Markku Lehtinen

28.5.69

Tutkimus Normal Power -menetelmän soveltumisesta Compound Poisson -funktion arvojen laskemiseen

Seuraavassa tarkastellaan tapausta, jossa yhden vahingon jakaantumisfunktio $S(z)$ on Bohmanin ja Esscherin tutkimuksen (I osa: Skand. Akt. Tidskr. 1963 ss. 173-225; II osa: Skand. Akt. Tidskr. 1964 ss. 1-40) jakautuma Life insurance A sekä vahinkojen lukumäärän odotusarvon jakautuma sellainen, että odotusarvo todennäköisyydellä p on 500 ja todennäköisyydellä 1-p 1000, p = 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1.

Vahinkojen kokonaismäärän kertymäfunktiolle katsotaan saatavan tarkkoja arvoja, kun ne lasketaan kaavasta

$$\bar{F}_p(x) = p\, F(x;500,S) + (1-p)\, F(x;1000,S)$$

soveltamalla NP-menetelmää kumpaankin komponenttiin erikseen (NP-menetelmä antaa tunnetusti hyviä tuloksia silloin, kun vahinkojen lukumäärän odotusarvo on kiinteä).

Em. tuloksiin verrataan niitä arvoja, jotka saadaan käsittelemällä ko. yhdistelmää Compound Poisson -funktiona $G(x)$, jossa vahinkojen lukumäärän odotusarvon jakautuma on kaksiportainen ε-funktioiden kombinaatio.

Bohmanin ja Esscherin käyttämä yhden vahingon jakautuman kertymäfunktio on muotoa

$$S(z) = \sum_{\nu=1}^{r} A_\nu (1-e^{-z/a_\nu}) + \sum_{\nu=1}^{s} B_\nu\, \varepsilon(z-b_\nu),$$

missä vakiot ovat tapauksessa Life A seuraavan taulukon mukaiset:

ν	A_ν	a_ν	B_ν	b_ν
1	0,43396	0,22660	0,003002	15,37
2	0,26266	0,43433	0,002063	21,92
3	0,22514	1,04232	0,001876	31,16
4	0,06942	3,72305	0,000375	41,88
5			0,000938	63,49
6			0,000188	99,52
7			0,000188	129,02
8			0,000190	139,05

Käytännön sovellutuksia varten pisteissä $z = b_\nu$ olevat todennäköisyysmassat on "levitetty" välille $b_\nu - 2d$:stä $b_\nu + 2d$:hen tasakylkisiksi kolmioiksi, joiden kanta on $4d$ ja pinta-ala B_ν. S:n karakteristinen funktio on tällöin

$$\Psi(u) = \sum_{\nu=1}^{r} \frac{A_\nu}{1-a_\nu ui} + \left(\frac{\sin ud}{ud}\right)^2 \sum_{\nu=1}^{s} B_\nu e^{b_\nu ui}.$$

Tämän avulla on laskettu S:n momentit (liite 1) ja saatu

$$\alpha_1 = m = 1{,}000000$$
$$\alpha_2 = 19{,}1853$$
$$\alpha_3 = 1\,480{,}28$$
$$\alpha_4 = 160\,723\,.$$

Seuraavaksi on johdettu $F(x)$:n (liite 2) ja $G(x)$:n (liite 3) momentit ja saatu lopuksi lukujen γ_1 ja γ_2 lausekkeet (liite 4). Odotusarvon jakautumisfunktion $U(q)$ momentit on laskettu liitteessä 5. Luvuille σ, γ_1 ja γ_2 on saatu seuraavat numeroarvot:

p	n	σ	γ_1	γ_2
0	1000	138,511	0,557045	0,436657
0,25	875	252,314	-0,480959	-0,578322
0,5	750	277,289	0,220795	-1,226822
0,75	625	242,623	1,074194	0,090583
1	500	97,942	0,787781	0,873314.

NP-menetelmässä funktiota $G(x)$ approksimoidaan normaalijakautumalla siten, että

$$G(x) = \Phi(y),$$

missä muuttujan vaihdon välittää yhtälö

$$\frac{x - mn}{\sigma} = y + \frac{\gamma_1}{6}(y^2 - 1) + \frac{\gamma_2}{24}(y^3 - 3y) - \frac{\gamma_1^2}{36}(2y^3 - 5y).$$

Tämä yhtälö saa eri p:n arvoilla muodon

0	$0{,}000995y^3+0{,}092841y^2+0{,}988515y-0{,}092841-(x-1000)/138{,}511 = 0$
0,25	$0{,}036948y^3+0{,}080160y^2-1{,}104418y-0{,}080160+(x-875)/252{,}314 = 0$
0,5	$0{,}053826y^3-0{,}036799y^2-1{,}160124y+0{,}036799+(x-750)/277{,}289 = 0$
0,75	$0{,}060092y^3-0{,}179032y^2-1{,}148343y+0{,}179032+(x-625)/242{,}623 = 0$
1	$0{,}001910y^3+0{,}131297y^2+0{,}977030y-0{,}131297-(x-500)/97{,}942 = 0.$

Kun yo. yhtälöt on ratkaistu arvoilla $x = 750$, 1000, 1200 ja 1400, on tuloksiksi saatu seuraavat y:n, $\Phi(y)$:n ($= G(x)$:n) ja $\overline{F}_p(x)$:n arvot:

	p	y	$\Phi(y) = G(x)$	$\bar{F}_p(x)$	$\frac{G(x)-\bar{F}_p(x)}{\min\{1-\bar{F}_p(x);\bar{F}_p(x)\}}$
$x = 750$	0	-2,16069	0,01536		
	0,25	-0,50686	0,30613	0,25750	+19 %
	0,5	0,03169	0,51264	0,49924	+3 %
	0,75	0,56430	0,71372	0,74117	-11 %
	1	2,12271	0,98311		
$x = 1000$	0	0,09310	0,53709		
	0,25	0,38894	0,65134	0,65277	-0 %
	0,5	0,81283	0,79184	0,76846	+10 %
	0,75	1,34689	0,91099	0,88414	+23 %
	1	3,56400	0,99982		
$x = 1200$	0	1,37464	0,91538		
	0,25	1,28429	(ei järkevä tulos)		
	0,5	1,51679	0,93534	0,95769	-53 %
	0,75	2,01480	0,97804	0,97885	-4 %
	1	4,52147	1,00000		
$x = 1400$	0	2,44145	0,99269		
	0,25	iteraatio ei konvergoi järkevillä y:n arvoilla			
	0,5	- " -			
	0,75	2,90451	0,99816	0,99817	-0 %
	1	suuri	1,00000 .		

Niissä tapauksissa, jolloin esiintyy negatiivisia kumulantteja (γ_1:n osoittaja = 3. kumulantti ja γ_2:n osoittaja = 4. kumulantti), NP-menetelmä näyttää antavan erittäin epätasaisia tuloksia. Kun lisäksi "muuttujanvaihtoyhtälön" juuret muuttuvat kompleksisiksi jo sellaisilla x:n arvoilla, jotka ovat käytännön kannalta oleellisen tärkeitä, on NP-menetelmää yo. tapauksissa $p = 0{,}25$ ja $p = 0{,}5$ pidettävä käyttökelvottomana.

(Funktioiden $\frac{x-nm}{\sigma} + P_3(y)$ derivaatoista voidaan päätellä, että arvoilla $p = 0{,}25$, $0{,}5$ ja $0{,}75$ polynomi saavuttaa minimin vastaavasti y:n arvoilla 2,515, 2,918 ja 3,705. Kyseinen minimi on positiivinen, kun

$x > 1279$ tapauksessa $p = 0{,}25$,
$x > 1394$ " $0{,}5$ ja
$x > 1469$ " $0{,}75$.

Viimeisessä tapauksessa päädytään kompleksisiin y:n arvoihin vasta, kun x:n suuruus vastaa alle 1 ‰ :n vararikkotodennäköisyyttä. Käytännön kannalta tästä ilmiöstä ei näin ollen ole haittaa.)

Tapauksessa $p = 0,75$, jolloin em. kumulantit ovat positiivisia, NP-menetelmä sovellettuna Compound Poisson -funktioon antaa tyydyttäviä tuloksia, jotka sitä paitsi näyttävät olevan tarkimmillaan jakautuman mielenkiintoisella alueella. Asian perusteellisemmaksi selvittämiseksi on edellä olevaa taulukkoa täydennetty:

x	$\bar{F}_0(x)$	$\bar{F}_1(x)$	$G(x)$	$\bar{F}_{0,75}(x)$	virhe (kuten ed.)
1000	0,53709	0,99982	0,91099	0,88414	+23 %
1100	0,77887	0,99998	0,95251	0,94470	+14 %
1150	0,85969	0,99999	0,96700	0,96492	+6 %
1200	0,91538	1,00000	0,97804	0,97885	-4 %
1250	0,95128	1,00000	0,98616	0,98782	-14 %
1300	0,97311	1,00000	0,99191	0,99328	-20 %
1350	0,98573	1,00000	0,99576	0,99643	-19 %
1380	0,99040	1,00000	0,99735	0,99760	-10 %
1400	0,99269	1,00000	0,99816	0,99817	-1 %
1420	0,99445	1,00000	0,99881	0,99861	+14 %.

Vaikka lähempi tarkastelu tuottikin pienen pettymyksen (aikaisemmassa taulukossa sattuivat olemaan mukana sellaiset x:n arvot, joilla approksimaatio on tarkka), ovat NP-menetelmällä $G(x)$:lle saadut arvot silti käytännössä riittävän luotettavia. Edellisen perusteella tuntuu edellytyksenä olevan, että ainakin jakautuman 3. ja 4. kumulantti ovat positiivisia.

Yo. tuloksia on esitetty graafisesti liitteessä 6.

Koska edellä saadut tulokset ovat osittain kielteisiä, esitetään lisävalaistukseksi seuraavassa $G(x)$ laskettuna suoraan Edgeworth-sarjasta arvoilla $x = 1000$ ja 1200. Tällöin

$$G(x) = \Phi(t) - \varphi(t)\left[\frac{\gamma_1}{6}H_2(t) + \frac{\gamma_2}{24}H_3(t) + \frac{\gamma_1^2}{72}H_5(t)\right] = \Phi(t) - k(t)\,\varphi(t),$$

missä $t = (x - mn)/\sigma$ ja $H_k(t)$ on k:nnen asteen Hermiten polynomi. Näistä tulevat kysymykseen

$$H_2(t) = t^2 - 1,\quad H_3(t) = t^3 - 3t \text{ ja } H_5(t) = t^5 - 10t^3 + 15t.$$

Tulokset:

	p	t	k(t)	$\Phi(t)$	$\varphi(t)$	G(x)
<u>x = 1000</u>	0	0,00000	-0,092841	0,50000	0,39894	0,53704
	0,25	0,49541	0,113436	0,68968	0,35468	0,64945
	0,5	0,90159	0,098510	0,81616	0,26646	0,79011
	0,75	1,54561	0,166273	0,93890	0,12293	0,91846
	1	5,10495	26,655	1,00000	$0,8747\cdot10^{-6}$	0,99977

F(x):n momentit: $\alpha_k = \int_0^\infty x^k \, dS(x) = i^{-k}\psi^{(k)}(0)$ (tunnetaan)

$\beta_k = i^{-k}\varphi^{(k)}(0)$, missä $\varphi(u) = e^{n\psi(u)-n}$

$[\varphi(0) = \psi(0) = 1]$

β_1: $\varphi'(u) = n\psi'(u)\varphi(u)$ $\qquad \underline{\beta_1} = \frac{1}{i}\varphi'(0) = \frac{n}{i}\, i\alpha_1 \cdot 1 = n\alpha_1 = \underline{nm}$

β_2: $\varphi''(u) = n\psi''(u)\varphi(u) + n\psi'(u)\varphi'(u) = n\psi''(u)\varphi(u) + n^2\psi'(u)^2\varphi(u)$

$$\underline{\beta_2} = \frac{1}{i^2}\left[n\, i^2\alpha_2 + n^2 i^2\alpha_1^2\right] = \underline{n\alpha_2 + n^2 m^2}$$

β_3: $\varphi^{(3)}(u) = n\psi^{(3)}(u)\varphi(u) + n^{2}\psi''(u)\overset{\psi'(u)\varphi(u)}{\cancel{\varphi'(u)}} + 2n^2\psi''(u)\psi'(u)\varphi(u) + n^{3}\psi'(u)^2\overset{\psi'(u)\varphi(u)}{\cancel{\varphi'(u)}}$

$$= n\psi^{(3)}(u)\varphi(u) + 3n^2\psi''(u)\psi'(u)\varphi(u) + n^3\psi'(u)^3\varphi(u)$$

$$\underline{\beta_3} = \frac{1}{i^3}\left[n\, i^3\alpha_3 + 3n^2 i^2\alpha_2\, i\alpha_1 + n^3 i^3\alpha_1^3\right] = \underline{n\alpha_3 + 3n^2 m\alpha_2 + n^3 m^3}$$

β_4: $\varphi^{(4)}(u) = n\psi^{(4)}(u)\varphi(u) + n^{2}\psi^{(3)}(u)\overset{\psi'(u)\varphi(u)}{\cancel{\varphi'(u)}} + 3n^2\psi^{(3)}(u)\psi'(u)\varphi(u) + 3n^2\psi''(u)^2\varphi(u)$
$+ 3n^{3}\psi''(u)\psi'(u)\overset{\psi'(u)\varphi(u)}{\cancel{\varphi'(u)}} + 3n^3\psi''(u)\psi'(u)^2\varphi(u) + n^{4}\psi'(u)^{3}\overset{\psi'(u)\varphi(u)}{\cancel{\varphi'(u)}}$

$$= n\psi^{(4)}(u)\varphi(u) + 4n^2\psi^{(3)}(u)\psi'(u)\varphi(u) + 3n^2\psi''(u)^2\varphi(u) + 6n^3\psi''(u)\psi'(u)^2\varphi(u) + n^4\psi'(u)^4\varphi(u)$$

$$\underline{\beta_4} = \frac{1}{i^4}\left[n\, i^4\alpha_4 + 4n^2 i^3\alpha_3\, i\alpha_1 + 6n^3 i^2\alpha_2\, i^2\alpha_1^2 + 3n^2 i^4\alpha_2^2 + n^4 i^4\alpha_1^4\right]$$

$$= \underline{n\alpha_4 + 4n^2 m\alpha_3 + 6n^3 m^2\alpha_2 + 3n^2\alpha_2^2 + n^4 m^4}$$

G(x):n momentit $\qquad \bar\beta_k = \int_0^\infty \beta_k(nq)\,dU(q)$

$$\bar\beta_1 = \int_0^\infty \beta_1(nq)\,dU(q) = \int_0^\infty nq\cdot m\,dU(q) = nm\int_0^\infty q\,dU(q) = nm\,.$$

$$\bar\beta_2 = \int_0^\infty \beta_2(nq)\,dU(q) = \int_0^\infty nq\cdot\alpha_2\,dU(q) + \int_0^\infty (nq)^2 m^2\,dU(q)$$
$$= n\alpha_2 + n^2m^2\left[\int_0^\infty q^2\,dU(q)\right]$$

$$\bar\beta_3 = \int_0^\infty \beta_3(nq)\,dU(q) = \int_0^\infty nq\cdot\alpha_3\,dU(q) + \int_0^\infty 3(nq)^2 m\alpha_2\,dU(q) + \int_0^\infty (nq)^3 m^3\,dU(q)$$
$$= n\alpha_3 + 3n^2m\alpha_2\int_0^\infty q^2\,dU(q) + n^3m^3\int_0^\infty q^3\,dU(q)$$

$$\bar\beta_4 = \int_0^\infty \beta_4(nq)\,dU(q) = \int_0^\infty nq\cdot\alpha_4\,dU(q) + \int_0^\infty 4(nq)^2 m\alpha_3\,dU(q) + \int_0^\infty 6(nq)^3 m^2\alpha_2\,dU(q)$$
$$+ \int_0^\infty 3(nq)^2\alpha_2^2\,dU(q) + \int_0^\infty (nq)^4 m^4\,dU(q)$$
$$= n\alpha_4 + (4n^2m\alpha_3 + 3n^2\alpha_2^2)\int_0^\infty q^2\,dU(q)$$
$$+ 6n^3m^2\alpha_2\int_0^\infty q^3\,dU(q) + n^4m^4\int_0^\infty q^4\,dU(q)$$

$$\begin{aligned}
\bar\beta_1 &= nm \quad (=P)\\
\bar\beta_2 &= n\alpha_2 + n^2m^2\beta_2^q\\
\bar\beta_3 &= n\alpha_3 + 3n^2m\alpha_2\beta_2^q + n^3m^3\beta_3^q\\
\bar\beta_4 &= n\alpha_4 + (4n^2m\alpha_3 + 3n^2\alpha_2^2)\beta_2^q + 6n^3m^2\alpha_2\beta_3^q + n^4m^4\beta_4^q
\end{aligned}$$

$$\bar\mu_1 = 0$$
$$\bar\mu_2 = \int_0^\infty (x-P)^2\,dG(x) = \bar\beta_2 - P^2 = n\alpha_2 + n^2m^2(\beta_2^q - 1) = n\alpha_2 + n^2m^2\mu_2^q$$
$$\bar\mu_3 = \int_0^\infty (x-P)^3\,dG(x) = \bar\beta_3 - 3P\bar\beta_2 + 3P^2\bar\beta_1 - P^3 =$$
$$= n\alpha_3 + \cancel{3n^2m\alpha_2}\beta_2^q + n^3m^3\beta_3^q - \cancel{3n^2m\alpha_2} - 3n^3m^3\beta_2^q + 3n^3m^3 - n^3m^3$$
$$= n\alpha_3 + 3n^2m\alpha_2\mu_2^q + n^3m^3(\beta_3^q - 3\beta_2^q + 2)$$
$$= n\alpha_3 + 3n^2m\alpha_2\mu_2^q + n^3m^3\mu_3^q$$
$$\bar\mu_4 = \int_0^\infty (x-P)^4\,dG(x) = \bar\beta_4 - 4P\bar\beta_3 + 6P^2\bar\beta_2 - 4P^3\bar\beta_1 + P^4 = \ldots$$
$$= n\alpha_4 + 3n^2\alpha_2^2 + (4n^2m\alpha_3 + 3n^2\alpha_2^2 + 6n^3m^2\alpha_2)\mu_2^q + 6n^3m^2\alpha_2\mu_3^q + n^4 \mu_4^q$$

Lukujen γ_1 ja γ_2 lausekkeet

$$\gamma_1 = \frac{\bar{\mu}_3}{\bar{\mu}_2^{3/2}} = \frac{n\alpha_3 + 3n^2 m \alpha_2 \mu_2^q + n^3 m^3 \mu_3^q}{(n\alpha_2 + n^2 m^2 \mu_2^q)^{3/2}} \qquad \text{(Elfving: vinous)}$$

$$\left(= \frac{\alpha_3}{\alpha^3 \sqrt{n}}, \text{ kun } U(q) = \varepsilon(q-1) \right)$$

$$\gamma_2 = \frac{\bar{\mu}_4}{\bar{\mu}_2^2} - 3 \qquad \text{(Elfving: huipukkuus)}$$

$$= \frac{n\alpha_4 + 3n^2\alpha_2^2 + (4n^2 m \alpha_3 + 3n^2\alpha_2^2 + 6n^3 m^2 \alpha_2)\mu_2^q + 6n^3 m^2 \alpha_2 \mu_3^q + n^4 m^4 \mu_4^q}{(n\alpha_2 + n^2 m^2 \mu_2^q)^2}$$

$$= \frac{n\alpha_4 + (4n^2 m \alpha_3 + 3n^2\alpha_2^2)\mu_2^q - 3n^4 m^4 (\mu_2^q)^2 + 6n^3 m^2 \alpha_2 \mu_3^q + n^4 m^4 \mu_4^q}{(n\alpha_2 + n^2 m^2 \mu_2^q)^2}$$

$$\left(= \frac{\alpha_4}{n\alpha^4}, \text{ kun } U(q) = \varepsilon(q-1) \right)$$

Kun funktio S on normeerattu siten, että $m = 1$, on

$$\begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{n\alpha_3 + 3n^2\alpha_2 \mu_2^q + n^3 \mu_3^q}{(n\alpha_2 + n^2 \mu_2^q)^{3/2}} \\[2ex] \gamma_2 = \dfrac{n\alpha_4 + (4n^2\alpha_3 + 3n^2\alpha_2^2)\mu_2^q - 3n^4 (\mu_2^q)^2 + 6n^3\alpha_2 \mu_3^q + n^4 \mu_4^q}{(n\alpha_2 + n^2 \mu_2^q)^2} \end{cases}$$

U(q):n momenttien numeroarvot

$p = 0{,}25$

$P\{\nu = 500\} = 0{,}25$, $P\{\nu = 1000\} = 0{,}75$

$m = 0{,}25 \cdot 500 + 0{,}75 \cdot 1000 = 875$

$$U(q): \begin{cases} P\{\frac{\nu}{m} = \frac{4}{7}\} = 0{,}25 \\ P\{\frac{\nu}{m} = \frac{8}{7}\} = 0{,}75 \end{cases}$$

$$\mu_2^q = \int (q-1)^2 dU(q) = 0{,}25 \cdot (-\tfrac{3}{7})^2 + 0{,}75 (\tfrac{1}{7})^2 = \tfrac{3}{49}$$

$$\mu_3^q = \frac{-6}{343}$$

$$\mu_4^q = \frac{21}{2401}$$

$p = 0{,}5$

$P\{\nu = 500\} = P\{\nu = 1000\} = 0{,}5$

$m = 750$

$$U(q): \begin{cases} P\{\frac{\nu}{m} = \frac{2}{3}\} = 0{,}5 \\ P\{\frac{\nu}{m} = \frac{4}{3}\} = 0{,}5 \end{cases}$$

$$\mu_2^q = \quad 0{,}5 \cdot (\tfrac{1}{3})^2 + 0{,}5 (\tfrac{1}{3})^2 = \tfrac{1}{9}$$

$$\mu_3^q = 0$$

$$\mu_4^q = \frac{1}{81}$$

$p = 0{,}75$

$P\{\nu = 500\} = 0{,}75$, $P\{\nu = 1000\} = 0{,}25$

$m = 625$

$$U(q): \begin{cases} P\{\frac{\nu}{m} = \frac{4}{5}\} = 0{,}75 \\ P\{\frac{\nu}{m} = \frac{8}{5}\} = 0{,}25 \end{cases}$$

$$\mu_2^q = \quad 0{,}75 \cdot (-\tfrac{1}{5})^2 + 0{,}25 (\tfrac{3}{5})^2 = \tfrac{3}{25}$$

$$\mu_3^q = \frac{6}{125}$$

$$\mu_4^q = \frac{21}{625}$$

Vararikkotodennäköisyys

laskettuna NP-menetelmällä soveltaen sitä "komponenteittain" (yhtenäinen viiva) ja suoraan yhdistettyyn funktioon (katkoviiva).