WORKING PAPERS ISSN 0781-4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

3

Pentti Koskinen

VAHINKOMENON JAKAUMAN LASKEMINEN MONTE-CARLO MENETELMÄLLÄ (1981)

SISÄLLYSLUETTELO

1 JOHDANTO

Tämän työn tarkoituksena on tietyn vakuutuskannan vuotuisen kokonaisvahinkomenon jakauman laskeminen ns. Monte-Carlo-menetelmällä. Menetelmä on esitetty mm. oppikirjassa [1] Beard-Pentikäinen-Pesonen "Risk Theory" (s. 94 ja s. 124). Vertailun vuoksi vahinkomenon jakauma approksimoidaan myös ns. NP-menetelmällä [1] (s. 45). Vakuutuskannasta tehdään seuraavat oletukset.

1. Vakuutuskanta voidaan jakaa toisistaan riippumattomiin riskiluokkiin j, joissa kussakin on oma vahinkotiheytensä q_j. Tällöin vahinkojen odotusarvo riskiluokassa j on $n_j = q_j \times N_j$, missä N_j on vakuutettujen lukumäärä riskiluokassa j.

2. Kullakin vakuutuksella on riskisumma (osavahinkoja ei tunneta).

3. Vahinkojen lukumäärä riskiluokassa j oletetaan Poisson-jakautuneeksi parometrina n_j.

4. Vahinkotiheydet q_j huojuvat stokastisesti.

Jakauma lasketaan ensin ilman odotusarvon huojuntaa (oletus 4). Tämän jälkeen tutkitaan, kuinka huojunta vaikuttaa vahinkomenon jakaumaan.

Lopuksi tutkitaan jälleenvakuutuksen vaikutusta vahinkomenon jakaumaan.

2 LASKENTAPERUSTEET JA -MENETELMÄT

Menetelmiä sovelletaan erään eläkekassan työkyvyttömyysliikkeeseen.

2.1 Vakuutuskannan luokittelu

Laskentaa varten kullekin vakuutetulle lasketaan riskisumma,

joka on lisätavoite-eläkkeen invalidikoron pääoma-arvo eli $R = a^i \times E_{tav}$. Sen jälkeen vakuutetut jaetaan iän ja sukupuolen mukaan riskiluokkiin j. Riskiluokkien sisällä vakuutetut numeroidaan juoksevasti.

Seuraavassa on taulukko siitä, kuinka vakuutetut jakaantuvat eri riskiluokkiin j.

	N_j	
Nykyikä	M	N
- 34	11	9
35 - 39	99	18
40 - 44	230	74
45 - 49	368	145
50 - 54	396	207
55 - 59	384	213
60 - 64	151	90
yhteensä	1639	756

$\sum N_j = N^T = 2395$

Todettakoon, että riskisummat koko kannassa vaihtelevat 0:sta 91 728 mk:aan. Riskisummien jakaumissa eri luokkien välillä ei mainittavia eroja esiintynyt.

2.2 Monte-Carlo-menetelmä (yleistetty Poisson-prosessi)

Lasketaan ensin kussakin riskiluokassa j vahinkojen (eläketapausten) lukumäärän odotusarvo n_j

$$n_j = i_j N_j$$

missä i_j = työkyvyttömyyseläkkeiden keskimääräinen alkavuus aktiivia kohden (saatu ETK:n tilastoista)

N_j = vakuutettujen lukumäärä riskiluokassa j.

Näin saadaan taulukko, josta näkyy vahinkojen lukumäärän odotusarvo n_j eri riskiluokissa.

x = nykyikä	n_j M	n_j N
- 34	0,030	0,017
35 - 39	0,453	0,059
40 - 44	2,038	0,462
45 - 49	6,173	1,825
50 - 54	13,038	5,197
55 - 59	20,435	9,170
60 - 64	11,250	5,812
yht.	53,417	22,542

$$\sum_j n_j = n = 75{,}959$$

Tämän jälkeen tuotetaan Poisson-jakautunut satunnaisluku N_j parametrina n_j (oletus 3), jolloin saadaan vahinkojen lukumäärä luokassa j.

Tämä tapahtuu siten, että tuotetaan tasaisesti jakautunut satunnaisluku r_{10} väliltä $(0,1)$. Vahinkojen lukumäärän kertymäfunktio on

$$P(N) = e^{-n_j} \sum_{k=0}^{N} \frac{n_j^k}{k!}$$

Olkoon N_j^1 yhtälön $r_{10} = P(N)$ ratkaisu

eli $N_j^1 = P^{-1}(r_{10})$

Vahinkojen lukumäärä N_j^1 on siis suurin kokonaisluku k, joka toteuttaa ehdon $P(k) \leq r_{10}$.

Tämän jälkeen arvotaan riskiluokassa j ne N_j^1 kappaletta vakuutuksia, joille sattuu vahinko (eläketapaus). Vastaavat riskisummat lasketaan yhteen ja saadaan riskiluokan j vahinkomeno. Näin menetellään kunkin riskiluokan suhteen ja lasketaan riskiluokkien vahinkomenot yhteen, jolloin saadaan kokonaiseläkemenolle jokin arvo. Prosessi toistetaan 1000 kertaa. Tulokset asetetaan suuruusjärjestykseen ja muodostetaan havainnoista eläkemenon kertymä- ja tiheysfunktiot ja lasketaan jakauman tunnusluvut.

2.3 NP-menetelmä

Vertailun vuoksi approksimoidaan vahinkomenon jakaumaa myös ns. NP-menetelmällä, jota sovellettaessa täytyy tuntea yksittäisen vahingon suuruuden jakauma tai lähinnä sen momentit. Kuten aikaisemmin todettiin, riskisummien jakaumissa eri riskiluokissa ei mainittavia eroja esiintynyt, voidaan käyttää yhteistä yhden yksittäisen vahingon jakaumaa S(Z) koko vakuutuskannassa. Tämän jakauman approksimaatio saadaan em. simulaatiokierroksilla ottamalla 10 000 yksittäisen vahingon otos, joka järjestetään suuruusjärjetykseen vahinkojen koon mukaan ja muodostetaan yksittäisen vahingon koon kertymä- ja tiheysfunktiot. (Liitteet 4a, 4b, 4c) Luvuista voidaan laskea myös tarvittavat momentit. Kokonaisvahinkomenon kertymä- ja tiheysfunktiot saadaan NP-approksimaatiossa käytettyjen kaavojen avulla [1] (s. 45). Vahinkojen odotusarvona käytetään arvoa

$$n = \sum_j n_j = 75,959.$$

2.4 Huojunnan huomioon ottava Monte-Carlo-menetelmä

Edellä oletettiin, että vahinkojen perustodennäköisyydet q_j ja siis myös vahinkojen odotusarvot n_j ovat kiinteitä kussakin riskiluokassa. Perustodennäköisyyden huojunnan huomioon ottavassa vahinkomenon simulointimallissa menetellään seuraavasti:

Merkitään (1) $\tilde{n}_{hj} = (1 + \tilde{z}_{hj})\, n_j$, missä

$\tilde{z}_{hj}$ = vahinkojen odotusarvon huojuntaa luokassa j kuvaava satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo on 0 ja joka > -1.

Koska eläkekassan aineisto oli liian pieni huojuntafunktion määräämiseen, approksimoitiin sitä normaalijakautumalla parametreina $\mu_{hj} = 0$ (määritelmän mukaan) ja $\sigma_{hj} = 0,10$. Hajontaparametri on arvioitu kassan omasta tilastoaineistosta ja "solvenssityöryhmän" vahinkovakuutuksessa eri vakuutuslajeille saamien huojunnan hajontaparametrien perusteella.

Tuotetaan satunnaislukugeneraattorista standardoitu normaalimuuttuja Z, jolloin

$$\tilde{z}_{hj} = \sigma_{hj} Z \text{ ja } \tilde{n}_{hj} = (1 + \tilde{z}_{hj})n.$$

Tämän jälkeen laskenta etenee kuten aikaisemmin. Lasketaan kokonaisvahinkomenolle kertymä- ja tiheysfunktiot ja verrataan kuinka huojunnan huomioonottaminen vaikuttaa kokonaismenon jakaumaan. Jakaumaa approksimoidaan myös NP-menetelmällä [1] (s. 122).

2.5 Jälleenvakuutus

Jälleenvakuutuksen vaikutusta kokonaisvahinkomenon jakaumaan tutkitaan suorittamalla em. laskentaprosessi (2.4) 50 000 mk:n omavastuurajalla yhtä vahinkoa kohti. Kyseessä on siis excess-of-loss-tyyppinen jälleenvakuutus, joka oletuksen 2 vuoksi tässä tapauksessa on sama kuin ylitejälleenvakuutus.

2.6 Satunnaislukugeneraattorit

Tuotettaessa tasaisesti jakautuneita satunnaislukuja välille (0,1) käytetään kaavaa $r_t = r_{t-1} \times 317 \pmod 1$.

Standardoidun normaalijakautuman mukaisia muuttujia (2.4) saadaan edellisen generaattorin avulla siten, että lasketaan 12 peräkkäistä satunnaislukua yhteen ja vähentämällä summasta 6 (katso [2], luku 14).

Näitä satunnaislukugeneraattoreita on mm. Tarmo Pukkila väitöskirjassaan [3] (luku 3.1) ja todennut ne käyttökelpoisiksi Monte-Carlo-menetelmissä.

3 TULOKSET

3.1 Kokonaiseläkemenon jakaumat

Kokonaiseläkemenon kertymä- ja tiheysfunktiot eri vaihtoehdoissa ja eri menetelmillä on esitetty liitteissä sekä taulukkoina että graafisesti.

Vaihtoehto 1: Vahinkotiheydet ilman huojuntaa (Liitteet 1a, 1b, 1c).

Liitteistä nähdään, että M-C-menetelmä ja NP-menetelmä antavat hyvin samankaltaiset tulokset sekä kertymäfunktion että tiheysfunktioiden suhteen.

Vaihtoehto 2: Vahinkotiheydet huojuvat, ei jälleenvakuutusta (Liitteet 2a, 2b, 2c).

Vahinkotiheyksien huojunta tuo jo selviä eroja menetelmien välille. Toisaalta M-C-menetelmän mukaisen tiheysfunktion epäsäännöllisyys saattaa olla seurausta siitä, että 1000 simulointikierrosta ei ole ehkä riittävä määrä tiheysfunktion määrittämiseen.

Vaihtoehto 3: Vahinkotiheydet huojuvat, jälleenvakuutusraja 50 000 mk (Liitteet 3a, 3b, 3c).

Huojunta aiheuttaa ilmeisesti myös tässä vaihtoehdossa eri menetelmien tulosten välille eroja.

3.2 Vahinkojen lukumäärä

Vaihtoehdossa 1 kunkin kierroksen vahinkojen lukumäärä vaihteli 1000 kierroksella 48:sta 106:een.

Huojuntavaihtoehdoissa lukumäärä vaihteli 30:sta 109:ään.

3.3 Jakauman tunnusluvut

Seuraavassa on yhteenveto edellä saatujen jakaumien tärkeimmistä tunnusluvuista.

	Vaihtoehto 1		Vaihtoehto 2		Vaihtoehto 3	
	M-C	NP	M-C	NP	M-C	NP
Keskiarvo μ_x (mk)	2170991	2185568	2170571	2177061	1986843	1993088
Hajonta σ_x (mk)	305052	309994	369792	378190	326374	336332
Vinous γ_x	0.268	0.173	-0.026	0.210	-0.057	0.196
$x_{0.01}$	2950000	2950000	3030000	3110000	2720000	2830000
α_1 (mk)	-	28773	-	28661	-	26239
α_2 (mk^2)	-	$1265 \cdot 10^6$	-	$1259 \cdot 10^6$	-	$966 \cdot 10^6$
α_3 (mk^3)	-	$67684 \cdot 10^9$	-	$67521 \cdot 10^9$	-	$40485 \cdot 10^9$

NP-menetelmässä vahinkojen odotusarvona käytetään 75,959.

Vinous $\gamma_x = \frac{\mu_{3x}}{\sigma_x^3}$, missä μ_{3x} = kokonaiseläkemenon kolmas keskusmomentti

$x_{0.01}$ toteuttaa ehdon $1 - F(x_{0.01}) = 0.01$ eli

$$P\{\text{kokonaisvahinkomeno} < x_{0.01}\} = 0.99.$$

Yhteenvedosta nähdään, että kussakin vaihtoehdossa kummallakin menetelmällä saadut keskiarvo ja hajonta eroavat toisistaan suhteellisen vähän. Sen sijaan vinoustermeissä erot ovat suuret. Tämä johtuu ilmeisesti siitä, että 1000 simulointikierrosta on liian vähän jakauman vinouden määrittämiseen.

Vahinkotiheyksien huojunnan huomioonottaminen kasvattaa hajontaa n. 20 %:lla. $x_{0.01}$-piste kasvaa M-C-menetelmän mukaan 80 000 markkaa ja NP-menetelmän mukaan 160 000 mk. NP-menetelmä antaa huojunta-vaihtoehdoissa hieman suuremman $x_{0.01}$-pisteen kuin M-C-menetelmä.

Yhteenvedosta nähdään, että 50 000 mk:n jälleenvakuutuksen omavastuuraja merkitsee omalla vastuulla olevan liikkeen supistumista 185 000 mk:lla eli 8.5 %:lla. Vastaavasti hajonta pienenee 12 %:lla ja oman pääoman tarve ($x_{0.01} - \mu_x$) 125 000 mk:lla eli 15 %:lla.

Lopuksi voidaan M-C-menetelmästä todeta:

- menetelmä on tarkka, kun vain parametrit valitaan oikein

- yksittäisen vahingon jakaumaa S(Z) ei tarvitse tuntea, koska vahingot arvotaan suoraan vakuutuskannasta

- menetelmä on kuitenkin melko työläs ja hidas. Sitä kannattaa käyttää vain rajoitetuissa tapauksissa eli kun vahinkojen odotusarvo on pieni (korkeintaan muutamia satoja) ja yhden vahingon suuruus vaihtelee voimakkaasti. Mainittakoon, että edellä suoritetut 1000 kierroksen simuloinnit veivät IBM370/152 laitteistolta CPU-aikaa noin 4 - 5 min vaihtoehdosta riippuen.

- menetelmän sovellutuskohteena eläkekassan työkyvyttömyysliike ei ole paras mahdollinen, koska yhden vahingon jakaumafunktio on melko säännöllinen. (Katso liite 4c) Kokonaisvahinkomenon jakauman approksimointiin olisi NP-menetelmä tässä tapauksessa ollut riittävän tarkka menetelmä.

KIRJALLISUUSVIITTEET

1. Beard R. - Pentikäinen T. _ Pesonen E (1977). Risk Theory, Chapman & Hall, Lontoo.

2. Hamming, R.W., Introduction to Applied Numerical Analysis. McGraw-Hill, New York 1971.

3. Tarmo Pukkila: Fitting of Autoregressive Moving Average Models in the Freqency Domain. Department of mathematical sciences university of Tampere. Report A-6 Tampere 1972.

Liite 1 a

Kokonaiseläkemenon jakaumafunktiot
(Vaihtoehto 1)

M-C-menetelmä X(1000 mk)	F(x)	F'(x)	NP-menetelmä X(1000 mk)	F(x)	F'(x)
1400	.0020000	.00010	1400	.0033659	.00004
1420	.0020000	0.00000	1420	.0042059	.00004
1440	.0040000	.00010	1440	.0052275	.00005
1460	.0040000	0.00000	1460	.0064618	.00006
1480	.0040000	0.00000	1480	.0079431	.00007
1500	.0060000	.00010	1500	.0097095	.00009
1520	.0090000	.00015	1520	.0118022	.00010
1540	.0090000	0.00000	1540	.0142659	.00012
1560	.0120000	.00015	1560	.0171483	.00014
1580	.0180000	.00030	1580	.0204998	.00017
1600	.0200000	.00010	1600	.0243734	.00019
1620	.0220000	.00010	1620	.0288237	.00022
1640	.0240000	.00010	1640	.0339065	.00025
1660	.0300000	.00030	1660	.0396780	.00029
1680	.0380000	.00040	1680	.0461943	.00033
1700	.0430000	.00025	1700	.0535099	.00037
1720	.0570000	.00070	1720	.0616772	.00041
1740	.0730000	.00080	1740	.0707455	.00045
1760	.0820000	.00045	1760	.0807597	.00050
1780	.0970000	.00075	1780	.0917593	.00055
1800	.1210000	.00120	1800	.1037778	.00060
1820	.1290000	.00040	1820	.1168410	.00065
1840	.1450000	.00080	1840	.1309671	.00071
1860	.1540000	.00045	1860	.1461651	.00076
1880	.1740000	.00100	1880	.1624344	.00081
1900	.1910000	.00085	1900	.1797645	.00087
1920	.2230000	.00160	1920	.1981344	.00092
1940	.2360000	.00065	1940	.2175128	.00097
1960	.2520000	.00080	1960	.2378575	.00102
1980	.2810000	.00145	1980	.2591163	.00106
2000	.3150000	.00170	2000	.2812270	.00111
2020	.3370000	.00110	2020	.3041181	.00114
2040	.3490000	.00060	2040	.3277097	.00118
2060	.3700000	.00105	2060	.3519140	.00121
2080	.3880000	.00090	2080	.3766370	.00124
2100	.4150000	.00135	2100	.4017791	.00126
2120	.4340000	.00095	2120	.4272366	.00127
2140	.4620000	.00140	2140	.4529031	.00128
2160	.4890000	.00135	2160	.4786709	.00129
2180	.5190000	.00150	2180	.5044317	.00129
2200	.5490000	.00150	2200	.5300792	.00128
2220	.5660000	.00085	2220	.5555092	.00127
2240	.5990000	.00165	2240	.5806216	.00126
2260	.6290000	.00150	2260	.6053209	.00123
2280	.6560000	.00135	2280	.6295176	.00121

(Jatkuu).

Liite 1a

M-C-menetelmä

X(1000mk)	F(x)	F'(x)
2300	.6860000	.00150
2320	.7040000	.00090
2340	.7210000	.00085
2360	.7460000	.00125
2380	.7700000	.00120
2400	.7830000	.00065
2420	.8000000	.00085
2440	.8140000	.00070
2460	.8410000	.00135
2480	.8520000	.00055
2500	.8690000	.00085
2520	.8830000	.00070
2540	.8900000	.00035
2560	.8910000	.00005
2580	.9020000	.00055
2600	.9080000	.00030
2620	.9190000	.00055
2640	.9270000	.00040
2660	.9270000	.00030
2680	.9410000	.00040
2700	.9460000	.00025
2720	.9550000	.00045
2740	.9570000	.00010
2760	.9600000	.00015
2780	.9700000	.00050
2800	.9750000	.00025
2820	.9780000	.00015
2840	.9810000	.00015
2860	.9810000	0 .00000
2880	.9820000	.00005
2900	.9840000	.00010
2920	.9870000	.00015
2940	.9890000	.00010
2960	.9910000	.00010
2980	.9920000	.00005
3000	.9940000	.00010

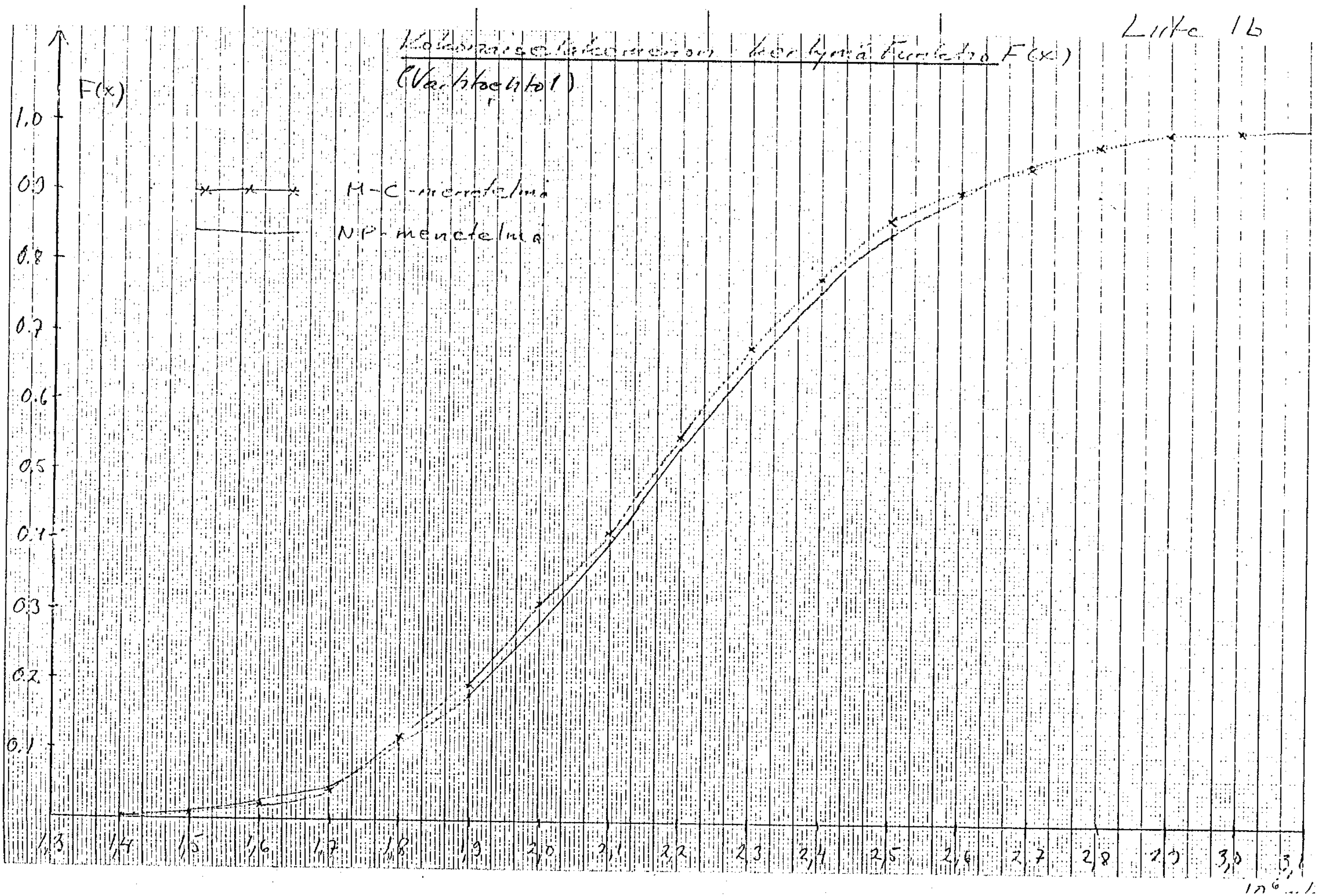
$x_{0.01} = 2950$

NP-menetelmä

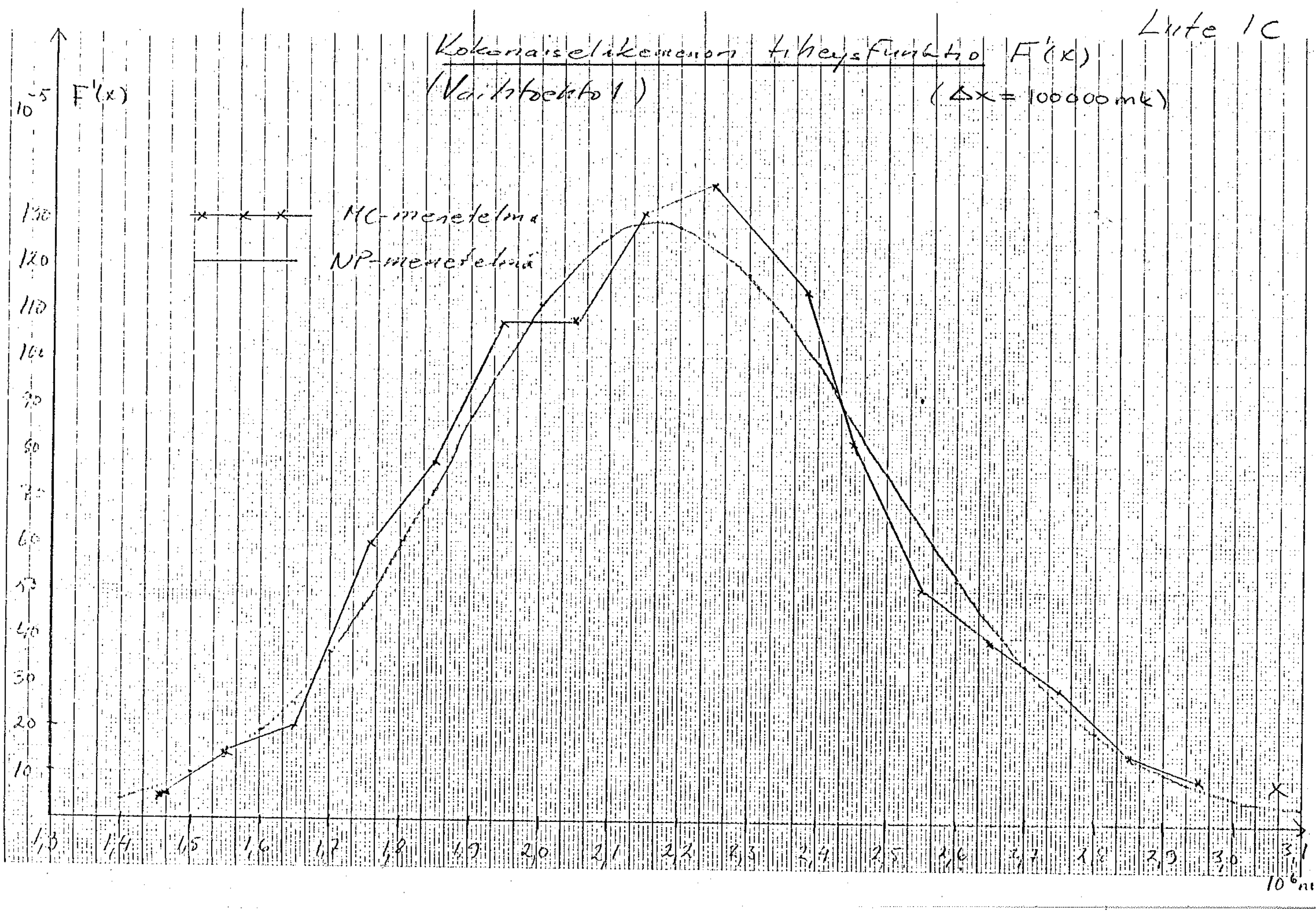
X(1000mk)	F(x)	F'(x)
2300	.6531290	.00118
2320	.6760800	.00115
2340	.6983035	.00111
2360	.7197407	.00107
2380	.7403418	.00103
2400	.7600657	.00099
2420	.7788804	.00094
2440	.7967624	.00089
2460	.8136965	.00085
2480	.8296759	.00080
2500	.8447010	.00075
2520	.8587794	.00070
2540	.8719251	.00066
2560	.8841577	.00061
2580	.8955021	.00057
2600	.9059872	.00052
2620	.9156459	.00048
2640	.9245140	.00044
2660	.9326296	.00041
2680	.9400325	.00037
2700	.9467636	.00034
2720	.9528644	.00031
2740	.9583766	.00028
2760	.9633414	.00025
2780	.9677993	.00022
2800	.9717898	.00020
2820	.9753512	.00018
2840	.9785199	.00016
2860	.9813310	.00014
2880	.9838173	.00012
2900	.9860099	.00011
2920	.9879380	.00010
2940	.9896286	.00009
2960	.9911067	.00007
2980	.9923953	.00006
3000	.9935157	.00006

$x_{0.01} = 2950$

Liite 1b



(Vaihtoehto 1)
F(x)
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
M-C-menetelmä
NP-menetelmä
1,3
1,4
1,5
1,6
1,7
1,8
1,9
2,0
2,1
2,2
2,3
2,4
2,5
2,6
2,7
2,8
2,9
3,0
3,1



Liite 1C
Kokonaiselikemenon tiheysfunktio F'(x)
(Vaihtoehto 1)
(Δx = 100000 mk)
10^-5 F'(x)
MC-menetelmä
NP-menetelmä
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
1,3
1,4
1,5
1,6
1,7
1,8
1,9
2,0
2,1
2,2
2,3
2,4
2,5
2,6
2,7
2,8
2,9
3,0
3,1
10^6 mk

Kokonaiseläkemenon jakauma funktiot
(Vaihtoehto 2)

X(1000mk)	F(x)	F'(x)
1300	.0100000	.00005
1320	.0100000	0 .00000
1340	.0100000	0 .00000
1360	.0130000	.00015
1380	.0130000	0 .00000
1400	.0200000	.00035
1420	.0260000	.00030
1440	.0280000	.00010
1460	.0320000	.00020
1480	.0380000	.00030
1500	.0420000	.00020
1520	.0420000	0 .00000
1540	.0480000	.00030
1560	.0520000	.00020
1580	.0560000	.00020
1600	.0670000	.00055
1620	.0770000	.00050
1640	.0810000	.00020
1660	.0870000	.00030
1680	.0910000	.00020
1700	.1060000	.00075
1720	.1230000	.00085
1740	.1350000	.00060
1760	.1450000	.00050
1780	.1620000	.00085
1800	.1760000	.00070
1820	.1820000	.00030
1840	.1960000	.00070
1860	.2100000	.00070
1880	.2240000	.00070
1900	.2390000	.00075
1920	.2670000	.00140
1940	.2790000	.00060
1960	.2940000	.00075
1980	.3100000	.00080
2000	.3260000	.00080
2020	.3420000	.00080
2040	.3700000	.00140
2060	.3970000	.00135
2080	.4130000	.00080
2100	.4430000	.00150
2120	.4770000	.00170
2140	.5070000	.00150
2160	.5270000	.00100
2180	.5590000	.00160
2200	.5880000	.00145
2220	.6020000	.00070
2240	.6240000	.00110
2260	.6400000	.00080
2280	.6600000	.00100

X(1000mk)	F(x)	F'(x)
1300	.0063279	.00006
1320	.0075325	.00006
1340	.0089322	.00007
1360	.0105508	.00008
1380	.0124138	.00009
1400	.0145480	.00011
1420	.0169818	.00012
1440	.0197448	.00014
1460	.0228674	.00016
1480	.0263812	.00018
1500	.0303181	.00020
1520	.0347104	.00022
1540	.0395903	.00024
1560	.0449895	.00027
1580	.0509391	.00030
1600	.0574689	.00033
1620	.0646072	.00036
1640	.0723803	.00039
1660	.0808123	.00042
1680	.0899243	.00046
1700	.0997343	.00049
1720	.1102570	.00053
1740	.1215030	.00056
1760	.1334789	.00060
1780	.1461868	.00064
1800	.1596245	.00067
1820	.1737847	.00071
1840	.1886554	.00074
1860	.2042197	.00078
1880	.2204558	.00081
1900	.2373371	.00084
1920	.2548323	.00087
1940	.2729057	.00090
1960	.2915174	.00093
1980	.3106233	.00096
2000	.3301760	.00098
2020	.3501250	.00100
2040	.3704167	.00101
2060	.3909957	.00103
2080	.4118043	.00104
2100	.4327838	.00105
2120	.4538747	.00105
2140	.4750172	.00106
2160	.4961517	.00106
2180	.5172193	.00105
2200	.5381624	.00105
2220	.5589250	.00104
2240	.5794532	.00103
2260	.5996954	.00101
2280	.6196031	.00100

(Jatkuu)

Liite 2a

H-C-menetelmä

x (1000ml)	F(x)	F'(x)
2300	.6740000	.00070
2320	.6960000	.00110
2340	.7150000	.00095
2360	.7270000	.00060
2380	.7430000	.00080
2400	.7650000	.00110
2420	.7770000	.00060
2440	.8030000	.00130
2460	.8170000	.00070
2480	.8230000	.00030
2500	.8310000	.00040
2520	.8390000	.00040
2540	.8570000	.00090
2560	.8650000	.00040
2580	.8730000	.00040
2600	.8870000	.00070
2620	.9000000	.00065
2640	.9080000	.00040
2660	.9120000	.00020
2680	.9180000	.00030
2700	.9200000	.00010
2720	.9240000	.00020
2740	.9260000	.00010
2760	.9400000	.00070
2780	.9460000	.00030
2800	.9540000	.00040
2820	.9560000	.00010
2840	.9580000	.00010
2860	.9620000	.00020
2880	.9680000	.00030
2900	.9760000	.00040
2920	.9800000	.00020
2940	.9820000	.00010
2960	.9860000	.00020
2980	.9860000	0.00000
3000	.9860000	0.00000
3020	.9860000	0.00000
3040	.9940000	.00040
3060	.9950000	.00005
3080	.9950000	0.00000
3100	.9950000	0.00000
3120	.9950000	0.00000
3140	.9970000	.00010
3160	.9970000	0.00000
3180	.9990000	.00010
3200	.9990000	0.00000

$x_{0,01} = 3030$

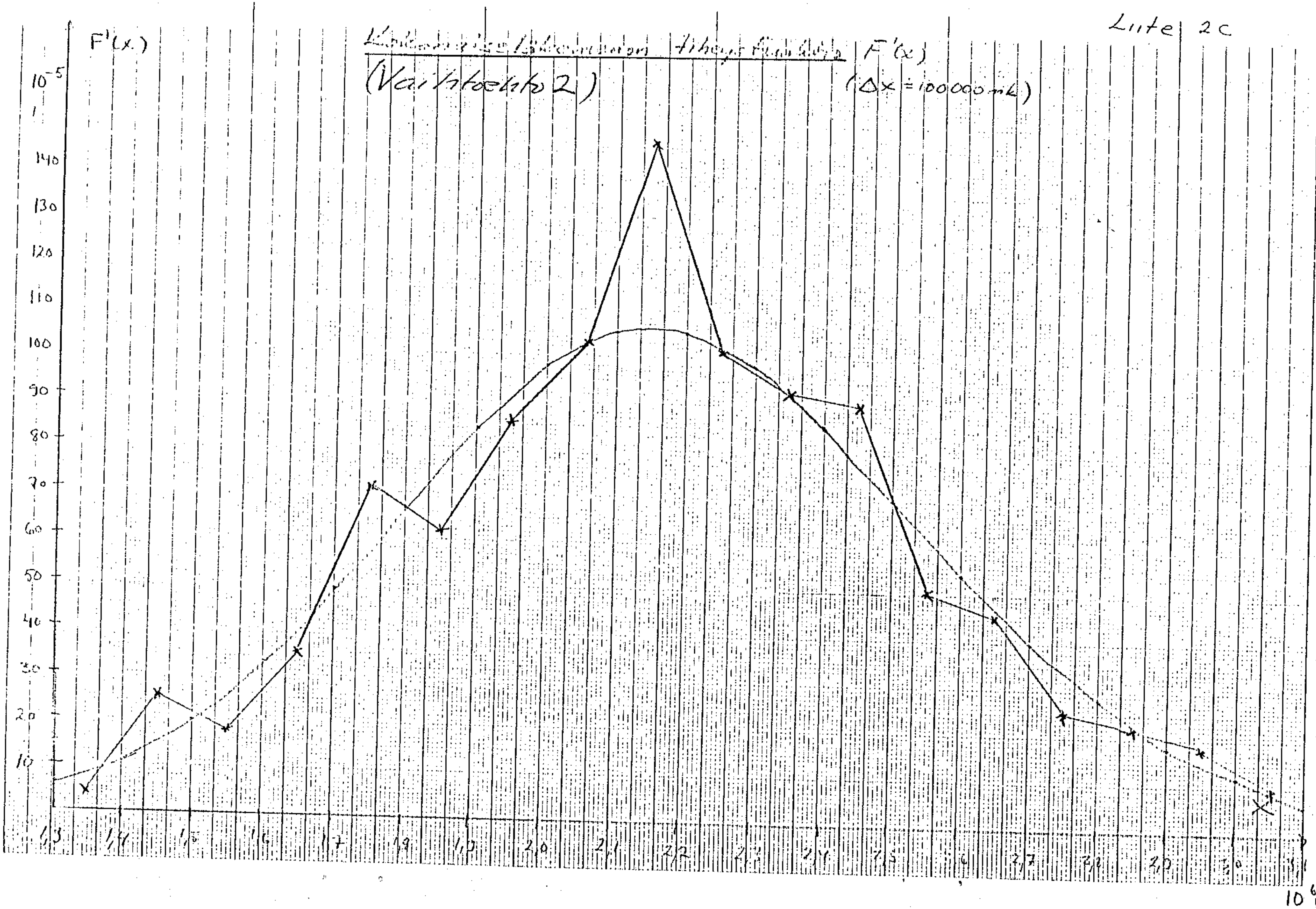
3030

NP-menetelmä

x (1000ml)	F(x)	F'(x)
2300	.6391306	.00098
2320	.6582358	.00096
2340	.6768799	.00093
2360	.6950282	.00091
2380	.7126495	.00088
2400	.7297169	.00085
2420	.7462071	.00082
2440	.7621011	.00079
2460	.7773835	.00076
2480	.7920430	.00073
2500	.8060719	.00070
2520	.8194659	.00067
2540	.8322242	.00064
2560	.8443493	.00061
2580	.8558464	.00057
2600	.8667236	.00054
2620	.8769916	.00051
2640	.8866630	.00048
2660	.8957527	.00045
2680	.9042773	.00043
2700	.9122547	.00040
2720	.9197043	.00037
2740	.9266463	.00035
2760	.9331019	.00032
2780	.9390929	.00030
2800	.9446412	.00028
2820	.9497691	.00026
2840	.9544991	.00024
2860	.9588533	.00022
2880	.9628537	.00020
2900	.9665218	.00018
2920	.9698788	.00017
2940	.9729450	.00015
2960	.9757404	.00014
2980	.9782841	.00013
3000	.9805943	.00012
3020	.9826887	.00010
3040	.9845839	.00009
3060	.9862957	.00009
3080	.9878391	.00008
3100	.9892281	.00007
3120	.9904760	.00006
3140	.9915950	.00006
3160	.9925969	.00005
3180	.9934922	.00004
3200	.9942909	.00004

$x_{0,01} = 3110$

Liite 2c


F'(x)
10^{-5}
(Vaihtoehto 2)
F'(x)
(Δx = 100 000 mk)
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
110
120
130
140
1,3
1,4
1,5
1,6
1,7
1,8
1,9
2,0
2,1
2,2
2,3
2,4
2,5
2,7
2,8
2,9
3,0
3,1
10^6

Liite 3a

Kokonaiseläkemenon jakaumafunktiot

(Vaihtoehto 3)

M-C-menetelmä

x (1000 mk)	F(x)	F'(x)
1280	.0100000	.00050
1300	.0160000	.00030
1320	.0220000	.00030
1340	.0260000	.00020
1360	.0300000	.00020
1380	.0360000	.00030
1400	.0380000	.00010
1420	.0440000	.00030
1440	.0460000	.00010
1460	.0560000	.00050
1480	.0590000	.00015
1500	.0650000	.00030
1520	.0780000	.00065
1540	.0860000	.00040
1560	.0940000	.00040
1580	.1070000	.00065
1600	.1170000	.00050
1620	.1330000	.00080
1640	.1470000	.00070
1660	.1580000	.00055
1680	.1640000	.00030
1700	.1760000	.00060
1720	.1890000	.00065
1740	.2130000	.00120
1760	.2370000	.00095
1780	.2500000	.00090
1800	.2760000	.00130
1820	.3020000	.00130
1840	.3190000	.00085
1860	.3390000	.00100
1880	.3650000	.00120
1900	.3870000	.00110
1920	.4130000	.00130
1940	.4450000	.00160
1960	.4810000	.00180
1980	.5030000	.00110
2000	.5230000	.00100
2020	.5400000	.00085
2040	.5680000	.00140
2060	.5880000	.00100
2080	.6280000	.00200
2100	.6560000	.00140
2120	.6730000	.00085
2140	.6870000	.00070
2160	.7020000	.00075
2180	.7220000	.00100

NP-menetelmä

x (1000 mk)	F(x)	F'(x)
1280	.0129159	.00011
1300	.0153796	.00012
1320	.0182221	.00014
1340	.0214840	.00016
1360	.0252074	.00019
1380	.0294356	.00021
1400	.0342121	.00024
1420	.0395811	.00027
1440	.0455859	.00030
1460	.0522688	.00033
1480	.0596706	.00037
1500	.0679295	.00041
1520	.0767806	.00045
1540	.0865555	.00049
1560	.0971812	.00053
1580	.1086797	.00057
1600	.1210674	.00062
1620	.1343546	.00066
1640	.1485449	.00071
1660	.1636351	.00075
1680	.1796147	.00080
1700	.1964658	.00084
1720	.2141629	.00088
1740	.2326733	.00093
1760	.2519569	.00096
1780	.2719667	.00100
1800	.2926491	.00103
1820	.3139444	.00106
1840	.3357872	.00109
1860	.3581076	.00112
1880	.3808313	.00114
1900	.4038807	.00115
1920	.4271757	.00116
1940	.4506347	.00117
1960	.4741752	.00118
1980	.4977149	.00118
2000	.5211722	.00117
2020	.5444677	.00116
2040	.5675243	.00115
2060	.5902680	.00114
2080	.6126291	.00112
2100	.6345421	.00110
2120	.6559467	.00107
2140	.6767877	.00104
2160	.6970159	.00101
2180	.7165879	.00098

(Jatkuu)

Liite 3a

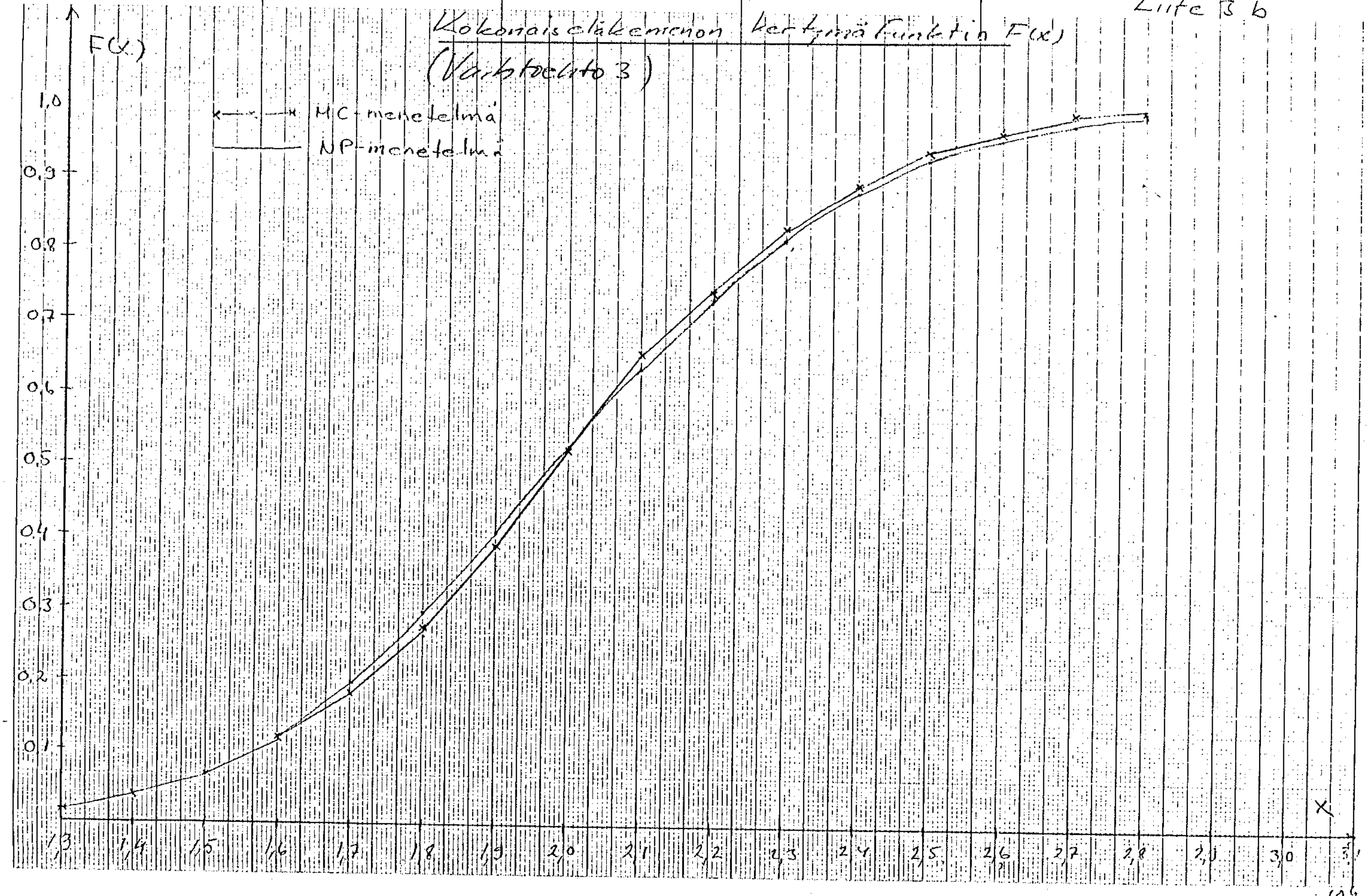
M-C-menetelmä

	x(1000ml)	F(x)	F'(x)
	2200	.7420000	.00100
	2220	.7760000	.00170
	2240	.7960000	.00100
	2260	.8130000	.00085
	2280	.8250000	.00060
	2300	.8370000	.00060
	2320	.8440000	.00035
	2340	.8580000	.00070
	2360	.8660000	.00040
	2380	.8760000	.00050
	2400	.8910000	.00075
	2420	.9050000	.00070
	2440	.9130000	.00040
	2460	.9190000	.00030
	2480	.9250000	.00030
	2500	.9350000	.00050
	2520	.9470000	.00060
	2540	.9470000	0.00000
	2560	.9510000	.00020
	2580	.9550000	.00020
	2600	.9610000	.00030
	2620	.9650000	.00020
	2640	.9710000	.00030
	2660	.9750000	.00020
	2680	.9850000	.00050
	2700	.9870000	.00010
$X_{0.01}$	2720	.9900000	.00015
	2740	.9920000	.00010
	2760	.9940000	.00010
	2780	.9960000	.00010
	2800	.9960000	0.00000
	2820	.9960000	0.00000
	2840	.9980000	.00010
	2860	.9980000	0.00000
	2880	.9980000	0.00000

NP-menetelmä

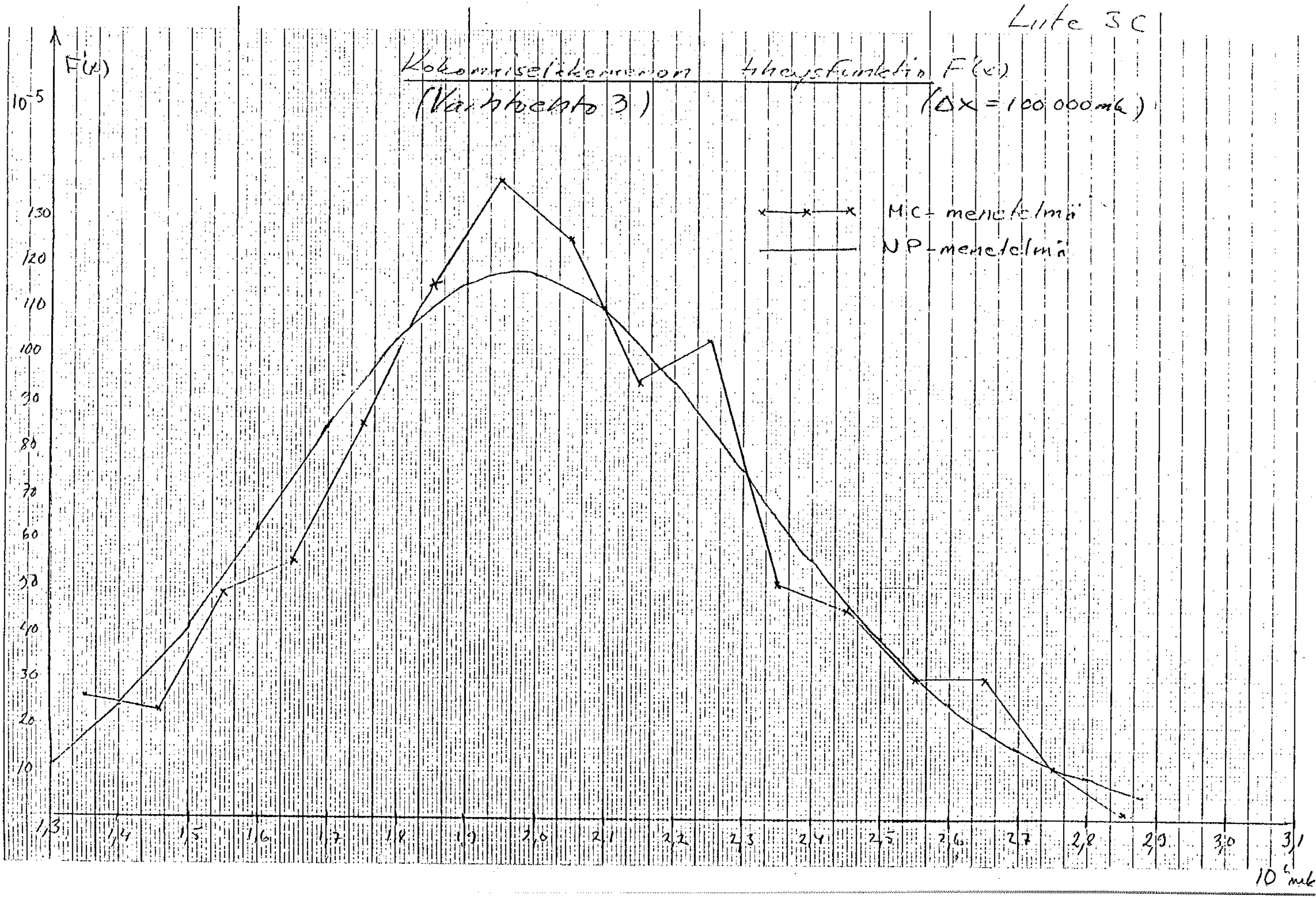
	x(1000ml)	F(x)	F'(x)
	2200	.7354663	.00094
	2220	.7536201	.00091
	2240	.7710240	.00087
	2260	.7876592	.00083
	2280	.8035124	.00079
	2300	.8185759	.00075
	2320	.8328476	.00071
	2340	.8463302	.00067
	2360	.8590311	.00064
	2380	.8709618	.00060
	2400	.8821378	.00056
	2420	.8925779	.00052
	2440	.9023039	.00049
	2460	.9113402	.00045
	2480	.9197130	.00042
	2500	.9274506	.00039
	2520	.9345822	.00036
	2540	.9411383	.00033
	2560	.9471496	.00030
	2580	.9526475	.00027
	2600	.9576630	.00025
	2620	.9622269	.00023
	2640	.9663696	.00021
	2660	.9701208	.00019
	2680	.9735090	.00017
	2700	.9765621	.00015
	2720	.9793066	.00014
	2740	.9817678	.00012
	2760	.9839698	.00011
	2780	.9859352	.00010
	2800	.9876855	.00009
$X_{0.01}$	2820	.9892406	.00008
	2840	.9906191	.00007
	2860	.9918384	.00006
	2880	.9929144	.00005

Liite 3 b



Kokonaiseläkemenon kertymäfunktio F(x)
(Vaihtoehto 3)
F(x)
MC-menetelmä
NP-menetelmä
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
1,3
1,4
1,5
1,6
1,7
1,8
1,9
2,0
2,1
2,2
2,3
2,4
2,5
2,6
2,7
2,8
2,9
3,0
x

Liite 3 C



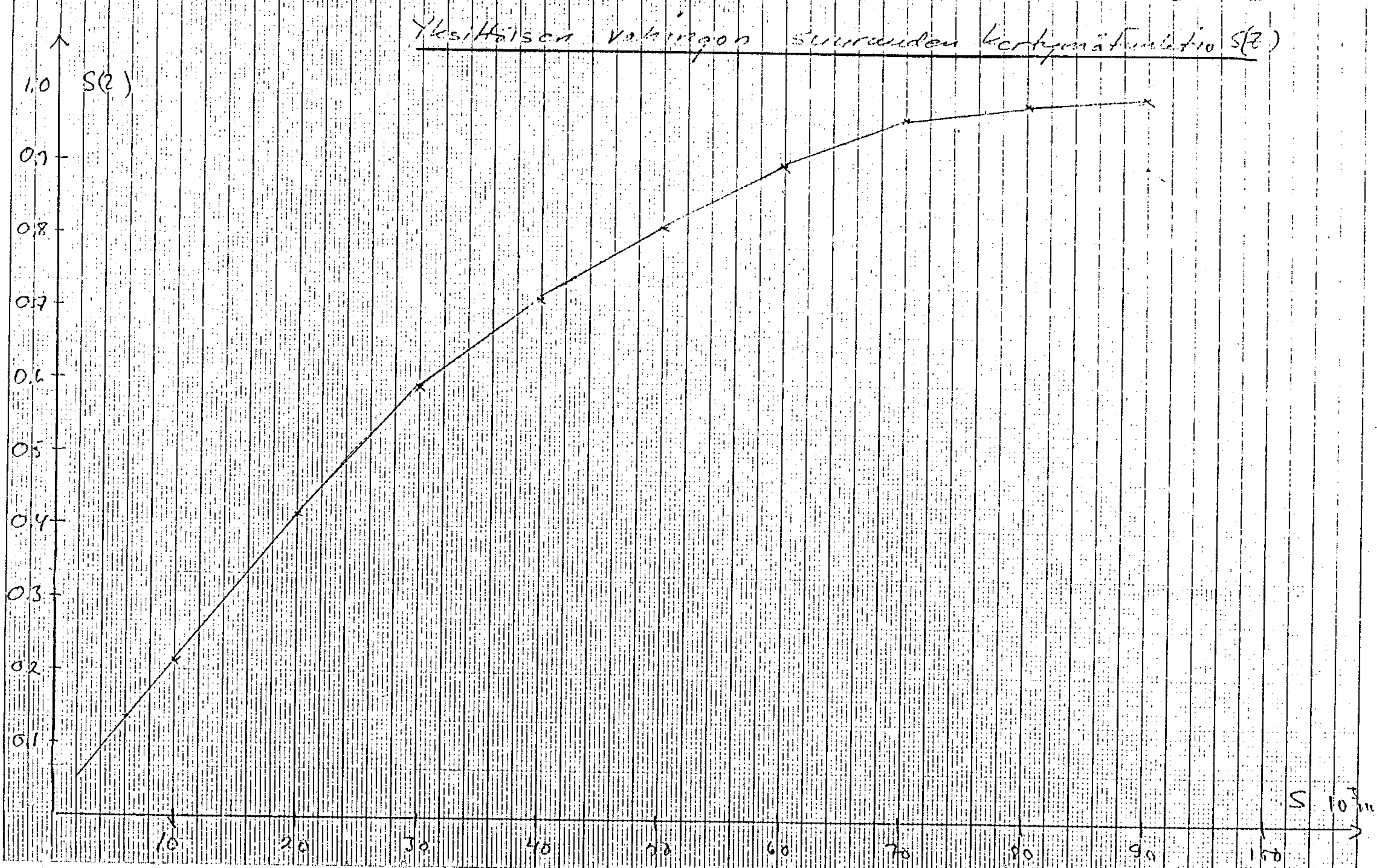
Kokonaiselinkustannusten tiheysfunktio F(x)
(Vaihtoehto 3)
(Δx = 100 000 mk)
F'(x)
10⁻⁵
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
1,3
1,4
1,5
1,6
1,7
1,8
1,9
2,0
2,1
2,2
2,3
2,4
2,5
2,6
2,7
2,8
2,9
3,0
3,1
10⁶ mk
MC-menetelmä
NP-menetelmä

Liite 4a

Yksittäisen vahingon suuruuden jakaumafunktiot

Z (mk)	S(Z)	S'(Z)
2000	.0485000	.02425
4000	.0897000	.02060
6000	.1362000	.02325
8000	.1823000	.02305
10000	.2114000	.01455
12000	.2496000	.01910
14000	.2956000	.02300
16000	.3302000	.01730
18000	.3815000	.02565
20000	.4159000	.01720
22000	.4641000	.02410
24000	.4984000	.01715
26000	.5263000	.01395
28000	.5653000	.01950
30000	.5897000	.01220
32000	.6215000	.01590
34000	.6434000	.01095
36000	.6629000	.00975
38000	.6866000	.01185
40000	.7146000	.01400
42000	.7381000	.01175
44000	.7582000	.01005
46000	.7805000	.01115
48000	.7994000	.00945
50000	.8175000	.00905
52000	.8368000	.00965
54000	.8533000	.00825
56000	.8704000	.00855
58000	.8863000	.00795
60000	.8997000	.00670
62000	.9114000	.00585
64000	.9248000	.00670
66000	.9336000	.00440
68000	.9418000	.00410
70000	.9580000	.00810
72000	.9655000	.00375
74000	.9714000	.00295
76000	.9752000	.00190
78000	.9817000	.00325
80000	.9857000	.00180
82000	.9915000	.00310
84000	.9935000	.00100
86000	.9954000	.00095
88000	.9981000	.00135
90000	.9995000	.00070
92000	.9997000	.00010

Liite 4i



Yksittäisen vahingon suuruuden kertymäfunktio S(z)
S(z)
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
10
20
30
40
50
60
70
80
90
100
S