

TEL:n työkyvyttömyysmalli:

Z-pinnan parametrien määrittäminen pinnansovitustehtävänä



**SHV-harjoitustyö
Jaakko Tuomikoski
1.4.1986**

Sisältö

1.	Z-pinnan sovitusongelma	1
2.	Z-malliin liittyvien jakaumien sekoitusluonne	2
2.1.	Z-funktio	2
2.2.	Z-pinnan sekoitusluonne	4
2.3.	Työkyvyttömyyden mennyt ja tuleva kesto	5
2.4.	Kestojen jakaumat ja eräät todennäköisyydet Z-mallissa	6
2.5.	Z-mallin mukaiset pääoma-arvot	10
2.6.	Alkavuuden ja päättyvyyden erottaminen Z-mallissa	11
3.	Metodi Z-pinnan sovittamiseksi	13
3.1.	Z-pinnan sovitus tehtävän yleinen luonne	13
3.2.	Ehdollinen sovitus tehtävä	13
3.3.	Pinnan sovitus, kun keston odotusarvot on kiinnitetty	14
3.4.	Pilot-koe	15
3.5.	Päättyvyyksiin perustuva menetelmä	16
4.	Empiiristen Z-arvojen laskeminen	17
4.1.	TEL-yhtiöiden työkyvyttömyyseläkkeiden päättymistiedot	17
4.2.	Z-arvon jako tekijöihinsä	18
4.3.	Työkyvyttömyyskeston liittyvien todennäköisyyksien estimoiminen	19
4.4.	Z-arvon muiden tekijöiden määrittäminen	21
4.5.	Empiirisen pinnan graafinen esittäminen	23
5.	Optimointimenetelmät	24
5.1.	Välineistö	24
5.2.	Algoritmit	24
5.3.	Kohdefunktion laskenta	25
5.4.	Kohdefunktion gradientin laskeminen	27
5.5.	Eräiden ratkaisujen diskriminoimisesta	29
6.	Algoritmien kokeilua testiympäristössä	32
6.1.	Koejärjestelyt; pinta I	32
6.2.	Hooke-Jeeves -algoritmin askelpituus	32
6.3.	Algoritmien loppukonvergenssin vertailua	33
6.4.	Valitun lähtöpisteen merkitys	34
6.5.	Pinta II	35
6.6.	Epäonnistumisten luonteesta	35
7.	Herkkyysanalyysi keskikestojen suhteen	36
8.	Menetelmän kokeilu käytännössä	39
8.1.	Yleistä	39
8.2.	Aineiston valinta	39
8.3.	Optimaalisen ratkaisun etsiminen	39
8.4.	Harkinnan käyttö keskikestojen valinnassa	44
8.5.	Pyöristys	45
8.6.	Yhteenvedo vakioiden kiinnittämismenetelmästä	45
9.	Jatkotutkimuksen aiheita	47
9.1.	Kalenterivuoden ja sukupuolen vaikutukset	47
9.2.	Alkavuuden vaikutuksen eliminoiminen	47
	Summary	49

Kuviot 1-11

Viitteet

1. Z-pinnan sovitusongelma

TEL:n laskuperustemallissa työkyvyttömyysilmiön tarkastelu perustuu ns. Z-malliin, jossa työkyvyttömyystodennäköisyyden riippuvuus iästä ja työkyvyttömyyden kestosta kiinnitetään seuraavassa tarkemmin esiteltävän Z-funktion avulla. Tämän funktion kuvaajaa kutsutaan vastaavasti Z-pinnaksi.

Kuten jokaiseen malliin, Z-malliinkin liittyy käytännön tehtävänä sen parametrien etsiminen siten, että päästään empiirisiä havaintoja mahdollisimman hyvin vastaavaan tulokseen. Tämän tutkimuksen lähtökohtana on Työeläkelaitosten liiton työkyvyttömyysperustejaoksessa esitetty ajatus tässä perinteisesti käytetyn menetelmän korvaamisesta uudella, jossa parametrit kiinnitettäisiin estimoidulla Z-funktion esittämät todennäköisyydet suoraan empiirisestä aineistosta, ja sovittamalla Z-pinta näihin havaintoihin jollakin yleisesti käytetyllä pinnansovitusmenetelmällä. Yleisessä muodossaan tämä ongelmanasettelu johtaa yhdeksän muuttujan funktion epälineaariseen optimointitehtävään, jonka ratkaisemisessa jaos ei aikaisemmin ole päässyt tyydyttävään tulokseen.

Tässä tutkimuksessa tehtävälle esitetään ratkaisu, jonka lähtökohtana on Z-funktion työkyvyttömyyden kestolle määrittämien ehdollisten jakaumien esittäminen eksponenttijakaumien sekoituksina. Tämä tulkinta johtaa luonnolliseen tapaan ehdollistaa sovitus tehtävä siten, että komponenttijakaumien odotusarvot, joiden suhteen ratkaisu ei ole kovin herkkä, kiinnitetään ennalta. Estimoitavien parametrien määrä laskee näin kuuteen, minkä ohella tarjoutuu mahdollisuus jakaa optimoinnin tekninen toteutus lineaariseen ja epälineaariseen osuuteen siten, että vain jälkimmäistä ratkaistaessa joudutaan turvautumaan iteratiivisiin menetelmiin.

Näin menetellen ei kuitenkaan jouduta luopumaan mahdollisuudesta löytää haluttaessa globaalikin ratkaisu karkealla tasolla: tähän päästään käymällä läpi sopivin välein valittu joukko ennalta kiinnitettävien kolmen parametrin yhdistelmiä. Globaaliin ratkaisuun pyrkimistä tärkeämpää on kuitenkin terveen arvostelukyvyn käyttäminen laskuperusteita käytännössä laadittaessa.

Menetelmän antamiin kokemuksiin perustuen luonnostellaan myös tekniikka pääoma-arvoja varten tarvittavien parametrien määrittämiseksi täysin irrallaan työkyvyttömyysalkavuuden tasoon liittyvistä parametreista. Tämän menetelmän kokeileminen käytännössä jätetään kuitenkin myöhempään yhteyteen.

2. Z-malliin liittyvien jakaumien sekoitusluonne

2.1. Z-funktio

TEL:n työkyvyttömyysmallin perusobjekti on funktio Z , jonka argumentteina ovat ikä t ja työkyvyttömyyden kesto u . Karkeasti voidaan sanoa Z -funktion ilmoittavan todennäköisyyden sille, että vastasyntynyt on elossa iässä t ja on tällöin ollut työkyvytön ajan u .

Arvoilla $t > u > e_0$ funktiolla Z on erityisperusteissa annettavista parametreista (a_i) ja (b_i) riippuva arvo

$$(1) \quad Z(t, u) = \sum_{j=0}^2 (b(3+j))(a(5+j)) e^{(b(6+j))(a(8+j))t - (a(11+j))u}$$

Työkyvyttömyyden keston alarajan e_0 alapuolella Z -funktiota ei määritellä, vaan tyydytään edellyttämään, että se toteuttaa ehdon

$$\int_0^t Z(t, u) du = \exp(-(a_4)t).$$

Laskuperusteissa käytetty, yhtälöstä (1) ilmenevä parametrisointi johtuu perusteissa yleisesti käytetystä tavasta jakaa parametrit harvoin muutettaviin yleisvakioihin (a_i) ja joustavammin muutettaviksi tarkoitettuihin erikoisvakioihin (b_i) . Seuraavissa tarkasteluissa monimutkaisesta parametrisoinnista ei ole hyötyä, joten siirrytään yksinkertaisempaan merkitsemällä

$$(2) \quad Z(t, u) = \sum_{j=0}^2 Z_j(t, u) = \sum_{j=0}^2 a_j e^{b_j t - c_j u}.$$

Vanhojen ja uusien vakioiden yhteys käy ilmi lausekkeita (1) ja (2) vertailemalla; osittain yhteisten kirjainten käytöstä syntyvän sekaannuksen vaaran estäneen poikkeava indeksien sijoitus.

Työkyvyttömyysmallin parametreja on muutaman vuoden välein muutettu. Seuraaviin taulukoihin on koottu lukuja, jotka kuvaavat parametrisointien (1) ja (2) yhteyksiä. Perusteet A korvattiin perusteilla B vuosien 1982 ja 1983 vaihteessa, ja perusteet C astuivat voimaan vuosien 1985 ja 1986 vaihteessa.

Taulukko 1: Työkyvyttömyysmallin yleis- ja erikoisvakiot perusteissa A, B ja C

	A	B	C
a(5)	0.00015	0.0002154	0.0002154
a(6)	0.0000225	0.00002406	0.00002406
a(7)	0.000144	0.000144	0.000144
a(8)	0.0425	0.0425	0.0625
a(9)	0.1225	0.1207	0.1407
a(10)	-0.004605	-0.004605	0.015395
a(11)	0.3525	0.3525	0.3725
a(12)	0.1575	0.1457	0.1657
a(13)	0.1	0.1	0.12
b(3)	1	0.4	0.18
b(4)	1	0.8	0.36
b(5)	1	0.4	0.18
b(6)	1	1	1
b(7)	1	1	1
b(8)	1	1	1

Taulukko 2: Esityksen (2) mukaiset parametrit perusteissa A, B ja C

	A	B	C
a ₀	0.00015	0.00008616	0.000038772
a ₁	0.0000225	0.000019248	0.0000086616
a ₂	0.000144	0.0000576	0.00002592
b ₀	0.0425	0.0425	0.0625
b ₁	0.1225	0.1207	0.1407
b ₂	-0.004605	-0.004605	0.015395
c ₀	0.3525	0.3525	0.3725
c ₁	0.1575	0.1457	0.1657
c ₂	0.1	0.1	0.12

On tunnettua, että Z-funktiolla on läheinen yhteys eksponenttijakaumiin (vrt. [3] ja [4]). Luvun 2 loppuosan muodostaa näihin yhteyksiin kohdistuva tarkempi analyysi.

2.2. Z-pinnan sekoitusluonne

Z-mallin mukainen työkyvyttömyysilmiön stokastinen rakenne tulee parhaiten esiin, kun määritetään ikään t ja keston u liittyvä, työkyvyttömyyden vastaisen keston

$$T^P(t, u)$$

jakauma: suoraan Z-funktiolle annetun tulokinnan mukaan on

$$\begin{aligned} P(T^P(t, u) > h) &= Z(t+h, u+h) / Z(t, u) \\ &= \sum_{j=0}^2 \frac{Z_j(t, u)}{Z(t, u)} e^{(b_j - c_j)h}, \end{aligned}$$

missä sievennettyyn muotoon päästään soveltamalla yhtälöstä (2) välittömästi seuraavaa kaavaa

$$(3) \quad Z_j(t+h, u+k) = Z_j(t, u) e^{b_j h} e^{-c_j k}.$$

Kun vielä otetaan käyttöön merkinnät

$$(4) \quad \begin{cases} \mu_j = -(b_j - c_j) \\ \lambda_j = 1/\mu_j \end{cases}, \quad j=0, 1, 2,$$

havaitaan, että yllä laskettu todennäköisyys voidaan edelleen kirjoittaa muotoon

$$(5) \quad P(T^P(t, u) > h) = \sum_{j=0}^2 \frac{Z_j(t, u)}{Z(t, u)} e^{-\mu_j h}.$$

Tästä saadaan tulevan keston jakauman tiheysfunktiksi

$$f_{T^P(t, u)}(h) = \sum_{j=0}^2 \frac{Z_j(t, u)}{Z(t, u)} \mu_j e^{-\mu_j h}, \quad \text{kun } h > 0.$$

Muuttujan $T^P(t, u)$ jakauma on siten sekoitus kolmesta eksponenttijakaumasta, joissa parametreina ovat suureet μ_j ja "elinajan" odotusarvoina näiden käänteisluvut λ_j . Kootaan vielä perusteisiin A, B ja C liittyvät keston odotusarvot taulukkoon:

Taulukko 3: Komponentteihin $j=0, 1$ ja 2 liittyvät keston odotusarvot.

	A	B	C
λ_0	3.23	3.23	3.23
λ_1	28.57	40	40
λ_2	9.56	9.56	9.56

Z-funktion kolme termiä vastaavat siten lyhyitä, pitkiä ja keskipitkiä työkyvyttömyyskestoja. Komponenttien ominaisuudet on esitetyissä kahdessa perustemuutoksessa jätetty tältä osin ennalleen lukuunottamatta A:sta B:hen siirryttäessä toteutettua pisimmän komponentin odotusarvon kasvattamista.

2.3. Työkyvyttömyyden mennyt ja tuleva kesto

Z-malliin liittyvien jakaumien tarkastelemiseksi yleisemmin määritellään seuraavassa eräitä apumuuttujia.

Tarkastellaan ajan suhteen jatkuvaa stokastista prosessia $\{X(t), t \geq 0\}$, jonka kolme tilaa ovat seuraavat:

$$X(t) = \begin{cases} 1 & \text{jos henkilö on aktiivi} \\ 2 & \text{jos henkilö on työkyvytön} \\ 3 & \text{jos henkilö on kuollut.} \end{cases}$$

Luvussa 2.2 määritellyn keston $T^P(t, u)$ lisäksi määritellään vielä kestot

$$\begin{cases} T^{RX}(t) = \text{työkyvyttömyyden mennyt (retrospektiivinen) kesto } t\text{-ikäisellä työkyvyttömällä, ts. aika, jonka iässä } t \text{ tilassa 2 oleva henkilö on ollut ko. tilassa} \\ T^P(t) = \text{työkyvyttömyyden tuleva (prospektiivinen) kesto } t\text{-ikäisellä työkyvyttömällä.} \end{cases}$$

Prosessin $\{X(t)\}$ rinnalla tarkastellaan vielä sen muunnosta

$$Y(t) = \begin{cases} 1 & \text{jos } X(t)=1 \text{ tai } X(t)=2 \text{ ja } T^{RX}(t) < e_0 \\ 2 & \text{jos } X(t)=2 \text{ ja } T^{RX}(t) \geq e_0 \\ 3 & \text{jos } X(t)=3. \end{cases}$$

Prosessien ainoa ero on siis siinä, että Y-prosessi laskee henkilön työkyvyttömäksi vasta, kun odotusaika e_0 on kulunut umpeen. Myös prosessissa $\{Y(t)\}$ voidaan määritellä työkyvyttömyydelle sekä mennyt että tuleva kesto; nämä mittaavat tällöin aikaa, jonka henkilö Y-prosessin mukaan viettää tilassa 2. Retrospektiivisen keston osalta tulee tehdä ero eri prosessien välillä, ja muuttujia sitoo toisiinsa ehto

$$(6) \quad T^{RY}(t) = T^{RX}(t) - e_0, \text{ kun } Y(t)=2 \text{ eli } T^{RX}(t) \geq e_0.$$

Tulevan keston osalta vastaavaa erottelua ei ole tarpeen tehdä, koska tarkasteltaessa sen jakaumaa seuraavassa edellytetään, että $Y(t)=2$.

Z-malliin liittyvä omintakeinen piirre, jonka mukaan itse asiassa samastetaan useita prosesseja, jotka eroavat toisistaan vain alle odotusajan e_0 pituisten tilassa 2 vietettyjen jaksojen jakaumaominaisuuksien osalta, vaikeuttaa eräiden malliin liittyvien todennäköisyyksien laskentaa. Niinpä esimerkiksi

- kaikki prosessiin $\{X(t)\}$ liittyvät siirtymäintensiteetit jäävät kiinnittymättä
- prosessiin $\{Y(t)\}$ liittyvistä intensiteeteistä kiinnittyvät

$$\mu_{12}^Y \quad \text{ja} \quad \mu_{21}^Y + \mu_{23}^Y$$

- prosessiin $\{X(t)\}$ liittyvät todennäköisyydet $P(X(t)=1)$ ja $P(X(t)=2)$ eivät määräydy yksikäsitteisesti, mutta niiden summa kylläkin
- prosessiin $\{Y(t)\}$ liittyvät todennäköisyydet $P(Y(t)=1)$ ja $P(Y(t)=2)$ määräytyvät yksikäsitteisesti.

Käytännön tasolla vaikeuksia aiheuttaa lähinnä todennäköisyyden $P(X(t)=2)$ eli X-prosessin mukaisen työkyvyttömänä olon todennäköisyyden puuttuminen.

2.4. Kestojen jakaumat ja eräät todennäköisyydet Z-mallissa

Suoraan Z-funktion tulkinnasta saadaan lasketuksi todennäköisyys eräänlaiselle perustapahtumalle Y-prosessissa: kunhan $e_0 < u_1 < u_2 < t$, on

$$\begin{aligned} (7) \quad P(Y(t)=2 \ \& \ T^{RX}(t) \in (u_1, u_2)) \\ &= \int_{u_1}^{u_2} Z(t, u) du = \sum_{j=0}^2 a_j e^{b_j t} \frac{1}{c_j} (e^{-c_j u_1} - e^{-c_j u_2}), \\ &= \sum_{j=0}^2 \frac{1}{c_j} (Z_j(t, u_1) - Z_j(t, u_2)). \end{aligned}$$

Tämän kaavan erikoistapaus on

$$\begin{aligned} (8) \quad P(Y(t)=2) &= \sum_{j=0}^2 a_j e^{b_j t} \frac{1}{c_j} (e^{-c_j e_0} - e^{-c_j t}), \\ &= \sum_{j=0}^2 \frac{1}{c_j} (Z_j(t, e_0) - Z_j(t, t)). \end{aligned}$$

Koska

$$e^{-(a_4)t} = P(Y(t)=1 \text{ tai } Y(t)=2) = P(X(t)=1 \text{ tai } X(t)=2)$$

on siten

$$(9) \quad P(Y(t)=1) = e^{-(a_4)t} - \sum_{j=0}^2 \frac{1}{c_j} (Z_j(t, e_0) - Z_j(t, t)) .$$

Kuten ylempänä todettiin, eivät $P(X(t)=1)$ ja $P(X(t)=2)$ määräydy yksikäsitteisesti; tarvittaessa niitä voidaan approksimoida vastaavilla $Y(t)$ -prosessiin liittyvillä todennäköisyyksillä. Approksimaatiovirheen suunta on selvillä, koska

$$\begin{cases} P(Y(t)=1) \geq P(X(t)=1) & \text{ja} \\ P(Y(t)=2) \leq P(X(t)=2) \end{cases} .$$

Kestoista $T^{RX}(t)$ ja $T^P(t)$ on edellisen jakauma helpommin johdettavissa siirtymällä muuttujaan $T^{RY}(t) = T^{RX}(t) - e_0$: kunhan $0 < h < t - e_0$, saadaan kaavaa (7) soveltaen

$$(10) \quad \begin{aligned} P(T^{RY}(t) \leq h \mid Y(t)=2) &= \frac{P(Y(t)=2 \ \& \ T^{RX}(t) \in (e_0, h+e_0))}{P(Y(t)=2)} \\ &= \sum_{j=0}^2 \frac{\frac{1}{c_j} Z_j(t, e_0)}{P(Y(t)=2)} (1 - e^{-c_j h}) \end{aligned}$$

Muuttujan $T^{RY}(t)$ jakauma on siten sekoitus kolmesta katkaistusta eksponenttijakaumasta (tai yhtäpitävästi katkaisu kolmen eksponenttijakauman sekoitus), jossa jakaumien parametreina ovat suoraan parametrit c_j , ja sekoitussuhteet riippuvat siitä, kumpi tulkinta halutaan omaksua. Sekoitussuhteisiin vaikuttaa nyt luonnollisesti vain ikä t , ja parametreja vastaavat keskikestot ovat perusteita B käytössä 2.84, 6.86 ja 10 vuotta, perusteissa C taas 2.68, 6.04 ja 8.33 vuotta. Muutokselle on luonnollinen tulkinta: muutos perusteista B perusteisiin C tehtiin nopeuttamalla iän mukana tapahtuvaa alkavuuden kasvua, ja tämä heijastuu ymmärrettävästi menneen keston jakaumaan pyrkien pienentämään sen odotusarvoa.

Muuttujan $T^{RX}(t)$ jakauma ehdolla $T^{RX}(t) \geq e_0$ on sijaintiparametria lukuunottamatta sama kuin keston $T^{RY}(t)$ jakauma (vrt. yhtälö (6)).

Jotta prospektiivinen kesto ylittäisi arvon h henkilöllä, joka iässä t on työkyvytön, keston $T^{RX}(t+h)$ tulee olla välillä $(e_0+h, t+h)$:

$$P(T^P(t) > h \mid Y(t)=2) = \frac{P(Y(t+h)=2 \ \& \ T^{RX}(t+h) \in (e_0+h, t+h))}{P(Y(t)=2)}$$

joka kaavoja (3), (7) ja (8) käyttämällä saatetaan hel-
posti muotoon

$$(11) \quad P(T^P(t) > h \mid Y(t)=2) = \sum_{j=0}^2 \frac{\frac{1}{c_j} (Z_j(t, e_0) - Z_j(t, t))}{\sum_{j=0}^2 \frac{1}{c_j} (Z_j(t, e_0) - Z_j(t, t))} e^{-\mu_j h}.$$

Tästä saadaan suoraan kyseisen jakauman kertymäfunktio:

$$(12) \quad F_{T^P(t)}(h) = \sum_{j=0}^2 \frac{\frac{1}{c_j} (Z_j(t, e_0) - Z_j(t, t))}{P(Y(t)=2)} (1 - e^{-\mu_j h}).$$

Jälleen päädytään siis kolmen eksponenttijakauman sekoitukseen. Sekoitettut jakaumat ovat samat kuin muuttujan $T^P(t, u)$ jakaumassa, mutta sekoitussuhteet ovat toiset. Jakaumat eivät tässä ole katkaistuja, koska se, että työkyvyttömyyseläke päättyy viimeistään vanhuuseläkeiässä, otetaan huomioon vasta pääoma-arvoja laskettaessa.

$Y(t)$ -prosessiin liittyvistä todennäköisyyksistä saadaan luonnollisella tavalla siirtymäintensiteetit: kunhan $h > e_0$, on

$$P(Y(t+h)=2 \mid Y(t)=1) = \frac{P(Y(t+h)=2 \ \& \ T^{RX}(t+h) \in (e_0, e_0+h))}{P(Y(t)=1)}$$

$$= \int_{e_0}^{e_0+h} Z(t+h, u) du / P(Y(t)=1).$$

Integraalilaskennan väliarvolauseen ja Z :n jatkuvuuden nojalla tästä saadaan

$$\frac{P(Y(t+h)=2 \mid Y(t)=1)}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{Z(t, e_0)}{P(Y(t)=1)}$$

eli kaavan (9) nojalla

$$(13) \quad \mu_{12}^Y = \frac{Z(t, e_0)}{e^{-(a_4)t} - \sum_{j=0}^2 \frac{1}{c_j} (Z_j(t, e_0) - Z_j(t, t))}.$$

Vastaava likimääräinen kaava on esitetty lähteessä [4] sivulla 48. Y-prosessin työkyvyttömiä poistuvuuden määrittäminen on yksinkertaista, koska keston $T^F(t)$ jakauma tunnetaan: merkitään tätä poistuvuutta μ :llä ja käytetään yhteyttä

$$P(T^F(t) > h \mid Y(t)=2) = \exp\left(-\int_0^h \mu(t+s)ds\right)$$

eli

$$\int_0^h \mu(t+s)ds = -\ln P(T^F(t) > h \mid Y(t)=2)$$

josta h :n suhteen derivoimalla saadaan

$$\mu(t+h) = -\frac{\frac{d}{dh} P(T^F(t) > h \mid Y(t)=2)}{P(T^F(t) > h \mid Y(t)=2)} = \frac{f_{T^F(t)}(t+h)}{P(T^F(t) > h \mid Y(t)=2)}.$$

Sijoittamalla tähän yhtälö (11) ja (12):sta derivoimalla saatava tiheysfunktio, saadaan, kun $h \rightarrow 0$

$$(14) \quad \mu(t) = \frac{\sum_{j=0}^2 \frac{1}{c_j} (Z_j(t, e_0) - Z_j(t, t)) \mu_j}{\sum_{j=0}^2 \frac{1}{c_j} (Z_j(t, e_0) - Z_j(t, t))} = \mu_{21} + \mu_{23}.$$

Tämän intensiteetin jakaminen paranavuuteen ja kuolevuuteen yhtälön (14) oikeanpuoleisimman jäsenen tapaan ei kuitenkaan eksplisiittisesti onnistu Z -mallissa määritelyin tiedoin. Käytännön tarkoituksiin on mahdollista käyttää työkyvyttömiä kuolevuutta koskevaa ad hoc -oletusta samaan tapaan kuin lähteessä [3]. Mainitussa tutkimuksessa esitetään työkyvyttömiä poistuvuusintensiteetin kaava ehdolla, että myös kesto u tunnetaan.

2.5. Z-mallin mukaiset pääoma-arvot

Kaava (5) tarjoaa mahdollisuuden määrittää alkaneen työkyvyttömyyseläkkeen pääoma-arvo perinteisellä differentiaalitarkastelulla: jos t ja u kiinnitetään, eläkettä maksetaan ajan h kuluttua todennäköisyydellä $P(T^P(t,u) > h)$. Kun erät diskontataan nykyhetkeen ja otetaan huomioon eläkkeenmaksun joka tapauksessa päättävä vanhuuseläkeikä w , pääoma-arvoksi saadaan

$$(15) \quad \bar{a}_{ii|t} = \int_0^{w-t} P(T^P(t,u) > h) e^{-\delta h} dh = \sum_{j=0}^2 \frac{Z_j(t,u)}{Z(t,u)} \int_0^{w-t} e^{-(\mu_j + \delta)h} dh$$

$$= \sum_{j=0}^2 \frac{Z_j(t,u)}{Z(t,u)} \bar{a}_{w-t}^*(\mu_j, \delta)$$

missä TEL:n laskuperusteiden käytäntöä mukaillen merkintä

$$(16) \quad \bar{a}_{w-t}^*(\mu, \delta) = \frac{1 - \exp(-(\mu + \delta)n)}{(\mu + \delta)}$$

tarkoittaa määrääikaista elinkorkoa vakiopoistuvuudella μ ja korkoutuvuudella δ .

Johdettu pääoma-arvon kaava vastaa luvussa 2.2. esitettyä sekoitusluonnetta: pääoma-arvo on painotettu keskiarvo kolmesta elinkorosta, joissa keston odotusarvot ovat Z-mallin komponenttien mukaiset, ja painoina käytetään Z-mallin sekoitussuhteita.

Kaksien eri perusteiden ikä- ja kestoluokittainen vertailu voidaan suorittaa kuviolla, johon on piirretty vertailtavien perusteiden mukaisten yksikköpääoma-arvojen suhteen tasa-arvokäyriä. Esimerkiksi kuviosta 1 käy ilmi, miten vuosien 1982 ja 1983 vaihteessa suoritettu pääoma-arvojen korotus kohdistui eri ikäin ja kestoihin. Kuviossa 2 verrataan vuodesta 1983 voimassa olleita pääoma-arvoja yksinomaan pitkäkestoisimman komponentin mukaiseen elinkorkoon (16); koska yhtälön (15) mukainen pääoma-arvo ei voi tätä ylittää, kuvio osoittaa, missä määrin pääoma-arvoja voitaisiin kasvattaa komponentteittaisiin keston odotusarvoihin puuttumatta. Kuviossa 3 verrataan 5 % korkokannalla ikään 65 laskettua aikakorkoa nykyperusteisiin; se osoittaa, kuinka paljon pääoma-arvoja olisi mahdollista korkeirtaan korottaa korkokantaa muuttamatta.

Vastaisen eläkkeen pääoma-arvon määrittämiseksi tarkastellaan t -ikäistä aktiivista; todennäköisyys sille, että hänelle maksetaan iässä s työkyvyttömyyseläkettä ja että eläkkeen kesto tällöin on ollut u , on

$$\frac{Z(s,u)}{P(X(t)=1)}.$$

Mahdollisia arvoja rajoittavat ehdot $t+e_0 < t+u < s < w$, ja diskonttaus on suoritettava ikään t . Näin saadaan

$$(17) \quad \bar{A}_{(e_0) t:w} = \frac{1}{P(X(t)=1)} \int_{t+e_0}^w \int_{e_0}^{s-t} e^{-\delta(s-t)} Z(s,u) ds du.$$

Todennäköisyyttä $P(X(t)=1)$ on perinteisesti totuttu approksimoimaan elossaolotodennäköisyydellä:

$$(18) \quad P(X(t)=1) \approx e^{-(a_4)t}.$$

Luvun 2.4. perusteella todennäköisyys $P(Y(t)=1)$ olisi parempi approksimaatio, ja edellä esitetyllä kaavalla (9) päästäisiin siten mallin kannalta tarkempaan tulokseen; varjopuolena on vastaisen eläkkeen pääoma-arvon ja erityisesti riskimaksun kaavan mutkistuminen nykyistä vastaavan sievennysmahdollisuuden puuttuessa (vrt. [4], kaavat 3.3.2 ja 3.3.3.). On toisaalta huomattava, että työkyvyttömyystason jatkuvasti noustessa yllä esitetyn approksimaation (18) sisältämä virhe käy yhä karkeammaksi.

2.6. Alkavuuden ja päättyvyyden erottaminen Z-mallissa

Mikäli halutaan tehdä perustemuutoksia, jotka jättävät alkaneiden eläkkeiden pääoma-arvot ennalleen, komponentteittaisiin keskikestoihin ei saa puuttua, ts. erotukset $b_j - c_j$ eivät saa muuttua. Kaavasta (15) nähdään toisaalta, että painojen $Z_j(t,u)/Z(t,u)$ suhteita ei saa muuttaa, mikä puolestaan edellyttää, että suhteet a_j/a_k ja erotukset $b_j - b_k$ ja $c_j - c_k$ on jätettävä ennalleen. Näiden vaatimusten kokonaisvaikutukset nähdään parametrisoimalla Z -funktio vielä kerran uudelleen muotoon

$$(19) \quad Z(t,u) = a_0 e^{b_0(t-u)} \left\{ e^{-\mu_0 u} + d_1 e^{d_2(t-u) - \mu_1 u} + d_3 e^{d_4(t-u) - \mu_2 u} \right\},$$

missä muuttumattomiksi edellytetyjen suureiden vaikutus on keskikestojen μ_j ohella keskitetty parametreihin

$$(20) \quad \begin{cases} d_1 = a_1/a_0 \\ d_2 = b_1 - b_0 \\ d_3 = a_2/a_0 \\ d_4 = b_2 - b_0 \end{cases} .$$

Sijoittamalla lausekkeeseen (19) arvo $u=0$ saadaan

$$(21) \quad Z(t,0) = a_0 e^{b_0 t} \left\{ 1 + d_1 e^{d_2 t} + d_3 e^{d_4 t} \right\} ,$$

mikä Z -funktion tulkinnan mukaan vastaa elossaolotodennäköisyyden ja työkyvyttömyysalkavuuden tuloa. Tämän tasoa ja ikäriippuvuutta voidaan siis säätää vapaiksi jääneiden parametrien a_0 ja b_0 avulla, mutta nähdään, että myös parametrit d_j vaikuttavat lausekkeen (21) arvoon. Tämä toteamus voidaan myös kääntää: vaikka tämän tutkimuksen tapaan tehtävänä olisi vain alkaneiden eläkkeiden pääoma-arvojen kiinnittäminen, ei ole yhdenmukaista, miten alkavuus estimoidaan. Tähän ongelmaan palataan jäljempänä kohdissa 4.4. ja 9.2.

3. Metodi Z-pinnan sovittamiseksi

3.1. Z-pinnan sovitustehtävän yleinen luonne

Kuten esityksestä (2) käy ilmi, Z-pinnan parametrien haku siten, että löydetään pienimmän neliösumman mielessä paras yhteensopivuus Z-pinnan ja empiirisestä aineistosta lasketavien "havaintojen" välille, edellyttää yleisessä muodossaan yhdeksän muuttujan funktion epälineaarisen optimointitehtävän ratkaisemista.

Kyseessä on lisäksi kolmen eksponenttifunktion lineaarikombinaatio. Koska jo kahden tällaisen funktion summaan liittyvät sovitustehtävät ovat yleisesti vaikeasti ratkaistavia, ei ole yllättävää, että TEL-työkyvyttömyysperusteaos ei ole Z-pinnan sovitustehtävässä päässyt tulokseen. Sittemmin on, niinikään tyydyttävään tulokseen pääsemättä, kokeiltu joitakin helpommin sovitettavissa olevia funktio-tyyppejä.

3.2. Ehdollinen sovitustehtävä

Luultavaa on, ettei sovitustehtävän epäonnistuminen kuitenkaan ole johtunut siitä, ettei olisi löydetty pienimmän neliösumman mielessä hyviä sovitteita, vaan pikemminkin siitä, että eksponenttifunktioiden summa tarjoaa liikaa joustavuutta. Parametrit eivät tahdo identifioitua, ja ratkaisu on kaikkea muuta kuin stabiili: käytännössä merkityksettömän tuntuiset havaintojoukon muutokset saattavat johtaa täysin entisestä poikkeavaan ratkaisuun.

Tässä tutkimuksessa ongelmaan kehitetty ratkaisu perustuu ajatukseen, jonka mukaan on ensin paikannettava ne parametrit tai parametrien muunnokset, jotka ovat vaikeimmin identifioituvia. Kuten luvussa 2.2. on todettu, Z-mallissa työkyvyttömyyden keston jakauma on sekoitus kolmesta eksponenttijakaumasta, joissa sekoituksessa käytetyt painokertoimet riippuvat iästä ja kestosta, mutta sekoitettujen jakaumien odotusarvot ovat näistä riippumattomat. Kun otetaan huomioon eksponenttijakauman muoto, voidaan hyvällä syyllä arvella, että muuttamalla hieman näitä komponentteittaisia keskikestoja saataisiin hieman poikkeavilla painokertoimilla jokseenkin yhtä hyvä sovite, johon liittyvät pääoma-arvot eivät sanottavasti poikkeaisi alkuperäisistä. Tämän otaksuman mukaan siis parametrien identifioituvuusvaikeudet keskittyisivät juuri näihin keskikestoihin, jotka eivät sitäpaitsi suoraan esiinny mallin parametreina, vaan riippuvat niistä kaavojen (4) mukaisesti.

Jos näin on - ja tätä perustellaan tarkemmin luvussa 8 - voidaan menetellä jommallakummalla seuraavista tavoista:

- käytettävät keskikestot kiinnitetään ennen sovituksen aloittamista käyttäen kertynyttä empiiristä tietoa työkyvyttömyysilmiön tuoreimpien muutosten suunnasta
- jos tehtävää ei katsota voitavan rajoittaa näin suuressa määrin, voidaan kunkin komponentin keskikeston vaihtelujoukko rajoittaa muutamaan vaihtoehtoon todennäköisen arvon tuntumassa.

Edellisessä tapauksessa alkuperäinen yhdeksän muuttujan funktion optimointitehtävä yksinkertaistuu kuuden muuttujan funktion optimointitehtäväksi, ja jälkimmäisessä muutaman tällaisen tehtävän yhdistelmäksi. Kuten seuraavassa nähdään, tämä johtaa edelleen yksinkertaistuksiin.

3.3. Pinnan sovitus, kun keston odotusarvot on kiinnitetty

Oletetaan, että on käytettävissä pisteisiin (t,u) liittyvät empiiriset Z -arvot $h(t,u)$. Pinnan sovitus pienimmän neliösumman menetelmällä merkitsee kiinteillä parametrien μ_j arvoilla neliösumman

$$(22) \quad \sum_{t,u} \left\{ a_0 e^{b_0(t-u)-\mu_0 u} + a_1 e^{b_1(t-u)-\mu_1 u} + a_2 e^{b_2(t-u)-\mu_2 u} - h(t,u) \right\}^2$$

minimoimista muuttujien a_0, a_1, a_2, b_0, b_1 ja b_2 suhteen. Huomataan kuitenkin, että sovittettava malli on lineaarinen parametrien a_j suhteen, joten kutakin pistettä (b_0, b_1, b_2) kohti se ratkeaa yksikäsitteisesti tavallisen lineaarisen regressioanalyysin keinoin. Funktio

$$(23) \quad F(b_0, b_1, b_2) = \min_{a_0, a_1, a_2} \left\{ \sum_{t,u} \left[\sum_{j=0}^2 a_j e^{b_j(t-u)-\mu_j u} - h(t,u) \right]^2 \right\}$$

on siten hyvin määritelty, ja alkuperäinen optimointitehtävä on supistunut F :n minimin hakemiseksi (b_0, b_1, b_2) :n suhteen. Funktion F käyttäytymisestä pääsee käsitykseen lähinnä kokeilemalla.

Myös tehtävän yleisessä muodossa lineaarinen osuus voidaan yhtälön (23) tapaan erottaa tapahtuvaksi jo kohdefunktiota laskettaessa. Tätä ei seuraavassa kuitenkaan kokeilla osittain siksi, että tehtävän ratkeavuudesta on ennalta huono käsitys. On myös huomattava, että perustemuutoksia tehtäessä on yksin jatkuvuussyistä suositeltavaa pyrkiä muuttamaan niin harvoja vakioita kuin mahdollista. Tähän päästään esimerkiksi tapauksessa, jossa tullaan toimeen muuttamatta komponentteittaisia keskikestoja ainakaan kaikilta osin: kestojen odotusarvojen ennalleen jättäminen on luonnollisesti erikoistapaus niiden ennalta kiinnittämisestä.

3.4. Pilot-koe

Jotta saataisiin selville, onko kohdassa 3.3. kaavailtu menetelmä ensinkään käyttökelpoinen, suoritettiin ensin alustava koe jäljempänä kuvattavalla Hooke-Jeevesin haku-algoritmillä käyttäen havaintojoukkona ikiä 25,30,35,....., 60,63 ja kestoja 1,2,3,5,7,10,15 ja 25 vastaavia, perusteiden B mukaisia Z-funktion arvoja (vrt. taulukko 2). Oikea minimipiste on näiden perusteiden mukainen

$$(b_0, b_1, b_2) = (0.0425 \quad 0.1207 \quad -0.004605).$$

Ensimmäinen koe koski tämän minimipisteen löytämistä: siinä algoritmi onnistui lähtiessään pisteestä (0.3,0.2,0.1), mutta ei pisteestä (0.1,0.2,0.3). Niinikään lähtiessään perusteita A vastaavasta pisteestä algoritmi päätyi oikeaan minimipisteeseen.

Alustavan kokeen toinen osa koski ratkaisun jatkuvuutta ja herkkyyttä käytettyjen keskikestojen arvojen suhteen. Siinä varioitiin pitkäkestoisinta komponenttia korvaamalla perusteiden B mukainen odotusarvo (40 vuotta) arvolla $40+m$, missä m vaihteli arvojen -10 ja $+10$ välillä. Seuraavaan taulukkoon on koottu minimipisteet, joihin menetelmä johti lähdetessä jälleen perusteiden A mukaisista vakioiden b_j arvoista. Silmämäärin löytyvät ratkaisun epäjatkuvuuskohdat on merkitty taulukkoon huutomerkillä.

Taulukko 4: Minimipisteet alustavassa kokeessa. Komponentin $j=1$ keskikesto on $40+m$:

m	minimipisteen koordinaatit			
0	0.0425	0.1207	-0.004605	
1	0.0460	0.1211	0.0211	
2	0.0476	0.1216	0.0423	
3	0.0484	0.1220	0.0526	
4	0.0487	0.1224	0.0591	
5	0.0486	0.1226	0.0638	
6	0.0480	0.1229	0.0677	
7	0.0466	0.1231	0.0715	
8	0.0193	0.1217	0.1001	!
-1	0.0384	0.1204	-0.0218	
-2	0.0337	0.1202	-0.0351	
-3	0.0278	0.1199	-0.0523	
-4	0.0206	0.1196	-0.0712	
-5	0.0113	0.1193	-0.1473	
-6	0.0368	0.1189	0.0930	!

Pilot-koe oli tuloksiltaan kyllin rohkaiseva perustellakseen asian syvempää tutkimista. Lisäksi se viittaa eräisiin tärkeisiin osaongelmiin, joihin on kiinnitettävä huomiota: tehokkaamman algoritmin etsiminen ja lähtöpisteen merki-

tyksen testaaminen ovat olennaisia teknisen ratkaisun toimivuudelle, kun taas itse menetelmä seisoo tai kaatuu sen mukaan, mitä herkkyyssanalyysi keskikestojen suhteen osoittaa niiden ennalta kiinnittämisen rajoittavasta vaikutuksesta.

3.5. Päättävyyksiin perustuva menetelmä

Kohdassa 2.6. todettiin, että vaikka tarkastelu muutoin koskisi vain eläkkeiden päättävyyttä, Z-funktion rakenteen johdosta myös alkavuuden estimoimistavalla tai alkavuudesta tehdyllä oletuksella on vaikutusta parametreihin. Jos tämä efekti haluttaisiin välttää, olisi empiiristen Z-arvojen sijasta siirryttävä tarkastelemaan esimerkiksi eläkkeiden päättymis- tai jatkumisfrekvenssejä, jotka ovat empiiristä aineistosta suoraviivaisesti laskettavissa. Jälkimmäisen vastine on Z-mallissa vuositasolla (vrt. kaava (5))

$$(24) \quad Z(t+1, u+1) / Z(t, u) = \frac{\sum_{j=0}^2 a_j e^{-\mu_j b_j (t-u) - \mu_j u}}{\sum_{j=0}^2 a_j e^{b_j (t-u) - \mu_j u}}$$

Neliösummaa (22) vastaisi näin meneteltäessä neliösumma, jossa sovitettavana funktiona esiintyisi murtolauseke (24). Tämä sovitustehtävä ei ole edes osittain lineaarinen, joten mahdollisuus ratkaista optimointitehtävä yhtälön (23) ta-paan osittain lineaarisena menetettäisiin. Jäljelle ei kuitenkaan jäisi aito kuuden muuttujan epälineaarinen tehtävä, kuten nähdään laskemalla osamäärä (24) esityksestä (19): parametreista kaksi supistuu neljän jäädessä jäljelle. On todennäköistä, ettei näin muodostuvan optimointitehtävän ratkaiseminen ole numeerisesti sen raskaampaa kuin funktion (23) minimoiminenkaan, mutta asian selvittäminen jätetään myöhemmän tutkimuksen varaan.

4. Empiiristen Z-arvojen laskeminen

4.1. TEL-yhtiöiden työkyvyttömyyseläkkeiden päättymistiedot

Edellä hahmoteltu menetelmä Z-pinnan parametrien kiinnittämiseksi edellyttää, että yhtälössä (22) esiintyvät teoreettisten Z-arvojen empiiriset vastineet $h(t,u)$ pystytään laskemaan havainnoista. Tiedot eläkevakuutusyhtiöiden kantaan sisältyvistä työkyvyttömyystapauksista kootaan vuosittain yhteen, ja aineisto käsitti vuoden 1985 päättyessä tiedot noin 150 000 työkyvyttömyyseläkkeestä. Tätä tutkimusta laadittaessa tuoreimmat päättymistiedot koskivat vuotta 1984; tiedonkeruun aloittamisajankohdasta johtuen ei vuonna 1965 tai sitä ennen päättyneistä eläkkeistä ole tietoja, mitä voidaan pitää puutteena ainoastaan historiallisesta näkökulmasta. Suurempi ongelma on se, että erilaisista aikaviipeistä johtuen alkavuuden osalta ei vastaavana aikana ollut mahdollista käyttää vuotta 1983 tuoreempia tietoja.

Käytettävissä olevista tiedoista ovat käsillä olevaa tehtävää ajatellen tärkeimmät tieto sukupuolesta, syntymäaika, työkyvyttömyyden (ei siis työkyvyttömyyseläkkeen) alkamisaika ja työkyvyttömyyseläkkeen päättymisaika, joista kukin on käytettävissä kuukauden tarkkuudella, sekä päättymissyys; viimeksimainittu on kiinnostava lähinnä siitä syystä, että pystytään eliminoimaan vanhuuseläkkeeseen päättymisten vaikutus tapauksissa, joissa vanhuuseläkeikä on ollut alempi kuin 65 vuotta.

Iällä tarkoitetaan seuraavissa tarkasteluissa tarkasteluvuoden ja syntymävuoden erotusta, eläkkeen kestolla taas päättymisvuoden - tai jatkuvien eläkkeiden tapauksessa tarkasteluvuoden - ja työkyvyttömyyden alkamisvuoden erotusta. Menetelmää voi periaatteessa moittia siitä, että sen mukaan k-kestoiksi katsotuissa eläkkeissä todelliset kestot saattavat olla mitä tahansa väliltä $(k-1, k+1)$, ts. henkilön osuminen tiettyyn ikä- ja kestoluokkaan muodostuu jossakin määrin riippuvaiseksi siitä, mille kohtaa kalenterivuotta tarkastellut tapahtumat ovat osuneet. Periaate on kuitenkin sopusoinnussa TEL-perusteissa käytetyn laskutavan kanssa.

Yksivuotisia todennäköisyyksiä laskettaessa aineiston kattavuus muodostui tämän tutkimuksen ajankohtana seuraavaksi:

Kesto	Käytettävissä olevat päättymisvuodet
0-4	1966 - 1984
5	1967 - 1984
.	.
.	.
21	1983 - 1984
22	1984

Empiirisen aineiston ulkopuolelle jäävät siten kaikkein pitkäkestoisimmat eläkkeet. On kuitenkin huomattava, että vain iässä 42 tai sitä aikaisemmin alkaneet eläkkeet voivat teoriassakaan muodostua TEL-historian tällä hetkellä sanelemaa 22 vuoden rajaa pidemmiksi; näiden osuus kaikista alkaneista eläkkeistä on 1980-luvulla ollut 16%, ja näistäkin huomattava osa päättyy ennenkuin mainittu keston raja on saavutettu. Tämä järjestelmän voimaantulovaiheesta johtuva epäkohta on sitäpaitsi poistumassa; vielä 5 vuotta sitten tehdyissä tutkimuksissa vastaava osuus olisi ollut 25 % luokkaa. Aiemmin tehdyissä perustemuutoksissa lieneekin osasyynä ollut se, että aiemmin täysin puuttunutta empiiristä tietoa pitkistä kestoista on alkanut olla saatavilla.

4.2. Z-arvon jako tekijöihinsä

Merkitään nyt

$$\begin{cases} t = \text{ikä} \\ u = \text{työkyvyttömyyden kesto ja} \\ t_0 = t - u = \text{työkyvyttömyyden alkamisikä.} \end{cases}$$

Käytetään tekijöihinjakoa

$$(25) \quad Z(t, u) = P(\text{vastasyntynyt elää ikään } t_0) \\ \cdot P(\text{iässä } t_0 \text{ elossaoleva tulee työkyvyttömäksi}) \\ \cdot P(\text{iässä } t_0 \text{ alkaneen työkyvyttömyyden kesto on vähintään } u).$$

Kuten kohdasta 4.1. käy ilmi, ongelmaksi ei empiirisen aineiston osalta muodostu suppeus, vaan sen arvosteleminen, kuinka vanhaa tietoa voidaan pitää relevanttina. Kuten pääoma-arvojen ajoittainen muuttamistarve on osoittanut, Z-pinta ei pysy vakiona, ja ajan mukana tapahtuva muutos voi koskea mitä hyvänsä yllä esitettyjä todennäköisyyksiä.

Tulon (25) ensimmäinen tekijä voidaan tässä vaiheessa sivuuttaa. Alkavuus puolestaan vaihtelee oletettavasti enemmän kuin kestoisuus, josta syystä sen osalta on syytä rajoittaa käyttämään mahdollisimman tuoreita tietoja. Alkaneiden eläkkeiden pääoma-arvojen osalta tällä kysymyksellä on kuitenkin vain sekundaarinen merkitys (vrt. luku 2.6.), ja sitä käsitellään lähemmin luvussa 4.4.

Kolmas todennäköisyys, ts. todennäköisyys sille, että alkanut työkyvyttömyyseläke kestää vähintään ajan u , voidaan laskea kaavaa (5) vastaavien yksivuotisten todennäköisyyksien kalenterivuoteen v perustuvista estimaateista

$$\hat{p}(t, u, v)$$

periaatteessa kahdella tavalla: tulo

$$\prod_j \hat{p}(t-j, u-j, v-j)$$

vastaa kohorttitarkastelua, jossa yksivuotisten todennäköisyyksien kumulointi suoritetaan seuraamalla erikseen kutakin syntymä- ja alkamisvuosiluokkaa, tulo

$$\prod_j \hat{p}(t-j, u-j, v)$$

puolestaan käyttää jokaista ikää ja kestoja kohti tuoreimman aineiston kattaman vuoden tietoa. Tässä tutkimuksessa käytetään pääsääntöisesti jälkimmäistä lähestymistapaa, tosin estimoiden todennäköisyydet kahden tuoreimman vuoden aineistosta. Perusteluna tälle on se, että usean vuoden takaisilla tiedoilla, joihin kohorttimetodi johtaa usein ollessa hiukankin suuri, ei enää ole relevanssia ennustettaessa uusien työkyvyttömyystapausten käyttäytymistä.

4.3. Työkyvyttömyyskestoon liittyvien todennäköisyyksien estimointi

Todennäköisyyksien $p(t, u, v)$ estimoinnissa voidaan käyttää biometrian standardimenetelmiä (Vrt. [2], ss. 270-276). Tehtävä on suoraviivainen lukuunottamatta vanhuuseläkkeeseen päättymisten vaikutuksen eliminoimista; vaikka yllä on päädytty käyttämään vuositasolle pyöristettyjä tietoja, on tällä kohden syytä menetellä huolellisemmin.

Valitaan tarkasteltavaksi homogeeninen joukko, esimerkiksi henkilöt, joilla työkyvyttömyys on alkanut samassa iässä t_0 . Mitataan kullekin henkilölle aikaa työkyvyttömyyden alkamishetkestä lukien, ja jaetaan tämä aika tasaisiin väleihin $(v, v+1)$, $v=0, 1, \dots$. Tyypillisessä sovellutuksessa aikavälien pituus on vuosi, mutta mikään ei estä käyttämästä tarpeen vaatiessa tiheämpääkin jakoa.

Kunkin henkilön osalta yksilöllinen seuranta-aika ulottuu korkeintaan nykyhetkeen, mikä eri alkamisajankohdista johtuen merkitsee sitä, että eri henkilöillä seuranta-aika muodostuu usein erimittaiseksi.

Tarkastellaan nyt väliä $(v, v+1)$. Olkoon

N_v välin alussa seurannassa olevien lukumäärä

T_k , $k=1, \dots, N_v$ kullakin näistä väliin $(v, v+1)$ mahtuva seuranta-ajan pituus (ts. 1 kaikilla niillä, jotka eivät ennen välin päättymistä poistu tarkastelun piiristä deterministisen syyn, kuten

vanhuuseläkkeelle siirtymisen johdosta tai siksi, että empiirisen aineiston aikaväli ei ko. henkilöllä peitä välin $(v, v+1)$ loppupäätä)

t_k , $k=1, \dots, N_V$ seuranta-aikaan mahtuva työkyvyttömyyseläkkeen kesto (kuolevilla ja paranevilla $t_k < \tau_k$, muilla nämä ovat yhtäsuuret)

I indeksijoukko, jota vastaavat henkilöt eivät kuole tai parane ennen seuranta-aikansa päättymistä, jolloin siis $t_k = \tau_k$

J indeksijoukko, jota vastaavat henkilöt kuolevat tai paranevat ennen seuranta-aikansa päättymistä, jolloin siis $t_k < \tau_k$.

Huomattakoon, että I ja J ovat stokastisia, mutta niiden kardinaliteetit toteuttavat yhtälön $\#(I) + \#(J) = N_V$.

Lähteen [2] periaatteena on olettaa, että poistumisintensiteetti on kullakin välillä $(v, v+1)$ vakio (jos tämä oletus ei päde käytännön tarpeita ajatellen riittävän tarkasti, siirrytään aika-akselilla käyttämään tiheämpää yksikköä). Tämän jälkeen johdetaan tarkasteltavien muuttujien yhteisjakauma ja estimoidaan siitä p_v suurimman uskottavuuden menetelmällä.

Käytännössä vakiointensiteettioletus merkitsee, että todennäköisyys säilyä joukossa yli välin $(v, v+1)$ on

$$(26) \quad p_v = \exp(-\mu_v)$$

missä μ_v on ko. vakiointensiteetti. Poistumishetkille t_j pätee vastaavasti vakiointensiteetin johdosta

$$P(t_j > t_j) = \exp\left(-\int_0^{t_j} \mu_v du\right) = \exp(-\mu_v t_j) = p_v$$

joten muuttujan t_j tiheysfunktio on

$$f_{t_j}(t_j) = -\ln p_v \cdot p_v^{t_j}.$$

Vastaavasti nähdään, että $p_v^{\tau_i}$ ilmoittaa todennäköisyyden sille, että henkilö, jolla seuranta-aika päättyy ennen hetkeä $v+1$, ei poistu joukosta tätä ennen; todennäköisyys (26) on tästä erikoistapaus.

Uskottavuusfunktio on nyt

$$f(p_v) = \left[\prod_{i \in I} p_v^{\tau_i} \right] \prod_{j \in J} (-\ln p_v \cdot p_v^{t_j})$$

ja sen logaritmi

$$\ln f(p_V) = \sum_{i \in I} \tau_i \ln p_V + \#(J) \ln(-\ln p_V) + \sum_{j \in J} t_j \ln p_V$$

Derivointi $\ln p_V$:n suhteen ja derivaatan nollassi asettaminen johtavat ratkaisuun

$$\ln p_V = - \#(J) / \left(\sum_{i \in I} \tau_i + \sum_{j \in J} t_j \right)$$

Tässä vaiheessa kannattaa siirtyä havainnollisempiin merkintöihin: $\#(J)$ ilmoittaa kuoleman tai paranemisen kautta poistuvien lukumäärän, joka olkoon D_V . Muut voidaan jakaa kahteen ryhmään sen mukaan, onko $\tau_i = 1$ ($N_V^{(1)}$ henkilöä) vai $\tau_i < 1$ ($N_V^{(2)}$ henkilöä). Tällöin on aina voimassa yhtälö

$$N_V = D_V + N_V^{(1)} + N_V^{(2)},$$

ja haettu estimaatti voidaan ilmeisin uudelleenindeksoinein kirjoittaa muotoon

$$(27) \quad \hat{p}_V = \exp \left\{ -D_V / (N_V^{(1)} + \sum_{i=1}^{N_V^{(2)}} \tau_i + \sum_{j=1}^{D_V} t_j) \right\}.$$

Arvoilla $u=1,2,\dots$ saadaan siten estimaatit

$$(28) \quad \hat{P}(\text{kesto} > u \mid \text{alkuikä} = t_0) = \hat{p}_1 \hat{p}_2 \cdots \hat{p}_u.$$

Yhtälö (28) sovellettuna käytettävissä olevaan kalenteri-vuosittaiseen aineistoon johtaa Z-arvoihin, joissa ikä- ja kestromuuttujien arvot ovat muotoa $n+1/2$, missä n on kokonaisluku. Kokonaislukuargumentteihin päästään luonnollisella modifikaatiolla: jos t ja u ovat kokonaislukuja, on vastaava empiirinen Z-funktion arvo

$$(29) \quad h(t,u) = \hat{p}_0 \cdot \hat{p}_1 \hat{p}_2 \cdots \hat{p}_{u-1} \sqrt{\hat{p}_u},$$

missä $\hat{p}_0$ on estimoitu todennäköisyys sille, että henkilö on työkyvytön sen vuoden lopussa, jona täytti iän $t-u$. Sen estimointia tai muuta määrittämistä käsitellään kohdassa 4.4.

4.4. Z-arvon muiden tekijöiden määrittäminen

Tulon (25) kahden ensimmäisen tekijän empiiristen vastineiden määrittäminen tuottaa suurempia ongelmia. Alkaneiden työkyvyttömyyseläkkeiden lukumäärät ovat kylläkin tiedossa, mutta ne saadaan aikaviipeellä, joka on vähintään vuotta

pidempi kuin päättymistietojen saannissa. Tieto vastaavista TEL-aktiivimääristä on saatavissa Eläketurvakeskuksesta. Sen sijaan on jo käsitteellisestikin epäselvää, minkälaista vastasyntyneiden lukumääräkäsitettä tulon (25) ensimmäinen tekijä edellyttäisi.

Alkavuutta estimoitaessa muodostuu periaatteellinen ongelma siitä, miten arvioida lukumääriä, joihin alkavien eläkkeiden lukumääriä tulisi suhteuttaa. Yhtiöissä vakuutettujen TEL-aktiivien alituisen vaihtumisen, vajaavuotisten työsuhteiden ym. tekijöiden aiheuttamat vaikeudet ovat tuttuja jokaiselle eläkkeen alkavuuden laskijalle. Selkeä metodi on käyttää ikäluokittaisena aktiivimääränä saman kohortin aktiivimäärää edellisen vuoden lopussa.

Olkoon nyt

$$\begin{cases} Y(t) = 1 & \text{jos henkilö on aktiivi iässä } t \\ Y(t) = 2 & \text{jos henkilö on työkyvytön iässä } t \end{cases}$$

ja

$$\begin{cases} l_1(t) & t\text{-ikäisten aktiivien määrä} \\ l_2(t) & t\text{-ikäisten työkyvyttömiä määrä} \\ l_0 & \text{vastasyntyneiden määrä ko. syntymävuosiluokassa.} \end{cases}$$

Kun empiiristä aineistoa käsitellään vuoden tarkkuudella, on yhtälössä (29) tarvittava $\hat{p}_0$ estimaatti todennäköisyydelle

$$\begin{aligned} p_0 &= P(Y(t_0-1)=1 \& Y(t_0)=2) \\ &= P(Y(t_0-1)=1) \cdot P(Y(t_0)=2 \mid Y(t_0-1)=1) \end{aligned}$$

Jälkimmäinen tekijä on työkyvyttömyysalkavuus, joka estimoidaan empiirisestä aineistosta yllä hahmotellulla tavalla. Edellistä puolestaan voidaan approksimoida olettaen populaation todella noudattavan yleisvakion (a_4) mukaista vakiokuolevuutta:

$$\frac{l_1(t_0)+l_2(t_0)}{l_0} = e^{-(a_4)t_0},$$

joten

$$P(Y(t_0-1)=1) = \frac{l_1(t_0-1)}{l_0} = \frac{l_1(t_0-1)}{l_1(t_0-1)+l_2(t_0-1)} e^{-(a_4)(t_0-1)}$$

Tässä $l_1(t_0-1)$ voitaisiin saada ETK:sta; $l_2(t_0-1)$ puolestaan on laskettavissa samasta tiedostosta kuin empiirinen päättyvyys.

Mikäli halutaan, pinnansovitus varten voidaan siis koota kokonaan empiiriseen aineistoon pohjautuvat havainnot. Tämä ei kuitenkaan välttämättä ole paras ratkaisu silloin, kun tähdätään empiiristä päättävyyttä mahdollisimman hyvin vastaavien alkaneiden eläkkeiden yksikköpääoma-arvojen löytämiseen. Kuten yhtälö (21) osoittaa, elossaolo- ja alkamistodennäköisyyksien tulo riippuu Z-mallissa osittain samoista parametreista kuin päättävyysskin. Huonolla onnella saattaa käydä niinkin, että empiirisen alkavuuden käyttö ehkäisee päättävyyteen parhaiten sopivan pääoma-arvosarjan löytämisen.

Pääoma-arvojen kannalta melko neutraali menetelmä olisi "empiiristen" Z-arvojen laskeminen käyttämällä empiiristä päättävyyttä, mutta teoreettista, tulevaa ratkaisua mahdollisimman paljon muistuttavaa alkavuutta. Tämä edellyttää tietenkin, että ollaan etukäteen jokseenkin hyvin perillä vakioiden likimääräisistä arvoista; käytännön sovelluksissa näin onkin useimmiten laita, koska koko työkyvyttömyysilmiö tuskin totaalisesti muuttaa luonnettaan muutaman vuoden kuluessa. Melko hyvän approksimaation saa esimerkiksi käyttämällä kulloinkin voimassaolevia parametrinarvoja.

Kolmas mahdollisuus on jättää sekä elossaolotodennäköisyys että alkavuus pois tarkastelusta, toisin sanoen asettaa yhtälössä (29)

$$\hat{p}_0 = 1$$

työkyvyttömyyden alkamisistä riippumatta.

4.5. Empiirisen pinnan graafinen esittäminen

Liitekuvassa 4 on esitetty vuosien 1983-1984 päättävyystiedoista laskettu empiirinen Z-pinta. Pinnan pisteet on laskettu vain kokonaislukuarvoisin argumentein, ja koska empiirisen aineiston käyttö lisäksi väistämättä tuo mukaan epäsäännöllisyyksiä, ei kuvioissa 1-3 käytetty tasa-arvo-käyrätekniikka sovellettu käsillä olevaan tapaukseen. Korkeuskäyrien sijasta empiirisiä Z-arvoja on havainnollistettu pistejoukoin, joissa pisteiden lukumäärä on verrannollinen ko. argumentinarvoa vastaavaan havaintoon.

TEL-historian rajallisuuden johdosta havaintoja ei ole 22 vuotta pidemmiltä kestoilta. Elosaolo- ja alkavuustodennäköisyydet on kuvion arvoja laskettaessa korvattu B-perusteiden mukaisella teoreettisella suureella (21).

5. Optimointimenetelmät

5.1. Välineistö

Tutkimusta edeltänyt pilot-tyyppinen koe (vrt. luku 3.4.) ja suuren empiirisen aineiston esikäsittely tehtiin APL:llä ja suurella tietokoneella.

Sen sijaan varsinainen koe optimointi- ja piirtotehtävineen tehtiin mikrotietokoneella, ohjelmointikielenä BASIC. Tähän valintaan oli useita syitä, joista päällimmäisenä mikrotietokoneen sallima vuorovaikutteisuus paljon suunnittelutyötä ja kokeilua vaativassa menetelmän kehittä- ja testausvaiheessa. Toisena syynä on mainittava halu tarkastaa, onko tämän suuruusluokan numeerinen tehtävä vielä mikrotietokoneella käytännössä ratkaistavissa. Osoittautui, että tältä osin liikutaan käytetyn kokoonpanon kapasiteetin ylärajoilla: vaikka raskaimmissa numeerisissa vaiheissa käytettiin käännettyä ohjelmaa, optimointi vei interaktiivista seurantaa ajatellen liian pitkän ajan, ja kokeilut olivat koottava pääosin iltaisin ja viikonloppuisin automaattisesti läpikäytäväksi koesarjoiksi. Tästä huolimatta perustaiden etsintä on käytännössä suoritettavissa nyt kokeillulla kokoonpanolla, ellei tehokkaampaa ole tarjolla.

Käytetty mikrotietokone oli IBM PC AT, ja graafisena tulosvälineenä käytettiin tähän kytkettyä HP 7475A -moniväripiirturia. Ohjelmoinnin kannalta ylimääräistä hankaluutta tuotti matriisikäskyjen puuttuminen käytetystä BASIC-versiosta.

5.2. Algoritmit

Tutkimuksessa käytettiin kahta erityyppistä optimointialgoritmia: Hooke-Jeevesin suorahakualgoritmia (seuraavassa lyhenne HJ) ja Davidon-Fletcher-Powellin vaihtelevan metriikan metodia (DFP). Sekä näiden algoritmien valinnan että niiden ohjelmoinnin suhteen tämä tutkimus on paljossa velkaa tilastolliselle tietojenkäsittelyjärjestelmälle SURVO 76 (vrt. [4]).

Ensinmainitussa algoritmissa vain saavutettujen kohdefunktion arvojen suuruusjärjestys määrää seuraavan askelen kaksivaiheisen kaavion mukaan. Ensimmäisessä vaiheessa (search move) etsitään koordinaattiakselien suunnassa kokeillen ja etukäteen annettua askelpituutta muunnellen paras etenemissuunta, johon toisessa vaiheessa (pattern move) otetaan vielä samanpituinen askel. Algoritmin hyvyys perustuu osaltaan siihen, että näin saavutettu piste vali-

taan nyt seuraavan vaiheen lähtöpisteeksi, vaikka kohdefunktion arvo olisi siihen siirryttäessä vertailuarvoon nähden kasvanutkin. Algoritmi ei näin ollen juutu "kaareviin soluihin", ja on tunnettu jokseenkin robustina haku-algoritmina, jonka loppukonvergenssi on kuitenkin hidasta.

DFP-menetelmä käyttää gradientti-informaatiota ja edellyttää, ainakin teoriassa, jatkuvien toisen kertaluvun osittaisderivaattojen olemassaoloa: jos g on kohdefunktion gradientti, niin askel pisteestä x_k pisteeseen x_{k+1} otetaan optimoimalla kohdefunktio suunnassa

$$\pm R_k G(x_k)$$

missä R_k on matriisi, jolla approksimoidaan toisen kertaluvun osittaisderivaattojen matriisin $G(x_k)$ käänteismatriisia. Alussa R_0 valitaan yksikkömatriisiksi, ja päivitetään kullakin askelella jollakin menetelmällä, jolla se saadaan konvergoimaan kohti matriisia $G^{-1}(x_k)$. Tässä tutkimuksessa käytetty palautuskaava oli

$$R_{k+1} = R_k + \frac{P_{k+1} P_{k+1}^T}{P_{k+1}^T Y_{k+1}} - \frac{R_k Y_{k+1} Y_{k+1}^T R_k}{Y_{k+1}^T R_k Y_{k+1}}$$

missä matriisin transponointi on osoitettu yläviitalla T , ja

$$\begin{cases} P_{k+1} = x_{k+1} - x_k \\ Y_{k+1} = g(x_{k+1}) - g(x_k) \end{cases}.$$

On tunnettua, että DFP-algoritmillä on nopea loppukonvergenssi, mutta että se on juuri tästä syystä taipuvainen lankeamaan ensimmäiseen tarjolla olevaan lokaaliin minimikohtaan. - Yksityiskohtaisemman selostuksen algoritmeista ja niiden ominaisuuksista löytää lähteestä [1].

5.3. Kohdefunktion laskenta

Merkintöjen yksinkertaistamiseksi numeroidaan havaintoja vastaavat pisteet (t,u) , missä $t=19, \dots, 64$, $u=1, \dots, t-18$, seuraavasti:

$$(t^v, u^v), \quad v=1, \dots, N$$

ja asetetaan

$$\begin{cases} g(j,v) = e^{b_j(t^v - u^v) - p_j u^v}, & j=0,1,2, \quad v=1, \dots, N \\ h(v) = \text{pisteeseen } (t^v, u^v) \text{ liittyvä havainto.} \end{cases}$$

Minimoitava neliösumma (22) voidaan näitä merkintöjä käyttäen kirjoittaa muotoon

$$(30) \quad f(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2) = \sum_{v=1}^N [a_0 g(0, v) + a_1 g(1, v) + a_2 g(2, v) - h(v)]^2$$

eli matriisimerkinnöin

$$A = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix}^T, \quad H = \begin{bmatrix} h(1) & \dots & h(N) \end{bmatrix}^T \quad \text{ja}$$

$$X = \begin{bmatrix} g(0,1) & g(1,1) & g(2,1) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ g(0,N) & g(1,N) & g(2,N) \end{bmatrix}$$

muotoon

$$(31) \quad f(a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2) = (XA - H)^T (XA - H).$$

Kun siirrytään kohdefunktioon F (vrt. kaava (23)), riippuvuutta parametreista b_j esiintyy sekä termien $g(j, v)$ että regressiokerrointen a_j kautta. Kun suureet b_j kiinnitetään, estimaatit parametreille a_j saadaan tunnetulla kaavalla

$$(32) \quad A = (X^T X)^{-1} X^T H.$$

Kun tämä sijoitetaan lausekkeeseen (31), saadaan kohdefunktio (23) muotoon

$$(33) \quad \begin{aligned} F(b_0, b_1, b_2) &= (XA - H)^T (XA - H) = (A^T X^T - H^T) (XA - H) \\ &= H^T X (X^T X)^{-1} (X^T X) (X^T X)^{-1} X^T H - 2H^T X (X^T X)^{-1} X^T H + H^T H \\ &= H^T H - H^T X (X^T X)^{-1} X^T H. \end{aligned}$$

Tämän kaavan ohjelmoiminen edellyttää 3×3 -matriisin $X^T X$ eksplisiittistä kääntämistä. Muutoin kohdefunktion laskenta

ei tuota ongelmia; konetyön ja -kustannusten välttämiseksi kannattaa ainakin käsillä olevassa tilanteessa, jossa $t:t$ ja $u:t$ ovat kokonaislukuja, kumuloida suureet $g(j,v)$ perussuureista

$$e_j^{b_j} \text{ ja } e_j^{\mu_j};$$

tämä vähentää eksponenttifunktion laskemiskertojen määrän murto-osaan ja vaadittavan koneajan noin kolmannekseen.

5.4. Kohdefunktion gradientin laskeminen

Kohdefunktion F gradientin laskentaa edellyttää käytetyistä algoritmeista vain DFP-metodi. Lasketaan esimerkin vuoksi derivaatta parametrin b_0 suhteen:

$$\begin{aligned} (34) \quad \frac{d}{db_0} F(b_0, b_1, b_2) &= \\ &= 0 - H^T \left(\frac{d}{db_0} X \right) (X^T X)^{-1} X^T H - H^T X \left(\frac{d}{db_0} (X^T X)^{-1} \right) X^T H \\ &\quad - H^T X (X^T X)^{-1} \left(\frac{d}{db_0} X^T \right) H \\ &= -2H^T \left(\frac{d}{db_0} X \right) (X^T X)^{-1} X^T H - H^T X \left(\frac{d}{db_0} (X^T X)^{-1} \right) X^T H. \end{aligned}$$

Derivoimalla identiteetti

$$I = (X^T X)^{-1} (X^T X)$$

saadaan kaava matriisiin $X^T X$ käänteismatriisin derivoimiseksi ilman, että käänteismatriisia tarvitsee eksplisiittisesti laskea:

$$\frac{d}{db_0} (X^T X)^{-1} = -(X^T X)^{-1} \left(\frac{d}{db_0} (X^T X) \right) (X^T X)^{-1}.$$

Kun tämä sijoitetaan ylläolevaan F :n derivaatan lausekkeeseen (34) ja käytetään yhteyttä (32), saadaan

$$\begin{aligned} \frac{d}{db_0} F(b_0, b_1, b_2) &= \\ &= -2H^T \left(\frac{d}{db_0} X \right) A + H^T X (X^T X)^{-1} \frac{d}{db_0} (X^T X) (X^T X)^{-1} X^T H \\ &= -2H^T \left(\frac{d}{db_0} X \right) A + A^T \left[\frac{d}{db_0} (X^T X) \right] A. \end{aligned}$$

Lasketaan tarvittavat derivaatat:

$$\begin{cases} \frac{d}{db_0} g(0,v) = (t^v - u^v) g(0,v) & \text{ja} \\ \frac{d}{db_0} g(1,v) = \frac{d}{db_0} g(2,v) = 0 \end{cases}$$

kaikilla arvoilla v . Näin ollen on

$$\frac{d}{db_0} X = \begin{bmatrix} (t^1 - u^1) g(0,1) & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ (t^N - u^N) g(0,N) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ja siten

$$H^T \left(\frac{d}{db_0} X \right) = \begin{bmatrix} \sum_v (t^v - u^v) g(0,v) h(v) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Edelleen tästä saadaan

$$H^T \left(\frac{d}{db_0} X \right) A = a_0 \sum_v (t^v - u^v) g(0,v) h(v) = a_0 \pi_0$$

sopivaa lyhennysmerkintää käyttäen. Tarvitaan myös matriisi

$$X^T X = \begin{bmatrix} \sum g(0,v)^2 & \sum g(0,v) g(1,v) & \sum g(0,v) g(2,v) \\ \sum g(0,v) g(1,v) & \sum g(1,v)^2 & \sum g(1,v) g(2,v) \\ \sum g(0,v) g(2,v) & \sum g(1,v) g(2,v) & \sum g(2,v)^2 \end{bmatrix}$$

jonka derivaatta voidaan merkinnöin

$$\sum_{ij} = \sum_{v=1}^N (t^v - u^v) g(i,v) g(j,v)$$

kirjoittaa muotoon

$$(35) \quad \frac{d}{db_0} (X^T X) = \begin{bmatrix} 2\sum_{00} & \sum_{01} & \sum_{02} \\ \sum_{01} & 0 & 0 \\ \sum_{02} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Siten on

$$\begin{aligned} A^T \left[\frac{d}{db_0} (X^T X) \right] A &= \\ &= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2\sum_{00} & \sum_{01} & \sum_{02} \\ \sum_{01} & 0 & 0 \\ \sum_{02} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \\ &= 2a_0(a_0\sum_{00} + a_1\sum_{01} + a_2\sum_{02}). \end{aligned}$$

Kaikkiaan saadaan siis haetun derivaatan arvoksi

$$(36) \quad \frac{d}{db_0} F(b_0, b_1, b_2) = 2a_0(a_0\sum_{00} + a_1\sum_{01} + a_2\sum_{02} - \pi_0).$$

Vastaavasti voidaan laskea derivaatat

$$(37) \quad \frac{d}{db_1} F(b_0, b_1, b_2) = 2a_1(a_0\sum_{01} + a_1\sum_{11} + a_2\sum_{12} - \pi_1) \quad \text{ja}$$

$$(38) \quad \frac{d}{db_2} F(b_0, b_1, b_2) = 2a_2(a_0\sum_{02} + a_1\sum_{12} + a_2\sum_{22} - \pi_2).$$

Tarvittavien summien $\sum_{ij}$ kumulointi on verrattain nopeaa kohdefunktion laskennassa tarvittavien muiden summien yhteydessä.

5.5. Eräiden ratkaisujen diskriminoimisesta

Matemaattisesti ottaen ei ole estettä sille, että osa parametreista a_j on negatiivisia; luvussa 2 esitetty sekoitustulkinta ei tätä kuitenkaan salli. Optimointiongelma tulisi näin ollen ratkaista rajoituksin

$$\{a_j \geq 0, j=0,1,2\}.$$

Lisäksi ratkaisut, joissa jokin parametreista a_j on nolla, on suljettava pois, koska jokaista sellaista kohti on ole-

massa aidosti kolmikomponenttisia ratkaisuja, jotka neliösumman (22) pienuudella mitaten ovat parempia. Luontevin tapa sulkea pois ei-positiiviset a_j -arvot on muuttaa parametrিসointia asettamalla

$$(39) \quad a_j = \exp(a_j^*), \quad j=0,1,2.$$

Tällöin kohdefunktio (22) lakkaa kuitenkin olemasta näiden muuttujiensa suhteen lineaarinen, ja joudutaan ratkaisemaan kuuden muuttujan epälineaarinen optimointitehtävä.

Käsillä olevassa käytännöllisluonteisessa tilanteessa voitaisiin yllä esitettyä positiivisuusehtoa vielä tiukentaa edellyttämällä, että kolmikomponenttiseksi ratkaisuiksi lasketaan vain ne, joissa kukin komponentti vaikuttaa eläkkeiden pääoma-arvoihin käytetyn laskentatarkkuuden puitteissa ainakin jossakin päin tarkasteltua joukkoa $E = \{(t,u)\}$. Tämän ajattelun mukaan ratkaisua ei hyväksyttäisi, mikäli jollakin j :n arvolla

$$(40) \quad \xi > \max_{(t,u) \in E} \{q_j(t,u)\},$$

missä q_j on pääoma-arvossa (15) esiintyvä painokerroin

$$q_j = \frac{Z_j(t,u)}{Z(t,u)}.$$

Tämä hylkäyskriteeri ottaa huomioon vain sekoitussuhteet; jos halutaan antaa painoa myös eri komponentteihin liittyvien elinkorkojen (16) suhteille, kriteeri (40) voidaan korvata kriteerillä

$$(41) \quad \xi > \bar{a}_{w-t_0}(\mu_j, \delta) \cdot \max_{(t,u) \in E} \{q_j(t,u)\},$$

jossa on otettu huomioon se, että kunkin komponentin mukainen elinkorko (16) on suurimmillaan ikäskaalan alussa eli käytettäessä pienintä joukon E sallimaa työkyvyttömyyden alkamisikää t_0 . Painokertoimen q_j maksimipisteen löytämiseksi kannattaa tarkastella sen käänteisarvoa; esimerkiksi valinta $j=0$ antaa

$$\begin{aligned} \frac{1}{q_0} &= \frac{Z(t,u)}{Z_0(t,u)} = 1 + \frac{Z_1(t,u)}{Z_0(t,u)} + \frac{Z_2(t,u)}{Z_0(t,u)} \\ &= 1 + \frac{1}{a_0} \left\{ a_1 e^{(b_1 - b_0)t - (c_1 - c_0)u} + a_2 e^{(b_2 - b_0)t - (c_2 - c_0)u} \right\}, \end{aligned}$$

jota derivoimalla vakuuttuu helposti siitä, että joukon E sisällä ei ole lokaaleja ääriarvopisteitä paitsi siinä erikoistapauksessa, jossa q_0 on vakio; suurin arvo löytyy aina alueen reunalta klassisen differentiaalilaskennan keinoin.

Käytännössä kriteerien (40) ja (41) ohjelmoiminen ei ole vailla ongelmia. Heuristisen keinon tarjoaa kohdefunktion arvon keinotekoinen kasvattaminen algoritmin ajautuessa sallitun alueen ulkopuolelle. Tämä edellyttää kuitenkin, että pystytään muokkaamaan vastaavasti myös osittaisderivaattojen arvoja, mikäli algoritmi niitä käyttää.

Luvussa 6.6. kosketellaan lyhyesti näiden hylkäyskriteerien toimivuutta käytännössä.

6. Algoritmien kokeilua testiympäristössä

6.1. Koejärjestelyt; pinta I

Ennenkuin kokeillaan sovituksen löytämistä empiiriselle Z-pinnalle, algoritmeja on testattava huolellisesti, jotta päästään selville niiden ominaisuuksista käsillä olevassa koetilanteessa. Sovitusprosessin kokeilemiseksi muodostettiin testiaineisto laskemalla havaintomateriaaliksi pisteissä

$$(42) \quad \begin{cases} t=19,20,\dots,64 \\ u=1,2,\dots,t-18 \end{cases}$$

Z-funktion (2) arvoja parametrein B (vrt. taulukko 2). Näin saatua aineistoa kutsutaan seuraavassa pinnaksi I; se on rakenteeltaan muutoin samanlainen kuin esimerkiksi kuvion 4 esittämä empiirinen Z-pinta, mutta pisteiden lukumäärä (1081) on suurempi kuin vuoteen 1984 päättyvästä empiirisestä aineistosta saadaan lasketuksi (781), ja funktion arvoihin ei liity empiirisen aineiston satunnaisesta komponentista aiheutuvaa epäsäännöllisyyttä.

Sovitustehtävänä on tällöin perusteiden B mukaisten b_j -arvojen uudelleenlöytäminen erilaisia lähtöpisteitä käytettäessä. Koska vakioiden b_j oikeat arvot nyt tiedetään, saadaan objektiivinen tieto siitä, onko oikea ratkaisu löytynyt; empiirisessä sovitusprosessissa joudutaan tämän suhteen aina tyytymään jonkinasteiseen epävarmuuteen.

Tässä koeympäristössä on mahdollista testata algoritmien perillelöytämiskykyä ja nopeutta, jolloin muodostuu alustava käsitys siitä, kumpaan algoritmiin missäkin tilanteessa on paras turvautua.

Huomattakoon vielä, että samaa koeasetelmaa tarvitaan myös luvussa 7 esitettävässä herkkyyksianalyysissä.

6.2. Hooke-Jeeves -algoritmin askelpituus

HJ-algoritmia käytettäessä lähtötilanteessa sovelletulla askelpituudella on merkitystä. Tämän testaamiseksi tehtiin ensin koe yllä esitetyllä pinnalla I ja suppealla kokoomalla lähtöpisteitä. Tulokset on koottu seuraavaan taulukkoon 5, jossa oikean ratkaisun löytyminen on merkitty +-merkillä:

Taulukko 5: HJ-algoritmin askelpituuskokeita

Iteroinnin alkuarvot			askel- pituus	tulos
b_0	b_1	b_2		
0.0425	0.1225	-0.004605	0.05	+
(perusteiden A mukaiset)				
	"		0.01	+
	"		0.005	+
	"		0.001	+
0.1	0.1	0.1	0.05	-
	"		0.01	+
	"		0.005	+
	"		0.001	-

Neljässä ensimmäisessä kokeessa, joissa lähdettiin hyvin läheltä todellisia parametrinarvoja, optimipiste saavutettiin kaikissa ja sitä nopeammin, mitä lyhempi oli lähtötilanteessa käytetty askelpituus. Pitkällä alkuaskelella harpataan siten heti ohi maalin ja hukataan aikaa ennenkuin löydetään takaisin. Kauempaa lähdeittäessä eivät pisin ja lyhin kokeilluista askelpituuksista johda oikeaan ratkaisuun, ja muiden välillä ei suorituksessa ole havaittavissa sanottavaa eroa.

Koska käytännössä todennäköisintä on, että lähtöpistettä ei pystytä kovin hyvin arvaamaan, päädyttiin HJ-algoritmin lähtöaskelpituutena käyttämään arvoa 0.01. DFP-algoritmi ei edellytä askelpituuden ennalta asettamista.

6.3. Algoritmien loppukonvergenssin vertailua

Algoritmien loppukonvergenssia vertailtiin käyttämällä havaintojoukkona edelleen pintaa I ja lähtemällä perusteiden A mukaisista arvoista, jotka poikkeavat pinnan I mukaisista verrattain vähän. Tässäkin tilanteessa erot loppukonvergenssin nopeudessa osoittautuivat erittäin suuriksi: DFP-algoritmi päätyi ensimmäisen iteraatiokierroksen jälkeen - laskettuaan kohdefunktion arvon 4 pisteessä - lähemmäksi minimiä kuin HJ-algoritmi noin 800 kohdefunktion laskentakerran jälkeen. Myös HJ löysi perille, kuten kohdassa 6.1. jo todettiin, mutta aikaa kului lopullista ratkaisua kiertäessä.

6.4. Valitun lähtöpisteen merkitys

Tuloksen löytämisen kannalta saattaa lähtöpisteen valinta nousta merkittävimmäksi tekijäksi. Tämän selvittämiseksi iterointi toistettiin käyttämällä seuraavan taulukon 6 mukaista kokopelmaa alkupisteitä, jotka suuruusluokaltaan vastaavat perusteiden B mukaisia b_j -vakioita. Taulukon kahdesta ensimmäisestä sarakkeesta selviävät tulokset HJ- ja DFP-algoritmeille: tämän kokeen valossa HJ-algoritmin perillelöytämiskyky on kohtalainen, DFP-algoritmin puolestaan sangen heikko. Taulukon muihin sarakkeisiin palataan kohdassa 6.5.

Taulukko 6: Algoritmien perillelöytämiskyky

Algoritmi	Pinta I		Pinta II	
	HJ	DFP	HJ	DFP
Iteroinnin alkupiste b_0, b_1, b_2				
0, 0, 0	+	-	+	-
0.05, 0.05, 0.05	-	-	+	-
0.1, 0.1, 0.1	+	-	+	-
0.15, 0.15, 0.15	-	-	+	-
0.3, 0.2, 0.1	+	-	+	-
0.3, 0.1, 0.2	+	-	+	-
0.2, 0.3, 0.1	+	-	+	+
0.2, 0.1, 0.3	-	-	+	-
0.1, 0.3, 0.2	+	-	+	+
0.1, 0.2, 0.3	-	-	+	-
0.15, 0.1, 0.05	+	-	+	-
0.15, 0.05, 0.1	-	-	+	-
0.1, 0.15, 0.05	+	+	+	+
0.1, 0.05, 0.15	-	-	+	-
0.05, 0.15, 0.1	+	-	+	-
0.05, 0.1, 0.15	+	-	+	+
0.1, 0.05, 0	+	-	+	+
0.1, 0, 0.05	-	-	+	+
0.05, 0.1, 0	+	+	+	-
0.05, 0, 0.1	-	-	+	-
0, 0.1, 0.05	-	-	+	+
0, 0.05, 0.1	-	-	+	-

6.5. Pinta II

Kuten edellä on mainittu, perusteissa B pisimmän keskikes-
ton komponentti ($j=1$) on dominoiva muiden saadessa painoa
pääasiassa vain nuorten henkilöiden lyhyen aikaa kestänei-
den eläkkeiden kohdalla. Tämä johtaa arvelemaan, että algo-
ritmien kohtaamat vaikeudet johtuvat suurelta osalta juuri
tämästä pinnan I ominaisuudesta. Tämän arvelun testaamiseksi
muodostettiin täysin keinotekoisin parametrinarvoin pinta
II, jossa kaikki komponentit ovat keskimäärin samalla pai-
nolla edustettuina kuitenkin siten, että painosuhteet
vaihtelevat iän ja keston myötä. Edellä referoitu koesarja
toistettiin tällä helpommin identifioituvaksi arvellulla
pinnalla, ja tulokset on koottu edellä esitetyn taulukon 6
oikeanpuoleisiin sarakkeisiin.

Kuten nähdään, arvelu saa kokeesta tukea. HJ löytää pinnan
II tapauksessa perille poikkeuksetta. DFP-algoritmin osalta
saavutetaan kylläkin edistystä, mutta esitys on yhä kaikkea
muuta kuin vakuuttava, eikä nopeasta loppukonvergenssista
juuri päästä hyötymään.

Todennäköisesti juuri loppukonvergenssin nopeus vähentää
DFP-algoritmin mahdollisuuksia löytää ratkaisu kaukaa läh-
dettäessä, koska algoritmi on taipuvainen lankeamaan ensim-
mäiseen tarjolla olevaan lokaaliin minimikohtaan. HJ-algo-
ritmi sen sijaan osoittautuu luotettavaksi työkaluksi, kun
ratkaisu on löydettävä karkealla tasolla; DFP on tämän jäl-
keen käytettävissä ratkaisun lopulliseen hiomiseen. Luvussa
B tullaan kuitenkin havaitsemaan, että empiirisen aineiston
tutkimisessa käytettävissä johdonmukaisesti etenevissä koe-
sarjoissa, joissa seuraavan kokeen ratkaisu on aina lähellä
edellistä, DFP on hyvinkin käyttökelpoinen.

Näiden kahden algoritmin hyvistä ja huonoista puolista on
lähteessä [7] samansuuntaisia kokemuksia, joskin siellä
tilanne oli DFP-algoritmin suhteen vielä hankalampi, koska
kohdefunktio ei ollut kaikkialla derivoituva.

6.6. Epäonnistumisten luonteesta

Miltei kaikki yllä kuvatut eksymiset johtivat ratkaisuihin,
joissa jonkin komponentin paino on jokseenkin 0. Tällaisten
välttämistä yritettiin kohdassa 5.5. ehdotetuin heuristi-
sin keinoin, mutta ne eivät tuottaneet toivottua tulosta.
Sama koski tilanteita, joissa ratkaisun a_j -parametreista
jokin oli negatiivinen: niidenkään välttämässä ei kritee-
rein (40) ja (41) onnistuttu.

Tosiaineistoa käsiteltäessä on siten tyydyttävä kokeilemaan
mahdollisimman kattavaa alkuarvokokoelmaa. Vihjeen kulloin-
kin lupaavimmista alkuarvoista voi kuitenkin saada laske-
malla kohdefunktion arvoja karkein välein.

7. Herkkyysanalyysi keskikestojen suhteen

Tässä kokeiltavan Z-funktion parametrien määrittämismenetelmän käyttökelpoisuus riippuu paljolti siitä, missä määrin keskikestojen ennalta kiinnittäminen rajoittaa tarjolla olevien ratkaisujen määrää. Periaatteelliselta kannalta rajoitus on tosin vailla merkitystä siinä mielessä, että voidaan ajatella sovitusta toistettavan hienokseltaan keskikestoja vaihdellen, kunnes päästään riittäväksi katsottavaan varmuuteen siitä, että globaali minimi on löytynyt - tästähän ei käsillä olevan kaltaisessa tehtävässä ole mahdollista saada ehdotonta varmuutta. Iteroinnin viemä aika estää kuitenkin kovin suuren keskikestovalikoiman läpikäymisen ainakin pienkonetta käytettäessä.

Keskikestojen ennalta kiinnittämisen vaikutuksia voidaan arvioida kahdella tasolla:

Lokaalissa tarkastelussa tutkitaan yksittäistä ikää ja kestoa vastaavan yksikköpääoma-arvon riippuvuutta valituista keskikestoista. Tyhjentävä analyysi edellyttäisi kuvioissa 1-3 käytetyn tekniikan soveltamista; seuraavassa on kuitenkin katsottu riittäväksi laskea kutakin ratkaisua vastaavat pääoma-arvot pisteissä (42) ja koota eri tilanteissa havaituista muutoksista suurimmat seuraavaan taulukkoon 7. Koe on suoritettu samassa testiympäristössä kuin luvun 6 kokeet, ts. käyttäen havaintoina pintojen I ja II pisteitä; kutakin keskikestoa on sitten vuorollaan muutettu taulukon osoittamassa suhteessa, ja etsitty paras näin saatuja keskikestoja vastaava sovite.

Globaali kriteeri vaikutuksen arvioimiselle saadaan laskien keskikestojen muuttamisen vaikutus työkyvyttömyyseläkevastuun kokonaismäärään. Tämä on seuraavassa tehty käyttäen yhtiöiden yhteistä, iän ja keston mukaan jaoteltua rahastoitujen työkyvyttömyyseläkkeiden kantaa vuoden 1984 lopun tilanteen mukaisena. Sovituksen hyvyttä kuvaamaan on taulukkoon otettu myös neliösumman (23) arvo optimipisteessä suhteutettuna parhaaseen ko. koesarjassa löydettyyn soviteeseen.

Kokeen tulos osoittaa, että keskikestojen hienosäädöllä on melko vähän merkitystä lokaalilla tasolla ja tuskin mitään vaikutusta globaalilla tasolla: koetilanteessa suurin muutos vastuun kokonaismäärään oli 0.33 % pienenemä. Tukea saa näin myös se ennakkokäsitys, että juuri keskikestot ovat Z-mallin parametreista ne, joiden identifioituvuusvaikeudet estävät yleisen sovitustehtävän säännöllisen tai edes ajoittaisen onnistumisen.

Taulukko 7: Herkkyys keskikestojen muutokselle

Muu- tettu keski- kesto j	Muutos %	Muutokset yksikkö- pääoma-arvoissa: suurin alenema % suurin kasvu %		Neliö- summa suhteessa koesarjan minimiin	Vaikutus vastuun kokonais- määrään %
Pinta I					
0	+10	-0.6	+1.7	121.2	-0.095
0	+5	-0.7	+0.8	19.9	-0.024
0	-5	-0.8	+0.5	18.5	+0.032
0	-10	-1.1	+1.3	42.5	+0.029
1	+10	-0.7	+6.0	385.9	-0.058
1	+5	-0.4	+3.7	178.4	-0.026
1	-5	-2.3	+0.7	581.8	-0.134
1	-10	-6.3	+1.3	1289.1	-0.332
2	+10	-0.1	+0.6	2.0	+0.009
2	+5	-0.1	+0.3	1.1	+0.012
2	-5	-0.3	+0.1	1	-0.010
2	-10	-0.6	+0.2	3.9	-0.022
Pinta II					
0	+10	-0.3	+3.4	9.6	+0.157
0	+5	-0.4	+1.1	2.5	-0.013
0	-5	-0.9	+0.4	2.6	+0.007
0	-10	-1.9	+0.8	2.4	+0.010
1	+10	-0.3	+1.0	6.7	-0.012
1	+5	-0.2	+0.5	1.9	-0.005
1	-5	-0.5	+0.2	2.1	+0.007
1	-10	-1.0	+0.3	8.8	+0.019
2	+10	-0.8	+0.4	3.4	+0.013
2	+5	-0.6	+0.3	1.0	+0.008
2	-5	-0.2	+0.5	1	-0.011
2	-10	-0.6	+1.0	7.7	+0.005

Taulukon tulokset ovat luonteavia: kummankin pinnan osalta muutos on suurimmillaan toisaalta tilanteessa, jossa suurinta keskikestoa (j=1) on pienennetty ja toisaalta tilanteessa, jossa pienintä keskikestoa (j=0) on kasvatettu.

Näin ollen sovitustehtävän kriittisin vaihe on se, jossa nämä keskikestojen valikoiman ääripäät kiinnitetään. Keskimmäisen keskikeston ($j=2$) valinnalla on näiden rinnalla vähemmän merkitystä.

Toisaalta nähdään, että pinnalla II, jossa eri kestoluokkien painoarvot ovat samaa suuruusluokkaa, erot neliösumman arvoissa samoinkuin pääoma-arvoissa ovat melko pienet. Sen sijaan pinnalla I, jolla pitkäkestoisin komponentti ($j=1$) dominoi aivan nuoria ikiä ja lyhyitä kestoja lukuunottamatta, juuri sen muuttaminen johtaa suurimpiin muutoksiin tuloksissa keskimmäisen luokan ($j=2$) ollessa tässäkin melko yhdenmukainen.

Yllä esitetty edellyttää luonnollisesti, että on löydetty todelliset ratkaisut. Paitsi taulukon tuloksissa esiintyvä säännönmukaisuus tätä tukee eri tilanteissa saavutettujen kohdefunktion arvojen johdonmukainen kehittyminen. Se, että kokonaisrahaston osalta tulokset eivät käyttyä yhtä säännöllisesti, on myös ymmärrettävää: painotuksessa käytettyyn kantaan liittyy suureenkin empiiriseen aineistoon kuuluvaa epäsäännöllisyyttä.

8. Menetelmän kokeilu käytännössä

8.1. Yleistä

Esitetyn parametrien määrittämismenetelmän varsinainen koetinkivi on luonnollisesti sen soveltaminen empiiriseen aineistoon. Seuraavassa käydään esimerkin luonteisesti läpi tällainen tehtävä eri vaiheineen.

Osoittautuu, että kehitetty menetelmä toimii odotusten mukaisesti, mutta sen ehkä ratkaisevinta vaihetta, eli keski-kestojen valitsemista, ei ole mahdollista automatisoida. Tämä on odotettavissakin, koska prosessin totaalinen automatisoiminen itse asiassa merkitsisi sovitustehtävän globaalin ratkaisun löytävän algoritmin olemassaoloa. Tätä taas on aikaisemman kokemuksen valossa pidettävä epätodennäköisenä.

Z-mallia yhdeksine vakioineen voidaan hyvällä syyllä pitää yliparametrisoituna, mikä johtaa siihen, että useimmiten löydetään useita ratkaisuja, jotka eivät sanottavasti poikkea toisistaan sen enempää pääoma-arvojen kuin kokonaisrahastolle edellyttämänsä muutoksen osalta. Sovituksessa kohdattavat hankaluudet ovat hinta, joka yliparametrisoinnin mukanaan tuomasta joustavuudesta on maksettava: tässä tutkimuksessa ei parametrien määrän supistamista päädytä ehdottamaan, koska malli vakiintuneessa muodossaan tarjoaa sopivan välineen myös harkinnan käyttämiseen työkyvyttö-myysmallin vakioita kiinnitettäessä.

8.2. Aineiston valinta

Empiirisessä kokeessa käytettiin kuvion 4 pintaa, toisin sanoen vuosien 1983-1984 empiiristä päättävyyttä ja perusteiden B mukaista elossaolo- ja alkavuustodennäköisyyttä. Myöhemmässä vaiheessa kokeiltiin alustavasti päättävyyden rajoittamista vuoden 1984 mukaiseen sekä elossaolo- ja alkavuustodennäköisyyden valinnalle kohdassa 4.4. mainittuja vaihtoehtoja.

8.3. Optimaalisen ratkaisun etsiminen

Kokeilun ensimmäisessä vaiheessa pyrittiin mahdollisuuksien mukaan löytämään globaali ratkaisu, ts. neliösumman pienuudella mitaten optimaalinen ratkaisu kyseeseen tulevassa parametriavaruudessa. Kokeen muodostivat seuraavassa selostettavat koesarjat, joissa yhden tai korkeintaan kahden komponentin keskikestoa muutettiin kerrallaan, ja jatkosta päätettiin kussakin tilanteessa kokeen antaman palautteen perusteella.

Tulokset esitetään kahdella tavalla. Ensimmäinen näistä on seuraava taulukko 8, johon on koottu kutakin koetta kohti ennalta valitut keskikestot ja saavutetut tulokset: neliösumman minimiarvo promilleina keskiarvosta lasketusta neliösummasta, kokonaislukuargumentteihin (42) liittyvien yksikköpääoma-arvojen muutosten ääriarvot, sekä vaikutus, joka ratkaisun mukaisella parametrien muuttamisella olisi ollut työkyvyttömyyseläkkeiden korvausvastuun kokonaismäärään vuoden 1984 lopussa.

Toinen esitystapa on graafinen: liitekuvaan 5 on piirretty saavutetut neliösumman arvot koesarjoittain kulloinkin muutellun keskikeston funktiona. Kuvaa luettaessa on kaksi syytä noudattaa varovaisuutta. Ensinnäkin, kuten pystyakselilta havaitaan, liikutaan kaiken aikaa alueella, jossa kaikki sovitteet ovat sangen hyviä ja sitäpaitsi eroavat toisistaan verrattain vähän. Toiseksi, vertailun vuoksi on ollut välttämätöntä koota kaikki käyrät samaan kuvaan huolimatta siitä, että x-akselilla oleva muuttuja vaihtelee; se on eri koesarjoissa vuoron perään kukin komponentteihin $j=0,1$ ja 2 liittyvistä keskikestoista. Kuvaa onkin syytä tarkastella ainoastaan seuraavien koesarjoittaisten kommenttien rinnalla.

Koesarja A alkaa kokeella A0, jossa keskikestot on jätetty perusteiden B mukaisiksi. Taulukon mukaan näinkin päädytään pääoma-arvojen selvään korotustarpeeseen, joka kokonaisrahastolla mitaten on 3.5 % luokkaa. Korotus on suurimmillaan nuorella iällä eläkkeen alkuvaiheessa, mutta esiintyy myös tarvetta alentaa pääoma-arvoja eräiltä osin. Osoittautuu kuitenkin, että alentamistarve on näennäistä ja seuraus siitä, että perusteiden B mukaisilla keskikestoilla parasikin sovite jää verrattain karkeaksi.

Sarja A jatkuu luvussa 7 tehdyn havainnon mukaan; tällöin todettiin, että sovitus tehtävän kriittisin vaihe on pisin keskekeston kiinnittäminen. Koska tiedossa on, että korkeen ajankohtana pääoma-arvot tuottivat pikemmin ali- kuin ylijäämää, voidaan päätellä, että kestot ovat todennäköisemmin kasvamassa kuin pienenemässä. Tämän mukaisesti sarjaa A on jatkettu komponentin $j=1$ keskikestoa kasvattamalla. - Taulukossa kokeet on esitetty keskikeston mukaan kasvavassa järjestyksessä, mutta on selvää, että todellisuudessa tällainen koesarja etenee ensin karkein ja sitten hienommin edestakaisin askelin tulosten antaman palautteen ohjaamana.

Koesarjan A nojalla nähdään, että ellei muiden komponenttien keskikestoihin kosketa, pisin keskikesto on optimaalisen sovituksen saavuttamiseksi kasvatettava 51 vuoteen. Luvun 7 herkkyyssanalyysin nojalla ei kannata ryhtyä tässä käytettyä vuoden tarkkuutta hienojakoisempaan etsintään. Kokonaiskorotustarpeesta tämä koesarja antaa noin yhtä prosenttiyksikköä suuremman kuvan kuin perusteiden B mukaisten keskikestojen käyttö.

Taulukko 8: Empiiriset koesarjat

- a koe
 b komponenteittaiset keskikestot
 c saavutettu neliösumma promilleina keskiarvosta lasketusta neliösummasta
 d suurin yksikköpääoma-arvon lasku tai pienin kasvu %
 e ikä, jolla tämä saavutetaan
 f kesto, jolla tämä saavutetaan
 g suurin yksikköpääoma-arvon kasvu %
 h ikä, jolla tämä saavutetaan
 i kesto, jolla tämä saavutetaan
 j vaikutus kokonaisvastuuseen % verrattuna perusteisiin B

a	b			c	d	e	f	g	h	i	j
A0	3.23	40	9.56	0.8950	-7.7	30	12	+31.1	24	0	+3.45
A1	"	45	"	0.8533	-5.3	30	12	+27.4	23	0	+4.14
A2	"	49	"	0.8411	-3.8	29	11	+23.4	23	0	+4.37
A3	"	50	"	0.8400	-3.5	29	11	+22.6	23	0	+4.43
A4	"	51	"	0.8396	-3.2	29	11	+21.9	23	0	+4.48
A5	"	52	"	0.8398	-2.9	29	11	+21.1	23	0	+4.53
A6	"	55	"	0.8430	-2.0	28	10	+19.1	22	0	+4.66
A7	"	60	"	0.8485	-9.8	18	0	+14.3	34	0	+4.80
B1	3.23	45	12	0.8495	-4.4	32	14	+32.1	18	0	+4.22
B2	"	49	"	0.8369	-3.0	32	14	+28.5	18	0	+4.46
B3	"	50	"	0.8358	-2.7	32	14	+27.8	18	0	+4.52
B4	"	51	"	0.8354	-2.3	32	14	+27.1	18	0	+4.57
B5	"	52	"	0.8355	-2.0	32	14	+26.3	18	0	+4.61
B6	"	53	"	0.8361	-1.7	32	14	+25.5	18	0	+4.66
C1	3.23	50	13	0.8344	-2.3	33	15	+30.0	18	0	+4.55
C2	"	51	"	0.8340	-2.0	33	15	+29.2	18	0	+4.61
C3	"	52	"	0.8340	-1.8	33	15	+28.3	18	0	+4.64
C4	"	53	"	0.8346	-1.4	33	15	+27.6	18	0	+4.70
C5	"	50	14	0.8332	-1.9	34	16	+31.8	18	0	+4.59
C6	"	51	"	0.8327	-1.6	34	16	+31.0	18	0	+4.64
C7	"	52	"	0.8328	-1.3	34	16	+30.1	18	0	+4.68
C8	"	53	"	0.8334	-1.0	34	16	+29.2	18	0	+4.73
C9	"	50	15	0.8321	-1.6	35	17	+33.0	18	0	+4.58
C10	"	51	"	0.8316	-1.2	36	18	+32.8	18	0	+4.68
C11	"	52	"	0.8317	-0.9	35	17	+31.9	18	0	+4.72
C12	"	53	"	0.8323	-0.7	35	17	+30.9	18	0	+4.77
C13	"	50	16	0.8311	-1.2	37	19	+34.9	18	0	+4.65
C14	"	51	"	0.8306	-0.9	37	19	+34.1	18	0	+4.71
C15	"	52	"	0.8307	-0.6	37	19	+33.2	18	0	+4.75
C16	"	53	"	0.8313	-0.3	37	19	+32.2	18	0	+4.80
C17	"	50	17	0.8302	-0.9	38	20	+36.3	18	0	+4.69
C18	"	51	"	0.8297	-0.6	39	21	+35.4	18	0	+4.74
C19	"	52	"	0.8298	-0.3	39	21	+34.5	18	0	+4.79
C20	"	53	"	0.8304	-0.1	39	21	+33.7	18	0	+4.84
C21	"	50	18	0.8294	-0.6	40	22	+37.3	18	0	+4.72
C22	"	51	"	0.8289	-0.3	41	23	+36.5	18	0	+4.77
C23	"	52	"	0.8290	-0.0	41	23	+35.7	18	0	+4.82
C24	"	53	"	0.8296	+0.1	64	46	+34.8	18	0	+4.87

Taulukko B (jatkoa)

a	b			c	d	e	f	g	h	i	j
D1	3.23	51	19	0.8282	-0.1	43	25	+37.4	18	0	+4.80
D2	"	"	20	0.8276	+0.0	64	46	+38.3	18	0	+4.82
D3	"	"	25	0.8252	+0.1	64	46	+43.1	18	0	+4.99
D4	"	"	30	0.8237	+0.1	64	46	+46.5	18	0	+5.17
D5	"	"	35	0.8226	+0.2	64	46	+48.3	18	0	+5.19
D6	"	"	40	0.8215	+0.2	64	46	+46.6	18	0	+5.16
D7	"	"	45	0.8209	+0.3	64	46	+48.1	18	0	+5.23
D8	"	"	50	0.8204	+0.3	64	20	+49.3	18	0	+5.28
E1	3.23	52	50	0.8206	+0.3	64	0	+47.5	18	0	+5.30
E2	"	53	"	0.8214	+0.3	64	0	+45.8	18	0	+5.33
E3	"	55	"	0.8242	+0.3	64	0	+42.7	18	0	+5.38
E4	"	60	"	0.8366	+0.2	64	0	+41.0	18	0	+5.65
F1	3.3	51	50	0.8209	+0.3	64	19	+49.6	18	0	+5.25
F2	2.3	"	"	0.8156	+0.2	64	0	+32.8	20	2	+5.31
F3	2.1	"	"	0.8149	+0.2	64	0	+30.9	21	3	+5.33
F4	2.0	"	"	0.8149	+0.2	64	0	+31.6	21	3	+5.38
F5	1.9	"	"	0.8150	+0.1	64	0	+32.3	21	3	+5.45
F6	1.5	"	"	0.8176	-1.0	26	0	+33.2	21	3	+5.62
F7	1.0	"	"	0.8295	-19.9	21	0	+38.9	21	3	+6.03
F8	0.5	"	"	0.8585	-59.7	18	0	+47.6	21	3	+6.60
G1	2.0	52	51	0.8180	+0.1	64	0	+31.2	21	3	+5.46
G2	"	52	50	0.8181	+0.1	64	0	+30.9	21	3	+5.45
G3	"	51	50	0.8149	+0.2	64	0	+31.6	21	3	+5.38
G4	"	51	49	0.8150	+0.2	64	0	+31.4	21	3	+5.38
G5	"	50	49	0.8127	+0.2	64	0	+32.1	21	3	+5.31
G6	"	50	48	0.8128	+0.2	64	0	+31.9	21	3	+5.30
G7	"	49	48	0.8113	+0.2	64	0	+30.9	21	3	+5.16
G8	"	49	47	0.8114	+0.2	64	0	+30.7	21	3	+5.15
G9	"	48	47	0.8112	+0.2	64	25	+30.6	21	3	+5.05
G10	"	48	46	0.8113	+0.2	64	25	+30.4	21	3	+5.04
G11	"	47	46	0.8124	+0.2	64	25	+32.1	20	2	+4.97
H1	2.1	48	47	0.8122	+0.2	64	25	+30.2	20	2	+5.01
H2	2.0	"	"	0.8112	+0.2	64	25	+30.6	21	3	+5.05
H3	1.9	"	"	0.8103	+0.2	64	0	+31.2	21	3	+5.09
H4	1.8	"	"	0.8096	+0.2	64	0	+31.9	21	3	+5.14
H5	1.7	"	"	0.8090	+0.2	64	0	+32.6	21	3	+5.19
H6	1.6	"	"	0.8082	+0.2	64	0	+31.6	21	3	+5.18
H7	1.5	"	"	0.8078	+0.1	64	0	+32.0	21	3	+5.21
H8	1.4	"	"	0.8076	-2.0	23	0	+32.4	21	3	+5.25
H9	1.3	"	"	0.8077	-4.9	23	0	+33.5	21	3	+5.32
H10	1.2	"	"	0.8081	-7.7	22	0	+34.9	21	3	+5.39
I1	1.4	48	46	0.8077	-2.1	23	0	+32.1	21	3	+5.24
I2	"	48	47	0.8076	-2.0	23	0	+32.4	21	3	+5.25
I3	"	49	47	0.8101	-3.0	24	0	+32.4	21	3	+5.38

Koesarjan B motiivina on hypoteesi, jonka mukaan pitkäkestoisimman komponentin odotusarvon kasvattaminen saattaisi tehdä tilaa myös keskipitkän komponentin vastaavan suureen kasvattamiselle, jolloin tämäkin saattaisi tulla perusteiden B mukaista sangen vaatimatonta rooliaan merkittävämmäksi. Kokeiluluonteinen keskikeston kasvattaminen arvosta 9.5598 arvoon 12 pienentääkin neliösummaa kaikilla sarjassa B kokeilluilla pitkäkestoisimman komponentin odotusarvoilla, mikä kuvassa 5 näkyy siinä, että käyrä B on kautta linjan käyrän A alapuolella. Minimi saavutetaan nytkin komponentin $j=1$ odotusarvolla S_1 . Kokonaisvastuun muutos pysyy jokseenkin samalla tasolla kuin edellisessä koesarjassa.

Koesarja C muodostaa esimerkin intuition pettävyydestä. Luontevalta tuntuisi, että paras sovite saataisiin ja kaikki kolme komponenttia olisivat parhaiten hyödyksi, mikäli keskikestot olisivat tasavälein melko kaukana toisistaan. Sarjassa C on toistettu sarjan B kaltaista koetta kasvattamalla komponentin $j=2$ keskikestoa vuodella kerrallaan, kunnes on jouduttu havaitsemaan, että kullakin askelella neliösumma pienenee, eikä saavutettava hyöty osoita merkkejä ratkaisevasta hidastumisesta. Pisimmän komponentin suhteen minimikohta pysyy S_1 vuoden kohdalla. Kokonaisvaikutus kasvaa hiljalleen aina 4.9 % saakka.

Koska minimi ei tunnu löytyvän, on koesarjassa D kiinnitetty pisin keskikesto hyväksi osoittautuneeseen arvoon S_1 , ja etsitty pidemmin lisäyksiä minimiarvoon johtavaa komponentin $j=2$ keskikeston arvoa. Sarjan yllättävä tulos on, että saavutetaan kaiken aikaa pienempiä kohdefunktion arvoja, ja sovite on sovelletulla yhden vuoden tarkkuudella parhaimmillaan, kun keskimmäisen komponentin keskikesto nostetaan aivan pisimmän tuntumaan. Erot ovat tosin minimaalisia, mutta koska tehtäväksi tässä kohden on asetettu globaalin ratkaisun löytäminen karkealla tasolla, ne on otettava huomioon. Kokonaismuutos kohoa 5.3 %:iin.

Koesarjassa E on tarkastettu, ettei keskipitkän komponentin keskikeston kasvattaminen edellytä myös komponentin $j=1$ odotusarvon kasvattamista. Näin ei ole; λ_1 :n kasvaessa arvot käyvät nopeasti huonommiksi. Kun lyhin keskikesto on kiinteä, minimipiste pisimmän keskikeston suhteen on siis keskipitkän komponentin odotusarvosta jokseenkin riippumaton.

Koesarjassa F on kiinnitetty komponenttien $j=1$ ja $j=2$ keskikestot ja tutkittu tässä tilanteessa lyhimmän komponentin keskikeston muutoksen vaikutuksia. Toisin kuin sarjassa D, saavutettu neliösumman pieneneminen on taas merkittävämpää luokkaa, ja minimiin johtava arvo $\lambda_0=2$ erottuu selvästi. Jos sen arvoa tästä edelleen pienennetään, tulokset huononevat nopeasti, mikä näkyy sekä neliösumman kuvaajasta (käyrä F kuvassa 5) että taulukon B osoittamista, luonnottoman suurilta vaikuttavista muutoksista yksittäisiin ikin ja kestoihin liittyvissä pääoma-arvoissa. Kokonaisvaikutus kohoa koesarjan D mukaiseen verrattuna vain hieman.

Vaikka minimiin johtava pitkäkestoisimman komponentin odotusarvo λ_1 edellä osoittautuikin λ_2 :sta jokseenkin riippumattomaksi, se ei suinkaan ole riippumaton keskikestosta λ_0 . Tämä nähdään koesarjasta G: siinä lyhytkestoisimman komponentin arvo on kiinnitetty arvoon 2.0, ja etsitty tämän jälkeen minimikohtaa antaen pisimmän ja keskipitkän komponentin odotusarvojen erotuksen kasvaa korkeintaan arvoon 2. Kuvioon 5 sarjaa G vastaava käyrä on piirretty λ_1 :n funktiona; kuten taulukosta 8 nähdään, neliösumman pienin arvo tässä sarjassa saavutetaan, kun $\lambda_1=48$ ja $\lambda_2=47$. Kokonaisvastuun muutos laskee 5.05 prosenttiin.

Sarjassa H puolestaan on etsitty näitä arvoja kohden minimin tuottava lyhimmän keston odotusarvo; osoittautuu, että sitä on pienennettävä aina arvoon 1.4. Tällöin globaali ratkaisu onkin jo karkealla tasolla löytynyt: ympäristöä testaamalla voidaan sarjan I tapaan tarkastaa, että ellei keskikestoissa ryhdytä käyttämään suurempaa tarkkuutta, ei ole löydettävissä pistettä, jossa kohdefunktion arvo olisi vielä pienempi. Sarjan I kokeita ei ole merkitty kuvioon 5.

Optimaalinen ratkaisu saadaan siis keskikestojen arvoilla 1.4, 48 ja 47 vuotta, ts. kokeessa H8, jonka tulokset on taulukkoon merkitty korostetusti. Vastaava neliösumman taso on kuvioon 5 merkitty pisteviivalla. Iän ja keston mukaan eritellen optimiratkaisun mukaisen perustemuutoksen vaikutukset ulottuisivat 2 % pienennyksestä aina 32 % kasvuun. Tarkemman käsityksen ikä- ja kestokohtaisista vaikutuksista pääoma-arvoon saa kuviosta 6: havaitaan, että miltei kauttaaltaan esiintyy korotustarvetta. Tärkeimmällä ikä- ja kestoalueella tämä on vähäisempää ja kasvaa iän laskiessa. Kussakin iässä korotustarve näyttää olevan suurimmillaan noin 2-4 vuoden kestoisilla eläkkeillä. Kokonaisvaikutus on 5.25 prosenttia.

8.4. Harkinnan käyttö keskikestojen valinnassa

Kuten edellisen luvun koesarjat osoittivat, lyhimmän ja pisimmän komponentin keskikestoista saadaan empiirisen aineiston osalta melko tarkka käsitys komponentin $j=2$ odotusarvon jäädessä verrattain laajalla alueella harkinnan varaan. Vaikka yhtä täydellistä koesarjaa ei ole tätä tutkimusta varten käyty läpi millään toisin valitulla aineistolla, alustavat kokeet viittaavat siihen, että yllä esitetyn optimiratkaisun piirteet ovat jossakin määrin ominaiset juuri kohdassa 8.3. käsitellylle aineistolle.

Aineiston antaman tuloksen tarkka seuranta ei siten välttämättä johda käytännölliseen tulokseen. Johdonmukaisesti noudatettuna se saattaisi johtaa perusteiden muuttamiseen aina, kun aineistoon liitetään tiedot uudelta päättymisvuodelta. Tämä puoltaa lähestymistapaa, jossa komponentin $j=2$ odotusarvo valitaan pisimmän ja lyhimmän välimaastosta siten, että sovite ei ole juuri optimaalista huonompi; tämä arvo on todennäköisesti tyydyttävä myös seuraavina vuosina.

Vastaavin perusteluin, ja ottaen huomioon luvun 7 herkkyys-analyysin tulokset, jonkinasteista harkintaa on syytä soveltaa muidenkin komponenttien keskikestoisiin. Kohdassa 8.3. käsiteltyyn aineistoon sopiva keskikestovalikoima voisi siten olla esimerkiksi 1.6, 50 ja 20 vuotta. Jos etsitään tätä valikoimaa vastaava ratkaisu, päädytään neliösumman arvoon, joka on vain 1.6 % korkeampi kuin optimaalisessa ratkaisussa H8. Kokonaiskorotustarve asetuu tässä 5.42 prosenttiin, eikä ratkaisevia eroja ole myöskään ikä- ja kestoluokittaisten korotusten määrissä. Tämä nähdään kuviosta 7, jossa näin saadun ratkaisun mukaisia pääoma-arvoja on verrattu optimiratkaisun mukaisiin; ero on suurimmillaan nuorilla, ja tekisi näiden pääoma-arvojen korotuksen hieman vähemmän radikaaliksi kuin optimiratkaisu H8.

8.5. Pyöristys

Kuten yhtälöistä (4) nähdään, keskikestojen käänteisluvut esiintyvät työkyvyttömyysmallin eräiden vakioiden erotuksina. Edellä valittujen arvojen hyviin puoliin voidaan lukea se, että niiden käänteisluvut ovat yksinkertaisia desimaalilukuja.

Näin suuressa määrin käytäntöön perustuvan kriteerin esittäminen saattaa tuntua ristiriitaiselta siihen nähden, että parametrien etsinnässä on muutoin nähty paljon vaivaa. Kyse on kuitenkin vain olennaisen ja epäolennaisen erottamisesta: luvun 7 herkkyysanalyysin perusteella korkeintaan parilla merkitsevällä numerolla on vaikutusta keskikestoja valittaessa.

Jos tämä periaate omaksutaan, sitä on luonnollisesti sovellettava myös iteroinnin tuloksina saataviin parametrinarvoihin. Kuviossa 8 on tarkasteltu, mikä vaikutus vakioiden pyöristyksellä on yksikköpääoma-arvoihin. Pyöristyksen karkeus käy ilmi kuvioon liitetystä taulukoista. Huomataan, että pyöristämisestä johtuvat erot ovat käytännön kannalta täysin vailla merkitystä. Vaikutus kokonaisvastuuseen on niinikään minimaalinen, alle 0.8 prosenttia.

Kuviossa 9 verrataan pyöristetyn ratkaisun mukaisia pääoma-arvoja perusteiden B mukaisiin. Kun tätä vertaa kuvioon 6, saa käsityksen kaikkien edellä esitettyjen, harkintaan perustuvien optimiratkaisusta poikkeamisten yhteisvaikutuksesta.

8.6. Yhteenvedo vakioiden kiinnittämismenetelmästä

Edellä esitellyn käytännön kokeen tuloksena hahmottuu parametrien määrittämiseksi seuraava menettely:

1. Lasketaan empiiriset päättävyydet
2. Lasketaan Z-arvot käyttäen kohdassa 1 laskettuja päättävyyksiä ja voimassa olevien laskuperusteiden mukaista elossaolo- ja alkamistodennäköisyyden tuloa
3. Etsitään koesarjan A tapaan parhaan sovituksen antava pitkäkestoisin komponentin odotusarvo pitäen muut keskikestot ennallaan
4. Etsitään koesarjan F tapaan parhaan sovituksen antava lyhytkestoisin komponentin odotusarvo pitäen keskipitkän komponentin keskikesto alkuperäisessä arvossaan ja pitkäkestoisin komponentin keskikesto kohdan 3 mukaisena
5. Toistetaan vuorotellen vaiheita 3 ja 4, kunnes pisin ja lyhin keskikesto stabiloituvat
6. Harkitaan, saavutetaanko merkittävää etua sillä, että vanhat parametrit korvataan tältä osin uusilla, ja tehdään valinta korvaamisen ja ennallaan säilyttämisen välillä
7. Kiinnittäen komponenttien $j=0$ ja $j=1$ odotusarvot kohdassa 6 tehdyn päätöksen mukaisiksi etsitään komponentin $j=2$ keskikeston optimaalinen arvo
8. Otaen huomioon kohdassa 8.4. esitetyt tekijät harkitaan, onko oleellista etua saavutettavissa sillä, että vanha arvo tällä kohden korvataan uudella, ja tehdään valinta korvaamisen ja ennallaan säilyttämisen välillä
9. Pyöristetään ratkaisu.

On ehkä syytä vielä muistuttaa siitä, että tämä menettely, samoinkuin käsillä oleva tutkimus kokonaisuudessaankin, koskee vain alkaneiden eläkkeiden pääoma-arvojen määrittämistä. Kerta- ja riskimaksujen määrittämiseen on tämän jälkeen vielä käytettävissä kaksi parametria yhtälön (21) osoittamaan tapaan.

9. Jatkotutkimuksen aiheita

9.1. Kalenterivuoden ja sukupuolen vaikutukset

Luvussa 8 esitetty analyysi pääoma-arvojen muuttamistarpeesta perustui vuosien 1983 ja 1984 päättävyystietoihin. Menetelmällä saadun kokonaiskorotustarpeen voidaan olettaa sisältävän satunnaista osuutta ainakin siltä osin, kuin ikä- ja kestoluokittaiset poistuvien eläkeläisten osuudet sitä sisältävät.

Mitään keinoa kyseisen tunnusluvun hajonnan arvioimiseksi ei edellä ole esitetty, ja käytännössä lieneekin riittävä kokeilla erikseen tuoreimman, parin tuoreimman ja ehkä kolmen tuoreimman vuoden päättävyystietojen mukaisten ratkaisujen eroja. Kun muistetaan pääoma-arvojen muutaman vuoden välein toistunut muuttamistarve, ei tämän vanhempaa aineistoa ole juuri syytä käyttää. - Kohdassa 8 suoritettun koesarjan rinnalla laskettiin pistokokeen tapaan vastaavia tuloksia käyttäen vain vuoden 1984 päättävyystietoja. Nämä viittasivat yleensä hieman pienempään kokonaiskorotustarpeeseen eron ollessa käytetyistä keskikestoista riippuen korkeintaan 0.5 %-yksikön luokkaa.

Sukupuoli on mielenkiintoinen taustamuuttuja, joka on kuitenkin jätetty pois TEL-työkyvyttömyysmallista. Tutkimuksessa [5] on todettu sekä kuolevuuden että paranevuuden olevan naisilla miehiä alhaisemmat. Ilmiötä olisi mahdollista tarkastella nyt kehitetyllä menetelmällä suorittamalla sovitus erikseen kummankin sukupuolen aineistolle.

9.2. Alkavuuden vaikutuksen eliminoiminen

Myös menetelmän edelleen kehittämiseen tähtäävää tutkimusta on syytä jatkaa. Kuviossa 10 on esitetty optimiratkaisuun johtaneen sovituksen residuaalit periaatteessa samalla menetelmällä kuin empiirinen Z-pinta kuviossa 4; nyt on ollut lisäksi välttämätöntä tuoda esille residuaalin merkki.

Kuten kuviosta nähdään, empiirisessä pinnassa esiintyy harjanteita ja laaksoja, jotka kulkevat alhaalta vasemmalta ylös oikealle. Itse asiassa nämä harjanteet vastaavat alkuiän mukaan jaoteltujen kohorttien kehitystä: ikä ja kesto kasvavat tässä kulkusuunnassa samassa tahdissa. Harjanteiden synty johtuu kaavan (29) mukaisesta empiiristen Z-arvojen laskennasta. - Kuvassa 11 residuaalit on suhteutettu ratkaisuna saadun Z-funktion arvoihin. Tällä kuvalla on merkitystä arvosteltaessa pääoma-arvoihin mahdollisesti syntyvää virhettä.

Harjanneilmiötä ei esiinny, mikäli eläkkeen jatkumisen todennäköisyyksiä ei kumuloida kaavan (29) tapaan. Näin ollen on ilmeisesti tarpeen tutkia kohdassa 3.5. luonnosteltua, pelkkiä päättävyyksiä käyttävää menetelmää vastavasti kuin tämän tutkimuksen aiheena ollutta, suoraan Z-funktion arvoihin kohdistuvaa pinnansovitusmenetelmää. Kohdan 3.5. mukaisen menetelmän kiinnostavuutta lisää vielä se, että uudelleenparametrisointi (39) on siinä toteutettavissa optimoinnin siitä ensinkään vaikeutumatta.

Luvussa B esitetyssä kokeessa elossaolo- ja alkamistodennäköisyydet oli empiirisiä Z-arvoja laskettaessa korvattu kaavan (21) mukaisella suureella käyttäen perusteiden B mukaisia vakioiden arvoja (vrt. taulukko 2). Luvussa 4.4. on viitattu tältä osin kahteen vaihtoehtoiseen menettelyyn: nämä todennäköisyydet voidaan myös estimoida empiirisestä aineistosta tai jättää kokonaan pois tarkastelusta asettamalla yhtälössä (29) $\hat{p}_0=1$.

Näiden vaihtoehtojen alustavat kokeilut osoittivat, että tällä valinnalla on merkitystä. Empiirisiä alkavuuksia käytettäessä ei suoritetuissa kokeiluissa löydetty yhtään sovitetta, joissa kaikki a_j -vakiot olisivat olleet ei-negatiivisia, mikä viittaa siihen, että empiirinen, tasoitamaton alkavuus sisältää piirteitä, jotka eivät ole sovittavissa yhtälön (21) asettamiin kehyksiin. Jälkimmäistä vaihtoehtoa kokeiltaessa taas löydettiin vain kaksikomponenttisia ratkaisuja.

Myös nämä kokemukset viittaavat siihen, että vaikka tässä tutkimuksessa kehitetty menetelmä onkin katsottava onnistuneeksi, luvussa 3.5. luonnosteltua modifikaatiota olisi syytä kokeilla. Tämä jätetään kuitenkin myöhemmän tutkimuksen varaan.

Summary

In the Finnish mandatory occupational pension system TEL disability is modelled by the so called Z-model having as its principal object the function Z, a sum of three exponentials with nine parameters altogether. Attempts to determine these by fitting the Z-function to corresponding observations by ordinary surface fitting methods have failed.

It is known that the Z-function is closely related to exponential distributions. In this study these connections are further analysed by demonstrating that the conditional distributions of various variables in the Z-model are mixtures of three exponential distributions. It is then conjectured that the solution to the surface fitting problem might not be very sensitive to the expectations of the component distributions. As regards the task of finding appropriate parameters, this conjecture leads to a new approach where these expectations are fixed a priori or at least their set of variation is limited to a few alternatives only. The resulting conditional optimization problem is seen to be partly linear, and two common non-linear optimization algorithms are applied to the nonlinear part and found to work satisfactorily. A sensitivity analysis is then carried out to confirm the above conjecture and the entire method is subjected to the crucial test of applying it to empirical data. The method is found to be feasible; however, because of certain inconvenient features encountered during the process a modification of the method is drafted to serve as a basis for further study.

Z-malli: kaksien perusteiden vertailu pääoma-arvojen suhteen avulla

Osoittajan määrittelevät perusteet:
perusteet B

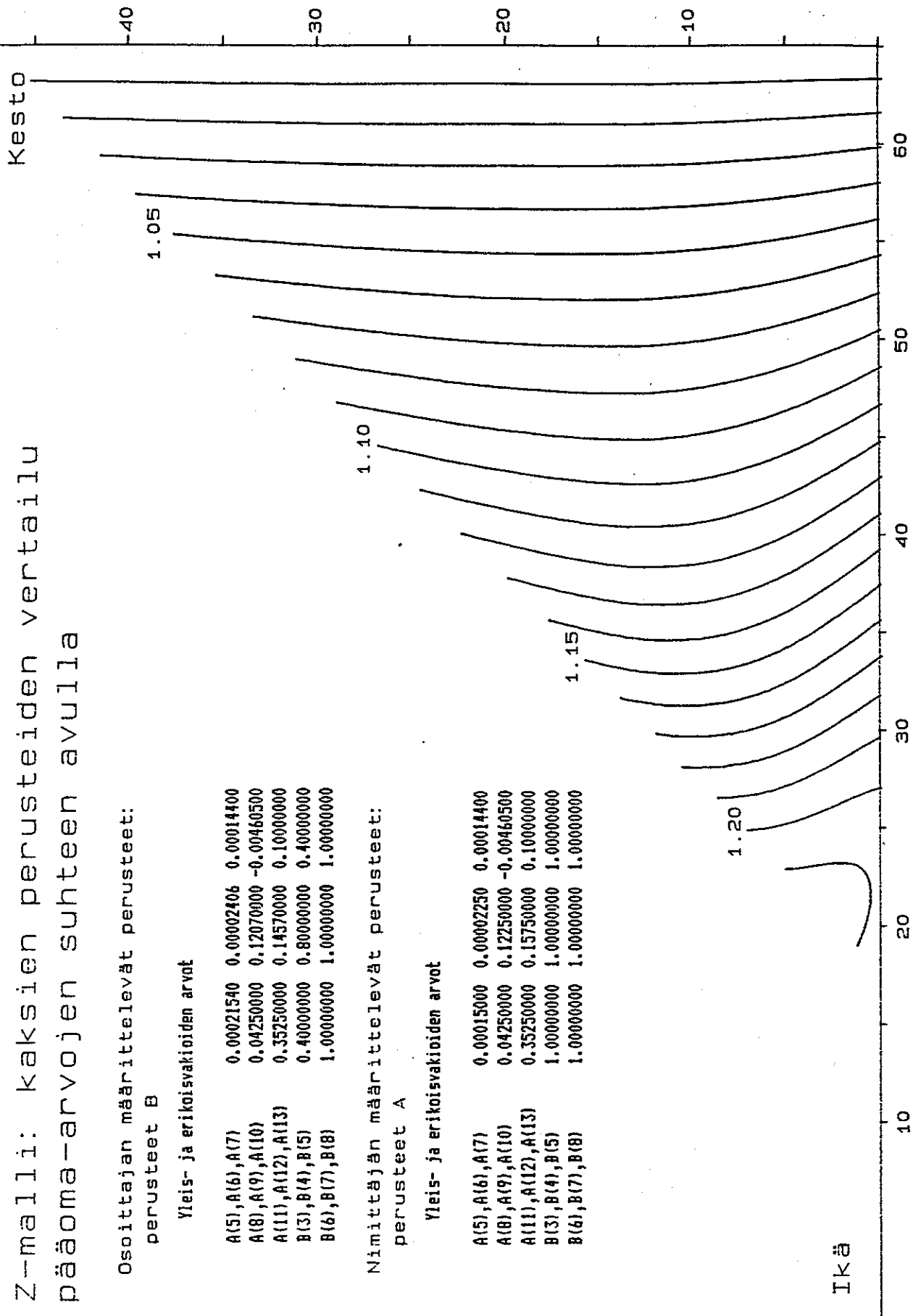
Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

A(5),A(6),A(7)	0.00021540	0.00002406	0.00014400
A(8),A(9),A(10)	0.04250000	0.12070000	-0.00460500
A(11),A(12),A(13)	0.35250000	0.14570000	0.10000000
B(3),B(4),B(5)	0.40000000	0.80000000	0.40000000
B(6),B(7),B(8)	1.00000000	1.00000000	1.00000000

Nimittäjän määrittelevät perusteet:
perusteet A

Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

A(5),A(6),A(7)	0.00015000	0.00002250	0.00014400
A(8),A(9),A(10)	0.04250000	0.12250000	-0.00460500
A(11),A(12),A(13)	0.35250000	0.15750000	0.10000000
B(3),B(4),B(5)	1.00000000	1.00000000	1.00000000
B(6),B(7),B(8)	1.00000000	1.00000000	1.00000000



Z-malli: kaksien perusteiden vertailu pääoma-arvojen suhteen avulla

Osoittajan määrittelevät perusteet:
vain perusteiden B pitkäkestoisin komponentti

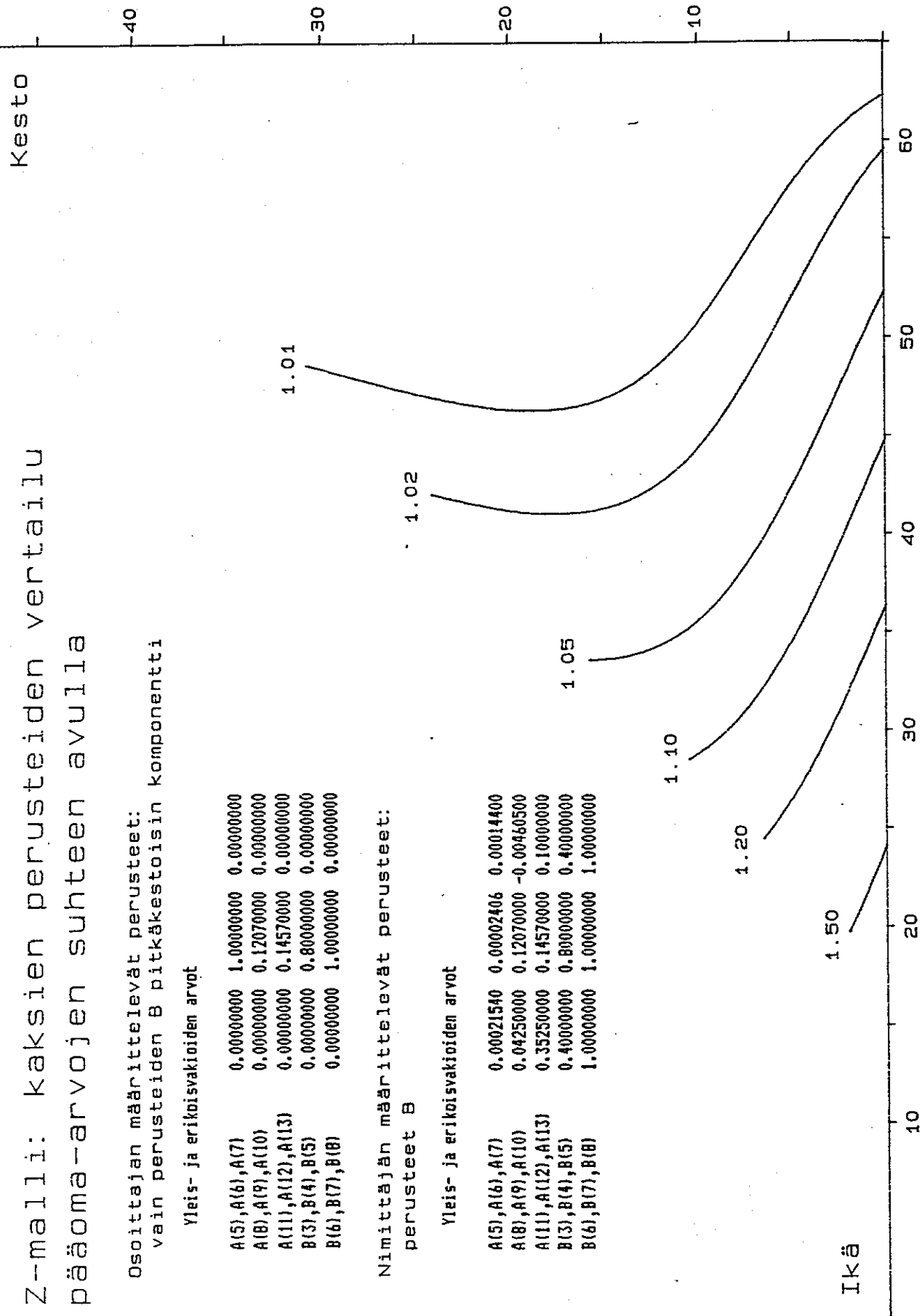
Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

A(5), A(6), A(7)	0.00000000	1.00000000	0.00000000
A(8), A(9), A(10)	0.00000000	0.12070000	0.09000000
A(11), A(12), A(13)	0.00000000	0.14570000	0.00000000
B(3), B(4), B(5)	0.00000000	0.80000000	0.00000000
B(6), B(7), B(8)	0.00000000	1.00000000	0.00000000

Nimittäjän määrittelevät perusteet:
perusteet B

Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

A(5), A(6), A(7)	0.00021540	0.00002406	0.00014400
A(8), A(9), A(10)	0.04250000	0.12070000	-0.00460500
A(11), A(12), A(13)	0.35250000	0.14570000	0.10000000
B(3), B(4), B(5)	0.40000000	0.80000000	0.40000000
B(6), B(7), B(8)	1.00000000	1.00000000	1.00000000



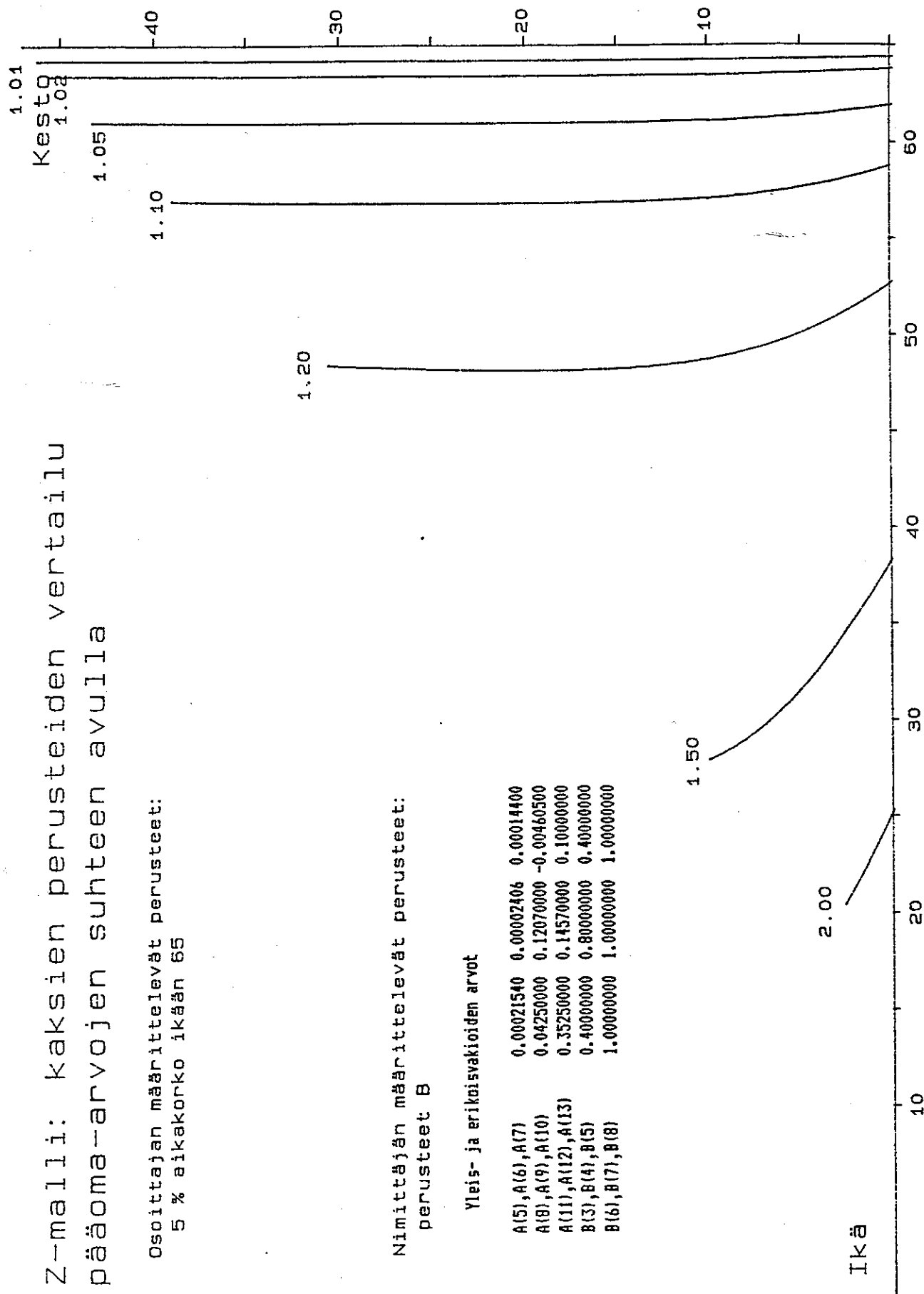
Z-malli: kaksien perusteiden vertailu pääoma-arvojen suhteen avulla

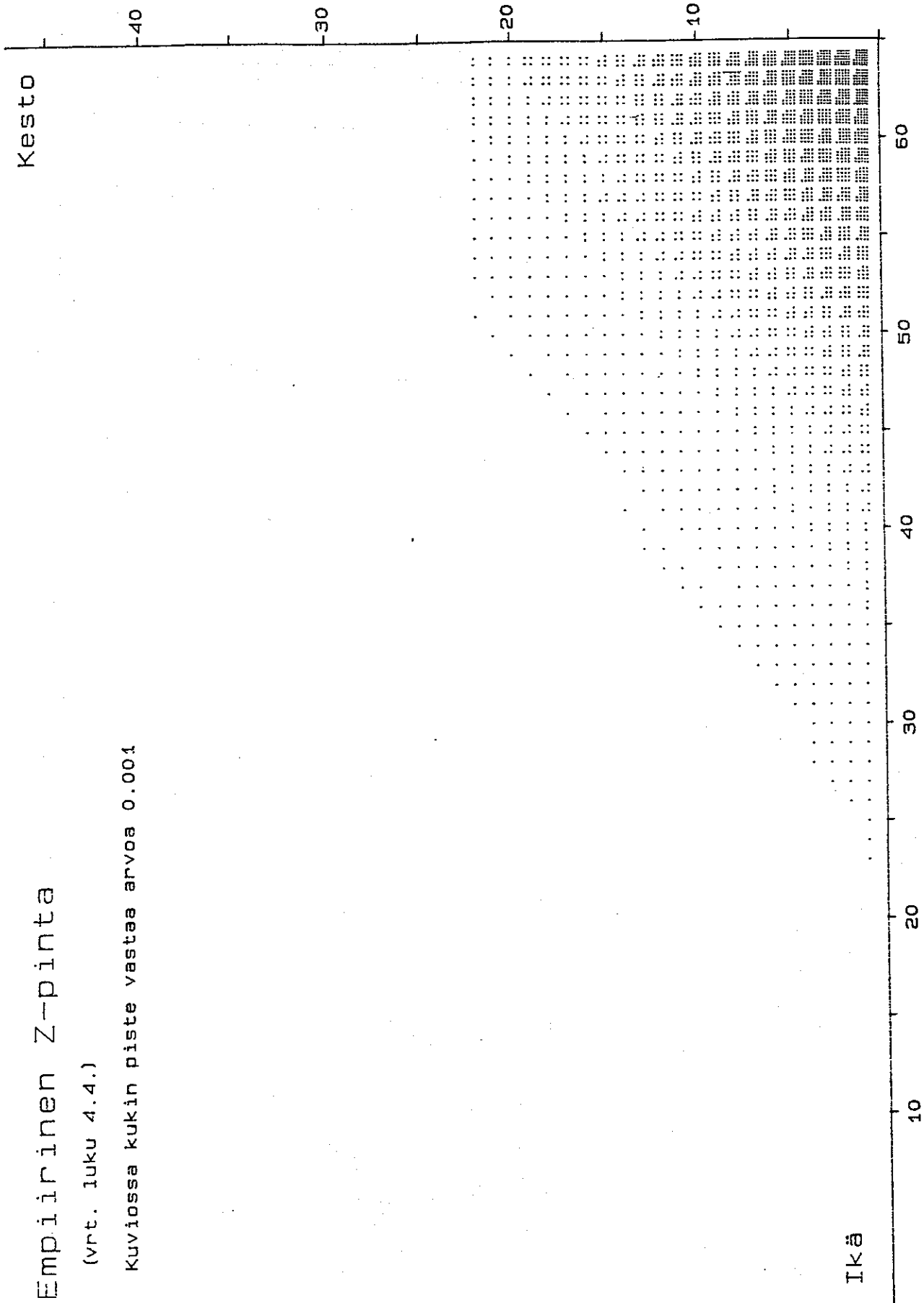
Osoittajan määrittelevät perusteet:
5 % aikakorko ikään 65

Nimittäjän määrittelevät perusteet:
perusteet B

Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

A(5),A(6),A(7)	0.00021540	0.00002406	0.00014400
A(8),A(9),A(10)	0.04250000	0.12070000	-0.00460500
A(11),A(12),A(13)	0.35250000	0.14570000	0.10000000
B(3),B(4),B(5)	0.40000000	0.80000000	0.40000000
B(6),B(7),B(8)	1.00000000	1.00000000	1.00000000

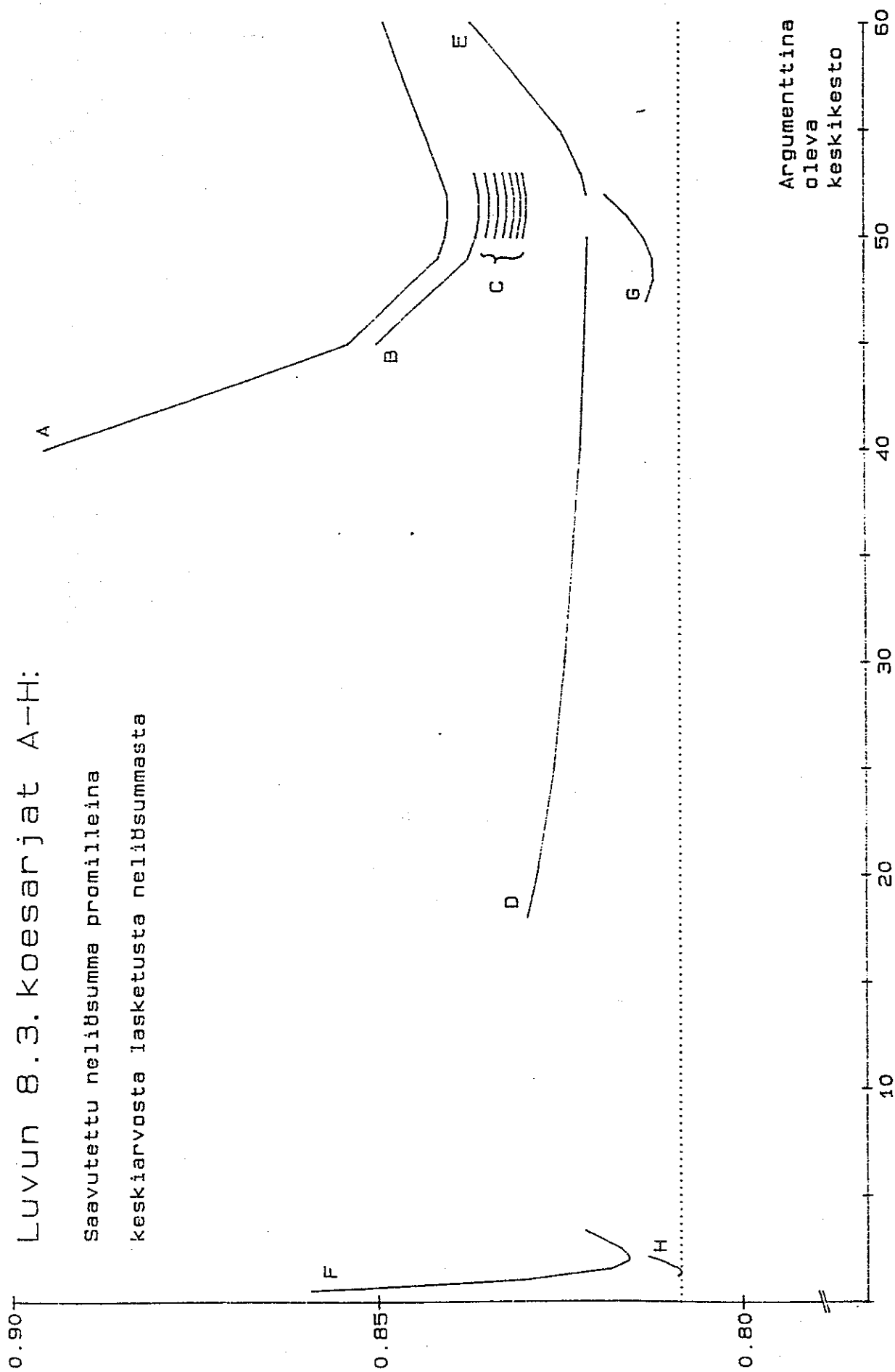




Luvun 8.3. koesarjat A-H:

Saavutettu neliösumma promilleina

keskiarvosta lasketusta neliösummasta



Z-malli: kaksien perusteiden vertailu pääoma-arvojen suhteen avulla

Osoittajan määrittelevät perusteet:
optimiratkaisu vv. 1983-1984 päättävyyksin

Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

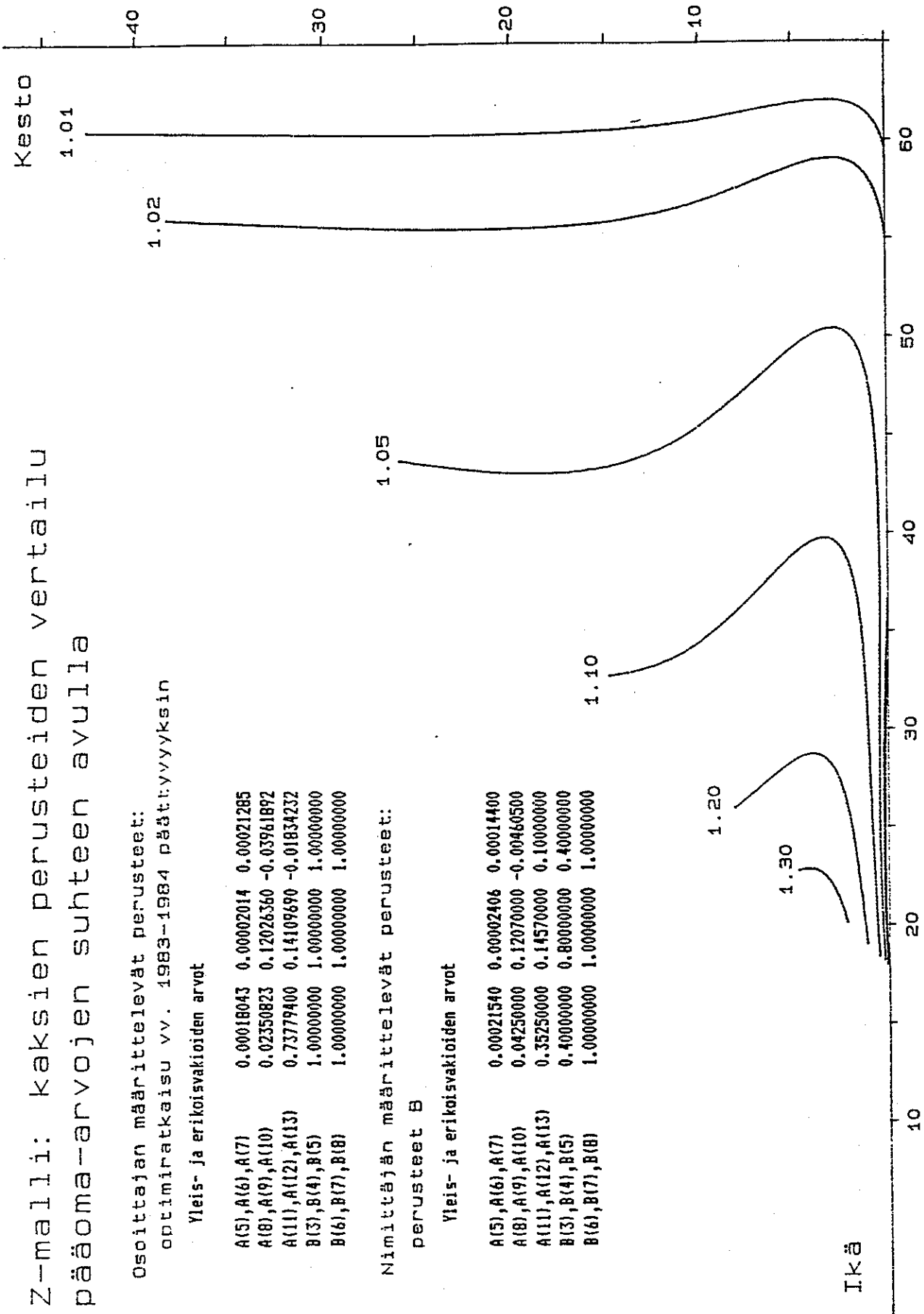
A(5), A(6), A(7)	0.00018043	0.00002014	0.00021285
A(8), A(9), A(10)	0.02350823	0.12026360	-0.03961892
A(11), A(12), A(13)	0.73779400	0.14107690	-0.01834232
B(3), B(4), B(5)	1.00000000	1.00000000	1.00000000
B(6), B(7), B(8)	1.00000000	1.00000000	1.00000000

Nimittäjän määrittelevät perusteet:

perusteet B

Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

A(5), A(6), A(7)	0.00021540	0.00002406	0.00014400
A(8), A(9), A(10)	0.04250000	0.12070000	-0.00460500
A(11), A(12), A(13)	0.35250000	0.14570000	0.10000000
B(3), B(4), B(5)	0.40000000	0.80000000	0.40000000
B(6), B(7), B(8)	1.00000000	1.00000000	1.00000000



Ikä

Z-malli: kaksien perusteiden vertailu pääoma-arvojen suhteen avulla

Kesto

Osoittajan määrittelevät perusteet:
optimiratkaisu vv. 1983-1984 päättävyyksin, keskikestot 1.6, 50, 20

Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

A(5), A(6), A(7)	0.00010657	0.00001981	0.00002699
A(8), A(9), A(10)	0.03536161	0.12045770	-0.04021563
A(11), A(12), A(13)	0.66036160	0.14045770	0.0078437
B(3), B(4), B(5)	1.00000000	1.00000000	1.00000000
B(6), B(7), B(8)	1.00000000	1.00000000	1.00000000

Nimitettäjän määrittelevät perusteet:
optimiratkaisu vv. 1983-1984 päättävyyksin

Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

A(5), A(6), A(7)	0.00018043	0.00002014	0.00021285
A(8), A(9), A(10)	0.02350823	0.12026360	-0.03961892
A(11), A(12), A(13)	0.73779400	0.14109690	-0.01834232
B(3), B(4), B(5)	1.00000000	1.00000000	1.00000000
B(6), B(7), B(8)	1.00000000	1.00000000	1.00000000

1.002

1.005

1.00

Ikä

Z-malli: kaksien perusteiden vertailu pääoma-arvojen suhteen avulla

Osoittajan määrittelevät perusteet:
vv. 1983-1984 päättävyydet, keskikestot 1.6, 50, 20, pyöristetyt vakiot

Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

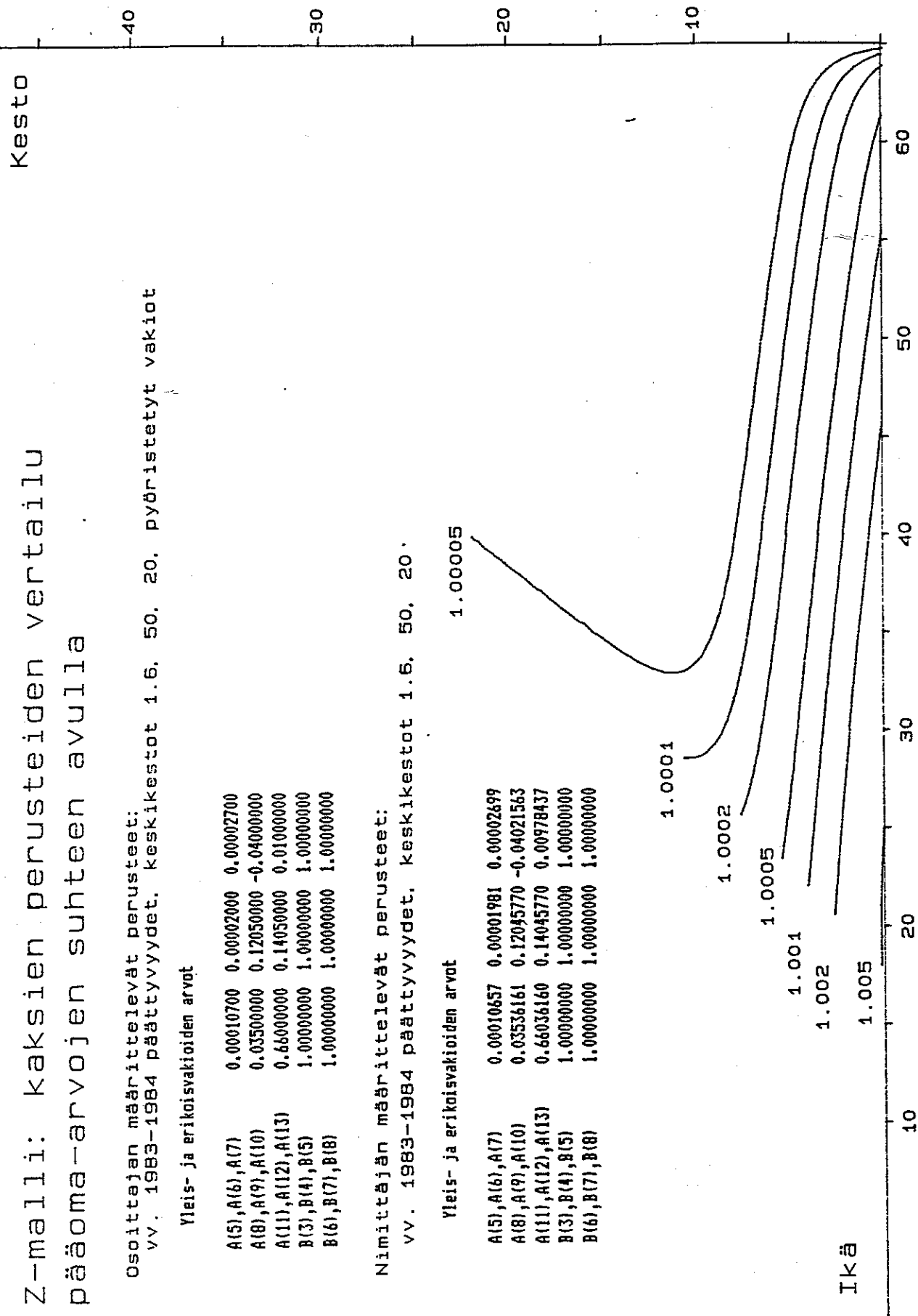
A(5), A(6), A(7)	0.00010700	0.00002000	0.00002700
A(8), A(9), A(10)	0.03500000	0.12050000	-0.04000000
A(11), A(12), A(13)	0.66000000	0.14050000	0.01000000
B(3), B(4), B(5)	1.00000000	1.00000000	1.00000000
B(6), B(7), B(8)	1.00000000	1.00000000	1.00000000

Nimittäjän määrittelevät perusteet:

vv. 1983-1984 päättävyydet, keskikestot 1.6, 50, 20.

Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

A(5), A(6), A(7)	0.00010657	0.00001981	0.00002699
A(8), A(9), A(10)	0.03536161	0.1205770	-0.04021563
A(11), A(12), A(13)	0.66036160	0.1405770	0.00978437
B(3), B(4), B(5)	1.00000000	1.00000000	1.00000000
B(6), B(7), B(8)	1.00000000	1.00000000	1.00000000



Kuvio 8

Z-malli: kaksien perusteiden vertailu pääoma-arvojen suhteen avulla

Osoittajan määrittelevät perusteet:

vv. 1983-1984 päättävyydet, keskikestot 1.6, 50, 20, pyöristetyt vakiot

Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

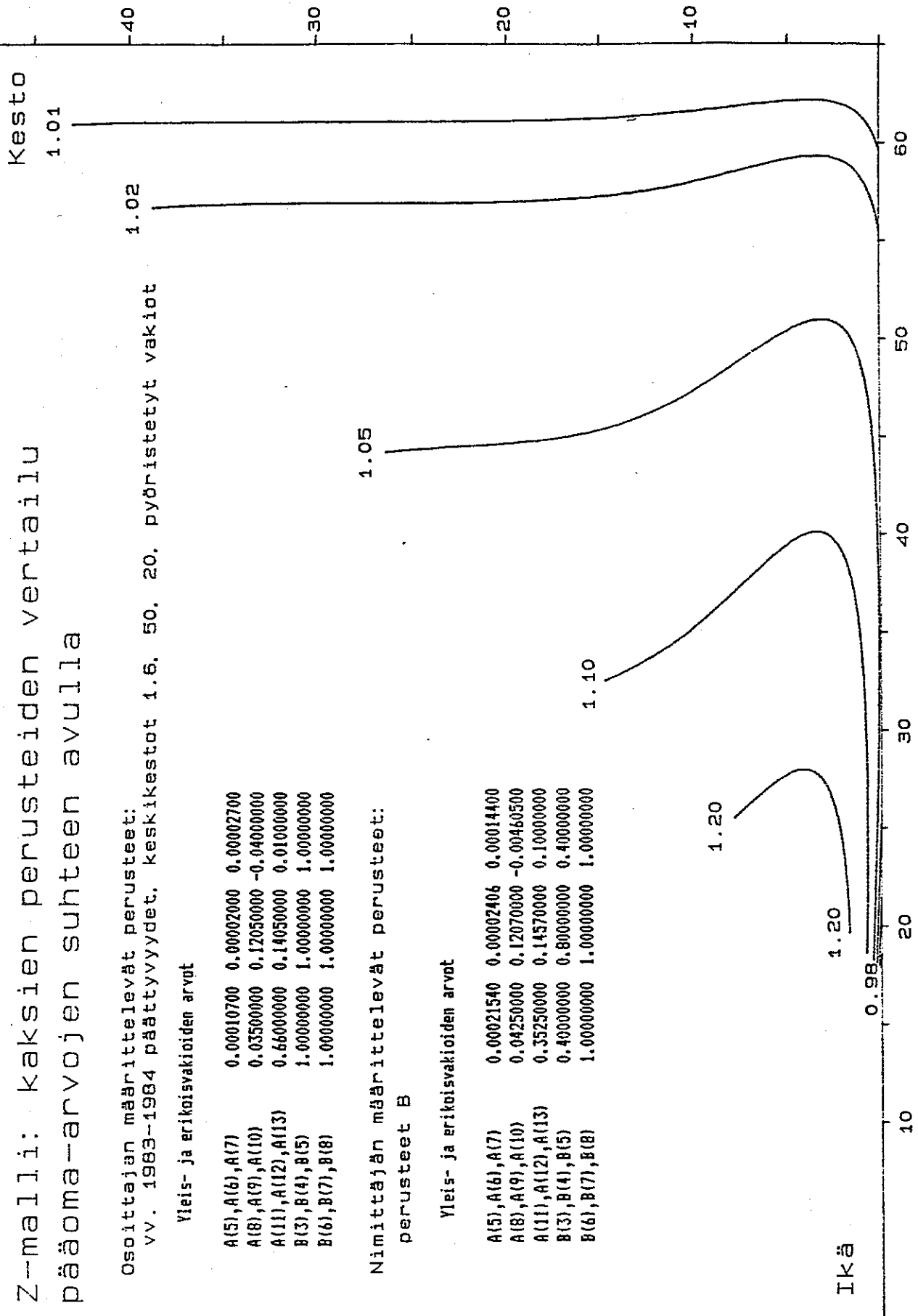
A(5), A(6), A(7)	0.00010700	0.00002000	0.00002700
A(8), A(9), A(10)	0.03500000	0.12050000	-0.04000000
A(11), A(12), A(13)	0.66000000	0.14050000	0.01000000
B(3), B(4), B(5)	1.00000000	1.00000000	1.00000000
B(6), B(7), B(8)	1.00000000	1.00000000	1.00000000

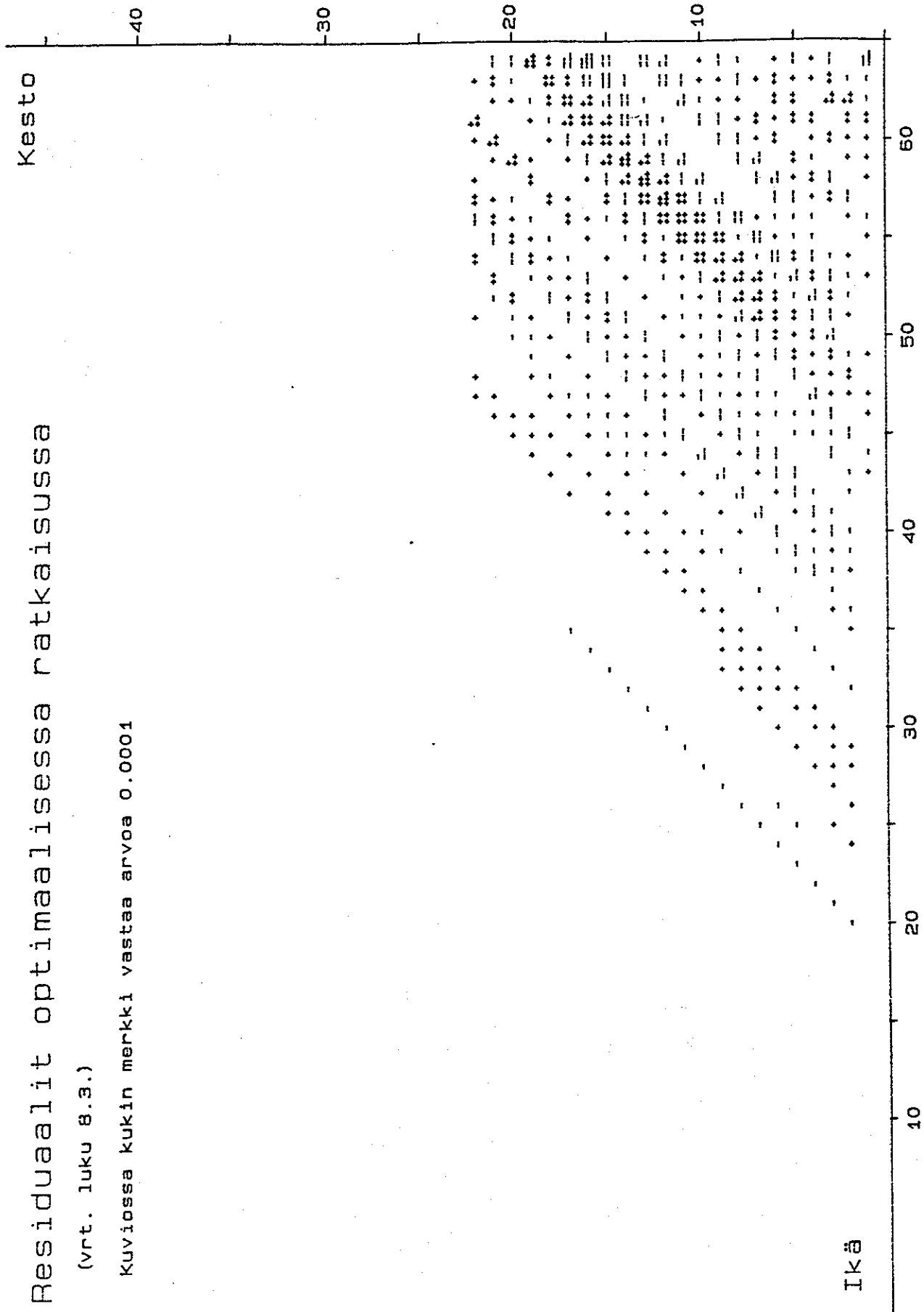
Nimittäjän määrittelevät perusteet:

perusteet B

Yleis- ja erikoisvakioiden arvot

A(5), A(6), A(7)	0.00021540	0.00002406	0.00014400
A(8), A(9), A(10)	0.04250000	0.12070000	-0.00460500
A(11), A(12), A(13)	0.35250000	0.14570000	0.10000000
B(3), B(4), B(5)	0.40000000	0.80000000	0.40000000
B(6), B(7), B(8)	1.00000000	1.00000000	1.00000000





Residuaalit optimaalisessa ratkaisussa

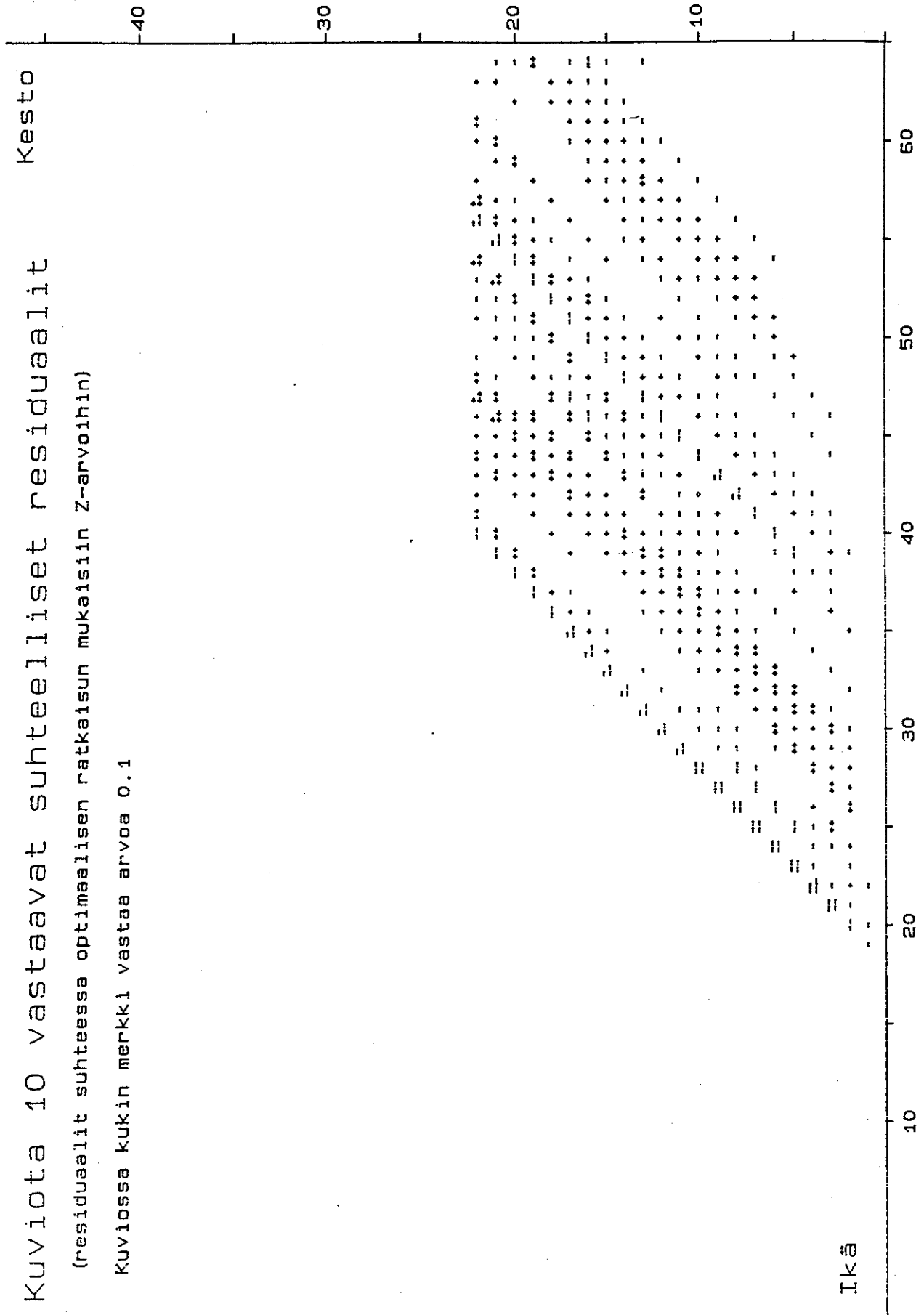
(vrt. luku 8.3.)

Kuviossa kukin merkki vastaa arvoa 0.0001

Kuviota 10 vastaavat suhteelliset residuaalit

(residuaalit suhteessa optimaalisen ratkaisun mukaisiin Z-arvoihin)

Kuviossa kukin merkki vastaa arvoa 0.1



Viitteet

- [1] Abadie, J. (toim.): Integer and Nonlinear Programming, North-Holland, Amsterdam, 1970
- [2] Chiang, C. L.: Introduction to Stochastic Processes in Biostatistics, Wiley&Sons, New York, 1968
- [3] Gauffin, E: Työkyvyttömyysmalleista, SHV-harjoitustyö, Helsinki, 1981
- [4] Henki- ja eläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa, SHV, Helsinki, 1982
- [5] Lassila, T.: TEL-työkyvyttömyystutkimus, SHV-harjoitustyö, Helsinki, 1977
- [6] Mustonen, S: SURVO 76: A Statistical Data Processing System (for WANG 2200), Research Report No. 6, Department of Statistics, University of Helsinki, 1977
- [7] Tuomikoski, J.: Two Approaches to the Digression Problem: a Comparison by Simulation Experiments, Research Report No. 20, Department of Statistics, University of Helsinki, 1980

