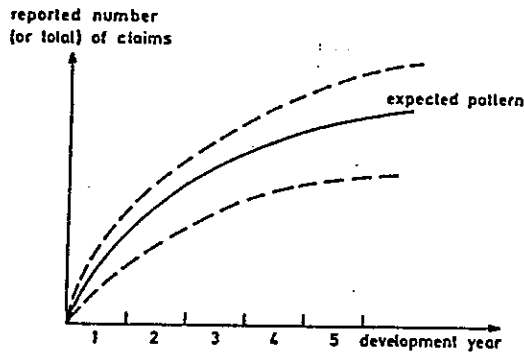
$$\sigma_F^2(t) > \frac{\kappa_\Lambda}{\kappa_\Lambda + 1} F(t)(1-F(t)), \quad (11)$$

mikä siis tarkoittaa, että varianssin $\sigma_F^2(t)$ kasvaessa tämän rajan yli credibility-kerroin $c(t)$ saa negatiivisen arvon. Todettakoon, että koska $F(t|\theta) \leq 1$, niin aina $\sigma_F^2(t) \leq F(t)(1-F(t)) \leq 1/4$.

Credibility-kertoimen käyttäytyminen vahinkoprosessia koskevien parametrien λ , κ_Λ ja $\sigma_F^2(t)$ eri arvoilla antaakin nyt oleellista tietoa korvausvastuun (tässä tuntemattomien vahinkojen lukumäärän) ennustettavuudesta. Erityisen mielenkiintoiseksi ennusteen tekee credibility-kertoimen laajennus negatiivisille arvoille. Negatiivista credibility-kerrointa ovat tutkineet ainakin Robbin [10] sekä Hesselager, Witting [11].

Yleensä on oletettu, että selviämisyjakautuma $F(t)$ on kiinteä ja sattumisvuosittain sama, jolloin siis $\sigma_F^2(t) \equiv 0$ ja

$\text{cov}[U(t), N(t)] > 0$. Raportoituja vahinkoja $N(t)$ kuvaavat realisaatiot ovat tällöin oikeanpuoleisen kuvan (nousevan viuhkan) mukaisia. Jos taas kiinteästä selviämisyjakautuman mallista luovutaan ottamalla käyttöön vahinkojen selviämiseen liittyvän satunnaisvaihtelun huomioon ottava malli, niin $\sigma_F^2(t) > 0$ ja tällöin voi olla myös $\text{cov}[U(t), N(t)] < 0$, mitä tilannetta kuvaavat taas oikeanpuoleisen kuvan realisaatiot. Kuvat on lainattu sellaisenaan Hesselagerin ja Wittingin artikkelista (Hesselager, Witting [11]).



Kun credibility-kerroin saa negatiivisen arvon, niin kiinteällä t tuntemattomia vahinkoja koskeva credibility-ennuste $\hat{E}[U(t)|N(t)]$ pienenee vahinkojen lukumäärän $N(t)$ kasvaessa. Tilanne voidaan tulkita tällöin siten, että raportoitujen vahinkojen $N(t)$ suuri määrä ei nyt viittaakaan siihen, että vahinkojen lopullinen lukumäärä ($N=N(t)+U(t)$) on myös suuri vaan vahingot ovatkin saattaneet raportoitua keskimääräistä nopeammin. Kullakin hetkellä parametrien $\sigma_F^2(t)$ ja κ_A keskinäinen suuruus ratkaisee kaavan (11) mukaisesti kumpi näistä tulkinnoista saa mallissa enemmän huomiota.

Lisäksi nähdään, että

$$c(t) \downarrow, \text{ kun } \sigma_F^2(t) \uparrow,$$

$$c(t) \uparrow, \text{ kun } \kappa_A \uparrow \text{ ja}$$

$$c(t) \uparrow, \text{ kun } \lambda \uparrow.$$

Varianssin $\sigma_F^2(t)$ kasvaminen vähentää siis luottamusta vahinkohistoriaan eli pienentää credibilitykerrointa, kun

taas parametrin κ_{Λ} mukainen vahinkojen lukumäärän odotusarvon epävarmuus kasvaessaan siirtää painotusta havaittuun vahinkohistoriaan. Lopulta vahinkojen lukumäärän odotusarvon λ kasvu lisää luottamusta havaittuun vahinkohistoriaan koska se pienentää ns. suhteellista Poisson-varianssia $\beta_{\Lambda}=1/\lambda$.

Ääritapauksessa kun $F(t) = 0$, niin saadaan $\hat{E}[U(t)|N(t)] = \lambda$ ja jos $F(t) = 1$, niin $\hat{E}[U(t)|N(t)] = 0$.

Jos $\sigma_F^2(t) = 0$, niin $c_t \geq 0$ ja

$$c(t) = \frac{F(t)\kappa_{\Lambda}}{\beta_{\Lambda} + F(t)\kappa_{\Lambda}}.$$

Kyseessä on tällöin klassinen credibility-kerroin (vrt. Rantala [2]).

Jos taas $\kappa_{\Lambda} = 0$ eli $D^2\Lambda = 0$, niin N on Poisson (λ) -jakautunut. Tällöin $c_t \leq 0$ ja credibility-ennuste voidaan esittää muodossa

$$\hat{E}[U(t)|N(t)] = c^*(t) \cdot (\lambda - N(t)) + (1 - c^*(t)) \cdot (1 - F(t))\lambda,$$

missä

$$c^*(t) = \frac{\sigma_F^2(t)}{\sigma_F^2(t) + \beta_{\Lambda} F(t)}.$$

Tässäkin $0 \leq c_t^* < 1$ ja vahinkohistoriaan perustuva ennusteen osa on nyt muotoa $\lambda - N(t)$. Tämä on tulkittavissa vahinkojen lukumäärän odotusarvoa λ koskevaksi "luottamukseksi", koska nyt $P\{\Lambda = \lambda\} = 1$. Poikkeuksellisesti ennuste (kuten yleinenkin credibility-ennuste ellei $c(t) \geq 0$) voi olla negatiivinen, jolloin se luonnollisesti asetetaan nolllaksi. Negatiivinen credibility-kerroin ottaa siis huomioon myös ennusteen $\hat{U}(t) = \lambda - N(t) = E\Lambda - N(t)$. Itse asiassa alkuperäinen credibility-ennuste voidaankin esittää muodossa (vrt. Robbin [10])

$$\begin{aligned}\hat{E}[U(t) | N(t)] &= c_1(t) \cdot (EN - N(t)) + c_2(t) \cdot \frac{1-F(t)}{F(t)} N(t) \\ &+ (1-c_1(t)-c_2(t)) \cdot (1-F(t)) EN,\end{aligned}$$

missä $c_1(t), c_2(t), c_3(t) \geq 0$ ja $c_1(t) + c_2(t) + c_3(t) = 1$.

Huomattakoon vielä lopuksi, että kun $\kappa_A = 0$ ja $F(t) < 1$, niin

$$c(t) > - \frac{F(t)}{1-F(t)} \cdot \frac{\lambda}{\lambda+F(t)}.$$

III. KORVAUSVASTUU JA VASTUUNMUODOSTUKSEN AIKATAULU

III.1. Korvauskulut ja run-off-virhe

Suoritusvuonna u ($u \geq s$) maksetut korvaukset kiintenä sattumisvuonna s ($s=1,2,\dots$) ovat

$$C_s(u) = \sum_{i=1}^{N_s} Y_i(u).$$

Koska $N_s < \infty$ ja korvaukset maksetaan äärellisessä ajassa, niin

$$\begin{aligned} W_s(t) &= \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{u>t} Y_i(u) \\ &= \sum_{u>t} C_s(u). \end{aligned}$$

Korvausvastuuta voidaan maksamattomien korvausten harhatomana ennusteena (vrt. kohta I.3.) tarkastella ehdollisena odotusarvona. Ehdollistaminen hetkellä t suoritetaan tässä kertyneen "historian" H_t suhteen, jolloin tämän oletetaan sisältävän kaiken korvausvastuun arvioinnin kannalta relevantin tiedon hetkellä t . (Teoreettisesti sitä vastaa σ -algebra, jonka suhteen mm. hetkeen t mennessä maksetut korvaukset $X_s(t) = \sum_{u \leq t} C_s(u)$ on mitallinen.) Jos tarkasteluun vielä yhdistetään korolla i diskonttaus, saadaan sattumisvuotta s koskevaksi korvausvastuuksi tilivuonna t , kun $t \geq s$ ja $v = 1/(1+i)$

$$\begin{aligned} K_s(t) &= E[W_s(t) | H_t] \\ &= E\left[\sum_{u>t} v^{u-t-\frac{1}{2}} C_s(u) | H_t\right]. \end{aligned}$$

Diskonttaus suoritetaan korvausten maksuvuoden (u) puolivälistä, jonka arvioidaan käytännössä parhaiten vastaavan todellista maksuaikataulua.

Korvausvastuu perustuu siis aina tilivuositain t uudestaan tehtävään tuoreimman käytettävissä olevan tiedon (H_t) huomioon ottavaan arvioon maksettavaksi tulevista korvauksista. Tällaista vastuunlaskentaa kutsutaan prospektiiviseksi ("eteenpäinkatsovaksi").

Tarkastellaan nyt lähemmin tilivuoden t-1 korvausvastuuta $K_s(t-1)$, jolloin ehdollisen odotusarvon ominaisuuksien nojalla kun $s \leq t-1$

$$\begin{aligned} K_s(t-1) &= E \left[\sum_{u>t-1} v^{u-t+\frac{1}{2}} C_s(u) \mid H_{t-1} \right] \\ &= E \left[E \left[\sum_{u>t-1} v^{u-t+\frac{1}{2}} C_s(u) \mid H_t \right] \mid H_{t-1} \right] \quad (1) \\ &= E \left[v^{\frac{1}{2}} C_s(t) + v E \left[\sum_{u>t} v^{u-t-\frac{1}{2}} C_s(u) \mid H_t \right] \mid H_{t-1} \right] \\ &= E \left[v^{\frac{1}{2}} C_s(t) + v K_s(t) \mid H_{t-1} \right]. \end{aligned}$$

Osoittautuu, että tämä korvausvastuuta koskeva rekurssiivinen yhtälö on keskeinen korvausvastuun roolille tilinpäätöksen mukaisten korvauskulujen tulouttamisessa. Havainnollisesti tämä näkyy, jos valitaan $i=0$ ja otetaan odotusarvo, jolloin yhtälön (1) nojalla saadaan (vrt. kohta I.2.2.)

$$E[K_s(t-1)] = E[C_s(t)] + E[K_s(t)].$$

Merkitään nyt sattumisvuoden s korvauskuluja tilivuonna $\pm KVK_s(t)$. Tällöin saadaan korvauskulujen määritelmän ja yhtälön (1) nojalla kun $s \leq t-1$

$$\begin{aligned}
KVK_S(t) &= C_S(t) + K_S(t) - K_S(t-1) \\
&= (1-v^{\frac{1}{2}})E[K_S(t)|H_{t-1}] - (1-v^{-\frac{1}{2}})K_S(t-1) \quad (2) \\
&\quad + C_S(t) - E[C_S(t)|H_{t-1}] \\
&\quad + E[K_S(t)|H_t] - E[K_S(t)|H_{t-1}].
\end{aligned}$$

Kaavassa on käytetty ehdollisen odotusarvon ominaisuutta $K_S(t) = E[K_S(t)|H_t]$, koska korvausvastuu $K_S(t)$ määritelmänsä mukaisesti perustuu "hetkeen t mennessä olemassa olevaan tietoon" (on H_t -mitallinen).

Kaavassa (2) käyttämällä approksimaatiota $(1+i)^k \approx 1+i \cdot k$ ja merkitsemällä kahden ensimmäisen yhteenlaskettavan summaa $I_S(t)$, saadaan

$$\begin{aligned}
I_S(t) &= (1-v^{\frac{1}{2}})E[K_S(t)|H_{t-1}] - (1-v^{-\frac{1}{2}})K_S(t-1) \\
&\approx \frac{i}{2} \cdot E[K_S(t)|H_{t-1}] + \frac{i}{2} \cdot K_S(t-1) \\
&= i \cdot \frac{K_S(t-1) + E[K_S(t)|H_{t-1}]}{2} \\
&\approx i \cdot \frac{K_S(t-1) + K_S(t)}{2}.
\end{aligned}$$

Viimeinen approksimaatio on tarkka, jos jäljempänä määritelty ns. perustemuutoksesta johtuva run-off-virhe $\Delta_S^2(t) = 0$.

Osa $I_S(t)$ vastaa sitä korkotuottoa, joka keskimäärin saadaan vuoden t aikana vakuutusliikkeeseen sitoutuneelle korvausvastuulle sen diskonttauksen kompensoimiseksi. ($I_S(t) = 0$, kun $i = 0$)

Jos merkitään

$$\begin{cases} \Delta_s^1(t) = C_s(t) - E[C_s(t) | H_{t-1}] \\ \Delta_s^2(t) = E[K_s(t) | H_t] - E[K_s(t) | H_{t-1}], \end{cases}$$

niin sattumisvuoden s korvauskuluiksi tilivuonna t ($s \leq t-1$) saadaan

$$KVK_s(t) = I_s(t) + \Delta_s^1(t) + \Delta_s^2(t).$$

Summaa $\Delta_s(t) = \Delta_s^1(t) + \Delta_s^2(t)$ kutsutaan sattumisvuoden s korvausvastuun run-off-virheeksi tilivuonna t . Osa $\Delta_s^1(t)$ aiheutuu siitä, että sattumisvuodelta s ($s \leq t-1$) tilivuonna t maksetut korvaukset eivät vastaa sitä ennustetta, johon edellisen tilivuoden $t-1$ korvausvastuu perustuu. Tätä virhettä kutsutaan usein sattumisvuoteen s liittyväksi vahinkojen selviämismisvirheeksi tilivuonna t . Osa $\Delta_s^2(t)$ aiheutuu taas siitä, että korvausvastuuperustetta korjataan "historian H_t " kehitystä vastaten. Tilivuoden t aikana kertynyt "uusin tieto" ($H_{t-1} \rightarrow H_t$) aiheuttaa siis tilivuonna t arvioitavaan korvausvastuuseen mahdollisen korjauksen verrattuna tietoon, jonka perusteella tämä sama korvausvastuu edellisen tilivuoden $t-1$ lopussa olisi arvioitu. Tätä virhettä kutsutaan tässä sattumisvuoteen s liittyväksi korvausvastuun perustemuutokseksi (itse asiassa perustemuutoksesta johtuva run-off-virhe) tilivuonna t .

Korvauskulun korrektiin tulouttamisen kannalta on toivottavaa, että

$$E[\Delta_s^1(t)] = E[\Delta_s^2(t)] = 0.$$

Koska korvausvastuuta harhattomana ennusteena on tarkasteltu ehdollisena odotusarvona, niin run-off-virheen määrittelystä nähdään suoraan, että virheen molempien osien odotusarvo on nolla. Kohdan I.3. mukainen korvausvastuun harhattomuutta koskeva vaatimus vastaakin tässä esitettyä

korvauskulujen "harhatonta tulouttamista". Tällöin saadaan, jos diskonttausta ei suoriteta ($v=1$)

$$E[KVK_s(t)] = 0.$$

Todettakoon, että korvausvastuun riittävyyslaskenta sellaisena kun se suomalaisten määräysten mukaan (sosiaali- ja terveystieteiden ministeriön yleiskirje vakuutusyhtiöille) toteutetaan seuraa run-off-virheen - $\sum_{s \leq t-1} \Delta_s(t)$ kehitystä tilivuosittain t (vrt. kohta III.3).

Jos $s=t$, niin määrittelemällä $K_t(t-1) = 0$ saadaan

$$KVK_t(t) = C_t(t) + K_t(t).$$

$$= C_t(t) + E\left[\sum_{u>t} v^{u-t-\frac{1}{2}} C_t(u) \mid H_t\right].$$

Kun $i=0$ ($v=1$), niin

$$KVK_t(t) = E\left[\sum_{u \geq t} C_t(u) \mid H_t\right],$$

mikä vastaa vuoden t lopussa tehtyä arviota sattumisvuoden t lopullisesta (diskonttaamattomasta) kokonaiskorvausmenosta. Näin ollen jokaisen sattumisvuoden lopullinen korvausmeno pyritään tulouttamaan korvauskuluina jo samaa vuotta koskevassa tilinpäätöksessä. Mahdollisesta diskontauksesta johtuvaa korkotuottovaatimusta lukuun ottamatta myöhemmin tuloutuu vain vuosittainen run-off-virhe ($\Delta_t(t+k)$; $k>1$), joka voi tosin vakuutuslajista riippuen olla vaikutukseltaan hyvinkin merkittävä. Esim. korvausvastuun havaitun alimitoituksen kertakorjaus voidaan tulkita perustemuutoksesta johtuvaksi tuloutuvaksi run-off-virheeksi $\Delta_s^2(t)$.

III.2. Korvausvastuun aikataulu ja korvauskulujen tuloutus

Otetaan aluksi käyttöön sattumisvuosien valintaa ja summausta koskeva merkintä (alaindeksi $\leq w$):

Kun u on kiinteä ja $w \leq u$ ($u \geq 1$), niin esim.

$$C_{\leq w}(u) = \sum_{s \leq w} C_s(u)$$

$$C_{\leq u}(u) = C.(u)$$

Summattuna yli sattumisvuosien $s \leq t-1$ kaavasta (2) nähdään, että

$$K_{\leq t-1}(t) = K.(t-1) + I_{\leq t-1}(t) - C_{\leq t-1}(t) + \Delta_{\leq t-1}(t).$$

Edelleen, koska $K.(t) = K_{\leq t-1}(t) + K_t(t)$, saadaan

$$K.(t) = K.(t-1) + I_{\leq t-1}(t) + K_t(t) - C_{\leq t-1}(t) + \Delta_{\leq t-1}(t). \quad (3)$$

Korvausvastuu tilivuonna t ($K.(t)$) koostuu siis

- korvausvastuusta edellisenä tilivuonna lisättynä korvausvastuun diskonttaus korkoa vastaavalla korkotuotolla tilivuoden aikana ($K.(t-1) + I_{\leq t-1}(t)$),
- tilivuonna sattuneiden vahinkojen korvausvastuusta tilivuonna ($K_t(t)$)
- vähentävänä tekijänä kaikista ennen tilivuotta sattuneiden vahinkojen maksetuista korvauksista tilivuoden aikana ($C_{\leq t-1}(t)$) ja
- korvausvastuun run-off-virheestä, joka aina aiheutuu tilivuotta ennen sattuneista vahingoista ($\Delta_{\leq t-1}(t)$).

Kaavasta (3) nähdään, että run-off-virhettä koskeva termi ($\Delta_{\leq t-1}(t)$) korjaa korvausvastuuta $K.(t-1)$, joka ilman tätä korjausta toimisi ainoastaan "puskurina", purkautuen maksetuilla korvauksilla ($C_{\leq t-1}(t)$) ja kasvaen korkotuoilla ($I_{\leq t-1}(t)$). Ilman run-off-virheen mukaista korjausta korvausvastuu vastaisi luonteeltaan ns. retrospektiivista ("taaksepäin katsovaa") vastuunlaskentaa, koska aina kunkin sattumisvuoden lopussa arvioidun korvausvastuun katsottaisiin yhdessä korkotuoton kanssa sellaisenaan vastaavan tulevia korvauksia ja niiden maksuaikataulua. Koska $E[\Delta_{\leq t-1}(t)] = 0$, niin kaavan (3) mukainen prospektiivinen ja run-off-virheen huomioon ottamaton vastuunlaskenta johtavat odotusarvoltaan samaan tulokseen.

Koska $KVK_t(t) = C_t(t) + K_t(t)$ ja $C.(t) = C_{\leq t-1}(t) + C_t(t)$, niin vastaavasti korvauskuluiksi tilivuonna t saadaan kaavasta (3)

$$\begin{aligned} KVK.(t) &= C.(t) + K.(t) - K.(t-1) \\ &= KVK_t(t) + I_{\leq t-1}(t) + \Delta_{\leq t-1}(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Korvauskulut tilivuonna t ($KVK.(t)$) koostuu siis

- korvauskuluista $KVK_t(t)$, jota voidaan pitää arviona tilivuonna sattuneiden vahinkojen lopullisesta (diskontatusta jos $i \neq 0$) korvausmenosta, ja joka siis tulisi rahoittaa tilivuoteen t kohdistuvalla vakuutusmaksuun sisältyvällä riskimaksulla,
- ennen tilivuotta sattuneiden vahinkojen korvausvastuun "diskonttauskulusta" $I_{\leq t-1}(t)$, joka tulisi rahoittaa sijoitustoiminnan tuotoista ja
- run-off-virheestä $\Delta_{\leq t-1}(t)$, joka nollaa suurempana jää tasointusvastuusta tai mahdollisesti käyttökatteesta rahoitetuksi ja negatiivisena siirtyy tasointusvastuuseen tai mahdollisesti käyttökatteeseen.

Korvauskulun kaavasta (4) nähdään, että korvausvastuun alimitoitus ($\Delta_{\leq t-1}(t) > 0$) rasittaa vakuutusliikkeen tulosta (ennen tasoitusvastuusiirtoa). Päinvastaisessa tapauksessa negatiivisen run-off-virheen ($\Delta_{\leq t-1}(t) < 0$) aiheuttama korvauskulujen pieneneminen luonnollisesti parantaa tulosta.

Kun yhtiö jatkaa toimintaansa normaalisti saaden uutta vakuutusmaksutuloa (ns. going-concern-tila), niin yleensä myös $KVK_t(t) > 0$. Koska $E[\Delta_{\leq t-1}(t)] = 0$, niin run-off-virheen vaikutuksella on taipumus "hävitä" osaksi kokonaiskorvauskuluja $KVK.(t)$. Run-off-virheen vaikutusta voidaan tällöin tutkia esim. osana varianssia $D^2[KVK.(t)]$ (vrt. Pentikäinen ja Rantala [3]). Osana korvauskuluja ja mm. sen varianssia kasvattavana run-off-virheen vaikutus tulee kin tavalla tai toisella ottaa huomioon yhtiön vakavaraisuutta arvioitaessa.

Jos uuden vakuutusliikkeen merkintä taas on lopetettu, niin $KVK_t(t) \equiv 0$ ja

$$KVK.(t) = I_{\leq t-1}(t) + \Delta_{\leq t-1}(t),$$

ja siis

$$E[KVK.(t)] = E[I_{\leq t-1}(t)].$$

Vakuutusliikkeen sanotaan tällöin olevan run-off-tilassa (myös break-up-käsitettä käytetään silloin kun uuden vakuutusliikkeen merkintä on juuri lopetettu). Koska run-off-tilassa ei myöskään ole käytettävissä riskimaksurahoitusta, niin korvausvastuun arviointi ja sen katteena olevien varojen sijoittaminen on liikkeen hallinnan kannalta keskeistä.

III.3. Esimerkki korvausvastuun riittävyyslaskennasta

Vastuuvakuutuksen ns. normaaliperusteessa muiden kuin henkilövahinkojen ja tiettyä rajaa isompien omaisuuskorvausten korvausvastuu lasketaan suhteessa sattumisvuoden s maksutu-

loon P_s .

Näiden vahinkojen korvausvastuu tilivuonna $t-1$ (ns. kollektiivivaraus joka on diskontattu 4,5 %:n korolla) on

$$K.(t-1) = K_{\leq t-1}(t-1) = 0,26 P_{t-1} + 0,14 P_{t-2} + 0,07 P_{t-3}.$$

Normaaliperusteen mukaan tämän korvausvastuun riittävyyslaskennassa tilivuonna t huomioon otettava edelleenvaraus ($= E[K_{\leq t-1}(t) | H_{t-1}]$) on

$$E[K_{\leq t-1}(t) | H_{t-1}] = 0,14 P_{t-1} + 0,07 P_{t-2}.$$

Huomattakoon, että korvausvastuu $K.(t-1)$ on diskontattu tilivuoden $t-1$ loppuun kun taas vastaava edelleenvaraus tilivuoden t loppuun.

Tällöin (vrt. kaava (1) sattumisvuoden s tapauksessa)

$$\begin{aligned} K.(t-1) &= v^{\frac{1}{2}} E[C_{\leq t-1}(t) | H_{t-1}] + v E[K_{\leq t-1}(t) | H_{t-1}] \\ &= -iK.(t-1) + v^{-\frac{1}{2}} E[C_{\leq t-1}(t) | H_{t-1}] \\ &\quad + E[K_{\leq t-1}(t) | H_{t-1}] \\ &\approx -iK.(t-1) + E[C_{\leq t-1}(t) | H_{t-1}] \\ &\quad + E[K_{\leq t-1}(t) | H_{t-1}], \end{aligned}$$

missä lopuksi on käytetty approksimaatiota $v^{-\frac{1}{2}} \approx 1$.

Kollektiivivarauksen $K.(t-1)$ riittävyyslaskennan mukainen ylijäämä tilivuonna t ($Y_{\leq t-1}(t)$) on voimassa olevien määräysten mukaan

$$\begin{aligned} Y_{\leq t-1}(t) &= K.(t-1) - C_{\leq t-1}(t) - E[K_{\leq t-1}(t) | H_{t-1}] \\ &\approx -iK.(t-1) + E[C_{\leq t-1}(t) | H_{t-1}] - C_{\leq t-1}(t) \\ &= -iK.(t-1) - \Delta_{\leq t-1}^1(t). \end{aligned}$$

Vastuuvakuutuksen tilivuoden $t-1$ kollektiivivivaraukselle saadaan siis tilivuonna t riittävyyslaskennan mukaiseksi ylijäämäksi:

$$\begin{aligned} Y_{\leq t-1}(t) &= 0,26 P_{t-1} + 0,14 P_{t-2} + 0,07 P_{t-3} \\ &\quad - 0,14 P_{t-1} - 0,07 P_{t-2} - C_{\leq t-1}(t) \\ &= 0,12 P_{t-1} + 0,07 P_{t-2} + 0,07 P_{t-3} - C_{\leq t-1}(t). \end{aligned}$$

Huomattakoon, että $E[Y_{\leq t-1}(t)] \approx -iK \cdot (t-1)$. Ylijäämän odotusarvo on siis nolla vain kun diskonttausta ei suoriteta ($i=0$).

Riittävyyslaskennan huomattava ja pysyvä alijäämäisyys ($Y_{\leq t-1}(t) < -iK \cdot (t-1)$) useampana peräkkäisenä vuonna t viittaa korvausvastuun alimitoitukseen ja korvausvastuun laskuperusteen korjaustarpeeseen.

Korvausvastuun riittävyyslaskennan ilmaisema selviämismisvirheen paikallistaminen on tällöin helpompaa, jos riittävyyslaskenta voidaan suorittaa sattumisvuosittain.

IV. KORVAUSVASTUUN RAKENNEMALLI

IV.1. Johdanto ja oletukset

Korvausvastuun määrittämisessä on keskeistä arvioida sitä aikataulua, jonka mukaan sattuneet vahingot korvataan. Tällainen aikataulu muodostuu maksettavien korvausten määrän ohella ajasta, jonka korvausten loppuunmaksaminen kestää.

Tähän aikaan vaikuttaa mm.

- vakuutuslaji, jolloin esim. liikennevahingon pelitikolarit on mahdollista korvata huomattavasti nopeammin kuin vastuuvakuutuksessa oikeuden päätöksellä korvatut vahingonkorvaukset
- vakuutusyhtiön vahinkoselvittelyn järjestäminen
- ulkopuolisina tekijöinä inflaation vaikutus maksettaviin korvauksiin, oikeuskäytännön muutokset jne.

Korvausten maksuuntulon arvioimisessa voidaan käyttää apuna korvausten ns. selviämisyjakautumia. Tässä luvussa määritellään kolme korvausten odotusarvoa koskevaa selviämisyjakautumaa ($F(t)$ kaikki vahingot, $F^-(t)$ tuntemattomat vahingot ja $H(t; t+\ell)$ tunnetut vahingot) ja kaksi varianssiin liittyvää selviämisyjakautumaa ($G(t)$ kaikki vahingot ja $G^-(t)$ tuntemattomat vahingot).

Luvussa esitetty malli on korvausvastuun ns. mikrotason (yksittäisen vahingon huomioon ottava) rakennemalli. Korvausvastuun analysointi palautuu lopputulosten lopuksi vahinkojen korvausprosessiin, jonka syntymekanismin ymmärtämiseksi ja parametrien tulkitsemiseksi tilannetta tarkastellaan tässä yhden kiinteän sattumisvuoden tapauksessa. Lu-

vussa V malli laajennetaan useammalle sattumisvuodelle.

Vaikka luvun oletukset yksittäistä vahinkoa koskevana ovatkin voimakkaita, ne kuitenkin johtavat kokonaiskorvausmenoa koskevaan tarkasteluun (selviämisjakaumaesitys), jota voidaan soveltaa myös itsenäisesti (vrt. kohta V.2.).

Tilinpäätöskäytännön mukaisesti esitettävä malli on aikadiskreetti siten, että kiinteän sattumisvuoden $(0,1]$ kehitystä seurataan hetkinä $t=1$ (sattumisvuosi eli sen loppuhetki), $t=2$ (= sattumisvuotta seuraava vuosi eli sen loppuhetki) jne.

Luvussa II on määritelty vahingon diskreetti raportoitumishetki R eli vahingon raportoitumisvuosi ($= 1, 2, \dots$).

Tässä luvussa ei tarkastella vahinkojen sattumisprosessia eikä vahinkojen lukumäärällekään tehdä jakauma-oletuksia.

Tarkastelu rajoitetaan korvausvastuun laskennan kannalta sopivasti valittuun homogeeniseen vakuutuslajiin tai vahinkojen ryhmään.

Jatkossa käytetään kohdassa I.3. sovittuja merkintöjä.

Kohdan I.3. perusteella vahingon i korvausprosessi on

$$\left\{ Z_i(t) = \sum_{u \leq t} Y_i(u); t=1, 2, \dots \right\}.$$

Koska vahinko maksetaan äärellisessä ajassa, niin on olemassa (äärellinen) satunnaismuuttuja Z siten, että $Z_i(t) \uparrow Z_i$, kun $t \uparrow$ (vrt. kohta I.3.).

Korvausprosessia koskevat oletukset voidaan tehdä lähtemällä liikkeelle joko osakorvauksista $Y_i(u)$ tai kokonaiskorvauksesta Z_i . Valitaan tässä jälkimmäinen lähestymistapa, joka vastaa paremmin perinteistä lähestymistapaa.

Oletetaan, että vahingoille $i=1, 2, \dots, N$:

- vahingon kokoa kuvaavat satunnaismuuttujat Z_i ovat sekä keskenään, että satunnaismuuttujasta N riippumattomia ja samoin jakautuneita. Jakaumaominaisuutta hyödynnettäessä voidaan vahinkoa kuvaava alaindeksi i tällöin jättää pois. Lisäksi korvausprosessit $\{Z_i(t); t \geq 1\}$ ovat sekä keskenään että satunnaismuuttujasta N riippumattomia,
- raportoitumisvuodet R_i ovat sekä keskenään että satunnaismuuttujasta N riippumattomia ja samoin jakautuneita. Jakaumaominaisuutta hyödynnettäessä voidaan vahinkoa kuvaava alaindeksi i tällöin jättää pois,
- $E[Y_i(u) | R_i \leq u] = a(u) \cdot EZ_i$, missä tekijä $a(u) \geq 0$ ($u \geq 1$) ei riipu vahingosta i ,
- $E[Y_i(u_1) \cdot Y_i(u_2) | R_i \leq \min(u_1, u_2)] = b(u_1, u_2) \cdot EZ_i^2$, missä tekijä $b(u_1, u_2) \geq 0$ ($u_1, u_2 \geq 1$) ei riipu vahingosta i .

Korvausprosessien $\{Z_i(t); t \geq 1\}$ sekä raportoitumisvuosien R_i riippumattomuus vahinkojen lukumäärästä N (vaikka onkin standardioletus) edellyttää, että vahingot voidaan tilanteen niin vaatiessa käsitellä erikseen korvauslajeittain tai luokitella muuten sopivasti. Tyypillinen esimerkki on liukkaan talven aiheuttamien pienten ja nopeasti raportoituvien lukuisien peltikolarien vaikutus liikennevakuutuksessa.

Oletusten odotusarvoja koskevat esitysmuodot on muotoiltu myöhemmin määriteltäjä selviämisy jakaumia silmälläpitäen. Koska raportoitumisvuodet ovat samoin jakautuneita, nämä oletukset voidaan, kuten liitteessä B on osoitettu, helposti palauttaa havainnollisemmin raportointivuodesta R_i riippuvaan muotoon.

Koska raportoitusvuodet R_i ovat vahingoittain i samoin jakautuneita kuin R ja $Y_i(u) = Y_i(u)I\{R_i \leq u\}$, niin

$$\begin{aligned} E[Y_i(u)] &= E[Y_i(u)I\{R_i \leq u\}] \\ &= E[Y_i(u) | R_i \leq u] P\{R_i \leq u\} \\ &= a(u) P\{R \leq u\} \cdot EZ_i \\ &= f(u) \cdot EZ_i, \end{aligned}$$

missä on merkitty $f(u) = a(u)P\{R \leq u\}$.

Vastaavasti saadaan

$$\begin{aligned} E[Y_i(u_1) \cdot Y_i(u_2)] &= E[Y_i(u_1)I\{R_i \leq u_1\} \cdot Y_i(u_2)I\{R_i \leq u_2\}] \\ &= E[Y_i(u_1) \cdot Y_i(u_2) | R_i \leq \min(u_1, u_2)] \\ &\quad \cdot P\{R_i \leq \min(u_1, u_2)\} \\ &= b(u_1, u_2) \cdot P\{R \leq \min(u_1, u_2)\} \cdot EZ_i^2 \\ &= g(u_1, u_2) \cdot EZ_i^2, \end{aligned}$$

missä on merkitty $g(u_1, u_2) = b(u_1, u_2)P\{R \leq \min(u_1, u_2)\}$.

Koska $EZ_i = EZ$ jokaisella i , niin odotusarvot $E[Y_i(u) | R_i \leq u]$, $E[Y_i(u)]$ sekä $E[Y_i(u_1) \cdot Y_i(u_2) | R_i \leq \min(u_1, u_2)]$, $E[Y_i(u_1) \cdot Y_i(u_2)]$ eivät riipu vahingosta i . Jättämällä vahinkoa i kuvaava alaindeksi pois voidaan vahingon i näiden odotusarvojen sijasta tällöin tarkastella aina odotusarvoja $E[Y(u) | R \leq u]$, $E[Y(u)]$ sekä $E[Y(u_1) \cdot Y(u_2) | R \leq \min(u_1, u_2)]$, $E[Y(u_1) \cdot Y(u_2)]$.

Helposti nähdään, että samalla tavoin voidaan vahingon i odotusarvojen $E[Z_i(t)^k]$, $E[Z_i(t)^k | R_i \leq t]$, $E[V_i(t)^k]$, $E[V_i(t)^k | R \leq t]$, $E[Z_i(t) \cdot V_i(t)]$ ja $E[Z_i(t) \cdot V_i(t) | R_i \leq t]$

($k=1,2$) sijasta tarkastella aina odotusarvoja $E[Z(t)^k] E[Z(t)^k | R \leq t]$, jne....

Huomattakoon, että koska $Y_i(u)^k = Y_i(u)^k I_{\{R_i \leq u\}}$ ja $Z_i(t)^k = Z_i(t)^k I_{\{R_i \leq t\}}$, niin $E[Y(u)^k] = E[Y(u)^k | R \leq u] P\{R \leq u\}$ ja $E[Z(t)^k] = E[Z(t)^k | R \leq t] P\{R \leq t\}$, kun $u, t \geq 1$ ja $k=1,2$.

Oletukset ovat voimakkaita ja sisältävät lukuisan määrän parametreja. Vaikka parametrit periaatteessa olisivatkin estimoitavissa (vrt. kohta V.9.), niin itse ennustamisessa (korvausvastuun määrittämisessä) käytettävien parametrien lukumäärän tulee olla varsin rajoitettu. Liian suuri parametrien määrä johtaa ns. yliparametrisoitumiseen ja tekee ennusteet herkiksi satunnaisirheille.

Vahingoittain samoja momentteja koskeva oletus on myös sikäli epärealistinen, että malli on korvausseuraamuksiltaan diskreetti, mutta vahinkoja sattuu todellisuudessa koko sattumisvuoden aikana. Tämän seurauksena vahinkojen korvausselvittely yleensä on eri vaiheessa riippuen siitä milloin vahinko on sattunut. Asiaa voidaan helpottaa oletamalla tilanne sillä lailla karkeaksi, että vahinkojen tarkkoja sattumishetkiä ei tunneta, mikä vastaa yhteisen sattumishetken oletusta.

IV.2. Selviämisjakauma ja odotusarvo

IV.2.1. Maksetut korvaukset $X(t)$ (vrt. liite C)

Kohdassa I.3 määriteltiin vuoden t loppuun mennessä maksetut korvaukset $X(t)$:

$$X(t) = \sum_{i=1}^N Z_i(t) = \sum_{i=1}^N Z_i(t) I_{\{R_i \leq t\}}$$

Edellä kohdassa IV.1. tehtyjen oletusten nojalla saadaan tällöin

$$\begin{aligned}
E[X(t)] &= E \left[\sum_{i=1}^N Z_i(t) I\{R_i \leq t\} \right] \\
&= E \left[\sum_{n \geq 1} \sum_{i \leq n} Z_i(t) I\{R_i \leq t\} I\{N=n\} \right] \\
&= \sum_{n \geq 1} \sum_{i \leq n} E[Z_i(t) | R_i \leq t] P\{R_i \leq t\} P\{N=n\} \\
&= \sum_{n \geq 1} n \cdot P\{N=n\} E[Z(t) | R \leq t] P\{R \leq t\} \\
&= EN \cdot E[Z(t) | R \leq t] P\{R \leq t\} \\
&= EN \cdot E[Z(t)].
\end{aligned}$$

Edelleen kohdan IV.1. nojalla

$$\begin{aligned}
E[Z(t)] &= E[Z(t) I\{R \leq t\}] \\
&= \sum_{u \leq t} E[Y(u) I\{R \leq u\}] \\
&= \sum_{u \leq t} E[Y(u) | R \leq u] P\{R \leq u\} \\
&= \left(\sum_{u \leq t} a(u) \cdot P\{R \leq u\} \right) \cdot EZ \\
&= \left(\sum_{u \leq t} f(u) \right) \cdot EZ \\
&= F(t) \cdot EZ,
\end{aligned}$$

missä on merkitty $F(t) = \sum_{u \leq t} f(u).$

Näin ollen

$$\begin{aligned}
E[X(t)] &= EN \cdot E[Z(t)] \\
&= EN \cdot F(t) \cdot EZ \\
&= F(t) \cdot EX.
\end{aligned}$$

Näin määritellyksi tuleva funktio $F(t)$ vastaa nyt luvussa II samalla symbolilla merkittyä selviämisyajakaumaa. Kun $Z_i(t) = I\{R_i \leq t\}$, niin $F(t) = P\{R \leq t\}$ ja kyseessä on luvun II mukainen vahinkojen raportoitusvuotta kuvaavan satunnaismuuttujan jakauma.

Koska $Z_i(t) \uparrow Z_i$ kun $t \uparrow$, niin $0 \leq F(t) \uparrow 1$ ja $\sum_{u \geq 1} f(u) = 1$, mistä nähdään funktion $F(t)$ täyttävän (muodollisesti) kertymäfunktion keskeiset ominaisuudet. Sitä kutsutaankin kuten kohdassa II.2. selviämisyajakaumaksi.

Koska $V_i(t) = Z_i - Z_i(t)$, niin

$$E[V(t)] = (1 - F(t)) \cdot EZ = \left(\sum_{u > t} f(u) \right) \cdot EZ.$$

IV.2.2. Maksetut/vahinkokohtaisesti varatut vahingot $X^-(t)$ (vrt. liite C)

Oletetaan, että vahinko maksetaan kokonaan raportoitusvuonna tai sen maksamattomasta osasta tehdään raportoitusvuoden lopussa vahinkokohtainen varaus (vrt. kohta VI.5.), joka yhdessä jo mahdollisesti maksetun korvauksen kanssa voidaan rinnastaa vahingosta lopullisesti maksettuun korvaukseen. Tällöin voidaan määritellä satunnaismuuttuja

$$X^-(t) = \sum_{i=1}^N Z_i I\{R_i \leq t\},$$

joka on vuoden t lopussa tunnettujen vahinkojen lopullinen korvausmeno.

Jos määritellään $Y_i(u) = Z_i I\{R_i = u\}$, niin edellä kohdan IV.2.1. yleinen tarkastelu koskee sellaisenaan myös satunnaismuuttujaa $X^-(t)$. Lisäksi kohdassa IV.1. voidaan tällöin esityksessä $E[Y(u_1) \cdot Y(u_2)] = g(u_1, u_2) \cdot EZ^2$ valita $g(u_1, u_2) = 0$, kun $u_1 \neq u_2$. Satunnaismuuttujalla $X^-(t)$ on

kuitenkin itsenäistä mielenkiintoa, joten on perusteltua ottaa käyttöön myös sitä koskevat erilliset merkinnät.

Määritellään $Z_i(t) = Z_i I\{R_i \leq t\}$, jolloin

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E[Z I\{R \leq t\}] \\ &= \sum_{r \leq t} E[Z I\{R=r\}] \\ &= \sum_{r \leq t} E[Z | R=r] P\{R=r\} \\ &= E[Z | R \leq t] P\{R \leq t\}. \end{aligned}$$

Kohdan IV.1. oletusten odotusarvo-esityksiä vastaten oletetaan nyt, että vahingolle i

$$\begin{cases} E[Z_i | R_i=r] = a^-(r) \cdot EZ_i \\ E[Z_i^2 | R_i=r] = b^-(r) \cdot EZ_i^2, \end{cases}$$

missä tekijät $a^-(r) > 0$, $b^-(r) > 0$ eivät riipu vahingosta i ja $P\{R=r\} > 0$ ($r \geq 1$). Jos vahingon koko ja raportoitumisvuosi ovat riippumattomia, niin $a^-(r) \equiv b^-(r) \equiv 1$.

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= \sum_{r \leq t} E[Z | R=r] P\{R=r\} \\ &= \left(\sum_{r \leq t} a^-(r) P\{R=r\} \right) EZ \\ &= \left(\sum_{r \leq t} f^-(r) \right) \cdot EZ \\ &= F^-(t) \cdot EZ, \end{aligned}$$

missä on merkitty

$$\begin{cases} f^-(r) = a^-(r) \cdot P\{R=r\} \\ F^-(t) = \sum_{r \leq t} f^-(r). \end{cases}$$

Kuten kohdassa IV.2.1. saadaan näin ollen

$$\begin{aligned} E[X^-(t)] &= EN \cdot E[Z | R \leq t] P\{R \leq t\} \\ &= EN \cdot E[Z(t)] \\ &= EN \cdot F^-(t) \cdot EZ \\ &= F^-(t) \cdot EX. \end{aligned}$$

Koska $Z_i I\{R_i \leq t\} \uparrow Z_i$, niin $0 \leq F^-(t) \uparrow 1$, kun $t \uparrow$ ja funktiota $F^-(t)$ kutsutaan myös selviämisyajakaumaksi.

Jos korvaus on raportoitusvuodesta riippumaton, niin $E[Z | R \leq t] = EZ$ ja $F^-(t) = P\{R \leq t\}$ joten selviämisyajakauma $F^-(t)$ palautuu vahinkojen raportoitusvuoden kertymäfunktiksi eli aidoksi jakaumaksi.

IV.2.3. Maksetut korvaukset $X(t; t+l)$ (vrt. liite C)

Vuonna t tunnettuina olevien vahinkojen tarkastelemiseksi määritellään satunnaismuuttuja (t kiinteä, $t \geq 1$)

$$X(t; t+l) = \begin{cases} \sum_{i=1}^N Z_i(t+l) I\{R_i \leq t\}, & \text{kun } l \geq 1 \\ X(t+l), & \text{kun } l \leq 0 \text{ ja } t+l \geq 1 \end{cases}$$

Satunnaismuuttuja kuvaa vuonna t tunnettuina olevista vahingoista vuoden $t+l$ loppuun mennessä maksettuja korvauksia. Selvästi $X(t; t+l) \uparrow X^-(t)$, kun $l \uparrow$.

Odotusarvoksi saadaan (vrt. $E[X(t)]$ kohdassa IV.2.1.)

$$E[X(t; t+l)] = EN \cdot E[Z(t+l) | R \leq t] \cdot P\{R \leq t\}.$$

Oletetaan, että $E[Y(t+k) | R \leq t]$ voidaan esittää, kun $t+k \geq 1$

muodossa

$$E[Y(t+k) | R \leq t] = h(t; t+k) \cdot E[Z | R \leq t],$$

jolloin tekijä $h(t; t+k) \geq 0$ ja $\sum_{k \geq 1-t} h(t; t+k) = 1$.

Tällöin, kun $t+\ell \geq 1$

$$E[Z(t+\ell) | R \leq t] = H(t; t+\ell) \cdot E[Z | R \leq t],$$

missä on merkitty

$$H(t; t+\ell) = \sum_{k \geq 1-t} h(t; t+k).$$

Koska kiinteällä t $0 \leq H(t; t+\ell) \uparrow 1$, kun $\ell \uparrow$, niin funktiota $H(t; t+\ell)$ voidaan myös kutsua selviämisyhteisöfunktiona. Tällöin saadaan, kun $\ell \geq 1-t$

$$\begin{aligned} E[X(t; t+\ell)] &= EN \cdot H(t; t+\ell) \cdot E[Z | R \leq t] \cdot P\{R \leq t\} \\ &= H(t; t+\ell) \cdot E[X^-(t)]. \end{aligned}$$

Jos $\ell=0$, niin merkitään $H(t; t)=H(t)$ ja saadaan

$$E[Z(t) | R \leq t] = H(t; t) \cdot E[Z | R \leq t]$$

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= EN \cdot H(t) \cdot E[Z | R \leq t] \cdot P\{R \leq t\} \\ &= EN \cdot H(t) \cdot E[X^-(t)] \\ &= H(t) \cdot F^-(t) \cdot EX. \end{aligned}$$

Funktio $H(t)$ ei ole t :n suhteen kasvava (ei laskeva) mutta $H(t) \rightarrow 1$, kun $t \uparrow$. Funktiolle $H(t)$ ja kohdissa IV.2.1 ja IV.2.2. määritellyille selviämisyhteisöfunktioille saadaan yllä olevan $E[X(t)]$:n esitysmuodon perusteella yhteys:

$$F(t) = H(t) \cdot F^-(t).$$

IV.3. Maksamatta olevien korvausten odotusarvo (vrt. liite C)

Kohdassa I.3. määriteltiin tilivuonna t tunnettujen ($W^+(t)$) ja tuntemattomien ($W^-(t)$) vahinkojen maksamatta olevat korvaukset. Koska $W(t) = W^+(t) + W^-(t)$, niin

$$E[W(t)] = E[W^+(t)] + E[W^-(t)].$$

Koska lisäksi $W(t) = X - X(t)$ ja $W^-(t) = X - X^-(t)$, saadaan

$$\begin{cases} E[W(t)] = (1 - F(t)) \cdot EX \\ E[W^-(t)] = (1 - F^-(t)) \cdot EX \\ E[W^+(t)] = (F^-(t) - F(t)) \cdot EX. \end{cases}$$

Maksettavaksi tulevien korvausten odotusarvo ($\leq EX$) on siis aina jaettavissa korvausten selviämistä ja lopullista korvausmenoa vastaaviin osiin. Tämä tulos on yleinen käytössä olevissa korvausvastuumalleissa. Huomattakoon, että kun t kasvaa, niin $E[W(t)]$ ja $E[W^-(t)]$ pienenevät. Sama ei päde odotusarvolle $E[W^+(t)]$, mikä johtuu siitä, että tuntemattomat vahingot muuttuvat ajan myötä tunnetuiksi ($N(t) \uparrow N$).

Koska kohdan IV.2.3. mukaan $F(t) = H(t) \cdot F^-(t)$, saadaan myös esitys

$$\begin{aligned} E[W^+(t)] &= (1 - H(t)) \cdot F^-(t) \cdot EX \\ &= (1 - H(t)) \cdot E[X^-(t)]. \end{aligned}$$

IV.4. Selviämisjakauma ja varianssi

Käytetään jatkossa toistuvasti oheista aputulosta:

Olkooot satunnaismuuttujat $\{A_i; i=1, 2, \dots, N\}$ sekä keskenään että satunnaismuuttujasta N riippumattomia ja keskenään sama vaatimus myös satunnaismuuttujia $\{B_i; i=1, 2, \dots, N\}$

Tällöin, jos $(k=1,2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} E[A_i^k] = E[A_1^k] < \infty, \\ E[B_i^k] = E[B_1^k] < \infty, \\ E[A_i B_i] = E[A_1 B_1] < \infty \\ \text{cov}[A_i, B_j] = 0 \quad (i \neq j) \\ EN^k < \infty, \end{array} \right.$$

niin

$$\left\{ \begin{array}{l} E \left[\sum_{i=1}^N A_i \right] = EA_1 \cdot EN \\ \text{cov} \left[\sum_{i=1}^N A_i, \sum_{i=1}^N B_i \right] = E[A_1 B_1] \cdot EN + EA_1 EB_1 \cdot (D^2 N - EN). \end{array} \right.$$

Valitsemalla aputuloksessa $A_i = B_i$, saadaan

$$D^2 \left[\sum_{i=1}^N A_i \right] = E[A_1^2] \cdot EN + (EA_1)^2 \cdot (D^2 N - EN).$$

Odotusarvon osalta aputulos on todistettu edellä kohdassa IV.2.1 odotusarvoa $E[X(t)]$ johdettaessa. Aputuloksen on todistanut esim. Rhiel (Rhiel [12]).

Sovelletaan aputulosta lopullista korvausmenoa kuvaavan satunnaismuuttujan X lisäksi seuraaviin satunnaismuuttujiin

- vuoden t loppuun mennessä maksetut korvaukset $(X(t))$
- vuoden t loppuun mennessä kertynyt korvausmeno, jos jokainen vahinko oletetaan raportoitumisvuonnaan kokonaan maksetuksi tai siitä tällöin tehty vahinkokohtainen varaus voidaan rinnastaa lopullisesti maksettuun korvaukseen $(X^-(t))$

- vuoden t lopussa tunnettuina olevien vahinkojen maksamatta olevat korvaukset ($W^+(t)$)
- vuoden t lopussa tuntemattomina olevien vahinkojen maksamatta olevat korvaukset eli näiden vahinkojen kokonaiskorvausmeno ($W^-(t)$)
- vuoden t lopussa maksamatta olevat korvaukset ($W(t) = W^+(t) + W^-(t)$).

Tarkastellaan kuitenkin aluksi aputuloksen soveltamisessa tarvittavia vahingoittain samoja momentteja (vrt. kohta IV.1.)

- a) $E[Z(t)^2]$
- b) $E[Z(t)V(t)]$
- c) $E[V(t)^2] = E[(Z - Z(t))^2]$.

a)

$$\begin{aligned}
 E[Z(t)^2] &= E\left[\left(\sum_{u \leq t} Y(u)\right)^2\right] \\
 &= \left[\sum_{u_1, u_2 \leq t} g(u_1, u_2) \right] \cdot EZ^2 \\
 &= G(t) \cdot EZ^2,
 \end{aligned}$$

missä on merkitty $G(t) = G(t, t) = \sum_{u_1, u_2 \leq t} g(u_1, u_2)$.

Vastaavasti määrittelemällä $Z_i(t) = Z_i I\{R_i \leq t\}$ (vrt. kohta IV.2.2.) saadaan

$$\begin{aligned}
 E[Z(t)^2] &= E[Z^2 I\{R \leq t\}] \\
 &= \sum_{r \leq t} E[Z^2 I\{R=r\}] \\
 &= \sum_{r \leq t} E[Z^2 | R=r] P\{R=r\} \\
 &= \left(\sum_{r \leq t} g^-(r) \right) \cdot EZ^2 \\
 &= G^-(t) \cdot EZ^2,
 \end{aligned}$$

missä on merkitty

$$\begin{cases} g^-(r) = b^-(r)P\{R=r\} \\ G^-(t) = \sum_{r \leq t} g^-(r). \end{cases}$$

Koska nytkin $0 \leq G(t) \uparrow 1$ ja $0 \leq G^-(t) \uparrow 1$, kun $t \uparrow$, niin funktioita $G(t)$ ja $G^-(t)$ voidaan kutsua selviämisyajakaumiksi

$$\left(\sum_{u_1, u_2 \geq 1} g(u_1, u_2) = 1, \sum_{r \geq 1} g^-(r) = 1 \right).$$

b)

$$\begin{aligned} E[Z(t)V(t)] &= E\left[\sum_{u \leq t} Y(u) \cdot \sum_{u > t} Y(u)\right] \\ &= \left[\sum_{\substack{u_1 \leq t \\ u_2 > t}} g(u_1, u_2)\right] \cdot EZ^2 \\ &= R(t) \cdot EZ^2, \end{aligned}$$

missä on merkitty

$$R(t) = \sum_{\substack{u_1 \leq t \\ u_2 > t}} g(u_1, u_2).$$

Jos määritellään $Z_i(t) = Z_i I\{R_i \leq t\}$ (vrt. kohta IV.2.2.), niin $E[Z(t)V(t)] = E[ZI\{R \leq t\} \cdot ZI\{R > t\}] = 0$.

c)

$$\begin{aligned} E[V(t)^2] &= E[(Z - Z(t))^2] \\ &= EZ^2 - E[Z(t)^2] - 2E[Z(t)V(t)] \\ &= [1 - G(t) - 2R(t)] \cdot EZ^2 \\ &= \left[1 - \sum_{u_1, u_2 \leq t} g(u_1, u_2) - 2 \sum_{\substack{u_1 \leq t \\ u_2 > t}} g(u_1, u_2)\right] \cdot EZ^2 \\ &= \left[\sum_{u_1, u_2 > t} g(u_1, u_2)\right] \cdot EZ^2. \end{aligned}$$

Merkitään $D(t) = G(t) + 2R(t)$, jolloin

$$E[V(t)^2] = (1-D(t)) \cdot EZ^2.$$

Koska $E[V(t)^2] \leq EZ^2$ ja $R(t) \geq 0$, niin

$$0 \leq 1-D(t) \leq 1-G(t) \leq 1.$$

Jos määritellään $Z_i(t) = Z_i I\{R_i \leq t\}$ (vrt. kohta IV.2.2.),

niin $E[Z(t)V(t)] = 0$, ja

$$\begin{aligned} E[V(t)^2] &= (1-G^-(t)) \cdot EZ^2 \quad (=E[Z^2 I\{R > t\}]) \\ &= \left(\sum_{r>t} g^-(r) \right) \cdot EZ^2. \end{aligned}$$

Kun merkitään vahinkojen lukumäärälle N

$$\alpha_N = \frac{D^2 N - EN}{(EN)^2},$$

niin edellä esitetyn aputuloksen sekä kohtien a-c momentteja koskevien merkintöjen nojalla saadaan

$$\begin{aligned} D^2 X &= EN EZ^2 + \alpha_N (EX)^2 \\ \left\{ \begin{aligned} D^2[X(t)] &= G(t) \cdot EN EZ^2 + F(t)^2 \cdot \alpha_N (EX)^2 \\ D^2[X^-(t)] &= G^-(t) \cdot EN EZ^2 + F^-(t)^2 \cdot \alpha_N (EX)^2 \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} D^2[W(t)] &= (1-D(t)) \cdot EN EZ^2 + (1-F(t))^2 \cdot \alpha_N (EX)^2 \\ D^2[W^-(t)] &= (1-G^-(t)) \cdot EN EZ^2 + (1-F^-(t))^2 \cdot \alpha_N (EX)^2 \end{aligned} \right. \\ \left\{ \begin{aligned} \text{cov}[X(t), W(t)] &= R(t) \cdot EN EZ^2 + F(t)(1-F(t)) \cdot \alpha_N (EX)^2 \\ \text{cov}[X^-(t), W^-(t)] &= F^-(t)(1-F^-(t)) \cdot \alpha_N (EX)^2. \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

Kun $\alpha_N = 0$, niin N on Poisson-jakautunut. Vahinkovakuutuksessa voidaan yleensä olettaa, että $\alpha_N \geq 0$ (vrt. kuitenkin

kohta IV.8.).

Näin ollen edellä kohdan IV.3. odotusarvoja koskevia tuloksia vastaten saadaan aina kun $\alpha_N \geq 0$

$$D^2[W(t)] \leq D^2X$$

$$D^2[W^-(t)] \leq D^2X$$

$$D^2[W^+(t)] \leq D^2X.$$

Varianssia koskevat tulokset on yleensä esitetty vain satunnaismuuttujalle $W^-(t)$ eli vuoden t lopussa tuntemattomana olevien vahinkojen maksettaviksi tuleville korvauksille. Jos tällöin vahingon koko on riippumaton vahingon raportoitusvuodesta eli $E[Z^2 | R \leq r] = EZ^2$, niin $G^-(t) = P\{R \leq t\} = F^-(t)$ ja saadaan perinteiset tulokset (vrt. Rantala [2]):

$$\begin{cases} D^2[X^-(t)] = F^-(t) \cdot ENEZ^2 + F^-(t)^2 \cdot \alpha_N(EX)^2 \\ D^2[W^-(t)] = (1-F^-(t)) \cdot ENEZ^2 + (1-F^-(t))^2 \cdot \alpha_N(EX)^2 \\ \text{cov}[X^-(t), W^-(t)] = F^-(t)(1-F^-(t)) \cdot \alpha_N(EX)^2. \end{cases}$$

IV.5. Yhteenveto selviämisyhteisistä

a) Selviämisyhteisistä $F(t) = \sum_{u \leq t} f(u)$ ja $g(u_1, u_2)$

$$E[Z(t)] = F(t) \cdot EZ$$

$$E[V(t)] = E[Z - Z(t)] = (1 - F(t)) \cdot EZ$$

$$E[Y(u)] = f(u) \cdot EZ$$

$$E[Y(u_1) \cdot Y(u_2)] = g(u_1, u_2) \cdot EZ^2,$$

missä

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u) \geq 0 \\ \sum_{u \geq 1} f(u) = 1 \\ g(u_1, u_2) \geq 0 \quad (g(u_1, u_2) = g(u_2, u_1)) \\ \sum_{u_1, u_2 \geq 1} g(u_1, u_2) = 1 \\ \text{Merkittäään } g(u, u) = g(u). \end{array} \right.$$

b) Selviämisyajakauma $F^-(t) = \frac{\sum_{u \leq t} f^-(u)}{EZ}$ ja $g^-(u)$

$$E[ZI\{R \leq t\}] = F^-(t) \cdot EZ$$

$$E[ZI\{R > t\}] = E[Z - ZI\{R \leq t\}] = (1 - F^-(t)) \cdot EZ$$

$$E[ZI\{R=r\}] = f^-(r) \cdot EZ$$

$$E[Z^2 I\{R=r\}] = g^-(r) \cdot EZ^2,$$

missä

$$\left\{ \begin{array}{l} f^-(r) \geq 0 \\ \sum_{r \geq 1} f^-(r) = 1 \\ g^-(r) \geq 0 \\ \sum_{r \geq 1} g^-(r) = 1. \end{array} \right.$$

Jos vahingon koko Z on riippumaton raportoitusvuodesta R , niin $f^-(r) = g^-(r) = P\{R=r\}$.

Jos a-kohdassa $Z_i(t) = Z_i I\{R_i \leq t\}$, niin voidaan valita:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(u) = f^-(u) \\ g(u_1, u_2) = 0, \text{ jos } u_1 \neq u_2 \\ g(u, u) = g(u) = g^-(u). \end{array} \right.$$

Jos $Z \equiv 1$, niin tarkastellaan vahinkojen lukumääriä jolloin $f(u) = f^-(u) = g^-(u) = g(u) = P\{R=u\}$.

c) Selviämisjakauma $H(t; t+\ell) = \sum_{1-t \leq k \leq \ell} h(t; t+k)$ ja
selviämisfunktio $H(t) = H(t; t)$

$$E[Z(t) | R \leq t] = H(t) \cdot E[Z | R \leq t]$$

$$\begin{aligned} E[V(t) | R \leq t] &= E[Z - Z(t) | R \leq t] \\ &= (1 - H(t)) \cdot E[Z | R \leq t] \end{aligned}$$

$$E[Z(t+\ell) | R \leq t] = H(t; t+\ell) \cdot E[Z | R \leq t]$$

$$E[Y(t+k) | R \leq t] = h(t; t+k) \cdot E[Z | R \leq t],$$

missä

$$\begin{cases} h(t; t+k) \geq 0 \\ \sum_{k \geq 1-t} h(t; t+k) = 1 \\ 0 \leq H(t) \rightarrow 1, \text{ kun } t \uparrow. \end{cases}$$

Huomattakoon yhteys

$$E[Z(t)] = F(t) \cdot EZ = H(t) \cdot F^-(t) \cdot EZ.$$

Kohtia a ja b vastaten voitaisiin ottaa käyttöön myös toiseen momenttiin liittyvät selviämisjakaumat. Ne vastaavat oleellisesti kohdan a toista momenttia koskevia selviämisjakaumia.

IV.6. Korvausvastuun diskonttaus

Maksettuja korvauksia vuonna u kuvaa satunnaismuuttuja $C(u)$:

$$C(u) = \sum_{i=1}^N Y_i(u).$$

Koska $N < \infty$ ja korvaukset maksetaan äärellisessä ajassa, niin

$$\begin{aligned} W(t) &= \sum_{i=1}^N \sum_{u>t} Y_i(u) \\ &= \sum_{u>t} \sum_{i=1}^N Y_i(u) \\ &= \sum_{u>t} C(u). \end{aligned}$$

Maksamatta olevien korvausten $W(t)$ odotusarvoksi ja varianssiksi saadaan tällöin

$$\left\{ \begin{aligned} E[W(t)] &= \sum_{u>t} E[C(u)] \\ D^2[W(t)] &= \text{cov} \left[\sum_{u>t} C(u), \sum_{u>t} C(u) \right] \\ &= \sum_{u_1, u_2 > t} \text{cov}[C(u_1), C(u_2)]. \end{aligned} \right.$$

Edellä kohdan IV.1. aputulosta voidaan nyt soveltaa odotusarvoon $E[C(u)]$ ja kovarianssiin $\text{cov}[C(u_1), C(u_2)]$, jolloin saadaan

$$\left\{ \begin{aligned} E[C(u)] &= E[Y(u)] \cdot EN \\ &= f(u) \cdot EN \\ \text{cov}[C(u_1), C(u_2)] &= E[Y(u_1) \cdot Y(u_2)] \cdot EN \\ &\quad + E[Y(u_1)]E[Y(u_2)] \cdot (D^2N - EN) \\ &= g(u_1, u_2) \cdot EN^2 + f(u_1)f(u_2) \cdot \alpha_N (EX)^2. \end{aligned} \right.$$

Jos vuonna u maksettavat korvaukset diskontataan korolla i vuoden u puolivälistä vuoden t loppuun niin saadaan (käyttäen samaa merkintää $W(t)$) kun $t \geq 1$ ja $v = 1/(1+i)$

$$W(t) = \sum_{u>t} v^{u-t-\frac{1}{2}} C(u).$$

Tällöin saadaan edellä olevan perusteella johdettua vastaavat diskontatut odotusarvo ja varianssi:

$$E[W(t)] = \left[\sum_{u>t} v^{u-t-\frac{1}{2}} f(u) \right] \cdot EX.$$

$$D^2[W(t)] = \left[\sum_{u_1, u_2 > t} v^{u_1+u_2-2t-1} g(u_1, u_2) \right] \cdot ENEZ^2 \\ + \left[\sum_{u>t} v^{u-t-\frac{1}{2}} f(u) \right]^2 \cdot \alpha_N(EX)^2.$$

IV.7. Inflaatio ja selviämisjakauma

Mikäli korvauksia ei makseta sattumisvuoden rahanarvoa vastaten, niin inflaatio vaikuttaa aina selviämisjakaumiin (vrt. kohta V.1.). Oletetaan, että vuonna u ($u \geq 1$) maksetuista korvauksista voidaan sopivaa indeksiä käyttäen poistaa inflaation vaikutus ja saattaa ne sattumisvuoden ($u=1$) tasolle. Näin saatuja normeerattuja korvauksia merkitään $\tilde{Z}$, $\tilde{X}$ jne., sekä vastaavia normeerattuja selviämisjakaumia $\tilde{f}(u)$, $\tilde{g}(u)$ jne. Jos selviämisjakaumia sovellettaessa halutaan ottaa käyttöön uusi inflaatiokehitys $r(1, u)$, joka kuvaa inflaatiota vuodesta 1 vuoteen u ($r(1, 1) = 1$), niin uudeksi selviämisjakaumaksi $f(u)$ saadaan:

$$\begin{cases} f(u) = r(1, u) \cdot \tilde{f}(u) \cdot \frac{EZ}{E\tilde{Z}}, \text{ missä} \\ EZ = \left(\sum_{u \geq 1} r(1, u) \cdot \tilde{f}(u) \right) \cdot E\tilde{Z}. \end{cases}$$

Tässä yhden vahingon odotusarvot $E\tilde{Z}$ ja EZ voidaan korvata korvata kokonaiskorvausmenon odotusarvoilla $E\tilde{X}$ ja EX .

Samoin saadaan uudeksi selviämisjakaumaksi $g(u_1, u_2)$:

$$\begin{cases} g(u_1, u_2) = r(1, u_1)r(1, u_2) \cdot \tilde{g}(u_1, u_2) \cdot \frac{E\tilde{Z}^2}{EZ^2}, \text{ missä} \\ EZ^2 = \left(\sum_{u_1, u_2 \geq 1} r(1, u_1)r(1, u_2) \cdot \tilde{g}(u_1, u_2) \right) \cdot E\tilde{Z}^2. \end{cases}$$

Vuosittaisen vakioinflaation p tapauksessa $r(1, u) = r^{u-1}$, missä $r = (1+p)$. Jos inflaatiota tarkastellaan vuoden $u=1$ lopusta, niin korvausvastuun määrittämisen kannalta on perustellumpaa valita tällöin $r(1, u) = r^{u-1/2}$, kun $u > 1$. Inflaation vaikutusta selviämisjakaumaan $f(u)$ on käsitelty kohdan V.3.3. esimerkissä 2.

IV.8. Korvausvastuu ja selviämisjakauma

Edellä kohdassa IV.6. johdettiin maksamatta olevien korvausten $W(t)$ (diskontattu) odotusarvo ja varianssi.

Merkittäään nyt

$$\begin{aligned} \mu &= EZ \\ \rho_Z &= EZ^2 / (EZ)^2 \\ n &= EN \\ \beta_N &= (D^2N - EN) / EN. \end{aligned}$$

Hetkellä t maksamatta olevien korvausten odotusarvoksi ja varianssiksi saadaan kohdan IV.6. mukaan kun diskonttausta e (kaavojen lyhentämiseksi) suoritetaan ($v=1$)

$$\begin{aligned}
E[W(t)] &= \left(\sum_{u>t} f(u) \right) \cdot n\mu \\
D^2[W(t)] &= \left[\sum_{u_1, u_2 > t} g(u_1, u_2) \right] \rho_Z \cdot n\mu^2 \\
&\quad + \left[\sum_{u>t} f(u) \right]^2 \beta_N \cdot n\mu^2.
\end{aligned} \tag{1}$$

On helppo osoittaa, että $D^2[W(t)] \leq D^2 X$, jos

$$\beta_N \geq \frac{\left[\sum_{u>t} f(u) \right]^2 - 1}{\left[\sum_{u_1, u_2 > t} g(u_1, u_2) \right]} \cdot \rho_Z.$$

Koska $\rho_Z \geq 1$, niin yllä olevan epäyhtälön oikea puoli ≤ 0 .

Jos vahingot maksetaan heti sinä vuonna kun ne ovat tulleet tietoon (raportoituneet) eikä vahingon koko riipu siitä milloin se on tullut tietoon, voidaan valita $f(u)=g(u)=P\{R=u\}$ (vrt. kohta IV.5 (alakohta b)) ja

$$D^2[W(t)] = \left[\sum_{u>t} f(u) \right] \left[\rho_Z + \beta_N \cdot \sum_{u>t} f(u) \right] \cdot n\mu^2. \tag{2}$$

Korvausvastuun yhteydessä puhutaan usein "pitkähäntäisyydestä", jolloin $f(u) \rightarrow 0$ "hitaasti", kun $u \uparrow$. Esim. jälleenvakuutuksessa voi olla $f(30) > 0$ (vrt. liite D). Tällainen korvausten maksuuntulon hitaus ei sinällään tee korvausvastuusta hankalasti arvioitavaa tai vakuutusliikkeestä "vaarallista", sillä mikä tahansa pitkäaikainen ennalta täysin sovittukin maksusitoumus on tässä mielessä pitkähäntäinen. Esim. pankin vastuulla olevan kiinteäkorkoisen määräaikaistalletuksen kassavirtaa voitaneen pitää tunnettuna.

Korvausvastuun kannalta oleellista on maksamattomien korvausten ennustettavuus, jota voidaankin arvioida esim. varianssin avulla. Täysin ennalta tunnetun maksusitoumuksen kassavirtaan liittyvä varianssihan on aina nolla.

Tarkastellaan asiaa seuraavien esimerkkien valossa.

Esimerkki 1

Olkoon jokainen korvaus vakiosuuruinen ja maksettava etukäteen sovittuna vuonna u_0 ($u_0 > 1$). Korvaus kuitenkin voi jäädä maksamatta. Olkoon satunnaismuuttuja $M = 1$ jos se maksetaan ja $= 0$ jos maksua ei suoriteta. Jos korvausten lukumäärä on kiinteä n , niin $N \equiv n$ ja jos maksettavaksi aiottu korvaus on kiinteä μ , niin $Z = \mu \cdot I\{M=1\}$. Korvaus Z ei siis riipu raportoitumisvuodesta, joksi maksuvuosi voidaan tulkita, ja voidaan soveltaa kaavaa (2). Koska maksuvuosi on kiinteä u_0 , niin $f(u_0) = 1$ ja $f(u) = 0$, kun $u \neq u_0$.

Tällöin

$$\begin{cases} \rho_Z = \frac{\mu^2 P\{M=1\}}{\mu^2 (P\{M=1\})^2} = \frac{1}{P\{M=1\}} \\ \beta_N = -\frac{EN}{EN} = -1 \end{cases},$$

ja saadaan, kun $1 \leq t < u_0$

$$\begin{aligned} D^2[W(t)] &= \left[\frac{1}{P\{M=1\}} - 1 \right] n\mu^2 (P\{M=1\})^2 \\ &= \left[P\{M=1\} \right] \left[1 - P\{M=1\} \right] n\mu^2. \end{aligned}$$

Varianssi on siis > 0 , jos $0 < P\{M=1\} < 1$ eli korvauksen saamiseen liittyy epävarmuus. Selvästi $D^2[W(t)] \equiv D^2X$, kun $1 \leq t < u_0$.

Esimerkki 2

Olkoon jokainen korvaus vakiosuuruinen $Z \equiv \mu$ ja vahinkojen (tai joidenkin maksusuoritusten) lukumäärä tiedossa

eli $N=n$. Koska nyt $\beta_N = -1$ ja $\rho_Z = 1$, niin kaavan (2) mukaisesti

$$D^2[W(t)] = \left[\sum_{u>t} f(u) \right] \left[1 - \sum_{u>t} f(u) \right] n\mu^2,$$

missä $f(u) = P\{R=u\}$, jos vahinko maksetaan heti raportoitumisvuonna. Selvästi $D^2[W(t)] \geq D^2X = 0$.

Vahinkojen lukumäärän hetken t jälkeen nähdään nyt olevan kuvattavissa $\text{Bin}(n, \sum_{u>t} f(u))$ -jakautuneella satunnaismuuttujalla ja kyseessä on korvausvastuu, jossa ainoa epävarmuus liittyy maksusuoritusten ajankohtaan (eli vahinkojen raportoitumiseen).

Jos $f(u_0) = 1$ eli korvaussuorituksen ajankohtakin on täysin tiedossa, saadaan kun $1 \leq t < u_0$

$$D^2[W(t)] = \left[f(u_0) \right] \left[1 - f(u_0) \right] n\mu^2.$$

$$\equiv 0.$$

Esimerkki 3

Jokaisesta vahingosta maksetaan vahingon raportoitumisvuonna korvaus, jota kuvaa satunnaismuuttuja A ja tämän jälkeen vahingon lopullisesti selvittyä jäljellä oleva korvaus, jota kuvaa satunnaismuuttuja B . Kuvatkoon satunnaismuuttuja T vuotta, jona korvauksen loppuosa ($B > 0$) maksetaan. Oletetaan että korvaus B maksetaan aina raportoitumisvuoden jälkeen eli $R < T$.

Vuonna $u \geq 1$ maksetaan tällöin korvaus

$$Y(u) = AI\{R=u\} + BI\{T=u\}.$$

Edelleen saadaan, kun $u_1, u_2 \geq 1$

$$Y(u_1)Y(u_2) = \begin{cases} AI\{R=u_1\} \cdot BI\{T=u_2\} & , \text{ kun } u_1 < u_2 \\ AI\{R=u_2\} \cdot BI\{T=u_1\} & , \text{ kun } u_1 > u_2 \\ A^2 I\{R=u\} + B^2 I\{T=u\} & , \text{ kun } u_1 = u_2 = u. \end{cases}$$

Jos $Z = A+B > 0$ ja A sekä B ovat molemmat riippumattomia satunnaismuuttujista R sekä T saadaan (vrt. kohta IV.5.)

$$f(u) = \frac{EA}{EZ} P\{R=u\} + \frac{EB}{EZ} P\{T=u\}$$

$$g(u_1, u_2) = \begin{cases} \frac{E[AB]}{EZ^2} P\{T=u_2 | R=u_1\} P\{R=u_1\} & , \text{ kun } u_1 < u_2 \\ \frac{E[AB]}{EZ^2} P\{T=u_1 | R=u_2\} P\{R=u_2\} & , \text{ kun } u_2 < u_1 \\ \frac{EA^2}{EZ^2} P\{R=u\} + \frac{EB^2}{EZ^2} P\{T=u\} & , \text{ kun } u_1 = u_2 = u. \end{cases}$$

$D^2[W(t)]$ saadaan nyt kaavan (1) mukaisesti. Maksuvuosien R ja T jakaumien estimoinnin lisäksi kaavan soveltaminen edellyttää mm. korvausten A ja B kovarianssin estimointia.

Esimerkki 4

Jos esimerkissä 3 valitaan $A=0$, niin kyse on korvauksesta ($B>0$), joka vahingon tultua tietoon odottaa maksamistaan, joka tapahtuu vuonna T . Tällöin ($f(u)=g(u,u)=g(u)$)

$$\begin{cases} f(u) = P\{T=u\} \\ F(t) = \sum_{u \leq t} f(u) = P\{T \leq t\} . \end{cases}$$

Selviämisjakauma $F(t)$ ($= G(t)$) on siis nyt korvauksen maksuvuoden T jakauma.

IV.9. Numeerinen esimerkki

Esitetyn mallin havainnollistamiseksi käsitellään yksinkertaista numeerista esimerkkiä ja selviämisjakaumien $f(u)$, $g(u_1, u_2)$, $f^-(u)$, $h(t; t+k)$, $F(t)$, $G(t)$, $H(t; t+l)$ estimointia tässä tapauksessa. Esitetään sattumisvuoden havaintoaineisto matriisinä M , jonka alkioita ovat vahingon i korvaus-
suoritukset vuonna u ($i=1, 2, \dots, 10$ ja $u=1, 2, 3, 4$):

$$M = \{y_i(u)\} = \begin{bmatrix} 20 & 10 & 30 & 10 \\ 30 & 20 & 10 & 10 \\ 10 & 40 & 30 & 20 \\ 20 & 30 & 50 & 30 \\ 5 & 15 & 25 & 25 \\ 15 & 20 & 35 & 20 \\ 0 & 40 & 30 & 10 \\ 0 & 60 & 40 & 20 \\ 0 & 50 & 20 & 10 \\ 0 & 70 & 20 & 30 \end{bmatrix}$$

Tässä siis oletetaan esimerkin yksinkertaistamiseksi, että jokainen vahinko on loppuun maksettu vuoden $u=4$ aikana. Lisäksi vahingot $i=7, 8, 9$ ja 10 ovat raportoituneet vasta vuonna $u=2$, jolloin voidaan estimoida yksinkertaisesti

$$\begin{cases} P\{R=1\}=p_1 = \frac{6}{10}=0,6 \\ P\{R=2\}=p_2 = \frac{4}{10}=0,4 \\ P\{R=r\}=0, \text{ kun } r>2. \end{cases}$$

Tarkastellaan esimerkkinä $f(u)$:n estimointia ja valitaan estimaatiksi:

$$\hat{f}(u) = \frac{\sum_i y_i(u)}{\sum_i z_i} \quad (i=1, 2, \dots, n)$$

Tällainen suhde-estimaatti perustuu regressiomalliin (vrt. Kremer [13])

$$Y_i(u) = f(u) \cdot Z_i + \epsilon_i,$$

missä $E[\epsilon_i | Z_i] = 0$ ja $D^2[\epsilon | Z_i] \propto Z_i$.

Jos oletetaan, että $D^2[\epsilon_i | Z_i] \propto Z_i^2$, niin estimaatiksi valitaan

$$\hat{f}(u) = \frac{1}{n} \sum_i \frac{Y_i(u)}{Z_i}.$$

Käytetään nyt ensimmäistä estimaattia analogisesti kaikkien selviämisyksiköiden estimoinnissa:

$$f(u) = \frac{\sum_{i=1}^{10} Y_i(u)}{z}$$

$$z = \sum_{i=1}^{10} \sum_{u=1}^4 Y_i(u) = \sum_{i=1}^{10} Z_i$$

$$f^-(1) = \frac{\sum_{i=1}^6 Z_i}{z} = \frac{z(1)}{z}$$

$$f^-(2) = \frac{\sum_{i=7}^{10} Z_i}{z} = \frac{z(2)}{z}$$

$$f^-(u) = 0, \text{ kun } u > 2$$

$$h(1; 1+\ell) = \frac{\sum_{i=1}^6 Y_i(1+\ell)}{z(1)} \quad (\ell=0, 1, 2, 3)$$

$$h(2; 2+\ell) = \frac{\sum_{i=7}^{10} Y_i(2+\ell)}{z} \quad (\ell=-1, 0, 1, 2)$$

$$h(t; t+\ell) = h(2; 2+\ell), \text{ kun } t > 2$$

$$\{g(u_1, u_2)\} = \frac{M^T M}{z_2} \quad (u_1, u_2 = 1, 2, 3, 4)$$

$$z_2 = \sum_{i=1}^{10} z_i^2 .$$

Kootaan numeeriset tulokset:

$u, u_2, t =$	1	2	3	4
$f(u) =$	0,11	0,38	0,31	0,21
$F(t) =$	0,11	0,48	0,79	1,00
$f^-(u) =$	0,58	0,42	0	0
$F^-(t) =$	0,58	1,00	1,00	1,00
$h(1;u) =$	0,19	0,25	0,33	0,23
$H(1;t) =$	0,19	0,44	0,77	1,00
$h(2;u) =$	0,11	0,38	0,31	0,21
$H(2;t) =$	0,11	0,48	0,79	1,00
$g(1, u_2) =$	0,022	0,023	0,031	0,021
$g(2, u_2) =$		0,175	0,111	0,076
$g(3, u_2) =$			0,103	0,065
$g(4, u_2) =$				0,047
$G(t) =$	0,022	0,243	0,630	1,000

Todettakoon, että näin estimoitaessa ei vahinkokohtaista tilastoaineistoa tarvita kuin toisen kertaluokan parametri-
en $g(u_1, u_2)$ ja z_2 estimoinnissa. Muilta osin riittää
vahinkoaineisto, joka on summattu raportoitumisvuoden ja
korvausten suoritusvuoden tasolle eli matriisiksi (vastaa
ns. run-off-matriisia, vrt. kohta V.1.)

$$\begin{bmatrix} 6 \\ \sum_{i=1} y_i(u) \\ 10 \\ \sum_{i=7} y_i(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 100 & 135 & 180 & 125 \\ 0 & 220 & 110 & 70 \end{bmatrix} .$$

V. KORVAUSVASTUUN RUN-OFF-MALLI

V.1. Run-off-kolmio

Yhden sattumisvuoden $(0,1]$ (sattumisvuosi 1) sijasta laajennetaan luvun IV tarkastelua nyt useammalle sattumisvuodelle $(s-1,s]$ (sattumisvuosi $s=1,2,\dots$). Käytössä olevia symboleja merkitään kuten luvuissa I-II sattumisvuosittain alaindeksillä s (esim. $X_s(t)$).

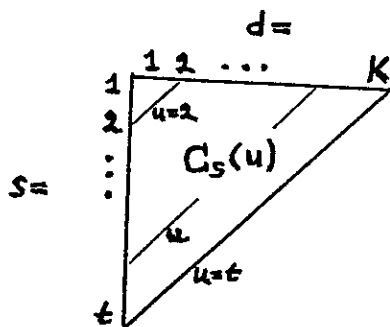
Tällöin, kun $u \geq s \geq 1$ saadaan luvun IV nojalla esim.

$$E[C_s(u)] = f_s(u-s+1) \cdot EX_s$$

$$D^2[C_s(u)] = g_s(u-s+1) \cdot EN_s EZ_s^2 + f_s(u-s+1)^2 \cdot \alpha_{N_s} (EX_s)^2.$$

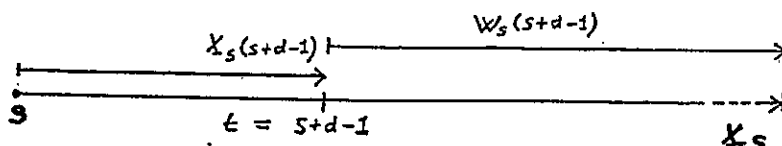
Vastaavalla tavalla saadaan lausuttua $E[X_s(u)]$ ja $D^2[X_s(u)]$ selviämisyjakauksen $F_s(u-s+1)$ ja $G_s(u-s+1)$ avulla.

Maksettuja korvauksia tarkastellaan usein ns. run-off-kolmiona, jossa sattumisvuotta s ($1 \leq s \leq t$) seurataan korvausten suoritusvuosina s ($d=1$), $s+1$ ($d=2$), ..., t ($d=t-s+1$):



$$C_s(u) = C_s(s+d-1) \\ (u \leq t) \quad (d \leq t-s+1)$$

$$X_s(t) = \sum_{u \leq t} C_s(u)$$



Jokaiseen sattumisvuoteen s voidaan ainakin periaatteessa liittää myös jokin sattumisvuoden s reaaliivolyyymiä kuvaava suure e_s , kuten esim. vakuutusten lukumäärä, tehtyjen työtuntien lukumäärä työajan tapaturmavakuutuksessa, jne....

Korvaussuoritukset eri vuosina ovat niin ikään riippuvia tarkasteltavan vakuutuslajin maksettuja korvauksia koske-
vasta inflaatiosta (korvausinflaatiosta). Oletetaan, että vuoden u korvaukset $C_s(u)$ voidaan saattaa indeksillä r_u saman erikseen sovittun perusvuoden tasolle. Tällöin normeeratut satunnaismuuttujat

$$\tilde{C}_s(u) = \frac{C_s(u)}{e_s \cdot r_u}$$

ovat sekä liikkeen reaaliivolyymin että rahanarvon suhteen keskenään vertailukelpoisia.

Tarkasteltavia korvauslajeja on yleensä useita ja ne tulevat vahingon satuttua maksettavaksi eri aikoina. Inflaatiokehitys sattumisvuosittain onkin syytä erottaa kiinteän sattumisvuoden suoritus- ja sattumisvuoden välillä vaikuttavasta korvausinflaatiosta. Jälkimmäistä tulisi pitää osana sattumisvuoden korvausten selviämistä eli luvussa IV määriteltäviin selviämisyksiköihin sisältyvänä. Esim. lakisääteisessä tapaturmavakuutuksessa erilaisia lääkäripalkkioihin sidoksissa olevia sairaanhoitokorvauksia maksetaan jopa 30 vuotta vahingon sattumisen jälkeen, kun taas ensimmäisen vuoden aikana valtaosan korvauksista muodostavat ansiosidonnaiset päivärahat.

Korvausinflaation huomioon ottaminen edellyttäisikin, että selviämisyksiköt estimoitaisiin tilastoaineistosta, josta on sopivalla indeksillä eliminoitu toteutunut korvausinflaatio. Estimoituihin selviämisyksiköihin lisättäisiin arvio tulevasta korvausinflaatiosta vasta lopullisia selviämisyksiköitä johdettaessa (vrt. kohta IV.7.).

Sopivaa korvausinflaatiota kuvaavaa indeksiä ei useinkaan kuitenkaan ole löydettävissä eikä edes rakennettavissa. Tällöin joudutaan turvautumaan tilastoaineiston sisältämään korvausinflaatioon, jota ei pystytä erikseen arvioimaan vaan se estimoituu osaksi selviämisyakaumia. Tällainen tilanne paitsi että se olettaa menneen korvausinflaation toteutuvan keskimäärin myös tulevaisuudessa, niin haittaa luonnollisesti selviämisyakaudien estimointia.

Sattumisvuosien välinen inflaatio on yleensä jollakin tarkkuudella arvioitavissa, koska korvaukset voidaan normeerata käyttämällä jotain sattumisvuoteen kohdistettavaa rahamääräistä kantatietoa. Jos merkitään sattumisvuoteen kohdistuvaa maksutuloa P_s , niin sattumisvuosittain normeeratut korvaukset (merkitään tätäkin normeerausta $\tilde{C}_s(u)$) ovat

$$\tilde{C}_s(u) = \frac{C_s(u)}{e_s \cdot r_s} \approx \frac{C_s(u)}{e_b} \cdot \frac{P_b}{P_s} ,$$

missä b on perusvuosi, jolloin $r_b=1$. Jos sattumisvuodet halutaan ainoastaan vertailukelpoiseksi voidaan edelleen valita $e_b=P_b$, jolloin

$$\tilde{C}_s(u) \approx \frac{C_s(u)}{P_s} ,$$

mikä on ehkä yleisimmin käytetty normeerausmenettely ja vastaa tässä valintaa $e_s r_s = P_s$.

Edelläolevan perusteella sattumisvuosittainen normeeraus voidaan kohtuullisesti katsoa suoritetuksi, jos sattumisvuoteen s liittyvät korvaukset jaetaan sattumisvuoteen s kohdistuvalla rahamääräisellä suureella (esim. maksutulolla P_s).

Jatkossa merkitään normeerausta ainostaan tekijällä $e_s \cdot r_s$ jakamalla, jolloin oletetaan jokaiseen sattumisvuoteen liittyvä suoritusvuosittainen korvausinflaatio analysoidun erikseen tai jätetyn tilastoaineistoon sellaisenaan. On syytä todeta, että vaikkei korvausinflaatioindeksiä löydy

niin tulisi arvioida selviämisjakaumien herkkyyttä erilaisilla inflaatio-oletuksilla.

V.2. Sattumis/suoritusvuosi-malli

Tarkastellaan yleisesti odotusarvoa $E[C_s(u)]$ ja oletetaan, että se voidaan esittää muodossa ($u \geq s$)

$$E[C_s(u)] = a_s(u-s+1) \cdot b_s, \quad (1)$$

missä $a_s(d) \geq 0$; $d=1,2,\dots$ ja $b_s > 0$ ovat sattumisvuodesta s ja korvausten suoritusvuodesta $u=s+d-1$ riippuvia tekijöitä.

Koska $EX_s = \sum_{u \geq s} E[C_s(u)]$, niin $b_s \cdot \sum_{u \geq s} a_s(u-s+1) = EX_s$.

Merkitsemällä $\sum_{u \geq s} a_s(u-s+1) = a_s$ ($a_s > 0$) ja määrittelemällä

$a'_s(u-s+1) = a_s(u-s+1)/a_s$, saadaan odotusarvolle esitys

$$\begin{aligned} E[C_s(u)] &= \frac{a_s(u-s+1)}{a_s} \cdot a_s b_s \\ &= a'_s(u-s+1) \cdot EX_s. \end{aligned}$$

Edellä kaavassa (1) esitettyä muotoa olevat odotusarvon $E[C_s(u)]$ hajotelma voidaan siis tulkita siten, että korvataan

$$\begin{cases} b_s := EX_s \\ a_s(u-s+1) := f_s(u-s+1). \end{cases}$$

Koska odotusarvon kaavan (1) mukainen esitys ei sisällä mitään oletuksia itse korvausprosessista, niin selviämisjakauman $f_s(u-s+1)$ ja tekijän $a_s(u-s+1)$ vastaavuus on luonnollisesti vain muodollinen eikä kerro mitään tekijästä $a_s(u-s+1)$. Mikäli kuitenkin luvussa IV esitetty malli ote-

taan lähtökohdaksi, niin $a_s(u-s+1)$ saa tulkintansa selviämisyajakaumana $f_s(u-s+1)$.

Kaavan (1) mukaisissa malleissa tekijää $a_s(u-s+1)$ kutsutaankin usein selviämisyajakaumaksi (delay distribution/parameter) vaikkei aina $\sum_{d \geq 1} a_s(d) = 1$. Yleensä puhutaan löysästi sattumisvuoden korvausten keskimääräisestä jakautumisesta eri suoritusvuosille.

Jos oletetaan, että korvausten selviäminen ei riipu sattumisvuodesta s , niin

$$E[C_s(u)] = a(u-s+1) \cdot b_s. \quad (2)$$

Tällöin voidaan tekijä b_s tulkita sattumisvuodesta s johtuvaksi tasoparametriksi kun taas tekijä $a(u-s+1)$ sattumisvuosille samana ottaa huomioon ainoastaan sattumisvuoden (s) ja korvausten suoritusvuoden (u) välisen selviämisaikavälin.

On selvää, että kyseessä on tällöin voimakas, joskin tavanomainen ja useimmissa korvausvastuun malleissa käytetty oletus. Vakuutuskannan ja olosuhteiden tulee olla mm. sillä lailla vakaita, ettei eri vahinkotyyppien suhteellinen osuus oleellisesti muutu tarkasteluaikavälillä. Niin ikään vahinkojen selvittelyn ja korvausinflaation tulee säilyä oleellisesti samanlaisena. Kohdan IV selviämisyajakaumien rakennetta koskevat tarkastelut antavat hyvän lähtökohdan vahinkoprosessia koskevien oletusten mieltämiseksi ja tarkistamiseksi.

V.3. Credibility-malli

V.3.1. Oletukset, malli ja ennuste

Tarkastellaan edelleen luvussa IV esitettyä korvausvastuumallia laajennettuna useammalle sattumisvuodelle s ($s \geq 1$).

Luvun IV puhtaasti rakenteellisesta tarkastelusta eteneminen edellyttää nyt joidenkin jakaumaoletusten tekemistä.

Oletetaan:

- N_s on Poisson $(\Lambda_s \cdot e_s)$ -jakautunut, missä e_s on jokin sattumisvuoden s reaalityymin mitta ja Λ_s Poisson-intensiteettiä kuvaava satunnaismuuttuja, joka on sattumisvuosittain samoin jakautunut. Merkitään $E\Lambda_s = \lambda$ ja $D^2\Lambda_s = \kappa \cdot \lambda^2$.
(Luvussa II voidaan olettaa, että $e_1 = e = 1$, jolloin $\kappa_\Lambda = \kappa$).
- Sattuneiden vahinkojen suuruuteen vuonna s vaikuttaa sattumisvuoden s erityisiä olosuhteita kuvaava satunnaismuuttujaparametri ψ_s .
- Jos merkitään $\Gamma_s = (\Lambda_s, \psi_s)$, niin ehdolla Γ_s kohdassa IV.1. tehdyt kiinteitä sattumisvuotta koskevat oletukset pätevät sattumisvuonna s . Samoin perusteella kuin kohdassa IV.1. vahingosta i riippumatta merkitään $Y(u)$, Z , R jne., merkitään nyt $Y_s(u)$, Z_s , R_s jne..
- Vahingosta vuonna u maksettavien korvausten tarvittavat odotusarvot riippuvat satunnaismuuttujaparametrasta ψ_s seuraavasti, kun $u \geq s$ ja $d = u - s + 1$

$$\left\{ \begin{array}{l} E[Y_s(u) | \psi_s] = f(d) \cdot E[Z_s | \psi_s] \\ \qquad \qquad \qquad = f(d) \cdot r_s \psi_s \cdot \mu \\ E[Y_s(u_1) \cdot Y_s(u_2) | \psi_s] = g(d_1, d_2) \cdot E[Z_s^2 | \psi_s] \\ \qquad \qquad \qquad = g(d_1, d_2) \cdot r_s^2 \psi_s^2 \cdot \alpha. \end{array} \right.$$

Tässä r_s on kerroin, jonka avulla rahamääräiset suureet saadaan sattumisvuosittain s samalle ta-

solle ja $f(d)$ sekä $g(d_1, d_2)$ vastaavat kohdassa IV.1. esitettyjä selviämisyajakaumia. Parametrit ψ_s ovat sattumisvuosittain samoin jakautuneita ja ne voidaan normeerata siten, että $E\psi_s = 1$ jolloin $EZ_s = r_s \cdot \mu$. Jos ψ_s on vakio, niin voidaan valita $\psi_s = 1$, jolloin $EZ_s^2 = r_s^2 \cdot \mu$ ja $EZ_s^2 = r_s^2 \cdot \alpha$.

- Kaikki eri sattumisvuosiin liittyvät satunnaismuuttujat ovat riippumattomia ja lisäksi kunakin sattumisvuonna $\Lambda_s \perp \psi_s$.

Oletukset tarkoittavat käytännössä sitä, ettei vahinkojen lukumäärällä ja yksittäisen vahingon koolla ole reaaliworldiin muutoksen ja inflaation lisäksi muuta sattumisvuosittaista trendiä. Yksittäisen vahingon korvausta koskevat odotusarvot voidaan myös esittää sattumisvuosittain samojen selviämisyajakaumien avulla. Sattumisvuosittaisesta riippumattomuudesta seuraa lisäksi, että korvausvastuu voidaan määrätä sattumisvuosittain.

Sattumisvuosittain saman selviämisyajakauman oletuksesta seuraa luvun IV selviämisyajakaumien (kohta IV.2.1. ja IV.4.) mukaisesti, kun $t \geq s$ ja $d = t - s + 1$

$$E[Z_s(t) | \psi_s] = F(d) \cdot r_s \psi_s \cdot \mu$$

$$E[Z_s(t)^2 | \psi_s] = G(d) \cdot r_s^2 \psi_s^2 \cdot \alpha,$$

$$\text{missä } F(d) = \sum_{k \leq d} f(k) \text{ ja } G(d) = \sum_{k_1, k_2 \leq d} g(k_1, k_2).$$

Oletuksia voitaisiin lieventää, jos kuten luvussa II oletettaisiin selviämisyajakauma $F(d)$ riippuvaksi satunnaisparametrilla θ eli $F(d) = E[F(d) | \theta]$ ja $\sigma_F^2(d) = D^2[F(d) | \theta]$. Näin päädyttäisiin luvun II credibilityennustetta vastaavaan ennusteeseen (kun $\theta_s \perp \psi_s$ ja $\theta_s \perp \Lambda_s$). Kaavat muodostuisivat kuitenkin raskaiksi eivätkä toisi lukuun II verrattuna oleellista uutta minkä vuoksi tässä on tyydytty

perinteisempään tarkastelutapaan.

Koska vahinkojen lukumäärän N_s oletetaan olevan ehdollisesti Poisson-jakautunut, niin kohdan IV.4. parametri $\alpha_{N_s} \geq 0$. Parametrin tulkitsemiseksi tarkastellaan vahinkojen lukumäärän odotusarvoa ja varianssia:

$$EN_s = e_s \cdot E\Lambda_s = e_s \cdot \lambda$$

$$D^2 N_s = D^2 [e_s \cdot \Lambda_s] + E[e_s \cdot \Lambda_s]$$

$$= e_s^2 \cdot D^2 \Lambda + EN_s$$

$$= e_s^2 \cdot \kappa \cdot \lambda^2 + EN_s ,$$

jolloin sattumisvuodesta riippumatta

$$\kappa = \frac{D^2 N_s - EN_s}{(EN_s)^2} = \alpha_{N_s} \geq 0.$$

Parametria κ kutsutaan usein (vahinkojen lukumäärän) huojunnan varianssiksi (short-term structure variation; Beard et al [1]).

Tehtyjen oletusten ja kohdan IV.4. aputuloksen nojalla saadaan (koska $\alpha_{N_s} = 0$ ehdolla Λ_s ja $\Lambda_s \perp \psi_s$)

$$\left\{ \begin{array}{l} E[X_s(t) | \Gamma_s] = E[N_s | \Lambda_s] \cdot E[Z_s(t) | \psi_s] \\ \quad = e_s r_s \cdot F(d) \cdot \Lambda_s \psi_s \cdot \mu \\ D^2[X_s(t) | \Gamma_s] = E[N_s | \Lambda_s] \cdot E[Z_s(t)^2 | \psi_s] \\ \quad = e_s^2 r_s^2 \cdot G(d) \cdot \Lambda_s \psi_s^2 \cdot \alpha. \end{array} \right.$$

Tällöin

$$\begin{cases} E[X_S(t)] = e_S r_S \cdot F(d) \cdot E[\Lambda_S \psi_S] \cdot \mu \\ D^2[X_S(t)] = e_S r_S^2 \cdot G(d) \cdot E[\Lambda_S \psi_S^2] \cdot \alpha \\ \quad + e_S^2 r_S^2 \cdot F(d)^2 \cdot D^2[\Lambda_S \psi_S] \cdot \mu^2. \end{cases}$$

Koska nyt $E[X_S(t)] = F(t-s+1) \cdot EX_S$, niin kyseessä on edellä kohdassa V.2. esitetty ja kommentoitu sattumis/suoritusvuosi-malli (2), jossa korvausten suoritusaikaa kuvaa-va tekijä (selviämisaika) ei riipu sattumisvuodesta.

Koska $\Lambda_S \psi_S$, ja parametrit ovat kumpikin sattumisvuosittain samoin jakautuneita, niin $E[\Lambda_S \psi_S]$, $E[\Lambda_S \psi_S^2]$ ja $D^2[\Lambda_S \psi_S]$ eivät riipu sattumisvuodesta s , jolloin merkitään lyhyesti

$$\bar{m} = E[\Lambda_S \psi_S] \cdot \mu = \lambda \mu$$

$$\beta = \frac{E[\Lambda_S \psi_S^2]}{(E[\Lambda_S \psi_S])^2} \cdot \frac{\alpha}{\mu^2} = \frac{E[\Lambda_S \psi_S^2] \cdot \alpha}{\bar{m}^2}$$

$$\gamma = \frac{D^2[\Lambda_S \psi_S]}{(E[\Lambda_S \psi_S])^2}.$$

Tällöin saadaan

$$\begin{cases} E[X_S(t)] = F(d) \cdot e_S r_S \bar{m} \\ D^2[X_S(t)] = G(d) \cdot e_S r_S^2 \bar{m}^2 \beta + F(d)^2 \cdot e_S^2 r_S^2 \bar{m}^2 \gamma. \end{cases}$$

Jos $\psi_S \equiv 1$, niin

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\alpha}{\mu^2} \\ \gamma = \frac{D^2 \Lambda_S}{\lambda^2} = \kappa, \end{cases}$$

jotka ovat riskiteorian keskeisiä parametreja. Parametria β/e_s kutsutaan joskus suhteelliseksi Poisson-varianssiksi, koska jos N_s on Poisson (λ)-jakautunut, niin ($\psi_s \equiv 1$)

$$\begin{aligned} \frac{D^2 X_s}{(EX_s)^2} &= \frac{EN_s \cdot \alpha}{(EN_s)^2 \cdot \mu^2} \\ &= \frac{1}{EN_s} \cdot \frac{\alpha}{\mu^2} = \frac{\beta}{e_s} . \end{aligned}$$

Parametrien β ja γ estimointi on luonnollisesti korvausvas-
tuun määräämisongelmasta riippumaton riskiteorian estimoin-
tiongelma (vrt. kohta V.3.2.).

Kohdan IV.4. aputuloksen nojalla saadaan (koska $\alpha_{N_s} = 0$
ehdolla Λ_s ja $\Lambda_s \perp \psi_s$)

$$\begin{aligned} \text{cov}[X_s(t), W_s(t) | \Gamma_s] &= E[N_s | \Lambda_s] \cdot E[Z_s(t) \cdot V_s(t) | \psi_s] \\ &= e_s r_s^2 \cdot R(d) \cdot \Lambda_s \psi_s \cdot \mu , \end{aligned}$$

missä $R(d)$ on esitetty selviämisyakauman $G(d)$ avulla
kuten kohdassa IV.4. ($0 \leq R(d) \leq 1$).

Koska helposti nähdään, että

$$\begin{aligned} \text{cov}(E[X_s(t) | \Gamma_s], E[W_s(t) | \Gamma_s]) &= e_s^2 r_s^2 \cdot F(d) (1-F(d)) \cdot \\ &D^2[\Lambda_s \psi_s] \cdot \mu^2 , \end{aligned}$$

niin saadaan

$$\text{cov}[X_s(t), W_s(t)] = R(d) \cdot e_s r_s^{2-2} \beta + F(d) (1-F(d)) \cdot e_s^2 r_s^{2-2} \gamma .$$

Luvusta II poiketen vastaava kovarianssi on nyt aina ≥ 0 .
Paras lineaarinen muotoa $a+b \cdot X_s(t)$ oleva satunnaismuuttujan
 $W_s(t)$ ennustusfunktio (myös vastaava credibility-

ennuste) saadaan kuten luvussa II regressiofunktiona

$$\hat{E}[W_S(t) | X_S(t)] = E[W_S(t)] + \frac{\text{cov}(X_S(t), W_S(t))}{D^2[X_S(t)]} \cdot (X_S(t) - E[X_S(t)])$$

Suoraan sijoittamalla ennuste saadaan muotoon

$$\hat{E}[W_S(t) | X_S(t)] = c_S(d) \cdot (1-F(d)) \frac{X_S(t)}{F(d)} + (1-c_S(d)) \cdot (1-F(d)) EX_S$$

missä

$$c_S(d) = \frac{\frac{R(d)}{1-F(d)} \cdot \frac{\beta}{e_S} + F(d)\gamma}{\frac{G(d)}{F(d)} \cdot \frac{\beta}{e_S} + F(d)\gamma} \quad (d \geq 1)$$

Lisäksi voidaan sopia, että $X_S(t)/F(d)=0$, kun $F(d)=0$ ja kun $F(d)(1-F(d))=0$, niin voidaan valita $c_S(d)=0$. Selvästi $c_S(d) \geq 0$ jokaisella $d \geq 1$.

Ennuste saadaan siis painotettuna keskiarvona tekijöistä ($F(d) > 0$)

$$(1-F(d)) \cdot \frac{X_S(t)}{F(d)} \text{ ja } (1-F(d)) \cdot EX_S,$$

joiden molempien odotusarvo on $E[W_S(t)]$. Niitä voidaankin molempia pitää satunnaismuuttujan $W_S(t)$ eräinä (ja jopa keskeisinä) ennusteina. Ensimmäinen ennuste saadaan, jos asetetaan $\beta=0$, jolloin $c_S(d)=1$ ja toinen jos $R(d)=0$ ja valitaan $\gamma=0$, jolloin $c_S(d)=0$. Kohdassa VI.3. osoitetaan ensimmäisen ennusteen yhteys ns. chain-ladder-ennusteeseen. Toinen ennuste taas vastaa kohdan VI.2. ns. odotusarvoennustetta, jota kutsutaan myös Bornhutter-Ferguson-ennusteeksi (vrt. kohta VI.1.).

Helposti nähdään, että ennusteen varianssi on

$$D^2[\hat{E}[W_s(t)|X_s(t)]] = c_s(d) \left[\frac{R(t)}{F(t)(1-F(t))} \cdot \frac{\beta}{e_s} + \gamma \right] \cdot (E[W_s(t)])^2.$$

Koska parametrien $R(d)$ ja $G(d)$ estimointi toista momenttia sisältävinä on useimmiten hankalaa, niin arvioidaan credibility-kerrointa $c_s(d)$ tässä alaspäin (vahinkohistoriaan perustuvan ennusteen painoa pienennetään) asettamalla $R(d)=0$ ja $G(d)/F(d)=1$. Jälkimmäisen valinnan arvioitu vaikutus johtuu siitä, että jos luvun IV tulkintaa vastaten $E[Z_s(t)^2]/(E[Z_s(t)])^2 \approx E[Z_s^2]/(E[Z_s])^2$, niin

$$\frac{G(d)}{F(d)} = F(d) \cdot \frac{G(d)}{F(d)^2} \approx F(d) \leq 1.$$

Credibility-kertoimen pienentäminen pienentää luonnollisesti myös ennusteen varianssia, mikä käytännön korvausperusteen kannalta on useimmiten tyydyttävää.

Näin saadaan credibility-kertoimeksi alaspäin arvioituna

$$c_s(d) = \frac{F(d)\gamma}{\beta/e_s + F(d)\gamma},$$

mikä on klassisen credibility-kertoimen muoto ($0 \leq c_s(d) < 1$). Huomattakoon sattumisvuoden s vaikutus reaalityymin e_s kautta, jolloin credibility-kerroin kasvaa kun e_s kasvaa. Jos toisaalta $\alpha/\mu^2 = (EZ_s^2)/(EZ_s)^2 = (D^2Z_s/(EZ_s)^2) + 1$ kasvaa, mikä heijastaa korvauksen vaihtelevuuden kasvua, niin β :n kasvaessa credibility-kerroin pienenee eli maksettuihin korvauksiin perustuvan ennusteen paino laskee. Parametrin γ kasvu taas kertoo sattumisvuoden lopullisen korvausmenon odotusarvon epävarmuudesta kasvattaen havaittuun korvaushistoriaan perustuvan ennusteen painoa eli credibility-kerrointa.

Luvun IV tuloksia (kohta IV.2.2. ja IV.4.) soveltamalla voidaan credibility-ennustetta $\hat{E}[W_s(t)|X_s(t)]$ vastaten johtaa aivan samoin credibility-ennuste

$$\hat{E}[W_S^-(t) | X_S^-(t)] = c_S(d) \cdot (1-F^-(d)) \frac{X_S^-(t)}{F^-(d)} + (1-c_S(d)) \cdot (1-F^-(d)) EX_S$$

Koska $\text{cov}[X_S^-(t), W_S^-(t) | \Gamma_S] \equiv 0$, niin nyt (vrt. kohta IV.4.)

$$\text{cov}[X_S^-(t), W_S^-(t)] = F^-(d)(1-F^-(d)) \cdot e_S^2 r_S^2 m^2 \gamma.$$

Jos arvioidaan kuten edellä, että $G^-(d)/F^-(d) \leq 1$, niin credibilitykerroin saadaan alaspäin arvioituna esitettyä klassisessa muodossaan:

$$c_S(d) = \frac{F^-(d)\gamma}{\beta/e_S + F^-(d)\gamma}.$$

Jos vahingon koko on riippumaton vahingon raportoitumisvuodesta, niin luvun IV tulkintaa selviämisyajakaumille käyttäen $G^-(d) = F^-(d)$ ja klassinen credibilitykerroin on aina tarkka.

Ennusteen varianssiksi saadaan vastaavasti

$$D^2[\hat{E}[W_S^-(t) | X_S^-(t)]] = c_S(d)\gamma \cdot (E[W_S^-(t)])^2.$$

V.3.2. Estimointi

Luvun IV ja edellä kohdan V.3.1. malliin pohjautuen tarkastellaan nyt normeerattuja korvauksia (vrt. V.1.) suoritusvuoden u ($u \geq s$) aikana:

$$\begin{cases} \tilde{C}_S(u) = \tilde{X}_S(u) - \tilde{X}_S(u-1) \\ \tilde{C}_S(u; u+k) = \tilde{X}_S(u; u+k) - \tilde{X}_S(u; u+k-1) \\ \tilde{C}_S^-(u) = \tilde{X}_S^-(u) - \tilde{X}_S^-(u-1), \end{cases}$$

$$\text{missä } \tilde{X}_S(s-1) = \tilde{X}_S^-(s-1) = \tilde{X}_S(u; s-1) = 0.$$

Seuraavassa on yhteenveto näiden normeerattujen korvausten odotusarvosta ja varianssista, jotka voidaan johtaa kuten $E[X_s(t)]$ ja $D^2[X_s(t)]$ edellä kohdassa V.3.1.. Merkitään $d=u-s+1$ ja $\bar{m}(d)=F^-(d) \cdot \bar{m}$.

$$\left\{ \begin{array}{l} E[\tilde{C}_s(u)] = f(d) \cdot \bar{m} \\ E[\tilde{C}_s(u; u+k)] = h(d; d+k) \cdot \bar{m}(d) \\ E[\tilde{C}_s^-(u)] = f^-(d) \cdot \bar{m} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D^2[\tilde{C}_s(u)] = g(d) \cdot \bar{m}^2 \frac{\beta}{e_s} + f(d)^2 \cdot \bar{m}^2 \gamma \\ D^2[\tilde{C}_s^-(u)] = g^-(d) \cdot \bar{m}^2 \frac{\beta}{e_s} + f^-(d)^2 \cdot \bar{m}^2 \gamma. \end{array} \right.$$

Helposti voidaan näyttää, että myös varianssilla $D^2[\tilde{C}_s(u; u+k)]$ on vastaavanlainen esitys ($\propto 1/e_s$).

Vuoden t lopussa estimoitaessa käytössä on vuoden t loppuun ulottuva vahinkohistoria sattumisvuosilta s , joille $s \leq t-d+1$ ($d=1, 2, \dots$). Merkitään tällöin $I(d) = \{s; s \leq t-d+1\}$. Kun $s \in I(d)$, niin $E[\tilde{C}_s(s+d-1)] = f(d) \cdot \bar{m}$ ja sen pienimmän neliösumman ns. luonnollisin painoin painotetuksi estimaattoriksi (painotettu regressioanalyysi) saadaan tunnetusti

$$\frac{\sum_{s \in I(d)} w_s(d) \cdot \tilde{C}_s(s+d-1)}{\sum_{s \in I(d)} w_s(d)}$$

missä painot

$$w_s(d) = (D^2[\tilde{C}_s(s+d-1)])^{-1}.$$

Jos estimoinnin yksinkertaistamiseksi oletetaan, että $\gamma=0$, niin voidaan valita $w_s(d) = w_s = e_s$, jolloin (vrt. kohta V.1.)

$$w_s \cdot \tilde{c}_s(s+d-1) = \frac{c_s(s+d-1)}{r_s}.$$

Usein käytössä on ainoastaan jokin sattumisvuoden s rahamääräinen kantatieto kuten esim. maksutulo p_s . Tällöin valitaan pragmaattisesti $w_s = e_s r_s$ ja $e_b = p_b$ (vrt. edellä kohta V.1.), jolloin $\underline{w}_s = \underline{p}_s$ ja saadaan

$$w_s \cdot \tilde{c}_s(s+d-1) = c_s(s+d-1).$$

Estimointi vastaa tällöin voimassa olevan yleiskirjeen vakuutusyhtiöille liitteessä 12 (yhteenvedo ulkomaisen vakuutuksen maksujen ja korvausten kertymisestä kanta-vuosittain) sovellettua laskentaa ("kertymä F_x ").

Odotusarvojen $E[\tilde{c}_s(s+d-1; s+d-1+k)]$ ja $E[\tilde{c}_s^-(s+d-1)]$ estimointi tapahtuu vastaavalla tavoin.

Oletetaan, että käytössä on run-off-kolmion mukainen havainto-aineisto $\{\tilde{c}_s(u)\}$, $\{\tilde{c}_s^-(u)\}$ ja $\{\tilde{c}_s(u; u+k)\}$.

a) Selviämisjakauma $f(d)$ ja parametri $\bar{m}$

$$\hat{f}(d) \cdot \bar{m} = \frac{\sum_{s \in I(d)} w_s \cdot \tilde{c}_s(s+d-1)}{\sum_{s \in I(d)} w_s},$$

$$\hat{\bar{m}} = \sum_{d \geq 1} \hat{f}(d) \cdot \bar{m},$$

$$\hat{f}(d) = \frac{\hat{f}(d) \cdot \bar{m}}{\hat{\bar{m}}}.$$

b) Selviämisjakauma $h(d; d+k)$ ja parametri $\bar{m}(d)$ ($d+k \geq 1$)

$$\hat{h}(d; d+k) \cdot \bar{m}(d) = \frac{\sum_{s \in I(d)} w_s \cdot \tilde{c}_s(s+d-1; s+d-1+k)}{\sum_{s \in I(d)} w_s},$$

$$\hat{\bar{m}}(d) = \sum_{k \geq 1-d} \overbrace{h(d; d+k) \cdot \bar{m}(d)},$$

$$\hat{h}(d; d+k) = \frac{\overbrace{h(d; d+k) \cdot \bar{m}(d)}}{\hat{\bar{m}}(d)}.$$

Selviämisjakauman $h(d; d+k)$ ja parametrin $\bar{m}(d)$ estimointi vastaa täysin a-kohdan selviämisjakauman $f(d)$ ja parametrin $\bar{m}$ estimointia kun rajoitutaan vahinkoihin, jotka ovat tunnettuina vuoden $s+d-1$ lopussa. Tällöin $h(d; d+k) \cdot \bar{m}(d) = f(d+k) \cdot \bar{m}$, kun $k \leq 0$ ($d+k \geq 1$).

c) Selviämisjakauma $f^-(d)$ ja parametri $\bar{m}$

Estimointi tapahtuu kuten a-kohdassa, kun $\bar{c}_s(u)$ korvataan $\bar{c}_s^-(u)$:lla.

Parametrien $\bar{m}$ ja $\bar{m}(d)$ estimointi edellä kohdissa a-c edellyttää, että estimoinnissa käytössä oleva run-off-kolmio käsittää korvausten koko selviämisaikavälin eli suoritusvuosia on käytettävissä tarpeeksi. Näin ei kuitenkaan aina ole. Jos run-off-kolmio käsittää sattumisvuodet $s=1, 2, \dots, K$ ja on oletettavaa, että $f(K+\ell) > 0$ ($\ell \geq 1$), niin merkitään run-off-kolmioon perustuvaa vastaavaa $\bar{m}$:n estimaattia

$$\hat{\bar{m}}_K = \sum_{1 \leq d \leq K} \overbrace{f(d) \cdot \bar{m}}.$$

Lopullinen estimaatti saadaan nyt esim. ekstrapoimalla kun $K > d$ siten, että

$$\hat{\bar{m}} = \hat{\bar{m}}_K + \sum_{d > K} a(d).$$

Eräs käytetty ekstrapolointimalli on sovittaa aikasarjaan

$$(\widehat{f(d) \cdot \bar{m}}; d_1 \leq d \leq d_2),$$

missä d_1 ja d_2 valitaan sopivasti, eksponentiaalinen (pienimmän neliösumman) tasoitus

$$a(d) = Ae^{Bd} \quad (A > 0, B < 0).$$

Tällöin saadaan

$$\hat{\bar{m}} = \hat{\bar{m}}_K + \sum_{d > K} Ae^{Bd}.$$

Hyvänä apuna ekstrapoloinnissa ja parametrien d_1 ja d_2 valinnassa on aikasarjan graafinen tarkastelu: eksponentiaalisen tasoituksen sopivuutta voi arvostella esim. tarkastelemalla aikasarjaa $(\log[\widehat{f(d)\bar{m}}]; d \geq d_1)$, johon sovitetaan suora $y(d) = \log A + Bd$.

Aivan samoin kun $\bar{m}$:n tapauksessa menetellään parametrin $\bar{m}(d)$ tapauksessa, jos run-off-kolmion tilastoaineisto ei ole riittävän laaja.

Estimointia käsitellään esimerkeissä kohdissa V.3.3., VI.3.2. ja VI.8.

d) Parametrit β/e_s ja γ (credibility-ennuste kohdassa V.3.1)

Merkitään

$$\Lambda_s \psi_s \cdot \mu = p(\Gamma_s)$$

$$\Lambda_s \psi_s^2 \cdot \alpha = \sigma^2(\Gamma_s).$$

Jos $g(d) \approx f(d)$, niin saadaan esitysmuoto

$$\begin{cases} E[\tilde{C}_S(u) | \Gamma_S] = f(d) \cdot p(\Gamma_S) \\ D^2[\tilde{C}_S(u) | \Gamma_S] \approx f(d) \cdot \sigma^2(\Gamma_S) / e_S. \end{cases}$$

Tällöin

$$\begin{cases} \bar{m} = E[p(\Gamma_S)] \\ \bar{m}^2_\beta = E[\sigma^2(\Gamma_S)] \\ \bar{m}^2_\gamma = D^2[p(\Gamma_S)]. \end{cases}$$

Parametrien esitysmuoto vastaa nyt credibility-teorian asetelmaa, josta myös β ja γ voidaan estimoida (esim. Goovaerts ja Hoogstad [14] sv. 43-52).

Yksinkertaisimman tulkinnan parametrit β/e_S ja γ saavat kuitenkin, jos kohdassa V.3.1. oletetaan, että $\psi_S \equiv 1$, jolloin parametri γ on tasoitusvastuuperusteiden ns. huojunnan varianssi (perusteiden merkinnöin vakuutuslajikohtainen vakio σ_j^2 ; $0,035 \leq \sigma_j \leq 1,215$) ja

$$\frac{\beta}{e_S} = \frac{1}{EN_S} \cdot \frac{\alpha}{\mu^2} = \frac{1}{EN_S} \cdot \frac{EZ_S^2}{(EZ_S)^2}.$$

Parametri β/e_S on myös tasoitusvastuuperusteissa vakuutuslajikohtaisesti käytetty parametri (perusteiden merkinnöin $\beta_j \cdot M_j / P_j$).

Parametrien tasoitusvastuuperusteiden mukaista tulkintaa voi käyttää apuna estimoinnissa. Useimmiten parametrien arvo valitaan lopulta siten, että credibility-kerroin

$$c_S(d) = \frac{F(d)\gamma}{\beta/e_S + F(d)\gamma}$$

saa korvausvastuuperusteen kannalta "mielekkäitä" arvoja. Eräänä arviointiperusteena voidaan tällöin käyttää kohdassa V.3.1. johdettua credibility-ennusteen varianssia.

V.3.3. Esimerkkejä

Esimerkki 1

Tarkastellaan yksinkertaista parametrien $\bar{m}$ ja $f(d)$ estimointiesimerkkiä. Valtakunnallisen liikennevakuutuksen omaisuuskorvaukset sattumis- ja suoritusvuosina 1986-89 muodostavat run-off-kolmion (mmk):

413 655	127 117	8,6	3,5
470 649	145 256	9,8	
527 460	189 776		
567 813			

Omaisuuskorvaukset selviävät siis nopeasti (käytännössä kahden vuoden kuluessa). Reaalivolyyminä e_s ($s=1986-89$) voitaisiin käyttää esim. vakuutusvuosien lukumäärää. Yleensä kuitenkin markkamääräiset kantatiedot ovat yhtiötasolla helpoimmin saatavana ja niitä näin ollen myös käytetään. Liikennevakuutuksen maksutulo on kuitenkin varsin huono volyymin mitta, koska se mm. sisältää saldonkäytön sekä indeksikorotusten jakojärjestelmän mukaisia eriä. Koska useissa vakuutuslajeissa sattumisvuosittain s vuoden $s+1$ loppuun mennessä maksetut korvaukset $X_s(s+1)$ ovat jo varsin vakiintuneita suhteessa lopulliseen korvausmenoon X_s , niin markkamääräiseksi volyyminä mitaksi voidaan kohtuudella valita sattumisvuosittain s havaittu $X_s(s+1)$. Tuorein sattumisvuosi jää luonnollisesti tällöin tarkastelun ulkopuolelle. Menettely perustuu siihen, että usein $D^2[X_s | X_s(s+1)]$ on käytännön kokemuksen perusteella arvioitavissa hyvin pieneksi eli X_s ehdolla $X_s(s+1)$ lähes vakioksi. Valitaankin nyt parametrien $f(d)$ ja $\bar{m}$ estimoinnissa $w_s = e_s r_s = X_s(s+2)$.

Tällöin

$$\widehat{f(d)\bar{m}} = \frac{\sum_{s \in I(d)} c_s(s+d-1)}{\sum_{s \in I(d)} x_s(s+1)} \quad (d \geq 1).$$

Run-off-kolmiosta saadaan periaatteessa estimoitua $f(d)$, kun $1 \leq d \leq 4$. Tällöin $I(1)=1986-88$ (tuorein vuosi 1989 joudutaan siis nyt jättämään pois), $I(2)=1986-88$, $I(3)=1986-87$ ja $I(4)=1986$. Malliin liittyvien oletusten (mm. sattumisvuosittainen trendittömyys) tarkistamiseksi listataan osamäärät $c_s(s+d-1)/x_s(s+1)$ myös sattumisvuosittain:

0,7649	0,2351	0,0158	0,0064
0,7642	0,2358	0,0160	
0,7354	0,2464		

Parametrin $f(4)$ estimoimiseksi on siis käytössä vain yksi havainto (0,0064). Tämä on ns. run-off-kolmion koillisnurkan ongelma. Usein koillisnurkan havainnot jätetäänkin estimoinnin epävarmuuden vuoksi käyttämättä ja pyritään löytämään muita arvioita.

Tällöin saadaan:

$d =$	1	2	3	4	$\hat{m}$
$\hat{f}(d)_m =$	0,753	0,247	0,016	0,006	($\hat{m}=1,022$)
$\hat{f}(d) =$	0,737	0,242	0,016	0,006	
$\hat{F}(d) =$	0,737	0,979	0,995	1,000.	

Jos nyt halutaan käyttää vahinkosuhteen

$$\bar{m} = \frac{E[X_s]}{E[X_s(s+2)]} \approx 1,022$$

sijasta vahinkosuhdetta suhteessa maksutuloon P_s , niin saadaan sattumisvuosina $s=1986-89$

$$\bar{m} \cdot \frac{\sum_s x_s(s+2)}{\sum_s P_s} \approx \bar{m} \cdot 0,26 \approx 0,27.$$

Esimerkki 2

Liikennevakuutuksessa henkilökorvaus koostuu ansionmenetykskorvauksesta sekä muista sekalaisista korvauksista, joita

ovat erilaiset sairaanhoitokorvaukset ja pysyvän vian ja haitan korvaus. Tässä esimerkissä tarkastellaan sekalaisten henkilökorvausten selviämistä. Koska tällaisia korvauksia maksetaan vahingoittuneelle usein hyvinkin pitkään, on myös inflaatioon kiinnitettävä erityistä huomiota.

Käytettävissä on koko liikennevakuutusliikkeen sekalaista henkilökorvausta koskeva run-off-kolmio vv. 1977-89, joka on sattumisvuosittain saatettu liikennevakuutuksen korvaustasoindeksillä ko. sattumisvuoden tasolle. Kiinteätä sattumisvuotta koskeva korvausinflaatio on siis näin poistettu (vrt. kohta V.1.). Käyttäen estimoinnissa painoina ($w_s = e_s r_s$) liikennevakuutuksen maksututkimuksen mukaisia riskimaksutuloja niin kohdan V.3.2. mukaisesti estimoiden saadaan normeeratuksi selviämiseksi (vrt. kohta IV.7.: normeerattu selviämisjakauma $\tilde{f}(d)$ ja odotusarvo $E\tilde{X}$).

d	$\tilde{f}(d)\tilde{m}$
1	0,0170
2	0,0234
3	0,0141
4	0,0101
5	0,0064
6	0,0043
7	0,0031
8	0,0026
9	0,0018
10	0,0015
11	0,0016
12	0,0015
13	0,0009

Sovitetaan nyt aikasarjaan ($\log \tilde{f}(d)\tilde{m}$; $7 \leq d \leq 13$) pienimmän neliösumman suora $y(d) = \log A + Bd$, jolloin saadaan $A = 0,0101$ ja $B = -0,1760$ (vrt. liite E).

Tämän jälkeen sovelletaan normeerattuun selviämiseen

$\hat{f}(d)\bar{m}$ inflaatio-oletuksia 5 %, 10 % ja 20 %. Jos inflaatio on 0 %, saadaan alkuperäinen normeerattu selviämiskehitys. Jos inflaatio on esim. 10 %, niin $f(d)\bar{m} = (1,1)^{d-1,5} \cdot \bar{f}(d)\bar{m}$ kun $d > 1$.

Tällöin saadaan yhteenvedona (selviämistä seurattu 30 vuotta):

		<u>inflaatio:</u>			
		0 %	5 %	10 %	20 %
$\hat{m} =$		0,09	0,12	0,15	0,37
d	$\hat{F}(d)$	$\hat{F}(d)$	$\hat{F}(d)$	$\hat{F}(d)$	$\hat{F}(d)$
1	0,18	0,15	0,12	0,05	
5	0,76	0,67	0,56	0,29	
10	0,90	0,84	0,73	0,42	
15	0,96	0,92	0,85	0,56	
20	0,99	0,97	0,92	0,71	
25	1,00	0,99	0,97	0,85	
30	1,00	1,00	1,00	1,00	

Selviämisjakaumat on esitetty graafisesti liitteenä F.

Koska liikennevakuutuksen ansionmenetyskorvaukset maksetaan aina sattumisvuoden tasoisina (indeksikorotukset kerätään jakojärjestelmällä) ja omaisuuskorvaukset selviävät varsin nopeasti (esimerkki 1 edellä), niin inflaatiovaikutus tulee esiin sekalaisen henkilökorvauksen kautta. Jos inflaatiokehitykseksi muodostuisi 20 %, niin tämänhetkisellä riskimaksutasolla näihin korvauksiin menisi n. 37 % ($\hat{m}=0,37$) riskimaksusta. Koko henkilökorvauksen osuus riskimaksutuksesta on 1980-luvulla ollut n. 45 %. Sekalaisen henkilökorvauksen osuudeksi voidaan arvioida n. 10-15 % riskimaksutuksesta. Koska korvausvastuuta määrittäessä inflaatiokehitys tulee arvioida osana korvausten selviämistä, niin kyseessä on itse asiassa "inflaation rahastointi".

Esimerkki 3

Kohdassa VI.8. esitetään esimerkki vastuuvakuutuksen korvausvastuuperusteen laatimisesta. Korvausvastuuperuste on kohdan VI.2. mukainen odotusarvoennuste.

Korvausvastuuperuste voitaisiin myös laatia lähtökohtanaan edellä kohdassa V.3. esitetty credibility-malli.

Tarkastellaan tässä esimerkissä kohdan V.3.1. credibility-kertoimen

$$c_s(d) = \frac{F(d)\gamma}{\beta/e_s + F(d)\gamma} \quad (d \geq 1)$$

määrittämistä.

Jos kohdan V.3.2. (alakohta d) mukaisesti

$\beta/e_s = (1/EN_s) \cdot (\alpha/\mu^2)$, niin on määrättävä parametrit

EN_s , α/μ^2 ja γ . Selviämisyjakautuma $F(d)$ saadaan kohdasta VI.8.

Tasointusvastuuperusteiden mukaan (vrt. kohta V.3.2. (alakohta d)) saadaan $\gamma = 0,129^2 \approx 0,02$.

Vuonna 1990 Vakuutusyhtiöiden Keskusliitossa tehdyn tutkimuksen mukaan vastuuvakuutuksessa $\alpha/\mu^2 \approx 25$.

Tällöin saadaan, jos valitaan vaihtoehtoisesti $EN_s = 100, 500$ tai 5000 :

d =	1	2	3	4	5	...15
F(d) =	0,33	0,68	0,79	0,85	0,90	...1,00
$c_s(d)$, kun						
EN_s :						
100 =	0,03	0,05	0,06	0,06	0,07	...0,07
500 =	0,12	0,21	0,24	0,25	0,27	...0,29
5000 =	0,57	0,73	0,76	0,77	0,78	...0,80.

Jos $EN_s = 100, 500$ tai 5000 niin kyseessä on vastaavasti pieni, keskisuuri ja suuri suomalainen vastuuvakuuttaja.

Esimerkki osoittaa, että pienen vastuuvakuutusliikkeen

korvausvastuuta määrättäessä havaittua vahinkoaineistoa ei käytännössä voi hyödyntää itse ennusteessa.

Tässä luvussa esitettyä kohdan V.3.2. mukaista estimointia käsitellään myös kohdan VI.3.2. esimerkissä, jossa sitä verrataan chain-ladder-menetelmään.

VI. KORVAUSVASTUUN MÄÄRÄÄMINEN

VI.1. Johdanto

Korvausvastuun määrittämisessä ei ole olemassa tiettyä standardimenetelmää, joka sopisi useimpiin tapauksiin. Käytännössä ongelmaa joutuukin usein lähestymään varsin pragmatistisesti, ilman että minkään menetelmän kaikkien oletusten voi katsoa olevan edes voimassa. Suositeltava lähestymistapa on tällöin pyrkiä soveltamaan kahta-kolmea eri menetelmää, ja tehdä sen jälkeen päätös lopullisesta menetelmästä tai valita jokin näiden yhdistelmä. Tämä on sitäkin tärkeämpää, koska korvausvastuun määrittämisessä perinteisesti käytetyt menetelmät eivät mahdollista luottamusväliestimointia.

Eräs keskeinen rajoitus on yhtiön tilastointijärjestelmä. Vähimmäisvaatimuksena tulisi pitää mahdollisuutta kohdistaa maksetut korvaukset kussakin vakuutuslajissa ja tärkeimmissä korvauslajeissa suoritusvuosittain vahinkojen sattumisvuosiin. Näin syntyneen run-off-kolmion tilastollisen luotettavuuden arviointi edellyttää myös vähintäänkin karkeata näkemystä siitä kuinka monta vahinkoa (tai jotain muuta vahinkoon rinnastettavaa tilastoyksikköä) kussakin vaiheessa korvauksia on aiheuttamassa. Jälleenvakuutuksessa tällaisen lukumäärätiedon saaminen on yleensä vaikeata, jolloin joudutaan tyytymään vain korvaustilityksistä koostuvaan run-off-kolmioon.

Jos vahingot raportoituvat hitaasti, niin raportoitusvuosittain saatavat run-off-kolmiot mahdollistavat tuntemattomien vahinkojen korvausvastuun määrittämisen ja samalla kussakin vaiheessa tunnettujen ja tuntemattomien vahinkojen erillisen arvioinnin. Luotettavasti tehdyt vahinkokohtaiset varaukset tarjoavat niin ikään mahdollisuuden tunnettujen vahinkojen korvausvastuun erilliseen arviointiin.

Kohdassa VI.2. esitetään aluksi yleinen korvausvastuun määräämisperiaate, joka perustuu arvioon lopullisesta korvausmenosta ($\hat{E}X$) ja korvausten keskimääräisestä selviämisestä ($\hat{F}(d)$). Tällainen korvausvastuu vastaa lukujen IV ja V mukaista maksamattomien korvausten odotusarvoa ja sitä kutsutaankin tässä odotusarvoennusteeksi. Tätä määräämisperiaatetta kutsutaan myös aktuaarialalle formuloituna esittäjiensä mukaan Bornhutter-Ferguson-periaatteeksi (vrt. Nationale Nederlande [19]).

Kohdat VI.3.-4. esittelevät kaksi ehkä kuuluisinta varsinaista menetelmää, joita käytetään korvausvastuuta määrättäessä. Kohdat sisältävät myös käytännön esimerkkejä.

Kohdissa VI.5.-6. käsitellään lyhyesti vahinkokohtaista varausta ja tuntemattomien vahinkojen korvausvastuuta.

Kohdassa VI.7. esitellään lyhyesti yhä laajemmin käytössä olevaa korvausvastuun regressiomallia.

Kohdassa VI.8. laaditaan esimerkkinä vastuuvakuutuksen korvausvastuun kollektiivivarausperuste. Esimerkki sisältää erään käytännössä sovelletun karkean menettelyn ottaa huomioon estimoinnissa käytetty turvaavuusperiaate (vrt. kohta I.3.).

VI.2. Odotusarvoennuste

Odotusarvoennuste perustuu maksamattomien korvausten odotusarvon parametrien korvaamiseen estimaateillaan. Tässä käytettäviä parametreja voidaan tulkita luvussa IV esitetyn yhtä sattumisvuotta koskevan korvausvastuun rakennemallin avulla.

Korvausvastuuksi tilivuonna t saadaan sattumisvuosittain s ($s \leq t$) kun merkitään $d = t - s + 1 \geq 1$:

$$\begin{cases} K_S(t) = a(d) \cdot \bigwedge EX_S & (\text{kaikki vahingot}) \\ K_S^-(t) = a^-(d) \cdot \bigwedge EX_S & (\text{tuntemattomat vahingot}) \\ K_S^+(t) = a^+(d) \cdot \bigwedge E[X_S^-(t)], & (\text{tunnetut vahingot}) \end{cases}$$

missä kun $v=1/(1+i)$

$$\begin{cases} a(d) = \sum_{k>d} v^{k-d-\frac{1}{2}} \hat{f}(k) & (= 1-\hat{F}(d), \text{ jos } i=0) \\ a^-(d) = \sum_{k>d} v^{k-d-\frac{1}{2}} \hat{f}^-(k) & (= 1-\hat{F}^-(d), \text{ jos } i=0) \\ a^+(d) = \sum_{k>d} v^{k-d-\frac{1}{2}} \hat{h}(d;k) & (= 1-\hat{H}(d), \text{ jos } i=0). \end{cases}$$

Tarkastellaan nyt tarkemmin tilivuoden t korvausvastuuta

$$\begin{aligned} K.(t) &= \sum_{s \leq t} K_S(t) \\ &= \sum_{d \geq 1} a(d) \cdot \bigwedge EX_{t-d+1}. \end{aligned}$$

Jos P_s on maksutulo vuonna s ja $\bar{m}$ arvioitu keskimääräinen sattumisvuosittainen vahinkosuhte maksutulon P_s suhteen, niin voidaan arvioida $\bigwedge EX_{t-d+1} = \bar{m} \cdot P_{t-d+1}$.

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} K.(t) &= \sum_{d \geq 1} a(d) \cdot \bar{m} \cdot P_{t-d+1} \\ &= \sum_{d \geq 1} \bar{a}(d) \cdot P_{t-d+1}. \end{aligned}$$

Kertoimia $\bar{a}(d)=a(d)\bar{m}$ kutsutaan Suomessa kollektiivi(va-
raus)kertoimiksi ja vastaavaa korvausvastuuta erotuksena
vahinkokohtaisista varauksista (vrt. kohta VI.5) kollektiivivaraukseksi. Useimmiten varaukset yhdistetään

sopivasti siten, että korvausvastuu voidaan määrätä korkeintaan kolmen viimeisimmän maksutulon (P_t , P_{t-1} ja P_{t-2}) perusteella (esim. tavaravakuutus: $0,38 P_t + 0,07 P_{t-1}$).

Selviämisjakaumaestimaatteja $\hat{f}(d)$, $\hat{f}^-(d)$ ja $\hat{h}(d;k)$ käsitellään kohdissa V.3.2. ja VI.3.-4.

Odotusarvoestimaatit $\hat{EX}$ ja $E[X_s^-(t)]$ voidaan määrätä esim. seuraavasti (kohdat a-c):

$$a) \quad \begin{cases} \hat{EX}_s = e_s r_s \cdot \bar{m}_s \\ E[X_s^-(t)] = e_s r_s \cdot \bar{m}_s(d) \end{cases} \quad (\bar{m}_s(d) = F^-(d) \cdot \bar{m}_s).$$

Keskimääräinen vahinkosuhte $\bar{m}_s$ ja $\bar{m}_s(d)$ määrätään erikseen jos mahdollista useampaa sattumisvuotta koskevasta tilastoaineistosta. Jos vahinkosuhteissa ei ole havaittavissa sattumisvuosittaista trendiä, niin voidaan valita $\bar{m}_s = \bar{m}$ ja $\bar{m}_s(d) = \bar{m}(d)$. Kun P_s on vuoden s maksutulo, niin valitsemalla $e_s r_s = P_s$ (vrt. kohta V.1.) saadaan vahinkosuhte maksutulon suhteen. Vahinkosuhteen $\bar{m}$ ja $\bar{m}(d)$ estimointia on käsitelty kohdassa V.3.2..

b) Odotusarvon EX_s estimointi voidaan mahdollisuuksien mukaan palauttaa vahinkojen keskimääräisen lukumäärän ja keskivahingon tarkasteluun:

$$\hat{EX}_s = \hat{EN}_s \cdot \hat{EZ}_s = e_s \hat{\lambda}_s \cdot r_s \hat{\mu}_s.$$

Tällöin keskimääräinen vahinkointensiteetti $\hat{\lambda}_s$ ja inflaatiopuhdistettu keskivahinko $\hat{\mu}_s$ määrätään erikseen ja jos niissä ei ole trendiä valitaan $\lambda_s = \lambda$, $\mu_s = \mu$.

c) Jos odotusarvon EX_s määrittämiseksi käytössä ei ole muita sattumisvuosia koskevaa vertailukelpoista tietoa ja jos selviämisjakaumasta on kuitenkin jokin "näkemys $\hat{F}(d)$ ", niin usein estimoidaan vuonna t ($s \leq t$):

$$\hat{EX}_s = z(d) \cdot \frac{X_s(t)}{\hat{F}(d)} + (1-z(d)) \cdot P_s.$$

Tässä P_s on jokin (subjektiivinen) arvio vuoden s riskimaksutulosta (vastaa siis lopullisen korvausmenon X_s arviota) ja $z(d)$ sovittu kerroin. Kerroin vastaa muodollisesti credibility-kerrointa (vrt. kohta V.3.1.) ja valitaan siten, että $0 \leq z(d) \downarrow 0$, kun $\hat{F}(d) \downarrow 0$ ja $z(d) \uparrow 1$, kun $\hat{F}(d) \uparrow 1$.

Jos valitaan $z(d) = \hat{F}(d)$ päädytään Hovisen (Hovinen [15]) esittämään korvausvastuumalliin. Tällöin

$\hat{EX}_s = X_s(t) + (1 - \hat{F}(d)) \cdot P_s$, josta saadaan korvausvastuiksi

$$\begin{aligned} K_s(t) &= (1 - \hat{F}(d)) \cdot \hat{EX}_s \\ &= (1 - \hat{F}(d)) \cdot X_s(t) + (1 - \hat{F}(d))^2 \cdot P_s. \end{aligned}$$

Kuvattu menettely on laajalti käytössä jälleenvakuutuksessa missä luotettavaa ja vertailukelpoista tilastoaineistoa ei useinkaan ole käytettävissä. Riskimaksutulo P_s voidaan tällöin perustaa cedentin ilmoitukseen sopimusvuoden maksutulosta (ns. EPI-ilmoitus; Estimated Premium Income) ja sopimuksen kehittyessä siitä saatavaan maksutuloksi tarkentuvaan vakuutusmaksukertymään.

VI.3. Chain-ladder-menetelmä

VI.3.1. Malli ja ennustaminen

Kyseessä on ehkä kuuluisin korvausvastuun määäämismenetelmä. Menetelmästä on useita eri versioita ja alunperin se on esitetty ilman minkäänlaista todennäköisyyslaskennallista mallia. Chain-ladder-menetelmän taustalla voi nähdä oletuksen ($t > s$)

$$\begin{aligned} E[X_s(t) | X_s(t-1)] &= \lambda_{t-s+1} \cdot X_s(t-1) \\ &= \lambda_d \cdot X_s(t-1) , \end{aligned}$$

missä tekijä λ_d ($d=t-s+1 \geq 2$) riippuu ainoastaan korvausten suoritus- ja sattumisvuoden välisestä erotuksesta. Tekijää kutsutaan chain-ladder-kertoimeksi tai "viivekertoimeksi" (delay-factor). Osoittautuu hyödylliseksi sopia, että $\lambda_1=1$. Tällainen laajennus ($d=1$) on mielekäs, koska $E[X_s(s) | X_s(s)] = 1 \cdot X_s(s)$.

Oletuksen nojalla saadaan ($d \geq 2$)

$$E[X_s(t)] = \lambda_d \cdot E[X_s(t-1)] ,$$

josta

$$\lambda_d = \frac{E[X_s(t)]}{E[X_s(t-1)]} = \frac{F(d)}{F(d-1)} , \quad (1)$$

missä on käytetty kohdan V.3. mukaista (sattumisvuosittain yhteistä) selviämisyakaumaa ($F(d)$; $d \geq 1$). Jos chain-ladder-kertoimet (λ_d ; $d \geq 2$) tunnetaan niin selviämisyakauma siltä osin kun $d \geq 2$ saadaan siis yhtälöstä

$$\begin{aligned} F(d) &= \lambda_d \cdot F(d-1) \\ &= \prod_{k=2}^d \lambda_k \cdot F(1) . \end{aligned}$$

Jos käytettävissä on chain-ladder-kertoimet $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_K$ ($K \geq 2$), niin saadaan edelleen, kun $1 \leq d \leq K$

$$\begin{aligned}
 F(d) &= \prod_{k=1}^d \lambda_k \cdot F(1) \\
 &= \prod_{k=1}^d \lambda_k \cdot \frac{F(K)}{\prod_{k=1}^K \lambda_k} \\
 &= \frac{\prod_{k=1}^d \lambda_k}{\prod_{k=1}^K \lambda_k} \cdot F(K) .
 \end{aligned} \tag{2}$$

Jos run-off-kolmio kattaa kaikki ne vuodet jolloin korvausten voi olettaa tulevan maksetuksi, niin $F(K)=1$. Usein run-off-kolmio kuitenkin käsittää vanhimman sattumisvuoden kohdalla vain osan niistä vuosista, joiden aikana korvaukset selviävät, jolloin $F(K)<1$ ja $1-F(K) = \sum_{d>K} f(d)$ joudutaan arvioimaan erikseen.

Jos tarkastellaan maksettujen korvausten $C_s(u)$ havaintoaineistoa $\{c_s(u)\}_{s,u=1}^K$, niin seuraavat kolme chain-ladder-mallia kuvaavat eri versiot a-c voidaan osoittaa yhtäpitäviksi (Verall [16]), kun $d=1,2,\dots,K$ ja $s=1,2,\dots,K$.

$$a) \quad E[X_s(s+d-1)] = \lambda_d \cdot x_s(s+d-2) \quad (d \geq 2) .$$

$$b) \quad E[C_s(s+d-1)] = a(d) \cdot b_s \quad (d \geq 1) ,$$

missä

$$\left\{ \begin{aligned} a(1) &= \frac{1}{\prod_{k=2}^K \lambda_k} \\ a(d) &= \frac{\lambda_d^{-1}}{\prod_{k=d}^K \lambda_k} \\ b_s &= x_s(s+K-1) . \end{aligned} \right. \quad (d \geq 2)$$

$$c) \quad E[\log C_s(s+d-1)] = \mu + \alpha_s + \beta_d \quad (d \geq 1),$$

missä $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ ja mallin b parametreiksi palautettuna

$$\left\{ \begin{array}{l} a(d) = \frac{e^{\beta_d}}{\sum_{k=1}^K e^{\beta_k}} \quad (d \geq 1) \\ b_s = e^{\mu + \alpha_s} \cdot \sum_{k=1}^K e^{\beta_k} \end{array} \right.$$

Malli a vastaa perinteistä chain-ladder-esitysmuotoa, malli b on kohdan V.2. mukainen sattumis/suoritusvuosimalli (2) ($a(d) = F(d) - F(d-1)$, jos $F(K) = 1$) ja vihdoin malli c johdtaa varianssianalyysiin (normeeratulle suureelle $\tilde{C}_s(s+d-1)$ esitettynä):

$$\log \tilde{C}_s(s+d-1) = \mu + \alpha_s + \beta_d + \epsilon_{s,d},$$

missä satunnaismuuttujat $\epsilon_{s,d} \sim N(0, \sigma^2)$ oletetaan riippumattomiksi, jokaisella $s, d = 1, 2, \dots, K$.

Varianssianalyysi-mallilla on sikäli tärkeä merkitys, että se tarjoaa mahdollisuuden chain-ladder-menetelmän perinteisen piste-estimoinnin lisäksi luottamusväli-estimointiin. Tällaisten ns. log-lineaaristen mallien estimointia ja niiden tuottamia ennusteita ovat viime vuosina tutkineet ainakin Verall ([17]) ja Renschaw ([18]).

Jos run-off-kolmiota $\{c_s(u)\}_{s=1}^K$ ($u \leq t$) merkitään Δ_K , niin mallia a vastaavan chain-ladder-menetelmän mukaiseksi maksamatta olevien korvausten $W_s(t)$ harhattomaksi ennusteeksi saadaan (korvaukset oletetaan sattumisvuosittain riippumattomiksi)

$$\begin{aligned}
E[W_S(t) | \Delta_K] &= E[X_S | \Delta_K] - E[X_S(t) | \Delta_K] \\
&= \left(\prod_{k=d+1}^K \lambda_k \right) \cdot x_S(t) - x_S(t) \\
&= \left(\prod_{k=d+1}^K \lambda_k^{-1} \right) \cdot x_S(t) .
\end{aligned}$$

Koska kaavan (1) mukaan

$$\lambda_d = \frac{F(d)}{F(d-1)},$$

niin

$$\begin{aligned}
E[W_S(t) | \Delta_K] &= \left(\prod_{k=d+1}^K \lambda_k^{-1} \right) \cdot x_S(t) \\
&= \left(\frac{F(K)}{F(d)} - 1 \right) \cdot x_S(t) \\
&= \frac{F(K) - F(d)}{F(d)} \cdot x_S(t) .
\end{aligned}$$

Jos $F(K)=1$ ja kohdan V.3.1. credibility-ennusteessa $\hat{E}[W_S(t) | X_S(t)]$ asetetaan parametri $\beta=0$, niin chain-ladder-ennuste on sama kuin credibility-ennuste.

VI.3.2. Estimointi ja esimerkki

Chain-ladder-kertoimelle käytetään perinteisesti luontevaa estimaattia

$$\hat{\lambda}_d = \frac{\sum_{s \leq t-d+1} x_S(s+d-1)}{\sum_{s \leq t-d+1} x_S(s+d-2)} \quad (d \geq 2) .$$

Estimaatissa kumulatiivisen run-off-kolmion $\{x_S(u)\}_{s=1}^K (u \leq t)$ "sarake $s+d-1$ jaetaan edellisellä sarakkeella $s+d-2$ ". Sarakkeisiin voidaan kuitenkin hyväksyä ainoastaan ne satumisvuodet, joista kummassakin sarakkeessa on havainto ($s+d-1 \leq t$).

Vleisemmin chain-ladder-kertoimen estimointia voi tarkastella painotettuna keskiarvona

$$\hat{\lambda}_d = \frac{\sum_{s \leq t-d+1} w_{s,d} \cdot \hat{\lambda}_{s,d}}{\sum_{s \leq t-d+1} w_{s,d}} \quad (d \geq 2)$$

missä painot $w_{s,d}$ valitaan erikseen ja $\hat{\lambda}_{s,d} = x_s(s+d-1)/x_s(s+d-2)$.

Perinteinen estimaatti saadaan tällöin valitsemalla $w_{s,d} = x_s(s+d-2)$.

Chain-ladder-menetelmän keskeistä oletusta, jonka mukaan kerroin λ_d ei riipu sattumisvuodesta, voi arvioida tarkastelemalla kertoimia $\hat{\lambda}_{s,d}$ sattumisvuosittain. Jos oletus on oikea, niin kertoimissa $\hat{\lambda}_{s,d}$ ei kiinteällä d saa ilmetä trendiä sattumisvuoden s suhteen. Jos trendiä ilmenee, niin se voidaan ottaa erikseen huomioon.

Lineaarisen trendin tapauksessa esim. sitä voidaan arvioida sovittamalla kuhunkin sarakkeeseen ($\hat{\lambda}_{s,d}$; $1 \leq s \leq t-d+1$) pienimmän neliösumman suora. Kahden viimeisen sarakkeen ($d=K-1, K$) kohdalla valitaan tällöin esim. $\frac{1}{2} \cdot (\hat{\lambda}_{1,K-1} + \hat{\lambda}_{2,K-1})$ ja $\hat{\lambda}_{1,K}$ (vrt. esim. Nationale Nederlanden [19]).

Samalla tavoin kuin kohdan V.3.3. estimoinnissa run-off-kolmion "koillisnurkka" muodostaa havaintojen vähyyden vuoksi ongelman. Niin ikään jos run-off-kolmion vanhimmatkaan sattumisvuodet eivät ole vielä korvauskehitykseltään lopullisia, niin niiden lopullinen korvausmeno joudutaan tilanteen mukaan arvioimaan erikseen. Tällöin apuna voidaan käyttää mahdollisia vahinkokohtaisia varauksia.

Esimerkki

Oheinen run-off-kolmio kuvaa erään suomalaisen vakuutusyhtiön property-tyyppisen ulkomailta vastaanotetun jälleenvakuutuksen korvaustilityksiä (1981-86). Luvut on muutettu Suomen markoiksi valuutoittain ostokurssiin per 31.12.1986 (1.000 mk).

1 933	16 477	6 794	3 461	988	889
4 018	23 460	11 743	3 271	2 164	
3 956	47 854	24 502	6 749		
4 451	26 558	10 068			
5 514	29 428				
5 460					

Lisäksi cedenttien ilmoittamien vahinkokohtaisten varausten (outstanding claims: O/S) perusteella arvioidaan, että kantavuodelta¹ 1981 tulee korvauksia maksettavaksi vielä arviolta 915 000 mk.

Kantavuositain chain-ladder-kertoimiksi $\hat{\lambda}_{s,d}$ saadaan:

	$\hat{\lambda}_{s,2}$	$\hat{\lambda}_{s,3}$	$\hat{\lambda}_{s,4}$	$\hat{\lambda}_{s,5}$	$\hat{\lambda}_{s,6}$
	9,52	1,37	1,14	1,04	1,03
	6,84	1,43	1,08	1,05	
	13,10	1,47	1,09		
	6,97	1,32			
	6,34				
$\hat{\lambda}_d =$	8,2352	1,4126	1,0958	1,0443	1,0280

Kertoimissa ei ole havaittavissa kantavuositista trendiä. Sen sijaan kantavuoteen 1983 kohdistuvat tilitykset ovat poikkeuksellisen suuria verrattuna muihin mikä näkyy isona chain-ladder-kertoimena (13,10). Tämä johtuu erään poikkeuksellisen ison vahingon korvaustilityksestä, jonka sattumaisvaikutus itse korvausten selviämiseen tulee ottaa erikseen huomioon. Korvataankin ko. kerroin uudella kertoimella, joka on sen ja ilman tätä kantavuotta lasketun chain-ladder-kertoimen $\hat{\lambda}_2$ aritmeettinen keskiarvo (= 10,06) ja lasketaan (painotettu keskiarvo) $\hat{\lambda}_2$ uudestaan.

¹ Jälleenvakuutuksessa sattumisvuoden sijasta puhutaan yleensä kantavuodesta, joka karkeasti ottaen tarkoittaa vuotta jolloin ko. sopimuskausi on alkanut.

Näin saadaan ($\lambda_1=1$):

d =	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{\lambda}_d$	1,0000	7,6306	1,4126	1,0958	1,0443	1,0280	1,0300

$\hat{\lambda}_7$ perustuu cedenttien ilmoituksen mukaisiin varauksiin ja kuvaa kehitystä kantavuoden 1981 lopulliseksi korvausmenoksi suhteessa vuoden 1986 lopussa kertyneisiin korvauksiin (30 482).

Selviämisjakauman $F(t)$ "chain-ladder-estimaatiksi" saadaan nyt kohdan VI.3.1. kaavan (2) perusteella, koska $F(7)=1$:

d	=	1	2	3	4	5	6	7
$\prod_{k=1}^d \hat{\lambda}_k$	=	1,0000	7,6306	10,7790	11,8116	12,3349	12,6803	13,0607
$\hat{F}(d)$	=	0,077	0,584	0,825	0,904	0,944	0,971	1,000

Estimoidaan seuraavaksi lopullisen korvausmenon odotusarvot $EX_{81}-EX_{86}$ ja korvausvastuut $K_{81}(86)-K_{86}(86)$. Estimointi suoritetaan kohdassa VI.2. esitetyn Hovisen mallin mukaisesti:

$$\bigwedge_{EX_S} = X_S(t) + (1-\hat{F}(d)) \cdot P_S.$$

$$K_S^{(1)}(t) = (1-\hat{F}(d)) \cdot X_S(t) + (1-\hat{F}(d))^2 \cdot P_S.$$

Tiedossa on yhtiön oma arvio kantavuosien 1981-86 lopullisista maksutuloista B_S sekä näkemys siitä, että keskimääräinen odotettu vahinkosuhte tässä liikkeessä on = 80 %. Tällöin saadaan seuraava yhteenveto tuloksista ($P_S=0,8B_S$):

s =	81	82	83	84	85	86
$P_s =$	31 968	44 269	52 152	56 913	67 122	80 249
$x_s(86) =$	30 482	44 656	83 061	41 077	34 942	5 460
$\hat{F}(d) =$	0,971	0,944	0,904	0,825	0,584	0,077
$\hat{EX}_s =$	31 409	47 135	88 068	51 037	62 864	79 530
$K_s^{(1)}(86) =$	943	2 839	8 827	9 237	26 515	72 945

Kantavuosien 1981-86 keskimääräiseksi vahinkosuhteeksi saadaan nyt

$$\hat{\bar{m}} = \frac{\sum_s \hat{EX}_s}{\sum_s B_s} \approx 87 \, \%.$$

Sovelletaan tämän esimerkin run-off-kolmioon nyt kohdassa V.3.2. esitettyä selviämisyajakauman $f(d)$ ja keskimääräisen vahinkosuhteen $\bar{m}$ estimointia. Valitaan estimoinnissa käytetyiksi painoiksi $w_s = e_s r_s = B_s$ eli kantavuosittaiset maksutulot.

Maksutulolla tapahtuvaan korvausten normeeraukseen tulee estimoitaessa suhtautua varovasti, koska maksutason esim. kilpailusta johtuvat muutokset vaikuttavat normeerattuihin suureisiin aiheuttaen kantavuositaisen vertailun vaikeutumisen.

Kantavuositain osamääräksi $c_s(s+d-1)/B_s$ ja vastaavaksi selviämisyajakauman $f(d)$ estimaatiksi saadaan

	0,05	0,41	0,17	0,09	0,03	0,02
	0,07	0,42	0,21	0,06	0,04	
	0,06	0,73	0,38	0,10		
	0,06	0,37	0,14			
	0,07	0,35				
	0,05					
$\hat{f}(d) =$	0,0609	0,4557	0,2293	0,0840	0,0331	0,020

Nytkään ei voi havaita varsinaista kantavuositistaista trendikehitystä, mutta sen sijaan kantavuoteen 1983 kohdistuneet korvaustilitykset ovat ainakin vuosina 1984 ja 1985 poikkeuksellisen isoja suhteessa maksutuloon (0,7341 ja 0,3758) verrattuna muihin kantavuosiin. Kuten chain-ladder-menetelmän tapauksessa korvataan ne uusilla suhteilla, jotka ovat niiden ja ilman niitä laskettujen vastaavien keskimääräisten suhteiden aritmeettisia keskiarvoja (0,4193 ja 0,2738). Jos vielä otetaan huomioon vahinkokokoh-
taiset varaukset sellaisenaan, niin saadaan $\hat{f}(7)\bar{m} = 915/B_{81} = 915/39960 = 0,0229$.

Tällöin saadaan:

$d =$	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{f}(d)\bar{m} =$	0,0609	0,3906	0,2006	0,0840	0,0331	0,0207	0,0229
$\hat{f}(d) =$	0,075	0,480	0,247	0,103	0,041	0,026	0,028
$\hat{F}(d) =$	0,075	0,555	0,802	0,905	0,946	0,972	1,000

$$\hat{\bar{m}} = 0,8128 \text{ } (\approx 81 \text{ } \%)$$

Jos verrataan tätä selviämisyjakautta $\hat{F}(d)$ vastaavaan chain-ladder-menetelmällä edellä saatuun selviämisyjakautaan, niin nähdään niiden olevan hyvin lähellä toisiaan. Niin ikään saadut vahinkosuhteet ovat varsin lähellä toisiaan (87 % ja 81 %).

Määritetään nyt jälkimmäistä estimointia vastaava kohdan VI.2. mukainen korvausvastuun odotusarvoennusta $K_S^{(2)}(t) = (1-\hat{F}(d)) \hat{\bar{m}} \cdot B_S$ sekä vahinkohistoriaan perustuva ennuste $K_S^{(3)}(t) = (1-\hat{F}(d))/\hat{F}(d) \cdot x_S(t)$:

s =	81	82	83	84	85	86
$\hat{F}(d) =$	0,972	0,946	0,905	0,802	0,555	0,075
$B_s =$	39 960	55 337	65 191	71 142	83 902	100 311
$x_s(86) =$	30 482	44 656	83 061	41 077	34 942	5 460
$K_s^{(2)}(86) =$	906	2 420	5 016	11 410	30 243	75 158
$K_s^{(3)}(86) =$	878	2 549	8 720	10 141	28 017	67 339

Esitetään vielä yhteenvetona saadut korvausvastuut suhteessa kantavuositaiseen maksutuloon (%):

s	$K_s^{(1)}(86)$	$K_s^{(2)}(86)$	$K_s^{(3)}(86)$
1981	2,4	2,2	2,2
82	5,1	4,4	4,6
83	13,5	7,7	13,4
84	13,0	16,0	14,3
85	31,6	36,1	33,4
86	72,7	74,9	67,1

Korvausvastuut vastaavat siis varsin hyvin toisiaan. Merkittävin ero on muutenkin poikkeukselliseksi todetussa kantavuodessa 1983, jossa $K_{83}^{(2)}(86)$ on muita pienempi. Tämä johtuu siitä, ettei poikkeuksellisen korkealla tasolla oleva korvausmenokehitys vaikuta tähän korvausvastuuseen laisinkaan.

VI.4. De-Vylderin menetelmä

Menetelmän on alunpitäen esittänyt belgialainen De-Vylder (vrt. Nationale Nederlanden [19]). Menetelmän tässä esitetty versio perustuu kohdan V.2. mukaiseen normeeratulle satunnaismuuttujalle $\tilde{C}_s(u)$ esitettyyn sattumis/suoritusvuosimalliin (2)

$$E[\tilde{C}_s(u)] = a(u-s+1) \cdot b_s.$$

Tekijöitä $a(d)$ ja b_s ($d=u-s+1$) estimoidaan minimoimalla neliösumma

$$\sum_{s,d} w_s [\tilde{C}_s(s+d-1) - a(d) \cdot b_s]^2,$$

missä painot w_s valitaan erikseen. Derivoimalla erikseen parametrien $a(d)$ ja b_s suhteen ratkaisuksi saadaan

$$\begin{cases} \hat{a}(d) = \frac{\sum_s w_s \cdot \tilde{C}_s(s+d-1) \cdot b_s}{\sum_s w_s \cdot b_s^2} \\ \hat{b}_s = \frac{\sum_d \tilde{C}_s(s+d-1) \cdot a(d)}{\sum_d a(d)^2} \end{cases}$$

Yhtälö ratkaistaan iteratiivisesti käyttäen esim. alkuarvoja $b_1=b_2=\dots=b_K=1$ ja $a(1)=a(2)=\dots=a(K)=1/K$, missä K on käytössä olevien suoritusvuosien lukumäärä.

Kokemuksen mukaan ratkaisu yleensä löytyy ja konvergointi on nopeata. Koska $a(d) \cdot b_s = (a(d) \cdot c) \cdot (b_s/c)$ (missä $c>0$), niin ratkaisu voidaan skaalata sopivasti. Jos (vrt. chain-ladder-menetelmä edellä kohdassa VI.3.) selviämisjakaumalle $F(K) \leq 1$, niin skaalattu ratkaisu voidaan valita esim. ehdosta $\sum_{d \geq 1} a(d) = F(K)$.

Esimerkki

Edellä kohdassa VI.3.2. olevan esimerkin tapauksessa arvioituna $\hat{F}(K) \approx 0,97 < 1$, jolloin De-Vylderin menetelmää ($w_s = e_s r_s = B_s$) run-off-kolmioon (sellaisenaan) soveltamalla ratkaisuksi saadaan ($\hat{f}(d) = 0,97 \cdot \hat{a}(d)$, kun $d \leq 6$):

$s, d =$	1	2	3	4	5	6	7
$\hat{b}_s =$	0,761	0,808	1,393	0,679	0,666	0,823	-
$\hat{a}(d) =$	0,067	0,531	0,255	0,079	0,042	0,027	-
$\hat{f}(d) =$	0,064	0,515	0,247	0,077	0,041	0,026	0,030
$\hat{F}(d) =$	0,064	0,579	0,826	0,903	0,944	0,970	1,000

Selviämisjakauma $\hat{F}(d)$ vastaa nytkin varsin hyvin kohdan VI.3.2 esimerkissä estimoitua selviämisjakaumaa. Kantavuoden 1983 ($s=3$) korvausten korkea taso näkyy nyt kertoimessa b_3 , joka on selvästi muita kantavuosien vahinkotasoa kuvaavia vastaavia kertoimia suurempi.

VI.5. Tunnettujen vahinkojen korvausvastuu ja vahinkokohtainen varaus

Tarkastellaan vuonna s sattuneita vuoden t lopussa tunnettuja vahinkoja. Hetkeen t mennessä kertyneen historian H_t oletetaan kohdan III.1. mukaisesti sisältävän korvausvastuun määrittämisen kannalta relevantin tiedon hetkellä t .

Tällöin ($s \leq t$)

$$\begin{aligned} E[W_s^+(t) | H_t] &= E \left[\sum_{i=1}^{N_s} I\{R_i \leq t\} V_i(t) | H_t \right] \\ &= E \left[\sum_{j=1}^{N_s(t)} V_j(t) | H_t \right] \\ &= \sum_{j=1}^{N_s(t)} E[V_j(t) | H_t], \end{aligned}$$

mikä johtuu siitä, että tapahtumista $\{R_i \leq t\}$ historiasta H_t määräytyvinä tulee valituksi ne vahingot i joille $I\{R_i \leq t\}=1$: $j=1, 2, \dots, N_s(t)$.

Näin ollen tunnettujen vahinkojen korvausvastuu voidaan määrätä vahinkokohtaisesti: $E[V_j(t) | H_t]$, $j=1, 2, \dots, N_s(t)$.

Korvausvastuiksi tilivuonna t saadaan tällöin

$$K_s^+(t) = \sum_{j=1}^{N_s(t)} \hat{V}_j(t),$$

missä $\hat{V}_j(t)$ on vahinkokohtainen korvausvastuu eli ns. vahinkokohtainen varaus tilivuonna t .

Vahinkokohtainen varaus mahdollistaa tiedossa olevien vahinkojen yksilöllisten ominaisuuksien huomioon ottamisen. Vahingosta riippuen voidaan tällöin päätyä hyvinkin tarkkaan maksamattoman korvauksen ennusteeseen. Esim. maksamatta oleva palovahinko, jossa vakuutusmäärä on tiedossa ja vahinko keskeisiltä osiltaan selvitetty on varattavissa varsin tarkasti. Liikennevakuutuksen työkyvyttömyyseläke on taas esimerkki, jossa vahinkokohtaista varausta ei käytännössä voi tehdä kuin kaavamaisesti tietyt vahinkokohtaiset ominaisuudet (sukupuoli, ikä, eläkkeen vuotuismäärä) huomioonottaen. Muilta osin (kuolleisuus, uudelleenavioituvuus, urakehitys jne.) joudutaan tyytymään keskimääräisarvioihin.

Eräs hyödyllinen keino on vahinkojen seuraamusluokittelu, jolloin tunnettujen vahinkojen tiedossa olevat ominaisuudet otetaan huomioon vahingon sovittujen kriteerien mukaisen luokan määrittämiseksi. Yksinkertainen esimerkki on liikennevahinkojen jakaminen kahteen luokkaan sen perusteella onko tiedossa oleva vahinko mitä ilmeisemmin ainoastaan peltikolari vai johtaako vahinko myös henkilökorvaukseen.

Jos tunnettujen vahinkojen yksilöllisiä ominaisuuksia ei jostain syystä hyödynnetä, niin kunkin vahingon maksamattomasta korvausta voidaan arvioida vahinkojen $j=1,2,\dots, N_S(t)$ yhteisenä odotusarvona $E[V_S(t) | R_S \leq t]$, jolloin

$$K_S^+(t) = N_S(t) \cdot E[V_S(t) | R_S \leq t].$$

Tämä korvausvastuu eroaa kohdan VI.2. odotusarvoennusteen mukaisesta korvausvastuusta $(1-H(d)) \cdot E[X_S^-(t)] = E[N_S(t)] \cdot E[V_S(t) | R_S \leq t]$ ainoastaan siten, että vuoden t lopussa havaittujen vahinkojen lukumäärän odotusarvon tilalla on nyt vastaava havaittu suure. Tämän seurauksena ennusteen varianssi on otettava käytännön korvausperusteessa huomioon.

Odotusarvon $E[V_S(t) | R_S \leq t]$ estimointi joudutaan suorit-

tamaan käytettävissä olevaa tilastoaineistoa hyväksikäyttäen tai arvioimaan muuten.

Kun tunnettujen, korvausta odottavien vahinkojen lukumäärä on iso, niin yleensä käytetään odotusarvoennusteen mukaista korvausvastuuta. Tämä johtuu siitä että tällöin vahinkokohmainen käsittely muodostuisi työlääksi eikä keskimäärin johtaisi tarkempaan ennusteeseen. Tällöinkin jos tiedossa oleva vahinko on arvioitavissa sovittua rajaa suuremmaksi niin vahinko varataan vahinkokohtaisesti tämän rajan ylittävältä osaltaan (tai kokonaan). Vahinkokohtainen varausraja voi olla joko rahamääräinen tai vakuutuslajin volyyymiin sidottu (esim. $0,05P_t$, missä P_t on maksutulo tilivuonna t). Esim. liikennevakuutuksen korvausvastuun ns. normaaliperusteissa tilivuonna sattuneet vahingot varataan vahinkokohtaisesti vain siltä osin kun vahinko ylittää 400 000 mk. Autovakuutuksessa vahingot taas varataan vahinkokohtaisesti, jos ne ylittävät rajan $0,05P_t$.

Keskeisimmän osan suomalaisten vahinkovakuutusyhtiöiden vahinkokohtaisista varauksista muodostavat liikennevakuutuksen ja lakisääteisen tapaturmavakuutuksen työkyvyttömyystapauksista maksettavaksi tulevan ansionmenetyskorvauksen varaukset. Kun varaukseen vaikuttavien seikkojen voi katsoa vakiintuneen, puhutaan lopullisesta eläkepääomasta. Lopullisten eläkepääomien muodostamaa korvausvastuuta kutsutaan (historiallisista syistä) elinkorkorahastoksi.

VI.6. Tuntemattomien vahinkojen lukumäärä ja korvausvastuu

Jos vuonna s sattuneiden tilivuonna t tuntemattomien vahinkojen lukumäärä $U_s(t) = N_s - N_s(t)$ halutaan ottaa huomioon korvausvastuun määrittämisessä, niin kohdan VI.2 odotusarvoennustetta voidaan tarkastella muodossa

$$K_s^-(t) = E[U_s(t)] \cdot E[Z_s | R_s > t].$$

Sattumisvuoden s vahinkojen yhteinen odotusarvo $E[Z_s | R_s > t]$ estimoidaan tällöin vanhojen sattumisvuosien vahinkoaineistosta tai arvioidaan muuten. Tuntemattomien vahinkojen lukumäärän odotusarvon estimoinnissa voidaan käyttää esitystä $E[U_s(t)] = P\{R_s > t\} \cdot EN_s$ tai luvun II mukaista havaittujen vahinkojen lukumäärään $N_s(t)$ perustuvaa credibilityestimaattoria $\hat{E}[U_s(t) | N_s(t)]$. Credibility-kertoimen parametrien estimoinnissa voidaan niin ikään soveltaa kohdan V.3.2. tuloksia sellaisenaan valitsemalla $Z=1$.

VI.7. Regressiomallit

Viime vuosina regressiomallien käyttö korvausvastuun ennustamisessa on ollut lisääntymässä. Paljon huomiota on saanut Zehnwirthin kehittämä ja mikro-ohjelmistonakin markkinoima korvausvastuun ennustusjärjestelmä (Interactive Claims Reserving Forecasting System, [20]).

Mallin esittelemiseksi tarkastellaan tässä korvauksia $X_s(t)$. Samalla tavalla voitaisiin luonnollisesti tarkastella korvauksia $X_s^-(t)$ tai $X_s(t; t+l)$.

Tällöin, kun $u \geq s$ ja $d = u - s + 1 \geq 1$ voidaan normeerattu $\tilde{C}_s(u) = \tilde{X}_s(u) - \tilde{X}_s(u-1) > 0$ esittää muodossa (vrt. kohta V.2.)

$$E[\tilde{C}_s(u)] = a_s(d) \cdot b_s.$$

Laajennetaan esitys regressiomalliksi, missä d on selittävä (jatkuva) muuttuja, $a'_s(d) = \log a_s(d)$ ja $b'_s = \log b_s$:

$$\log \tilde{C}_s(u) = b'_s + a'_s(d) + \epsilon_s(d).$$

Lisäksi oletetaan, että $\epsilon_s(d) \sim N(0, \sigma^2)$ ovat riippumattomia jokaisella $s, d \geq 1$. Kyseessä on lognormaali-regressio, jossa Zehnwirth käyttää regressiofunktia

$$a'_s(d) = \beta_s \cdot \log d + \gamma_s \cdot (d-1).$$

Huomattakoon, että esitysmuoto tässä poikkeaa Zehnwirthin vastaavasta, jossa $d \geq 0$, kun taas tässä $d \geq 1$. Regressiofunktio kokonaisuudessaan ennen logaritmin ottamista voidaan esittää muodossa

$$y_s(d) = b_s \cdot d^{\beta_s} \cdot e^{\gamma_s(d-1)} \quad (d \geq 1).$$

Tätä esitystä kutsutaan run-off-käyräksi (tai run-off-jakaumaksi), ja se muodostaa parametrien b_s , β_s ja γ_s eri arvoilla laajan perheen Gamma-jakauman tiheysfunktion muotoa vastaavia run-off-käyriä. Run-off-käyrien määrittelyssä on oleellista, että tasoparametrin b_s lisäksi myös niiden muoto voi riippua parametrien β_s ja γ_s kautta sattumisvuodesta s . Luvussa V tämä tarkoittaisi että selviämisyajakaumat $f_s(d)$ riippuvat sattumisvuodesta s eivätkä ole sattumisvuosittain samoja. Jos tämä riippuvuus mallitetaan lineaarisesti niin kyseessä on ns. dynaaminen regressio (lineaarinen malli), joka voidaan saattaa ns. Kalman-mallin muotoon (vrt. Zehnwirth [20] ja De Jong, Zehnwirth [21]).

Regressiomallien keskeisenä etuna perinteisiin malleihin verrattuna on niiden joustava käyttö ja että ne ainakin periaatteessa mahdollistavat myös ennusteiden luottamusvälien arvioinnin.

VI.8. Peruste-esimerkki

Käytettävissä on vastuuvakuutuksen maksettujen korvausten ($c_s(u)$) run-off-kolmio vuosilta 1980-89. Koska vastuuvakuutuksessa voi sattua hyvin isojaakin vahinkoja, niin korvausaineistossa saattaa olla tarve katkaista isoja vahinkoja ja käsitellä näin syntyviä ylitteitä erikseen. Korvausaineisto käsittää tässä n. 5000-7000 vahinkoa sattumisvuosittain ja on hyväksytty sellaisenaan.

Normeerataan korvaukset sattumisvuosittain maksutulolla

(P_s) jakamalla (vrt. kohta V.1.).

Tällöin saadaan oheinen normeerattujen korvausten run-off-kolmio:

0.2324	0.2401	0.0688	0.0416	0.0362	0.0169	0.0238	0.0060	0.0044	0.0005
0.3012	0.2747	0.0871	0.0480	0.0327	0.0245	0.0056	0.0072	0.0042	
0.2783	0.2585	0.0723	0.0341	0.0161	0.0237	0.0258	0.0032		
0.2714	0.3093	0.0890	0.0344	0.0287	0.0248	0.0302			
0.3223	0.3035	0.0956	0.0577	0.0364	0.0192				
0.2376	0.2798	0.0569	0.0760	0.0411					
0.1965	0.1698	0.0507	0.0216						
0.2243	0.2374	0.0551							
0.1826	0.1566								
0.1318									

Vaikka normeeratut korvaukset vaihtelevatkin sattumisvuosittain varsin paljon, niin varsinaista trendiä ei ole havaittavissa.

Käytetäänkin nyt kohdan V.3.2. mukaista selviämisyajakauman $f(d)$ ja vahinkosuhteen $\bar{m}$ estimointia, kun painoksi (w_s) valitaan maksutulo ($w_s = e_s r_s = P_s$).

Tällöin saadaan:

d	$\hat{f(d)\bar{m}}$
1	0,2127
2	0,2286
3	0,0665
4	0,0441
5	0,0331
6	0,0218
7	0,0221
8	0,0054
9	0,0043
10	0,0005

Jätetään ainoastaan yhteen sattumisvuoteen (1980) perustuva estimaatti $\hat{f}(10)\bar{m}=0,0005$ pois ja sovitetaan aikasarjaan $(\log f(d)\bar{m}; 3 \leq d \leq 9)$ pienimmän neliösumman suora $y(d)=\log A+Bd$, jolloin saadaan $A=0,3047$, $B=-0,4579$. Näin saadaan:

d	$\hat{F}(d)$	$\hat{\bar{m}} = 0,647$
1	0,329	
2	0,682	
3	0,785	
4	0,853	
5	0,904	
10	0,992	
15	1,000	

Sovelletaan nyt saatua selviämisyjakautta sattumisvuositaisen vahinkosuhteen $(\bar{m}_s)$ arvioimiseksi. Määrätään vahinkosuhte suoraan havaittuun vahinkohistoriaan perustuen:

$$\hat{\bar{m}}_s = \frac{\tilde{x}_s(t)}{\hat{F}(t-s+1)} \quad (t=1989)$$

jolloin saadaan:

s	$\hat{\bar{m}}_s$ (%)
1980	67,6
81	79,5
82	72,6
83	81,1
84	89,1
85	76,5
86	51,4
87	65,9
88	49,7
89	40,1

Tuoreimpien sattumisvuosien (1988-89) vahinkosuhteet ovat varsin pieniä. Ne perustuvat kuitenkin 1-2 vuoden maksettuihin korvauksiin ja ovat näin ollen varsin epäluotettavia. Toisaalta on ilmeistä, että kannattavuus on maksunkorotusten myötä myös parantunut 1980-luvun puolenvälin hei-

kon kannattavuuden jälkeen. Näistä vahinkosuhteista laskettu painotettu keskiarvo on 61,7 %, mikä vastaa varsin hyvin edellä selviämisyajakauman estimoinnin yhteydessä saatua arvoa $\hat{m} = 64,7 \%$.

Jos lasketaan sattumisvuosittaisten vahinkosuhteiden $\hat{m}_s$ maksutuloilla painotettu hajonta, saadaan 0,157, jota vastaava Studentin-jakaumaan (vapausastein 10-1=9) perustuva painotetun keskiarvon (0,617) 95 %:n luottamusväli on $0,617 \pm 0,096$. Merkitään $\delta = 0,096 \approx 0,1$.

Korvausvastuuperustetta varten korjataan edellä saatua selviämisyajakaumaa $\hat{F}(d)$ siten, että estimointiin liittyvä epävarmuus otetaan huomioon (vrt. kohta I.2.1., estimoinnin turvaavusperiaate).

Määritetään korvausvastuuperusteessa käytettävä selviämisyajakauma jakamalla luottamusväliä δ vastaava lopullisen vahinkosuhteen lisäys selviämisyajakaudalle seuraavasti ($k \geq 1$):

$$\hat{f}(k) := \hat{f}(k) + \delta \cdot \frac{\hat{f}(k)}{\hat{m}}.$$

$$\begin{aligned} \text{Tällöin } \sum_{k \geq 1} \left[\hat{f}(k) + \delta \cdot \frac{\hat{f}(k)}{\hat{m}} \right] \hat{m} &= \hat{m} + \delta \\ &= 0,647 + 0,096 = 0,743. \end{aligned}$$

Kohdan VI.2. odotusarvoennusteen mukaiseksi varauskertoimiksi $a(d)$ saadaan tällöin, kun diskontataan korolla i ($v = 1/(1+i)$):

$$a(d) = \sum_{k > d} v^{k-d-\frac{1}{2}} \left[\hat{f}(k) + \delta \cdot \frac{\hat{f}(k)}{\hat{m}} \right] \quad (d \geq 1).$$

Varauskertoimia määrittäessä pyöristetään $\delta = 0,1$.

Varauskertoimiksi $a(d)$ saadaan, jos $i = 0 \%$, $4,5 \%$ ja 10% (suluissa varauskerroin suhteessa diskonttaamattomaan varauskertoimeen)

d	0 %	4,5 %	10 %
1	0,7750	0,7165 (93 %)	0,6595 (85 %)
2	0,3671	0,3318 (90 %)	0,2977 (81 %)
3	0,2485	0,2254 (91 %)	0,2030 (82 %)
4	0,1698	0,1551 (91 %)	0,1408 (83 %)
5-	0,2438	0,2238 (92 %)	0,2042 (84 %)

Kertoimet, jotka kohdistuvat tilivuonna t sattumisvuosiin $s \leq t-4$ ($d \geq 5$) on tässä laskettu yhteen olettaen, että EX_s kasvaa sattumisvuosittain s tasaisesti 10 % kun $s \leq t-4$. Tällaista menettelyä on sovellettu korvausvastuun normaali-perusteita laadittaessa. Yhtiökohtaisessa korvausvastuuperusteessa olisi luonnollisesti varauskertoimis yhdisteltäessä otettava huomioon yhtiön oman liikkeen sattumisvuositainen kasvu.

Koska korvausvastuu usein esitetään suhteessa maksutuloon, niin varauskertoimet $a(d)$ on kerrottava vielä keskimääräisellä vahinkosuhteella $\bar{m}$. Näin saatuja kertoimia $\bar{a}(d) = a(d) \cdot \bar{m}$ kutsutaan (vrt. kohta VI.2.) kollektiivivarausker-toimiksi $\bar{a}(d)$.

Tällöin saadaan, jos $i=4,5$ % ja $\bar{m}=0,65$:

$\bar{a}(1)$	$\bar{a}(2)$	$\bar{a}(3)$	$\bar{a}(4)$	$\bar{a}(5)$
0,466	0,216	0,147	0,100	0,145

Usein kollektiivivarausker-toimet halutaan kuitenkin esittää suhteessa korkeintaan kolmen tuoreimman vuoden maksu-tuloon. Yhdistetään nyt kertoimet $\bar{a}(3)$, $\bar{a}(4)$ ja $\bar{a}(5)$ käyttäen 10 %:n maksutulon kasvuoletusta, jolloin saadaan:

$\bar{a}(1)$	$\bar{a}(2)$	$\bar{a}(3)$
0,466	0,216	0,358.

Jottei korvausvastuun määrittäminen keskittyisi vanhojen sattumisvuosien osalta liikaa vuoteen $t-2$ (kerroin 0,358), niin jaetaan kertoimesta 0,358 vielä osa kertoimelle $\bar{a}(2)$

samaa 10 %:n kasvuoletusta käyttäen. Jos viimeiseksi ker-
toimeksi jätetään 0,25, niin lopulliseksi kollektiiviva-
rausperusteeksi tilivuonna t saadaan:

$$K.(t) = 0,47 P_t + 0,31 P_{t-1} + 0,25 P_{t-2}.$$

Tässä esimerkissä korvausvastuu perustuisi kaavamaisesti täysin kollektiivivaraukseen. Vastuuvakuutuksessa voi kuitenkin sattua kuten esimerkin alussa todettiin hyvinkin isoja vahinkoja (sekä markkamääräisesti että suhteessa yhtiön maksutuloon), jotka tulee tällöin varata vahinkokohtaisesti. Vahinkokohtainen varaaminen koskee yleensä vahinkoa ainakin siltä osin kun se ylittää tietyn esim. markkamääräisen rajan (vrt. kohta VI.5.). Jos raja on pieni, niin sen kollektiivivarausta pienentävä vaikutus on otettava huomioon erikseen.

L Ä H D E L U E T T E L O

- [1] BEARD R.E., PENTIKÄINEN T., PESONEN E. (1984) Risk Theory. Chapman & Hall, London.
- [2] RANTALA J. (1984) An Application of Stochastic Control Theory to Insurance Business. Acta Universitatis Tamperensis, A, 164 (Academic dissertation).
- [3] PENTIKÄINEN T., RANTALA J. (1986) Run-Off Risk as a Part of Claims Fluctuation. ASTIN Bulletin, Volume 16, No.2.
- [4] PARZEN E. (1962) Stochastic Processes. Holden Day.
- [5] KAMINSKY K.S. (1987). Prediction of IBNR claim counts by modelling the distribution of report lags. Insurance: Math & Econ. 6.
- [6] YANNAROS N. (1989) Analysing Point Processes Subjected to Random Deletions with Applications to Crimes. Department of Mathematics, Royal Institute of Technology S-10044 Stockholm.
- [7] JEWELL W.S. (1987) Predicting IBNYR events and delays I. Continuous time. Department of Industrial Engineering and Operations Research, University of California at Berkeley, Research Report.
- [8] GOOVAERTS M.J., HOOGSTAD W.J. (1987) Credibility Theory. Surveys of Actuarial Studies, No.4. Nationale-Nederlanden, Rotterdam.
- [9] SUNDT B. (1991) An Introduction to Non-Life Insurance Mathematics 2. Auflage, VVW Karlsruhe.
- [10] ROBBIN I. (1986) A Bayesian credibility formula for IBNR counts. Proceedings of the Cas. Actuarial Society Vol. LXXIII (1986), No.139-140, 129-167 (with discussion).
- [11] HESSELAGER O., WITTING T (1988). A Credibility Model with Random Fluctuation in Delay Probabilities for the Prediction of IBNR Claims. ASTIN Bulletin. Volume 18, No.1.
- [12] RHIEL R. (1985) Zur Berechnung von Erwartungswerten und Varianzen von Zufälligen Summen in der kollektiven Risikotheorie. Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik, XVII, Heft 1.
- [13] KREMER E (1984) The Burning Cost Method and Ratio Estimation. Blätter der deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik.
- [14] COOVAERTS M.J., KAAS R. VANTTEERWAARDEN A.E., BAUWELINCKX T. (1990) Effective Actuarial Methods, North-Holland.

- [15] HOVINEN E. (1981) Additive and Continuous IBNR. Presented at ASTIN Colloquium.
- [16] VERRALL R.J. Chain Ladder and Maximum Likelihood, J.I.A. 118, III.
- [17] VERRALL R.J. (1989) A State Space Representation of the Chain Ladder Linear Model, J.I.A.116, III.
- [18] RENSCHAW A.E. (1989). Chain Ladder and Interactive Modelling (Claims Reserving and GLIM), J.I.A.116, III.
- [19] NATIONALE NEDERLANDEN (1981) Loss Reserving Methods. Surveys of Actuarial Studies 1.
- [20] ZEHNWIRTH B. (1985). Interactive Claims Reserving Forecasting System. Benhar Nominees Pty Ltd, Turramurra, NSW, Australia.
- [21] DE JONG P., ZEHNWIRTH B. (1983). Claims Reserving, State Space Models and the Kalman Filter. J.I.A., 110,I.

VIIVEPARAMETRIN θ ML-ESTIMAATTI

(II.2. ML-YHTÄLÖ (9))

Vahingot sattuneet tasaisesti välillä $(0,1)$. Vahinkojen raportoitusviive $\bar{R}^*$ on $\exp(\theta)$ -jakautunut, missä $E\bar{R}^* = 1/\theta = 5$. Sadalle simuloitulle vahingolle saadaan yhteenvetona:

t	r_t	$\bar{r}$	$1/\hat{\theta}$	$F(t \hat{\theta})$	$F(t \theta)$
1	11	0,319	3,8	0,121	0,094
2	31	0,833	*)	-	0,258
3	40	1,063	2,7	0,604	0,392
4	50	1,426	3,1	0,675	0,503
5	59	1,818	3,8	0,693	0,593
6	66	2,174	4,2	0,729	0,667
7	71	2,417	4,0	0,803	0,727
8	74	2,593	3,6	0,875	0,776
9	80	3,009	4,6	0,842	0,817
10	86	3,424	5,4	0,828	0,850
∞	100	5,200	5,2	1,000	1,000

*) $1/\hat{\theta} < 0$

KORVAUSVASTUUN RAKENNEMALLIA KOSKEVISTA OLETUKSISTA (kohta IV.1.)

Oletetaan, että vahingon $Z = \sum_u Y(u)$ odotusarvot voidaan,
kun $P\{R=r\} > 0$, esittää muodossa

$$\left\{ \begin{array}{l} E[Z|R=r] = a^-(r) \cdot EZ \\ E[Z^2|R=r] = b^-(r) \cdot EZ^2 \\ E[Y(u)|R=r] = a(u;r) \cdot E[Z|R=r] \\ E[Y(u_1) \cdot Y(u_2)|R=r] = b(u_1, u_2; r) \cdot E[Z^2|R=r], \end{array} \right. \quad (\text{vrt. kohta IV.2.2.})$$

missä tekijät $a^-(r)$, $b^-(r) > 0$ ja $a(u;r)$, $b(u_1, u_2; r) \geq 0$
($u, u_1, u_2, r \geq 1$) ovat kaikille tarkasteltaville vahingoille
samoja.

Tällöin saadaan

$$\begin{aligned} E[Y(u)|R \leq u] &= \sum_{r \leq u} E[Y(u)|R=r] P\{R=r|R \leq u\} \\ &= \sum_{r \leq u} a(u;r) \cdot a^-(r) \cdot P\{R=r|R \leq u\} \cdot EZ \\ &= a(u) \cdot EZ, \end{aligned}$$

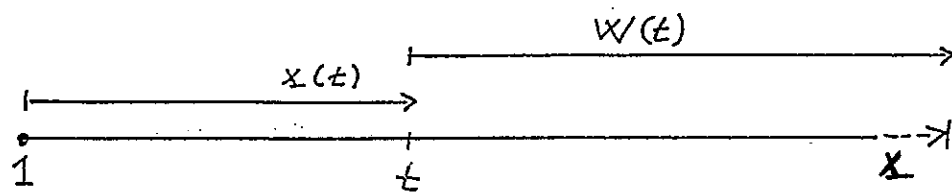
$$\text{missä } a(u) = \sum_{r \leq u} a(u;r) \cdot a^-(r) \cdot P\{R=r|R \leq u\}.$$

Vastaavasti saadaan, kun $\tilde{u} = \min(u_1, u_2)$

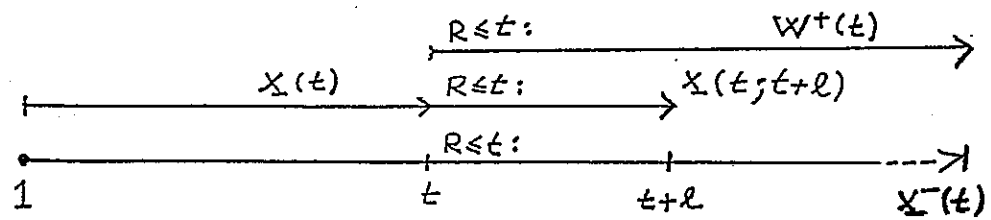
$$\begin{aligned} E[Y(u_1) \cdot Y(u_2)|R \leq \tilde{u}] &= \sum_{r \leq \tilde{u}} E[Y(u_1) \cdot Y(u_2)|R=r] P\{R=r|R \leq \tilde{u}\} \\ &= \sum_{r \leq \tilde{u}} b(u_1, u_2; r) \cdot b^-(r) \cdot P\{R=r|R \leq \tilde{u}\} \cdot EZ^2 \\ &= b(u_1, u_2) \cdot EZ^2, \end{aligned}$$

$$\text{missä } b(u_1, u_2) = \sum_{r \leq \tilde{u}} b(u_1, u_2; r) \cdot b^-(r) \cdot P\{R=r|R \leq \tilde{u}\}.$$

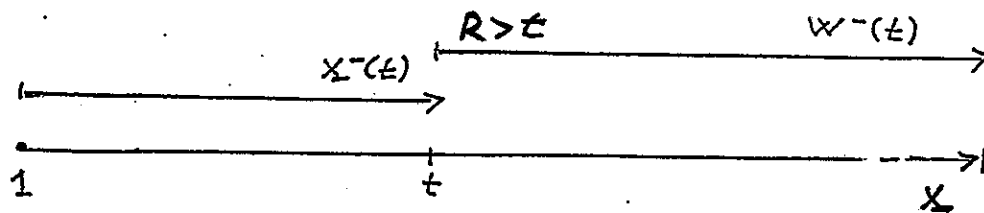
IV 2.1. / $X(t)$:



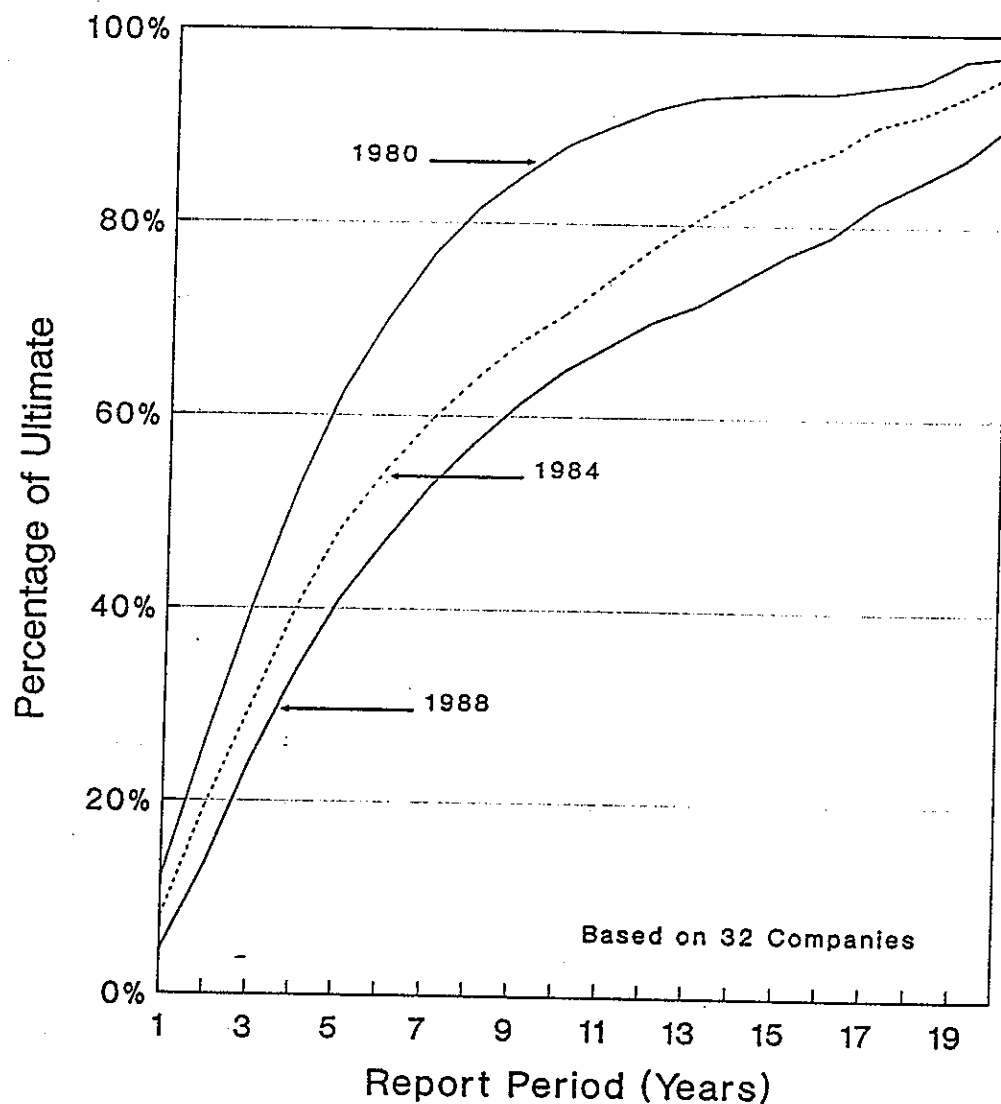
IV 2.3. / $X(t; t+l)$:



IV 2.2. / $X^-(t)$:



Historical Changes in Loss Development General Liability Excluding Asbestos



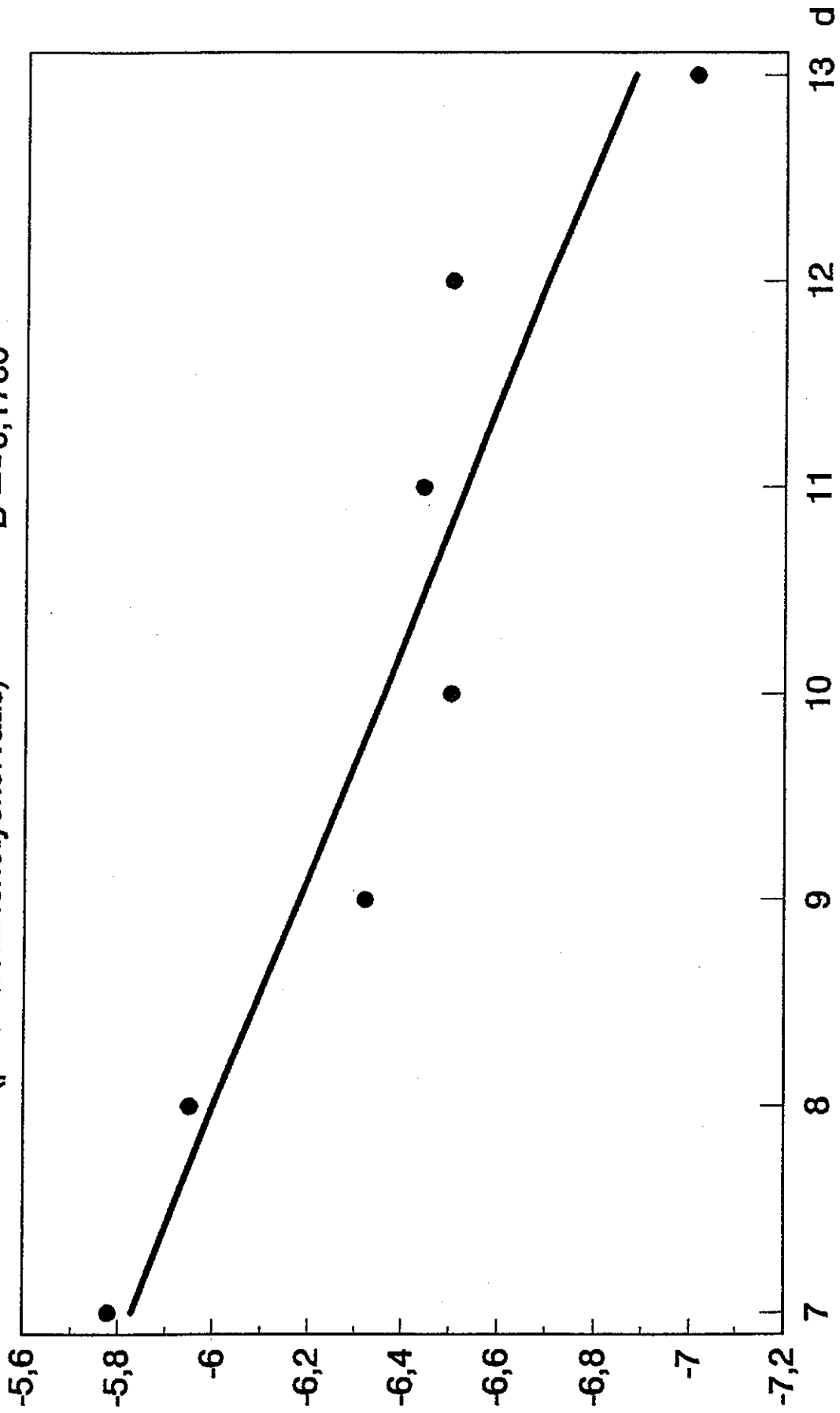
Based on combined treaty and facultative data; all patterns assume that development as of 33 years is ultimate.

Lähde: REINSURANCE ASSOCIATION OF AMERICA:
Historical loss development study
1989 Edition

LIIKENNEVAKUUTUS EKSPONENTIAALINEN TASOITUS henkilökorvaus (pl. ansionmenetyskorvaus)

$$y(d) = \log A + B \cdot d \quad (7 \leq d \leq 13)$$

A = 0,0101
B = -0,1760



LIIKENNEVAKUUTUS SELVIÄMISJAKAUMA

henkilökorvaus (pl. ansionmenetyskorvaus)

