WORKING PAPERS ISSN 0781-4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

4

Eero Gauffin

TYÖKYVYTTÖMYYSELÄKEMALLEISTA (1981)

TYÖKYVYTTÖMYYSMALLEISTA

SHV-harjoitustyö

Eero Gauffin

10.11.1981

SISÄLTÖ

1 JOHDANTO

Laskuperusteiden taulustoissa esitetään koron ja elossapysymisen todennäköisyyden yhteisvaikutus D-lukujen avulla. Jos tarkastellaan taulukkoa, jonka luvut on laskettu nollakorkoa käyttäen, voidaan D-luvut tulkita jonkin suljetun henkilöjoukon (kohortin) henkilömääriksi. Elossapysymisen todennäköisyyksien esittäminen D-lukujen suhteen avulla vastaa klassista todennäköisyyskäsitettä, jonka mukaan todennäköisyys ymmärretään suotuisten tapahtumien suhteena kaikkiin mahdollisiin tapahtumiin.

Työkyvyttömyyteen liittyviä todennäköisyyksiä ei laskuperusteissa enää esitetä "henkilöiden lukumäärinä", vaan taulustot perustuvat funktioon $Z(x,u)du$. Tällä funktiolla tarkoitetaan todennäköisyyttä, että x-ikäinen henkilö on työkyvytön ja työkyvyttömyys on alkanut ikävälillä $(x-u-du, x-u)$.

Tämän työn tarkoitus on selvittää Z-funktiota ja vertailla ruotsalaista työkyvyttömyysmallia suomalaiseen malliin.

2 HENKILÖLUOKAT JA LUOKKIEN VÄLISET SIIRTYMISTODENNÄKÖISYYDET

2.1. Henkilöluokat

Otetaan tarkasteltavaksi jokin tietty joukko henkilöitä. Tarkastelun alkaessa tähän joukkoon kuuluu L henkilöä. Nämä L henkilöä voidaan edelleen ryhmitellä erilaisiin luokkiin iän, sukupuolen, terveydentilan jne. mukaan riippuen siitä, mitä kulloinkin halutaan tutkia.

Olkoon henkilöt ryhmitelty luokkiin 1, 2, ..., m siten, että

- henkilö ei voi samanaikaisesti kuulua kuin yhteen luokkaan
- luokkaan m kuuluvat kuolleet henkilöt

Jos niiden henkilöiden lukumäärä, jotka ajan t kuluttua tarkasteluhetkestä laskettuna kuuluvat luokkaan j, merkitään $l_j(t)$:llä, pätee yhtälö

$$L = \sum_j l_j(t), \quad t \geq 0$$

Lukumääristä $l_j(t)$ ei voida varmuudella sanoa mitään, ennenkuin ajan t kuluttua, jolloin lukumäärät pystytään havainnoimaan. Mikäli vastaavista henkilöistä ja henkilöryhmistä on aikaisempia tietoja, voidaan näiden perusteella tehdä ennusteita. Käytännössä tarkasteltavana olevat henkilöt ja luokat ovat usein niin monimutkaisia, ettei jokaista yksityiskohtaa voida hallita. Siksi matemaattisissa tarkasteluissa on tarkasteltavana olevaa prosessia pelkistettävä, jotta käyttökelpoinen matemaattinen malli saataisiin rakennettua.

2.2. Siirtymistodennäköisyydet

Olkoon $\underline{X}(x,t)$ satunnaismuuttuja, joka saa arvokseen sen luokan indeksiluvun, johon tarkasteltavana oleva x-ikäinen henkilö iässä x+t kuuluu. Satunnaismuuttuja $\underline{X}(x,t)$ saa siis arvoja 1, ..., m.

Oletetaan, että tarkastelun alkaessa kaikki ovat vastasyntyneitä luokkaan 1 kuuluvia henkilöitä eli

$$L = l_1(0)$$

Tällöin voidaan myös merkintöjä yksinkertaistaa siten, että

$$\underline{X}(0,t) = \underline{X}(t)$$

Jotta tarkasteltavana olevien vastasyntyneiden jakaantuminen tutkittavina oleviin luokkiin voitaisiin ennustaa, on tunnettava siirtymätodennäköisyydet luokasta toiseen. Otetaan käytäntöön merkintä

$p_{jk}(y,z|x)$, jolla

tarkoitetaan todennäköisyyttä, että y-ikäinen henkilö, joka kuuluu luokkaan j, johon hän on viimeksi tullut x-ikäisenä, on z-ikäisenä luokassa k. Matemaattisin merkinnöin $p_{jk}(y,z|x)$ on siis muotoa [1)]

(2.2.1) $$p_{jk}(y,z|x) = P\left\{\underline{X}(z) = k \,|\, \underline{X}(t) \begin{cases} = j, & x \le t \le y \\ \ne j, & x - \varepsilon < t < x \end{cases}\right\}$$

missä $\varepsilon > 0$ on riittävän pieni ja $z > y > x > 0$.

Selvää on, että kunkin henkilön on kuuluttava johonkin luokista 1, 2, ..., m. Tästä seuraa, että

$$\sum_{k=1}^{m} p_{jk}(y,z|x) = 1 .$$

1) P on todennäköisyysfunktio

Edelleen on selvää, että kuolleiden luokka m muodostaa absorvoivan tilan, jolle pätee yhtälö

(2.2.2) $$p_{mk}(y,z|x) = \delta_{mk}\ ,\ \text{missä}$$

$$\delta_{mk} = \begin{cases} 1, & \text{kun } k = m \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

Siirtymätodennäköisyyden $p_{jk}(y,z|x)$ ehdollisuudesta seuraa, että

(2.2.3) $$p_{jk}(y,y|x) = \delta_{jk}\ .$$

Koska $p_{jk}(y,z|x)$ riippuu luokkien j ja k lisäksi myös i´istä x ja y, on sille vaikea löytää sovellutuskelpoista matemaattista esitystä. Tarkastelu yksinkertaistuu huomattavasti, jos henkilöt ja luokat ovat niin homogeenisiä, että siirtymätodennäköisyys on riippumaton iästä x. Tällöin siirtymätodennäköisyys voidaan lyhyesti esittää muodossa

(2.2.4) $$p_{jk}(y,z|x) = p_{jk}(y,z)\ .$$

Näin voidaan tehdä esimerkiksi silloin, kun rajoitutaan tutkimaan vain eläviä (luokka 1) ja kuolleita (luokka 2), sillä vakuutusmatematiikasta tutuista esityksistä:

$${}_np_x = e^{-\int_o^n \mu_{x+t}dt} = p_{11}(x,x+n) \quad \text{ja}$$

$${}_nq_x = 1 - {}_np_x = p_{12}(x,x+n)$$

havaitaan, että ne riippuvat vain i´istä x ja x+n.

2.3. Siirtymäintensiteetit

Seuraavassa oletetaan, että siirtymätodennäköisyyksien $p_{jk}(y,z|x)$ ainoat epäjatkuvuuskohdat ovat muotoa

(2.3.1) $$p_{jk}(y,z|x) \begin{cases} = 0, \text{ kun } z < z_0 \\ > 0, \text{ kun } z \geq z_o \geq x \end{cases} .$$

Lisäksi seuraavassa oletetaan, että raja-arvot

(2.3.2) $$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} p_{jk}(y,y+\Delta y|x) \quad , j \neq k$$

ovat olemassa, kun $0 \leq x \leq y$. Raja-arvoja (2.3.2) kutsutaan siirtymäintensiteeteiksi luokasta j luokkaan k ja niistä käytetään merkintää $\mu_{jk}(y|x)$.

Yhtälöstä (2.3.2) seuraa, että

(2.3.3) $$p_{jk}(y,y+\Delta y|x) = \Delta y \; \mu_{jk}(y|x) + 0(\Delta y) ,$$

missä 0(y) tarkoittaa funktiota, joka toteuttaa yhtälön

$$\lim_{\Delta y \to o} \frac{0(\Delta y)}{\Delta y} = 0$$

Todennäköisyyslaskennan peruslauseiden ja (2.3.3):n nojalla saadaan todennäköisyydelle $p_{jj}(y,y+\Delta y\,|\,x)$ esitys:

(2.3.4) $$p_{jj}(y,y+\Delta y\,|\,x) = 1 - \sum_{k\neq j} p_{jk}(y,y+\Delta y\,|\,x)$$

$$= 1 - \Delta y \sum_{k\neq j} \mu_{jk}(y\,|\,x) + 0(\Delta y)$$

josta saadaan edelleen

(2.3.5) $$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{1 - p_{jj}(y,y+\Delta y\,|\,x)}{\Delta y} = \sum_{k\neq j} \mu_{jk}(y\,|\,x)$$

Toisin sanoen

(2.3.6) $$\frac{d}{dz} p_{jj}(y,z\,|\,x)\Big|_{z=y} = -\sum_{k\neq j} \mu_{jk}(y\,|\,x)$$

Määritellään funktio $\mu_{jj}(y\,|\,x)$ siten, että

(2.3.7) $$\mu_{jj}(y\,|\,x) = -\sum_{k\neq j} \mu_{jk}(y\,|\,x)$$

Funktiota $\mu_{jj}(z\,|\,x)$ kutsutaan pysyvyysintensitensiteetiksi. Yhtälöistä (2.2.3) ja (2.3.2) ja (2.3.5) seuraa, että

(2.3.8) $$\frac{d}{dz} p_{jk}(y,z\,|\,x)\Big|_{z=y} = \mu_{jk}(y\,|\,x)$$

2.4. Pysyvyystodennäköisyydet

Jos henkilö i'issä x, y ja z kuuluu luokkaan j, ovat siirtymätodennäköisyyden $p_{jj}(y,z\,|\,x)$ kannalta tarkasteltuna myös ne tapaukset suotuisia, joissa henkilö ikävälillä (y,z) siirtyy luokasta toiseen. Olkoon $\bar{p}_{jj}(y,z|x)$ todennäköisyys siitä, että y-ikäinen henkilö, joka kuuluu luokkaan j, johon hän viimeksi on tullut x-ikäisenä, on koko ikävälin (y,z) luokassa j. Selvää on, että

(2.4.1) $$\bar{p}_{jj}(y,z|x) \leq p_{jj}(y,z|x)$$

Oletetaan, että aikavälillä $(y,y+\Delta y)$ siirtyminen luokasta j johonkin luokkaan $k \neq j$ ja tästä luokasta takaisin luokkaan j on niin harvinainen tapahtuma, että sen todennäköisyys on verrannollinen aikavälin pituuden neliöön($(\Delta y)^2 = 0(\Delta y)$). Tästä seuraa, että

(2.4.2) $$p_{jj}(y,y+\Delta y|x) = \bar{p}_{jj}(y,y+\Delta y|x) + 0(\Delta y),$$

Kun tähän huomioidaan (2.3.4) ja (2.3.8), saadaan

(2.4.3) $$\bar{p}_{jj}(y,y+\Delta y|x) = 1 - \Delta y \sum_{k\neq j} \mu_{jk}(y|x) + 0(\Delta y)$$

$$= 1 + \Delta y\, \mu_{jj}(y|x) + 0(\Delta y)$$

Jaetaan nyt ikäväli (y,z) n:ään yhtäsuureen osaan. Tällöin kunkin osavälin pituus on $(z-y)/n$. Jokaisella osavälillä $(y+(v-1)\frac{z-y}{n}, y+v\frac{z-y}{n})$; $v = 1, \ldots, n$; pätee (2.4.3):n mukaan yhtälö

(2.4.4) $$\bar{p}_{jj}(y+(v-1)\frac{z-y}{n}, y+v\frac{z-y}{n}|x) = 1+ \frac{z-y}{n}|x) + 0(\frac{z-y}{n})$$

Todennäköisyyslaskennan kertolaskusääntöön perustuvasta yhtälöstä

(2.4.5) $$\bar{p}_{jj}(y,z|x) = \prod_{v=1}^{n} \bar{p}_{jj}\left(y+(v-1)\frac{z-y}{n}, y+v\frac{z-y}{n}|x\right),$$

saadaan edelleen yhtälö

$$\ln \bar{p}_{jj}(y,z|x) = \sum_{v=1}^{n} \ln \bar{p}_{jj}\left(y+(v-1)\frac{z-y}{n}, y+v\frac{z-y}{n}|x\right).$$

Kun tähän sovelletaan (2.4.4):n tulos ja muistetaan, että $\ln(1+x) = x+0(x)$, saadaan logaritmille $\ln \bar{p}_{jj}(y,z)$ esitys

(2.4.6) $$\ln \bar{p}_{jj}(y,z|x) = \int_{y}^{z} \mu_{jj}(t|x)dt$$

Tästä seuraa, että

(2.4.7) $$\bar{p}_{jj}(y,z|x) = e^{\int_{y}^{z} \mu_{jj}(t|x)dt} = \prod_{k \neq j} e^{-\int_{y}^{z} \mu_{jk}(t|x)dt}$$

2.5. Todennäköisyys, että ensimmäinen siirtyminen tapahtuu johonkin tiettyyn luokkaan

Otetaan käyttöön merkintä $\bar{p}_{jk}(y,z|x)$, jolla tarkoitetaan todennäköisyyttä, että luokkaan j kuuluva y-ikäinen, joka on viimeksi tullut luokkaan j x-ikäisenä, siirtyy ikävälillä (y,z) luokasta j pois siten, että ensimmäinen siirtyminen tapahtuu luokkaan k. Matemaattisin merkinnöin $\bar{p}_{jk}(y,z|x)$ on siis muotoa

(2.5.1) $$\bar{p}_{jk}(y,z|x) = P\left\{\underline{X}(t) = \begin{cases} j, \text{ kun } y \leq t < v \leq z \\ k, \text{ kun } t = v \end{cases} \middle| \underline{X}(t)=j, \text{kun } x \leq t \leq y\right\}$$

Analogisesti yhtälön (2.4.3) kanssa saadaan yhtälö

(2.5.2) $$\bar{p}_{jk}(y,y+\Delta y|x) = p_{jk}(y,y+\Delta y|x)+0(\Delta y) = \Delta y\ \mu_{jk}(y|x) + 0(\Delta y)$$

Olkoon t välin (y,z) mielivaltainen piste. Todennäköisyys, että ensimmäinen siirtyminen luokkaan k tapahtuu ikävälillä $(t,t+\Delta t)$ on

(2.5.3) $$\bar{p}_{jj}(y,t|x)\ \mu_{jk}(t|x)\Delta t + 0(\Delta t)$$

Jaetaan jälleen väli (y,z) n:ään yhtäsuureen osaan. Kun $j \neq k$ pätee yhtälö

(2.5.4) $$\bar{p}_{jk}(y,z|x) = \sum_{v} \bar{p}_{jj}(y,y+v\,\tfrac{z-y}{n}\,|x)\ \mu_{jk}(y+v\,\tfrac{z-y}{n}\,|x)\tfrac{z-y}{n} + 0(\tfrac{z-y}{n})$$

Jakoa tihentämällä saadaan $\bar{p}_{jk}(y,z|x)$:lle $(j \neq k)$ esitys:

(2.5.5) $$\bar{p}_{jk}(y,z|x) = \int_y^z \bar{p}_{jj}(y,t|x)\ \mu_{jk}(t|x)dt$$

$$= \int_y^z e^{\int_y^t \mu_{jj}(v|x)dv}\ \mu_{jk}(t|x)dt$$

2.6.

Luokkien henkilömäärät

Oletetaan, että tarkastelun alkaessa kaikki kohortin L henkilöä ovat vastasyntyneitä luokkaan 1 kuuluvia. Tällöin pätee jokaisella tarkasteluhetkellä x yhtälö

(2.6.1) $$L = \sum_{j=1}^{m} l_j(x)\ \text{, missä}$$

$$l_j(x) = \begin{cases} \text{luokkaan } j \text{ kuuluvien } x\text{-ikäisten lukumäärä, kun } j \neq m \\ \text{tarkasteluhetkeen } x \text{ mennessä kuolleiden henkilöiden lukumäärä, kun } j = m \end{cases}$$

Oletetaan lisäksi, että tarkasteltavana oleva kohortti ja tutkittavana olevat luokat ovat sellaisia, että luokkaantuloikä x ei vaikuta siirtymäintensiteetteihin.

Näin ollen

$$\mu_{jk}(y|x) = \mu_{jk}(y)$$

Otetaan käytäntöön merkintä

(2.6.2) $$l_j(y|x)\Delta x + O(\Delta x) \; ,$$

jolla tarkoitetaan niiden luokkaan j kuuluvien y-ikäisten lukumäärää, jotka ovat viimeksi tulleet luokkaan j ikävälillä $(x,x+\Delta x)$. Mikäli intensiteetit $\mu_{jk}(x)$ ja lukumäärät $l_j(x)$ ovat tunnetut, saadaan $l_j(y|x)$ lasketuksi yhtälöstä

(2.6.3) $$l_j(y|x) = \sum_{k\neq j} l_k(x)\, \mu_{kj}(x)\, \bar{p}_{jj}(x,y|x)$$

Jos taas $l_j(y|x)$ on tunnettu, saadaan $l_j(y)$ yhtälöstä

(2.6.4) $$l_j(y) = l_j(0)\, \bar{p}_{jj}(0,y|0) + \int_0^y l_j(y|x)dx \; , \text{ missä}$$

$$l_j(0) = \begin{cases} L, \text{ kun } j = 1 \\ 0, \text{ kun } j \neq 1 \end{cases}$$

Pelkistetään tarkastelua vielä siten, että oletetaan siirtymäintensiteettien olevan riippumattomia siitä, mistä luokasta j;j≠m; siirtyminen tapahtuu. Tällöin

(2.6.5) $$\mu_{jk}(y|x) = \mu_{jk}(y) = \mu_k(y), \quad j \neq m$$

Koska luokka m muodostuu kuolleista, on $\mu_{mj}(v)$ kaikilla j:n arvoilla nolla.

Lukumääräfunktiot $l_j(y)$ toteuttavat j:n arvolla m differentiaaliyhtälön

(2.6.6) $$\frac{d}{dy} l_m(y) = [\, L - l_m(y) \,]\, \mu_m(y)$$

ja arvoilla $j \neq m$ differentiaaliyhtälön

(2.6.7) $$\frac{d}{dy} l_j(y) = l_j(y)\, \mu_{jj}(y) + \mu_j \, [\, L - l_m(y) - l_j(y)]$$

$$= - l_j(y) \sum_{k \neq j} \mu_k(y) + \mu_j \, [\, L - l_m(y) - l_j(y)]$$

Yhtälöstä (2.6.6) saadaan, että

(2.6.8) $$l_m(y) = L(1 - e^{-\int_0^y \mu_m(v)dv})$$

Kun (2.6.8) sijoitetaan yhtälöön (2.6.7), saadaan tämä muotoon

$$\frac{d}{dy} l_j(y) = - l_j(y) \sum_{k=1}^{m} \mu_k(y) + L\, \mu_j(y)\, e^{-\int_0^y \mu_m(v)dv}$$

Tästä saadaan edelleen, että

(2.6.9) $$l_j(y) = \int_0^y e^{-\int_x^m \Sigma_k(v)dv - \int_0^x \mu_m(v)dv} \mu_j(x)dx + l_j(0) e^{-\int_0^y \sum_{k=1}^{m} \mu_k(v)dv}$$

Olkoon $\lambda_j(y)$ luokkaan j kuuluvien y-ikäisten osuus hengissä olevista y-ikäisistä. Tällöin

(2.6.10) $$l_j(y) = L\, \lambda_j(y)\, e^{-\int_0^y \mu_m(v)dv}$$

Yhtälöstä (2.6.9) ja (2.6.10) saadaan $\lambda_j(y)$:n ratkaisuksi

(2.6.11) $$\lambda_j(y) = \int_0^y e^{-\int_x^y \sum_{k=1}^{m-1} \mu_k(v)dv} \mu_j(x)dx + \lambda_j(0) e^{-\int_0^y \sum_1^{m-1} \mu_k(v)dv}$$, missä

$$\lambda_j(0) = \begin{cases} 1, & \text{kun } j = 1 \\ 0, & \text{kun } j \neq 1 \end{cases}$$

2.7.

Luokkina aktiivit, työkyvyttömät ja kuolleet

Merkitään luokkia seuraavasti:

luokka 1 = aktiivit

luokka 2 = työkyvyttömät

luokka 3 = kuolleet

Oletetaan - kuten tähänkin asti on tehty - että siirtymäintensiteetit

(2.7.1) $$\mu_{jk}(y|x) \qquad j, k = 1, 2, 3$$

ovat tunnetut ja että ne ovat iän y suhteen jatkuvia. Lisäksi pelkistetään tarkastelua siten, että oletetaan intensiteettien (2.7.1) olevan iästä x riippumattomia. Tämä oletus merkitsee mm. sitä, että henkilön aikaisemmat työkyvyttömyysjaksot eivät lisää hänen riskiään tulla uudelleen työkyvyttömäksi. Koska iällä x ei ole merkitystä, jätetään jatkossa intensiteettien (2.7.1) merkinnästä ikä x pois, jolloin intensiteetin merkinnäksi tulee $\mu_{jk}(y)$.

Luokat 1 ja 2 muodostavat yhdessä elossa olevien luokan. Elossa olevien lukumäärä voidaan laskea siten, että intensiteettien $\mu_{jk}(y)$ avulla lasketaan ensin aktiivien ja työkyvyttömien lukumäärät ja sitten nämä yhdistetään. Useissa sovelletuksissa kuitenkin elossa olevien lukumäärä lasketaan määräämällä luokkien 1 ja 2 yhteiskuolevuus $\mu_3(y)$. Tällöin y-ikäisten elossa olevien lukumäärä saadaan yhtälöstä

(2.7.2) $$L(y) = L\, e^{-\int_0^y \mu_3(v)\,dv} \quad \text{, missä}$$

L = kohorttiin tarkastelun alkuhetkellä kuuluneiden vastasyntyneiden lukumäärä.

Yhtälöstä (2.7.2) ei vielä ilmene millään tavalla y-ikäisten aktiivien lukumäärä $l_1(y)$ eikä y-ikäisten työkyvyttömien $l_2(y)$ lukumäärä. Tiedetään ainoastaan, että

(2.7.3) $$L(y) = l_1(y) + l_2(y)$$

Ehdon (2.6.7) mukaan funktio $l_1(y)$ toteuttaa yhtälön

(2.7.4) $$\frac{d}{dy} l_1(y) = l_1(y)\, \mu_{11}(y) + l_2(y)\, \mu_{21}(y)$$

Tästä saadaan edelleen yhtälöt

(2.7.5) $$\begin{aligned}\frac{d}{dy} l_1(y) &= - l_1(y)\ [\mu_{12}(y) + \mu_{13}(y)] + l_2\ \mu_{21}(y)\\ &= - l_1(y)\ [\mu_{12}(y) + \mu_{13}(y)] + [L(y) - l_1(y)]\ \mu_{21}(y)\\ &= - l_1(y)\ [\mu_{12}(y) + \mu_{13}(y) + \mu_{21}(y)] + L(y)\mu_{21}(y)\\ &= - l_1(y)\ [\mu_{12}(y) + \mu_{13}(y) + \mu_{21}(y)]\\ &\quad + L\, e^{-\int_0^y \mu_3(v)dv}\ \mu_{21}(y)\end{aligned}$$

Differentiaaliyhtälön (2.7.5) ratkaisu on analoginen ratkaisulle (2.6.7) ja muotoa

(2.7.6) $$l_1(y) = L \int_0^y e^{\int_x^y \mu(v)dv - \int_0^x \mu_3(v)dv} \mu_{21}(x)dx + L e^{-\int_0^y \mu(v)dv},$$

missä

$$\mu(v) = \mu_{12}(v) + \mu_{13}(v) + \mu_{21}(v)$$

Yhtälöstä (2.7.3) saadaan työkyvyttömien lukumääräksi

$$L \int_0^y e^{-\int_x^y \mu(v)dv - \int_0^x \mu_3(v)dv} \mu_{21}(x)\,dx$$

3

Z-FUNKTIO

Funktio $Z(x,u)du$ ilmaisee todennäköisyyden, että vastasyntynyt sairastuu ikävälillä $(x-u-du, x-u)$ ja pysyy tämän sairauden johdosta työkyvyttömänä ainakin ikään x asti. Luvun 2 merkinnöin $Z(x,u)$ on muotoa

(3.1) $$Z(x,u) = p_{11}(0,x-u)\,\mu_{12}(x-u)\,\bar{p}_{22}(x-u,x)$$

Laskuperusteiden mukaan Z-funktio toteuttaa yhtälön

(3.2) $$\int_0^x Z(x,u)du = e^{-(a4)x} \qquad , x \geq u \geq 0$$

ja yhtälön

(3.3) $$Z(x,u) = \sum_{j=0}^{2} a_j e^{b_j x - c_j u} \qquad , x \geq u \geq e_0 (= 1/2 \text{ kk}), \text{ missä}$$

kertoimet a, b ja c ovat seuraavat:

$a_0 = 1{,}5 \times 10^{-4}$, $a_1 = 2{,}25 \times 10^{-5}$, $a_2 = 1{,}44 \times 10^{-4}$

$b_0 = 4{,}25 \times 10^{-2}$, $b_1 = 1{,}225 \times 10^{-1}$, $b_2 = -4{,}605 \times 10^{-3}$

$c_0 = 3{,}525 \times 10^{-1}$, $c_1 = 1{,}575 \times 10^{-1}$, $c_2 = 10^{-1}$

Funktiota $Z(x,u)$ ei siis ole eksplisiittisesti määritelty arvoilla $0 \leq u < e$. Z-malli tulkitsee integraalin

$$\int_0^x Z(x,u)du = e^{-(a4)x}$$

vastasyntyneen todennäköisyydeksi olla elossa iässä x. Näin ollen Z-malli olettaa aktiivien sairastelevan koko ajan, mutta nämä sairaudet ovat niin lyhytaikaisia, että niitä ei voi pitää työkyvyttömyystapauksina. Vastasyntyneen todennäköisyys olla x-ikäisenä aktiivi saadaan arvioitua integraalista

(3.4) $$\int_0^{e_o} Z(x,u)du = e^{-(a4)x} - \int_{e_o}^{x} Z(x,u)du$$

Arvio on hiukan liian suuri, sillä todennäköisyys (3.4) huomioi suotuisiksi tapauksiksi myös ne työkyvyttömyystapaukset, jotka ovat alkaneet ikävälillä $(x-e_o,x)$. Käytännön merkitystä tällä seikalla ei ole, mutta herää kuitenkin kysymys, pitäisikö mallia teoreettiselta kannalta tarkasteltuna muuttaa siten, että esitys (3.3.) laajennetaan myös arvoille $0 < u < e_o$.

Funktion $Z(x,u)$ esitys (3.3) muodostuu kolmesta komponentista. Näin ollen työkyvyttömyystapaukset voidaan luokitella kolmeen lajiin j sen perusteella, mikä komponentti selittää ko. tapauksen parhaiten. Kuhunkin lajiin j liittyy sille ominainen työkyvyttömyysintensiteetti, työkyvyttömyyden kesto jne., joista saadaan sopivilla punnustodennäköisyyksillä koko malliin liittyvät intensiteetit ja todennäköisyydet.

Jos oletetaan, että henkilöiden työkyky iän myötä vähenee siten, että on olemassa jokin pääteikä w, jonka täyttämisen jälkeen henkilöt viimeistään ovat työkyvyttömiä, voidaan funktio $Z(x,u)$ esittää muodossa:

(3.5) $$Z(x,u) = \sum_{j=o}^{2} p_j \left\{ \frac{|b_j|}{N_j} e^{b_j(x-u)} \right\} \frac{1}{G_j} e^{-g_j u} = \Sigma\, p_j\, Z_j(x,u) \ ,$$

missä

p_j on se punnustodennäköisyys, jolla "kohtalo" valitsee työkyvyttömyyslajin j.

(3.6) $\frac{|b_j|}{N_j} e^{b_j(x-u)}$ on lajin j osalta todennäköisyys, että vastasyntynyt tulee työkyvyttömäksi ikävälillä $(x-u-du, x-u)$

(3.7) $\frac{1}{G_j} e^{-g_j u}$ on lajin j osalta todennäköisyys, että työkyvyttömyys kestää vähintään ajan u ehdolla, että se on jo kestänyt ajan e_o .

$$Z_j(x,u) = \frac{|b_j|}{N_j} e^{b_j(x-u)} \frac{1}{G_j} e^{-g_j u}$$

Luvut N_j ja G_j ovat normeeraustekijöitä, joilla funktiot (3.6) ja (3.7) saadaan normeerattua todennäköisyyksiksi. Toisin sanoen ne määräytyvät yhtälöistä

$$N_j = \int_e^w |b_j| \, e^{b_j x} \, dx \qquad \text{ja}$$

$$G_j = \int_e^\infty g_j \, e^{-g_j u} \, du \, .$$

Kun pääteiäksi w valitaan 69 v 7,5 kk, saadaan painotodennäköisyyksille p_j seuraavat arvot:

$p_0 = 0,063683$

$p_1 = 0,927783$

$p_2 = 0,008534$

Lukujen p_j summa on yksi, joten ko. pääteiän arvolla luvut p_j muodostavat todennäköisyysjakauman. Tämä merkitsee sitä, että mainitulla pääteikäoletuksella työkyvyttömyystapaukset tulevat aina lajeista j "kohtalon" valitsemiksi elikä lajeilla j pystytään kaikki työkyvyttömyystapaukset selittämään.

Tästä syystä kiinnitetään jatkotarkasteluissa pääteiän w arvoksi 69 v 7,5 kk. Tällöin saadaan lukujen p_j lisäksi esityksessä (3.5) oleville kertoimille seuraavat arvot:

$N_0 = 18,278116$	$N_1 = 5058,695$	$N_2 = 0,27411$
$G_0 = 0,98715$	$G_1 = 0,99854$	$G_2 = 0,99565$
$g_0 = 0,31$	$g_1 = 0,035$	$g_2 = 0,104605$
$b_0 = 0,0425$	$b_1 = 0,1225$	$b_2 = -0,004605$

Todennäköisyys (3.4) tulee näillä oletuksilla muotoon

(3.8) $$\Sigma p_j \{ e^{-(a4)x} - \frac{|b_j|}{b_j+g_j} \frac{1}{N_j} (e^{b_j(x-e_0)} - \frac{1}{G_j} e^{-g_j x}) \}$$

$$= \Sigma p_j p^j_{11}(x) \text{ , missä}$$

$p^j_{11}(x)$ on lajin j osalta todennäköisyys, että vastasyntynyt on x-ikäisenä aktiivi.

Koska $\frac{|b_j|}{N_j} e^{b_j x}$ todennäköisyys, että vastasyntynyt tulee työkyvyttömäksi ikävälillä (x-dx,x), täytyy vastasyntyneen työkyvyttömyysintensiteetti iässä x olla muotoa

(3.9) $$\Sigma p_j \frac{|b_j| e^{b_j x}}{N_j \Sigma p_j p^j_{11}(x)}$$

Iän vaikutus työkyvyttömyysintensiteettiin ilmenee seuraavasta taulukosta:

		työkyvyttömyysintensiteetti		
ikä	koko malli o/oo	laji 0 o/oo	laji 1 o/oo	laji 2 o/oo
20	0,81	5,99	0,31	16,87
25	1,17	7.59	0,58	16,90
30	1,79	9,64	1.11	16.96
35	2,88	12,28	2,10	17,06
40	4,88	15,73	4,02	17,26
45	8,64	20,34	7,75	17,65
50	16,04	26,86	15,27	18,41
55	31,63	36,97	31,36	20,03
60	69,58	56,04	70,92	23,98
65	205,27	112,90	213,13	38,18

Z-mallin mukainen päättyvyys saadaan sijoittamalla raja-arvoon

$$\lim_{h\to 0} \frac{Z(x,u) - Z(x+h,u+h)}{Z(x,u)h}$$

esitys (3.5). Tällöin x-ikäisen henkilön, joka on ollut työkyvyttömänä ajan u, päättyvyys lajin j osalta on muotoa

$$\frac{\{\frac{|b_j|}{N_j} e^{b_j(x-u)}\} \frac{g_j}{G_j} e^{-g_j u}}{\Sigma p_j \{\frac{|b_j|}{N_j} e^{b_j(x-u)}\} \frac{1}{G_j} e^{-g_j u}} = \frac{Z_j(x,u)\, g_j}{Z(x,u)}$$

ja kokonaispäättyvyys muotoa

$$\Sigma p_j \frac{Z_j(x,u)\, g_j}{Z(x,u)} .$$

Jos oletetaan, että työkyvyttömän kuolevuus $\mu_{23}(x)$ toteuttaa yhtälön

(3.10) $$\mu_{23}(x) = 0{,}02 + \mu(x), \text{ missä}$$

- $\mu(x)$ = laskuperusteiden kohdan 1.2. mukainen kuolevuus
- 0,02 on vakio, joka likimain vastaa T. Lassilan 1977 tekemän SHV-työn mukaista approksimaatiota karkealla tarkkuudella

havaitaan iän ja työkyvyttömyyden keston vaikutus päättyvyyteen seuraavasta taulukosta:

ikä	kuolevuus	paranevuus	
	$\mu_{23}(x)$	kesto 1 v	kesto 5 v
	o/oo	o/oo	o/oo
20	20,33	144,19	100,29
25	20,54	125,13	84,33
30	20,86	103,67	67,77
35	21,39	82,56	52,79
40	22,24	63,75	40,39
45	23,59	47,97	30,45
50	25,78	34,85	22,16
55	29,29	23,40	14,43
60	34,94	12,15	5,91
65	44,03	0	0

Edelleen saadaan aktiivien, työkyvyttömien ja kuolleiden lukumäärät yhtälöistä

$$l_1(x) = L \cdot \Sigma\, p_j\, p_{11}^{j}(x)$$

$$l_2(x) = L(x) - l_1(x)$$

$$l_3(x) = L - L(x), \text{ missä}$$

L = vastasyntyneiden lukumäärä

$L(x) = L\, e^{-(a4)x}$

Kun vastasyntyneiden lukumääräksi L oletetaan 1.000.000 henkilöä, ilmenee lukumäärissä iän myötä tapahtuvat muutokset seuraavasta taulukosta:

ikä	aktiivit	työkyvyttömät	kuolleet
20	908.463	3.547	87.990
25	886.022	5.229	108.749
30	862.856	8.108	129.036
35	837.936	13.202	148.862
40	809.395	22.369	168.236
45	773.821	39.010	187.169
50	724.944	69.384	205.672
55	651.221	125.026	223.753
60	531.384	227.194	241.422
65	326.226	415.084	258.690

Työkyvyttömyyden keston odotusarvot lajien j sisällä ovat seuraavat:

laji 0	3,2 vuotta
laji 1	28,6 vuotta
laji 2	9,6 vuotta

Työkyvyttömyystapauksista emme kuitenkaan pysty varmasti sanomaan, mihin lajiin ko. tapaus kuuluu. Näin ollen työkyvyttömyyskeston odotusarvo koko mallin osalta saadaan liittämällä lajikohtaisiin odotusarvoihin punnustodennäköisyydet

$p_j \quad \frac{Z_j(x+u,u)}{Z(x+u,u)}$ = todennäköisyys, että kyse on lajista j ehdolla, että x-ikäinen työkyvytön on ollut työkyvyttömänä ajan u.

Tällöin odostusarvo tulee riippuvaiseksi sekä työkyvyttömyyden alkamisiästä x ja siitä, kuinka kauan työkyvyttömyys on on jo kestänyt.

4

RUOTSALAINEN TYÖKYVYTTÖMYYSMALLI

Ruotsalainen työkyvyttömyysmalli [1] perustuu seuraaviin funktioihin:

1) Funktioon v_x, joka ilmaisee todennäköisyyden, että henkilö sairastuu x-ikäisenä. Huomionarvoista on, että v_x ilmaisee todennäköisyyden suhteessa elossaoleviin eli suhteessa aktiiveihin ja työkyvyttömiin.

2) Funktioon $l_{[x]+t}$, joka ilmaisee todennäköisyyden, että x-ikäisenä sairastunut henkilö on yhä edelleen sairas ajan t kuluttua.

3) Funktioon r(k), joka huomioi sairausvakuutuksen karenssiajan vaikutuksen.

1) lähteenä ovat Carl Gösta Dillnerin artikkelit

1) New Bases for Long Term Sickness Insurance in Sweden from 1973 (Scand. Acturial J. 1974)

2) New Bases for Non-cancellable Sickness Insurance in Sweden (Scand. Acturial J. 1969)

4.1.

Sairastuvuusfunktio v_x ja karenssiajan funktio r(k)

Karenssiajan k funktio (r(k)) on muotoa:

(4.1.1)
$$r(k) = \begin{cases} 2{,}3 - 10{,}8\,k, & 0 \leq k \leq \frac{1}{12} \\ 1{,}6 - 2{,}4\,k, & \frac{1}{12} < k \leq 0{,}25 \\ 1 & , k > 0{,}25 \end{cases}$$

Koska funktion r(k) arvo on 1 kaikilla yli 3 kuukautta kestävillä karenssiajoilla, oletetaan jatkossa, että r(k) = 1.

Sairastuvuusfunktio v_x on muotoa (miehillä)

(4.1.2)
$$v_x = 0{,}4\, e^{\int_o^x \mu_x dx} = \frac{0{,}4}{l_x} \quad \text{, missä}$$

$$\mu_x = 0{,}006 + 0{,}000034 \times 10^{0{,}042x}$$

Naisten sairastuvuusfunktio saadaan miesten funktiosta lisäämällä 20 % funktion arvoihin

Työkyvyttömyysintensiteetti riippuu oleellisesti karenssiajasta k. Ruotsalaisessa työkyvyttömyysmallissa tämä on huomioitu siten, että työkyvyttömyysintensiteetti muodostuu funktioiden r(k), v_x ja $l_{[x]+k}$ tulosta. Taulukossa, joka on seuraavalla sivulla, on työkyvyttömyysintensiteetti laskettu karenssiajalla 1/2 kuukautta, 1 kuukausi ja 1 vuosi.

ikä x	työkyvyttömyysintensiteetti o/oo		
	k = 1/2 kk	k = 1 kk	k = 1 v
20	85,84	31,03	1,64
25	88,34	32,74	1,97
30	91,49	34,89	2,41
35	95,53	37,66	3,02
40	100,90	41,34	3,92
45	108,28	46,40	5,31
50	118,93	53,70	7,58
55	135,19	64,87	11,55
60	161,75	83,22	18,90
65	208,65	115,96	33,48

4.2.

Sairauden kestofunktio $l_{[x]+t}$

Funktio $l_{[x]+t}$ on muotoa

(4.2.1)
$$l_{[x]+t} = a_x e^{-80t} + b_x e^{-0,13t} + c_x e^{-1,5t} + d_x(0,15\, e^{-0,3t} + 0,85\, e^{-0,04t}) \text{ , missä}$$

$$a_x = 1 - b_x - c_x - d_x$$

$$b_x = 0,12$$

$$c_x = 0,006\, e^{0,04x}$$

$$d_x = 0,001 + 0,000011\, e^{0,13x}$$

Luvut a_x, b_x, c_x ja d_x voidaan kirjoittaa myös muotoon

(4.2.2) $$a_x = 0{,}879 - \frac{0{,}00024}{0{,}04e^{-0{,}04x}} - \frac{0{,}00000143}{0{,}13e^{-0{,}13x}}$$

$$b_x = 0{,}12$$

$$c_x = \frac{0{,}00024}{0{,}04e^{-0{,}04x}}$$

$$d_x = d_x^1 + d_x^2 \text{, missä}$$

$$d_x^1 = 0{,}001$$

$$d_x^2 = \frac{0{,}00000143}{0{,}13e^{-0{,}13x}}$$

Lukujen a_x, b_x, c_x ja d_x summa on 1 ja luvut ovat positiivisia, joten ne muodostavat kullakin x:n arvolla todennäköisyysjakauman. Tämän jakauman mukaisesti "kohtalo" arpoo työkyvyttömyyden kestojakauman neljästä vaihtoehdosta. Kuhunkin vaihtoehtoon liittyy satunnaismuuttuja $\underline{T}_i$; i = 1, ..., 4 ; joka ilmaisee työkyvyttömyyden keston tässä vaihtoehdossa. Vaihtoehdot ovat seuraavat:

Vaihtoehto 1

Vaihtoehto 1 esiintyy $l_{[x]+t}$:n lausekkeessa tulona $a_x\, e^{-80t}$. Tästä voidaan päätellä, että $\underline{T}_1$ on exponenttiaalisesti[1)] jakautunut parametrilla 80 ($\underline{T}_1 \sim \exp(80)$), sillä e^{-80t} on näin jakautuneeseen satunnaismuuttujaan liittyvä todennäköisyys tapahtumalle $\{ \underline{T}_1 > t \}$.

1) Satunnaismuuttuja on exp(λ) jakautunut, jos tiheysfunktio on muotoa $\lambda e^{-\lambda x}$.

syydessä

$$\frac{0{,}00000143}{0{,}13e^{-0{,}13x}}$$

on iän vaikutus otettu huomioon exp(0,13) mukaisesti jakautuneen ehtojakauman avulla.

5 SUOMALAISEN JA RUOTSALAISEN TYÖKYVYTTÖMYYSMALLIN VERTAILUA

Teoreettisesti tarkasteltuna ruotsalainen malli on varsin samanlainen suomalaisen mallin kanssa, sillä kumpikin koostuu painotettujen exponenttijakaumien lineaarisista yhdistelyistä. Tosin ruotsalaisessa mallissa on yksi komponentti enemmän. Tämä johtuu siitä, että ruotsalainen malli huomioi myös erittäin lyhytaikaiset sairaustapaukset, joita suomalainen malli ei huomioi, koska Z-funktio on tarkoitettu lähinnä TEL-järjestelmän käyttöön.

Työkyvyttömyysintensiteetti muodostuu ruotsalaisessa mallissa sairastuvuusintensiteetin, karenssifunktion ja kestofunktion tulosta.

Suomalaisessa mallissa ei työkyvyttömyysintensiteettiä tarvitse näin jakaa, koska perusteissa on määritelty kiinteä karenssiaika e (= 1/2 kk). Vertailtaessa sivuilla 18 ja 24 esitettyjä taulukoita keskenään havaitaan, että karenssiaikaa e vastaavat ruotsalaiset intensiteettiarvot ovat huomattavasti suuremmat kuin suomalaisen mallin mukaiset. Ero johtunee pääasiassa siitä, että suomalaista mallia käytetään eläkesovelluksiin, joissa lyhytaikaisilla työkyvyttömyyksillä ei ole merkitystä. Em. taulukoista voidaankin päätellä, että ruotsalaisen mallin työkyvyttömyysintensiteetti on hyvin lähellä suomalaisen mallin mukaista, jos karenssiaika on n. 3 kk.

Suomalaisen työkyvyttömyysmallin mukaan väestökuolevuus μ_x^S on vakio (a4) = 0,002 · ln 10. Ruotsalaisen mallin mukainen väestökuolevuus on iästä riippuva ja muotoa

$$\mu_x^R = 0{,}006 + 0{,}000034 \times 10^{0{,}042x} .$$

Tämän eron vaikutus ilmenee parhaiten kuolevuuden perusteella lasketuista elossa olevien lukumääristä l_x (vastasyntyneiden lukumäärä on 1.000.000).

ikä	elossa olevien lukumäärä l_x	
	μ_x^S	μ_x^R
20	912.010	986.018
25	891.851	981.579
30	870.964	976.241
35	851.138	969.452
40	831.764	960.332
45	812.831	947.490
50	794.328	928.756
55	776.247	900.838
60	758.578	858.933
65	741.310	796.559

Sekä suomalaisen että ruotsalaisen mallin etuna on pidettävä sitä, että niitä on käytännössä helppo soveltaa, koska niihin liittyvät funktiot ovat suljetussa muodossa integroituvia. Tässä työssä on osoitettu kuinka Z-funktiosta saadaan työkyvyttömyysintensiteetti ja päättyvyys, joka voidaan tietyin olettamuksin hajoittaa työkyvyttömien kuolevuuteen ja paranevuuteen. Vastaava yhteys intensiteetteihin on osoitettavissa myös ruotsalaisesta mallista. Tämän yhteyden perusteella voidaan parametrien arvoja seurata ja tarvittaessa muuttaa siten, että teoreettiset intensiteetit mahdollisimman hyvin vastaavat havaittuja intensiteetteja.