SUOMEN VAKUUTUSYHTIÖIDEN KESKUSLIITTO
VAKUUTUSKIRJASTO

WORKING PAPERS ISSN 0781-4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

31

Anni Sajo

SUMEIDEN JOUKKOJEN TEORIAN SOVELTAMIS-
MAHDOLLISUUKSISTA VAKUUTUSYMPÄRISTÖSSÄ
(1991)

ABSTRACT

Sajo, A (1991) On the Applicability of Fuzzy Set Theory to the Field of Insurance Business

The aim of this work is to find out something about the possibilities raised by the new and yet not vastly spread theory of fuzzy sets. The father of this theory is mr Zadeh, who published his first article on the subject 25 years ago, and since then the theory has been much talked about and eagerly proposed to various fields of science. The main idea of the theory is sensible enough: to allow for an element to be only partly a member of some group, not only, as it has always been mathematically expressed, either a member of a group or then not a member.It seems to be that the amount of general literature on fuzzy sets is enormous compared to its young age. Unfortunately it also seems to be rather more difficult to find specific and useful examples of its applications.

Alas, the attempt on finding links of insurance practise and fuzzy set theory - that is, links that would seem useful and new - did not give any very inspiring new ideas. It may be, that owing to the strangeness of the theory and the forced generality of a work of such a limited size, the real force of fuzzy set theory still remained hidden by the basics discussed in the text and are to been found only after a more severe and deeper study in some specific field.

The text first gives the basics of fuzzy set theory, with some intuitive ideas as to the meanings of these definitions. Then some references are discussed concerning the probability theory and fuzzy set theory and especially the probabilities of fuzzy sets. In the last two sections some attempts are made to apply the theory to the field of insurance. By discussing in general terms the area of events and compensations we seem to find little advantage in using fuzzy sets - somewhat on the contrary: fuzzy sets being a little vague to the old fashionedly oriented mind it would seem to rather complicate otherwise understandable areas. On the other hand, some specific problems concerning invalidisation and preferred policyholders seem to benefit from applying this theory, especially fuzzy set theory seems to give means for easier handling of these kind of problems. Thus a cautious conclusion may be made: for solving a specific problem, lacking need to great extent of accuracy, fuzzy set theory may give means for acquiring a handy solution. Although maybe losing in being not as exact as for example some probability expressions, fuzzy set solutions seem to gain in being simpler to apply. The last example tries to solve a simple discounting problem as an application - it implies clearly that a problem wanting an exact answer is not the best possible candidate for fuzzy set theory applications.

Anni Sajo
Sampo Insurance Company Limited
Yliopistonkatu 27, POB 216
SF-20101 Turku

SUMEIDEN JOUKKOJEN TEORIAN SOVELTAMISMAHDOLLISUUKSISTA VAKUUTUSYMPÄRISTÖSSÄ

SHV-harjoitustyö

Anni Sajo

11.01.1991

Sisältö

1. Johdanto

2. Sumeiden joukkojen teorian perusominaisuuksista

3. Todennäköisyyslaskenta ja sumeiden joukkojen teoria

4. Vakuutusalan käsitteistöä sumeiden joukkojen kielellä

5. Hinnoittelusta sumeiden joukkojen avulla

Määritelmä 2.3

Kahden sumean joukon A ja B *unioni* $C = A \cup B$ on joukko, jonka jäsenyysfunktio on

(2.5) $$f_C(x) = \max[\, f_A(x) \,,\, f_B(x) \,] \quad \forall\, x \in X \,.$$

Merkitään $f_C = f_A \vee f_B$.

Huomattakoon, että näin määritelty operaatio $\cup$ on assosiatiivinen, toisin sanoen $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$.

Intuitiivisesti unioni on pienin sumea joukko, joka sisältää joukot A ja B perinteisen unionin määritelmän mukaisesti. Seuraava lause todistaa, että unionin määrittely on perinteisen ajatustavan mukainen tässä suhteessa.

Lause 2.1

Määritelmän 2.3 mukainen unioni on pienin sumea joukko, joka sisältää joukot A ja B.

Todistus: Oletaan, että $C = A \cup B$ ja f_C sen kaavan (2.5) mukainen jäsenyysfunktio. Tällöin on selvästi

$$f_C = \max\,[\, f_A \,,\, f_B \,] \geq f_A$$

ja

$$f_C = \max\,[\, f_A \,,\, f_B \,] \geq f_B \,.$$

Olkoon toisaalta D jokin sumea joukko, joka sisältää sekä A:n että B:n. Silloin on kaavan (2.4) mukaisesti

$$f_D \geq f_A \quad \text{ja} \quad f_D \geq f_B \,,$$

joten

$$f_D \geq \max\,[\, f_A \,,\, f_B \,] = f_C \,,$$

näin $C \subseteq D$. □

Seuraavissa määritelmissä käydään läpi joukko-opin peruskäsitteet sumeille joukoille. Määritelmät ovat perinteisen joukko-opin määritelmien yksinkertaisia laajennuksia. Olkoot A ja B sumeita joukkoja joiden jäsenyysfuntiot ovat vastaavasti funktiot f_A ja f_B.

<u>Määritelmä 2.1</u>

1. Sumea joukko on *tyhjä*, jos ja vain jos jäsenyysaste on 0 jokaiselle X:n alkiolle.
2. Sumeat joukot A ja B ovat *yhtäsuuret*, merkitään A=B, jos ja vain jos $f_A(x)=f_B(x)$ jokaiselle X:n alkiolle x. Tällöin käytetään merkintää $f_A = f_B$. (Tämä yhtäsuuruusrelaatio on ekvivalenssirelaatio, sillä alkioittainen funktion yhtäsuuruus on eksivalenssirelaatio, ja näinollen on jokaiselle $x \in X$ ekvivalenssirelaation aksiomat voimassa, ja tämä riittää.)
3. Sumean joukon A *komplementti* A^c on joukko, jonka jäsenyysfunktio

(2.2) $$f_{A^c} = 1 - f_A \ .$$

Näiden peruskäsitteiden lisäksi joukon sisältyminen toiseen joukkoon sekä unionin ja leikkauksen käsitteet on määriteltävä:

<u>Määritelmä 2.2</u>

Sumea joukko A *sisältyy joukkoon B* eli A on joukon B *osajoukko,* jos ja vain jos

(2.3) $$f_A(x) \le f_B(x) \quad \forall\, x \in X \ .$$

Merkitään

(2.4) $$A \subseteq B \Leftrightarrow f_A \le f_B \ .$$

erikoistapaukseksi. Kutsumme tavallista joukkoa $A \subseteq X$ *teräväksi joukoksi*. Sen karakteristinen funktio saa vain arvoja 0 tai 1, eli

$$f_A : X \to \{0,1\}.$$

Otamme nyt siis käyttöön eräänlaisen laajennetun karakterisoivan funktion, ja annamme tälle funktiolle nimen *jäsenyysfunktio*:Sanomme, että joukkoa kutsutaan *sumeaksi joukoksi*, mikäli sitä karakterisoi jäsenyysfunktio, eli funktio muotoa

$$f_A : X \to [0,1].$$

Funktion arvo $f_A(x)$ kertoo siis kullekin avaruuden X alkiolle x, missä määrin alkiolla on ominaisuutta, jota sumea joukko A ilmentää. Terävä joukko on luonnollisesti tällöin eräs sumean joukon erikoistapaus. Voidaan sanoa, että sumea joukko A itse asiassa on identifioivan jäsenyysfunktionsa perusteella tavallinen joukko avaruudessa $X \times [0,1]$! Orlowskij [9] esimerkiksi määritteleekin sumean joukon seuraavasti: Sumeaksi joukoksi C avaruudessa X sanotaan kokoelmaa pareja $(x, f_C(x))$, missä $x \in X$ ja $f_C : X \to [0,1]$ .Tällöin terävää joukkoa vastaa siis esitysmuoto, jossa alkioon liitetään 0, mikäli se ei kuulu joukkoon ja 1, mikäli se kuuluu joukkoon.

Jäsenyysfunktio muistuttaa jossain määrin todennäköisyysfunktiota numeroituvissa joukoissa ja tiheysfunktiota ylinumeroituvissa joukoissa. Kuitenkin jäsenyysfunktioiden käsittely ja yhdistely eroaa oleellisesti todennäköisyyslaskennan menettelytavoista, ja käsitteellisesti sumeat joukot poikkeavat täysin todennäköisyyslaskennan käsitteistöstä. Luvussa 3 käsitellään lähemmin kysymystä todennäköisyyslaskennan ja sumeiden joukkojen samankaltaisuudesta tai eroavaisuudesta.

Yksityisen ihmisen kannalta voi sadantuhannen markan vahinko vaikuttaa katastrofaalisen suurelta, jolloin voisimme asettaa $f_A(x)=0,95$. Toisaalta liikeyritykselle voisi vahinko olla vain melko suuri, jolloin liikeen johto voisi arvioida kuulumisasteeksi $f_A(x)=0,5$. Vakuutusyhtiön vahinkotilastoissa saattaa sadantuhannen suuruinen vahinko olla kohtuullisen pieni, sanokaamme $f_A(x)=0,15$. Näinollen sumeiden joukkojen teorian avulla voi kukin subjektiivinen asiain tarkastelija välttyä selvän rajan asettamiselta: tietyn markkamäärän ylitettyään vahinko on suuri, sitä ennen pieni. Teorian avulla on mahdollista huomioida laajemmin esimerkiksi suurten vahinkojen käsittelyssä tarpeelliset erikoistoimenpiteet ja *soveltaa niitä jo osittain* melko suuriin vahinkoihin suurten vahinkojen joukkoon kuulumisen asteen mukaisesti.

2.2 MÄÄRITELMIÄ

Olkoon X alkioavaruus ja x avaruuden mielivaltainen alkio. *Sumea joukko A* avaruudessa X karakterisoidaan *jäsenyysfunktion* f_A avulla. Funktio liittää jokaiseen alkioon x reaaliluvun väliltä [0,1], jolloin $f_A(x)$ kertoo alkion x joukkoon A kuulumisen asteen eli *jäsenyysasteen.* Mitä lähempänä lukua 1 $f_A(x)$ on, sitä suurempi jäsenyysaste on. Mikäli A on joukko konventionaalisessa mielessä,sen jäsenyysfunktio saa vain arvoja 0 tai 1 ja on täten ekvivalentti perinteisen karakteristisen funktion (2.1) kanssa. Näinollen sumeiden joukkojen teoria voidaan käsittää perinteisen joukko-opin laajennukseksi ja tavallinen joukko sumean joukon

tasolla että muutamien soveltamisesimerkkien valossa.

2. SUMEIDEN JOUKKOJEN TEORIAN PERUSOMINAISUUKSISTA

2.1. INTUITIIVINEN LÄHESTYMISTAPA

Olkoon X joukko ja oletetaan, että $x \in X$ ja $A \subseteq X$. Joukon A identifioi perinteisesti karakteristinen funktio (tai indikaattorifunktio) $f_A : X \to \{0,1\}$, missä

$$(2.1) \qquad f_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \in A \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}$$

<u>Esimerkki:</u>

Olkoon perusjoukkona $X = Z_+$ ja $A \subseteq Z_+$ suurten vahinkojen korvaussummien joukko:

$$A = \{x \in Z_+ \mid x \text{ on suuri vahinko}\}$$

On ilmeistä,että esimerkiksi $f_A(10 \text{ mk}) = 0$ ja $f_A(150.000.000 \text{ mk}) = 1$. Mutta mikäli arvioidaan, onko 100.000 mk:n vahinko suuri, eli kuuluuko 100.000 mk:n vahinko suurten vahinkojen joukkoon, emme voi enää todeta varmaa, täsmällistä arvoa $f_A(x)$:lle. Eri näkökantojen huomioonottaminen antaisi funktiolle joko arvon 1 tai sitten arvon 0 sen mukaan, kuka vahinkoa arvioi. Suuruuskäsite on näinollen epämääräinen. Tarkastellaan tilannetta sumeiden joukkojen avulla: sallitaan epävarmuus suurten vahinkojen joukkoon kuulumiselle, eli sallitaan, että

$$0 < f_A(x) < 1 .$$

melko selvä tai enemmän tai vähemmän epämääräinen sen sijaan että kykenisimme esittämään tarkkoja lukuarvoja. Voidaan ajatella, että olisi hyödyllistä, jos voisimme käsitellä esimerkiksi invaliditeetin käsitettä sumeana joukkona: yleensähän potilas on vain jossain määrin invalidisoitunut, hänen *kuulumisensa invalidien joukkoon* on epämääräinen käsite. Konventionaalinen ajattelu antaisi meille vain tiedon, että potilas joko on tai sitten ei ole invalidi, ja todennäköisyyslaskenta saattaa kertoa meille, kuinka todennäköisesti hän on invalidi vielä jonkin ajan päästä taikka kuinka todennäköistä invalidisoituminen jollekin haitta-asteelle on. Kumpikaan lähestymistapa ei kuitenkaan ota kantaa invaliditeetin määrään jatkuvana käsitteenä, niinkuin käytännössä asianlaita on. Sumeiden joukkojen teorian mukaisesti voidaan potilaan tilaan liittään funktio $f:X \rightarrow [0,1]$, joka kertoo invalidien joukkoon kuulumisen asteen siten, että sataprosenttisesti invalidi kuuluu joukkoon täysin, ja kuuluminen saa tällöin arvon 1, kun taas täysin terve saa arvon 0, ja esimerkiksi haitta-asteella 8 invalidisoitunut saa kuulumisen asteekseen arvon 0,4. Yleisesti sumeiden joukkojen teoriassa kuulumista kuvataan juuri funktion $f:X\rightarrow[0,1]$ avulla siten, että täysin joukkoon kuuluva saa arvon 1 ja joukkoon täysin kuulumaton saa arvon 0. "Jonkin verran" kuulumisen astetta ilmaistaan siis siten, että $f(x)\in(0,1)$ on arvoltaan sitä suurempi, mitä selvemmin x kyseiseen joukkoon kuuluu.

Seuraavassa käydään läpi ensin sumeiden joukkojen peruskäsitteistö perustuen lähinnä Zadehin alkuperäiseen artikkeliin. Sen jälkeen pohditaan teorian soveltamista vakuutusalalle sekä filosofisella

1. JOHDANTO

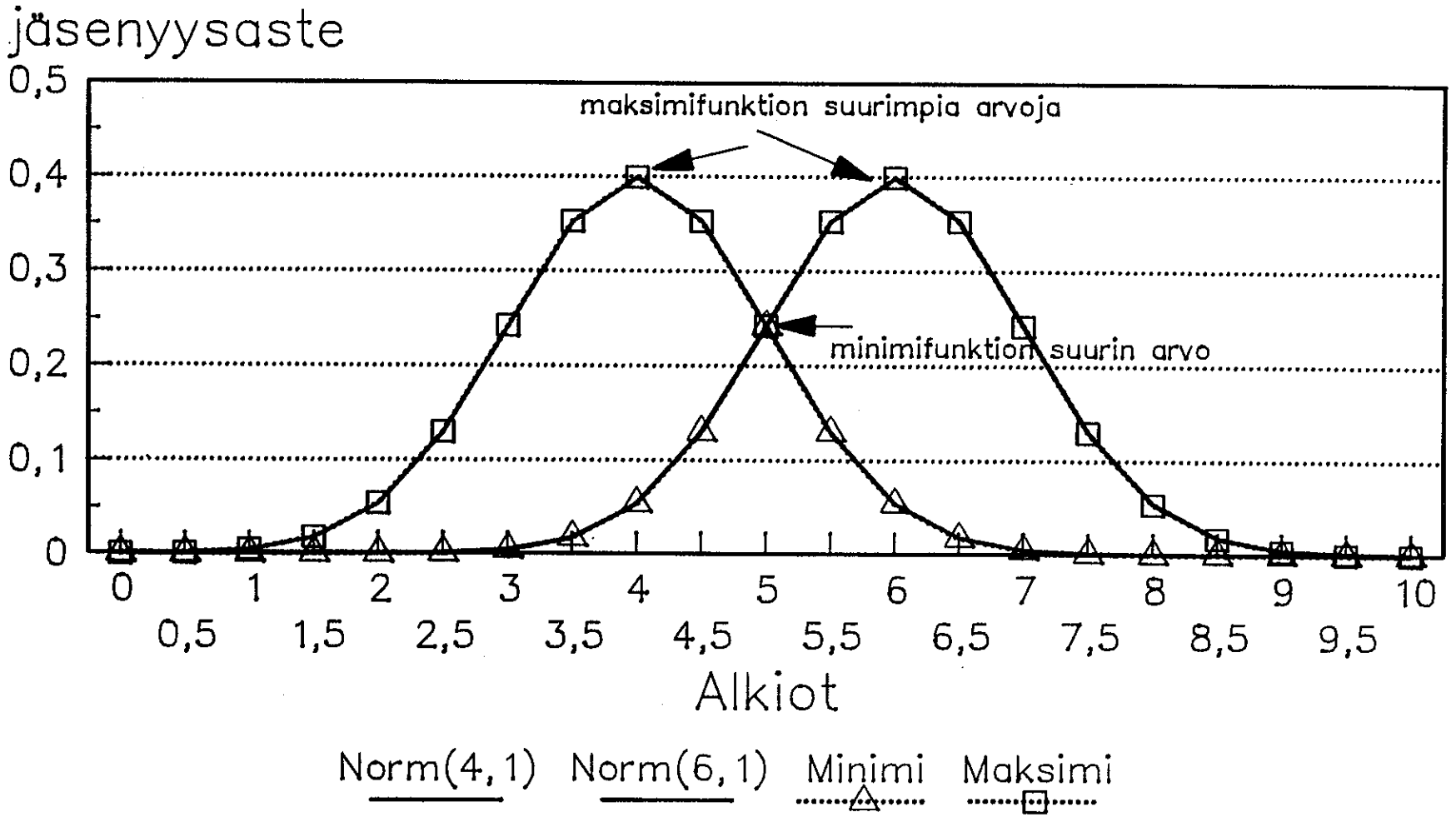
Fuzzy-teoria eli sumeiden joukkojen teoria on uudehko matematiikan alue, jonka soveltamista matematiikan ja luonnontieteiden eri osa-alueille on viime vuosina tutkittu erittäin aktiivisesti. Teoria sai alkunsa L.A.Zadehin vuonna 1965 julkaisemasta artikkelista "Fuzzy Sets" [1],ja se voidaan käsittää tavallisen Boolen algebran kuulumiskäsitteen laajentamisen ja laajentamisen seurausten tutkimiseksi. Kun totunnaisesti on ajateltu, että alkio joko kuuluu joukkoon tai ei kuulu, liittää sumeiden joukkojen teoria kuhunkin alkioon joukkoon kuulumisen astetta ilmaisevan luvun. Teorian tarkoitus on mahdollistaa sellaisten tilanteiden kuvaaminen,joissa Boolen algebran tyyppinen lähestymistapa ei ole sopiva sen johdosta, että tilanne on joko liian monimutkainen tai liian epätäsmällisesti ilmaistavissa. Suuri halu teorian käytölle johtuukin juuri käytännön elämän ja teknologian monimutkaisuudesta, jolloin perinteinen joukko-oppi ja sen soveltaminen on ongelmallista.Teoria on kuitenkin niin uusi, että sen mahdollinen hyöty ja merkittävyys ei ole vielä täysin selvillä.

Sumeiden joukkojen teorian soveltamista vakuutusympäristöön on tutkittu varsin vähän, perusajatuksena se kuitenkin tuntuisi soveltuvan hyvin vakuutusympäristöön: onhan vakuuttamisen luonteesta johtuen moni asia ja moni tieto sitä tarvittaessa vain

Normaalijakautuman mukaiset jäsenyysfunktiot

Minimi– ja maksimifuntioiden esitys

Esimerkki



A.Sajo
Kuva 2.1
SHV–työ

Määritelmä 2.4

Kahden sumean joukon A ja B *leikkaus* $C = A \cap B$ on joukko, jonka jäsenyysfunktio on

(2.5) $$f_C(x) = \min[\, f_A(x) \,,\, f_B(x) \,] \quad \forall\, x \in X \,.$$

Merkitään $f_C = f_A \wedge f_B$.

Analogisesti unionin kanssa leikkaus on suurin sumea joukko, joka sisältyy sekä joukkoon A että joukkoon B. Joukot A ja B ovat *erilliset*, mikäli $A \cap B$ on tyhjä.

Esimerkki 2.1

Oletetaan ,että $X = R_+$ ja sumean joukon A jäsenyysfunktio f_A on normaalijakautuman tiheysfunktio odotusarvolla 4 ja hajonnalla 1 sekä sumean joukon B funktio noudattaa normaalijakautumaa odotusarvolla 6 ja hajonnalla 1. Kuvassa (2.1) on esitetty käyrät $f_A$ja f_B sekä unionin jäsenyysfunktio $f_{A\cup B}$ ja leikkauksen jäsenyysfunktio $f_{A\cap B}$. Voidaan todeta esimerkiksi, että leikkaukseen kuuluminen on suurimmillaan pisteessä 5, jossa ei kumpikaan alkuperäinen funktio saa suurinta arvoaan. Unionissa jäsenyysfunktio saa suurimman arvonsa kahdessa pisteessä.

Sumeiden joukkojen ollessa kyseessä ei olisi mielekästä ajatella alkion kuuluvan joukkoon vain mikäli sen jäsenyysaste on 1, tai sitten mikäli jäsenyysaste on positiivinen. Sen sijaan voitaisiin ajatella määrättäväksi rajat α ja β siten, että mikäli $f_A \le \beta$, alkio ei kuulu joukkoon A, ja mikäli $f_A \ge \alpha$, alkio kuuluu joukkoon

A. Välillä $\beta \le f_A \le \alpha$ tilanne on epävarma: ei voida sanoa, että alkio kuuluisi joukkoon A, mutta ei myöskään voida sanoa, ettei alkio siihen kuuluisi. Tämä johtaa ns. kolmen totuusarvon logiikkaan:

T, kun $f_A(x) \ge \alpha$, (true)

F, kun $f_A(x) \le \beta$, (false)

U, kun $\beta \le f_A(x) \le \alpha$, (uncertain).

Seuraavassa käsitellään hieman tarkemmin unionin, leikkauksen ja komplementin perusominaisuuksia.

Kuten aiemmin todettiin, ovat nyt määritellyt operaatiot perinteisten unionin, leikkauksen ja komplementin laajennuksia. Laajennuksille ovat assosiatiivisuuden lisäksi voimassa useat muutkin perusidentiteetit, kuten De Morganin lait:

(2.6) $$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

(2.7) $$(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$$

ja osittelulait:

(2.8) $$C \cap (A \cup B) = (C \cap A) \cup (C \cap B)$$

(2.9) $$C \cup (A \cap B) = (C \cup A) \cap (C \cup B)$$

Todistukset voidaan suorittaa osoittamalla, että yhtälöiden eri puolien jäsenyysfunktiot ovat identtiset. Todistetaan esimerkkinä kaava (2.7). Muiden kaavojen todistaminen noudattaa samoja periaatteita.

<u>Lause 2.2</u>

Sumeille joukoille on voimassa $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

<u>Todistus:</u> Merkitään $C = (A \cap B)^c$ ja $D = A^c \cup B^c$. Tällöin on selvästi

$$f_C = 1 - \min[f_A , f_B] =$$

$$= \max[\,1 - f_A\,, 1 - f_B\,] = f_D,$$

eli siis koska $f_C = f_D$, on myös $C = D$.□

2.3 SUMEIDEN JOUKKOJEN ALGEBRALLISISTA OMINAISUUKSISTA

Unionin ja leikkauksen sekä komplemetoinnin lisäksi voidaan sumeille joukoille määritellä muitakin perinteisiä operaatioita laajennuksina. Olkoot edelleen A ja B sumeita joukkoja sekä f_A ja f_B vastaavat jäsenyysfunktiot.

<u>Määritelmä 2.5</u>

Joukkojen A ja B *algebrallinen tulo AB* määritellään jäsenyysfunktion avulla seuraavasti:

$$f_{AB} = f_A f_B\ .$$

Selvästi $AB \subseteq A \cap B$, sillä aina $f_A f_B \le \min[f_A, f_B]$, koska $0 \le f_A, f_B \le 1$.

Algebrallinen summa A + B puolestaan määritellään lausekkeella

$$f_{A+B} = f_A + f_B\ .$$

Algebrallinen summa on määritelty vain, mikäli summalausekkeen arvo ei ylitä lukua 1. Näinollen sumeille joukoille A ja B summalauseke on mielekäs vain, mikäli kaikille luvuille $x \in X$ on voimassa

$$f_A(x) + f_B(x) \le 1\ .$$

Intuitiivisesti ajatellen algebrallinen summa on määritelty vain, mikäli joukot ovat *melko erilliset*, sillä mitä suurempi on jäsenyysaste toiseen joukkoon, sitä pienempi sen on toiseen joukkoon oltava. Summa voidaan näinollen ajatella joukkojen

intuitiivisena erillisyysasteen mittana, sillä mikäli summa on olemassa, ei minkään alkion jäsenyysaste molempiin joukkoihin yhtä aikaa ole suuri. Ajatellaan, että summan olemassaolo olisi testattavissa helposti, ja haluttaisiin selvittää, missä määrin alkiolla on eri ominaisuuksia. Testaamisella summan olemassaoloa saataisiin lähtötietona selvyyttä siitä, onko edes odotettavissa että löytyisi alkio, jolla haluttuja ominaisuuksia olisi voimakkaasti.

Määritelmä 2.6

Joukkojen A ja B *absoluuttista erotusta* merkitään $|A - B|$ ja se määritellään lausekkeella

$$f_{|A-B|} = |f_A - f_B| .$$

Terävien joukkojen kohdalla $|A - B|$ on $A \cap B$:n komplementti joukossa $A \cup B$.

Seuraavassa määriteltävä konveksi kombinaatio sumeille joukoille tuo lisää mielenkiintoa edellisten määritelmien uusille termeille. Kahden vektorin f ja g konveksilla kombinaatiolla tarkoitetaan tavallisesti f:n ja g:n lineaarikombinaatiota, joka on muotoa

$$\lambda f + (1 - \lambda)g ,$$

missä $0 \leq \lambda \leq 1$ .Tämä f:n ja g:n kombinointi on yleistettävissä sumeille joukoille seuraavalla tavalla:

Määritelmä 2.7

Olkoot A ja B ja Λ mielivaltaisia sumeita joukkoja avaruudessa X. Joukkojen A, B ja Λ *konveksi kombinaatio* $(A,B\ ;\ \Lambda)$ määritellään relaationa

$$(A,B\ ;\ \Lambda) = A\Lambda + B\Lambda^c\ .$$

Jäsenyysfunktioiden avulla konveksi kombinaatio on esitettävissä seuraavasti:

$$f_{(A,B\ ;\Lambda)}(x) = f_\Lambda(x)f_A(x) + (1-f_\Lambda(x))f_B(x),\quad \forall\ x \in X.$$

Konveksin kombinaation perusominaisuus on se, että jokaiselle joukolle $\Lambda \subseteq X$ on voimassa

$$A \cap B \subseteq (A,B\ ;\ \Lambda) \subseteq A \cup B\ .$$

Tämä ominaisuus seuraa välittömästi yhtälöistä

$$\min\,[f_A(x),\ f_B(x)] \le \lambda f_A(x) + (1-\lambda)f_B(x)$$

ja

$$\lambda f_A(x) + (1-\lambda)f_B(x) \le \max\,[f_A(x),\ f_B(x)],\ x \in X\ ,$$

jotka ovat voimassa kaikille $\lambda \in [\ 0\ ,\ 1]$. Erityisesti voidaan todeta käyttökelpoinen tulos:

<u>Seuraus 2.1</u>

Olkoon C mielivaltainen joukko, joka toteuttaa ehdon

$$A \cap B \subseteq C \subseteq A \cup B\ .$$

Tällöin joukolle C on olemassa yksikäsitteinen sumea joukko Λ siten,että $C = (A,B\ ;\ \Lambda)$. Joukko Λ on määriteltävissä jäsenyysfunktionsa avulla:

$$f_\Lambda(x) = \begin{cases} \dfrac{f_C(x) - f_B(x)}{f_A(x) - f_B(x)} & ,\ f_A(x) \ne f_B(x) \\[2ex] 1 & ,\ f_A(x) = f_B(x)\ . \end{cases}$$

Todettakoon, että mikäli A=B, on f_Λ vapaasti valittavissa, sillä tällöin kaikki funktion arvot toteuttavat vaaditun yhtälön.

Konveksille kombinaatiolle on löydettävissä mielenkiintoisia

soveltamismahdollisuuksia. Kombinaatio antaa nimittäin erään keinon painottaa eri sumeita ominaisuuksia sen mukaisesti kuinka olennaisia ominaisuudet ovat. Usein painottamiseen tarvittava kerroinfunktio ei tosin ole alkiosta x riippuvainen, vaan saattaa olla sama kaikille $x \in X$.

Seuraava esimerkki kuvaa soveltamista käytäntöön.

<u>Esimerkki 2.3</u>

Olkoon T invaliditeettiin vaikuttavien vammojen joukko. Oletetaan, että vammoja voi olla n kpl, nimittäin vammat $T_1,\ldots,T_n$ sekä olkoot vastaavat jäsenyysfunktiot $f_1,\ldots,f_n$. Olkoot lisäksi λ_i, $i=1,\ldots,n$, vammatyypin i tärkeyttä tai vakavuutta kuvaavia lukuja. Tällöin λ_i voidaan kuvata vammatyypin i jäsenyysasteeksi invaliditeettia kuvaavassa sumeassa joukossa Λ. Normeerataan luvut λ_i siten, että

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1 .$$

Olkoon t jokin vammautumistapaus. Oletetaan, että t:lle voidaan määritellä jollakin menetelmällä jäsenyysaste kunkin vammatyypin suhteen, toisin sanoen arvot $f_1(t),\ldots,f_n(t)$ ovat olemassa. Vammautumistapauksen kokonaisinvaliditeettiaste voitaisiin näin ollen määritellä jäsenyysasteena

$$f_{inv}(t) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i(t).$$

Näinollen invaliditeettijoukkoon kuulumista kuvaa kullekin vammakomponentille tulo $\lambda_i f_i(t)$ ja kokonaisaste saadaan näiden summana.

Käytännössä luonnollisesti tilanne on monimutkaisempi, ja menetelmä vaatii paitsi kannanottoa eri vammatyyppien painotuksessa myös tarkan arvion vammautumisen jokaisesta osa-alueesta. Nykyiseen haitta-astearviokäytäntöön nähden

tällainen menetelmä johtaisi toisaalta ehkä parempaan tulokseen, koska eri vammatyyppejä voidaan painottaa eri tavoin jopa tapauksesta riippuen, mutta seurauksena saattaisi toisaalta kuitenkin olla nykyistä alhaisempi vammautumisen kokonaisaste, sillä tällä hetkellä eri vammojen haitta-asteet summataan yhteen.

Määritellään vielä sumean relaation käsite sekä siihen liittyen sumea kompositio sekä kuvauksen indusoima sumea joukko.

<u>Määritelmä 2.8</u>

Perinteisen relaatiokäsitteen tapaan voidaan myös sumeille joukoille määritellä relaatio. *Sumea relaatio X:ssä* on sumea joukko tuloavaruudessa X×X. Yleisemmin voidaan määritellä *sumea n-relaatio X:ssä* sumeana joukkona tuloavaruudessa $X \times X \times \ldots \times X = X^n$. Jäsenyyysfunktio on tällaisille relaatioille muotoa

$$f_A(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

missä $A \subseteq X \times X \times \ldots \times X$, ja $x_i \in X$, $i=1,\ldots,n$.

Binääristen sumeiden relaatioiden ollessa kyseessä määritellään kahden sumean relaation A ja B *kompositio* $B \circ A$ sumeana relaationa X:ssä asettamalla sen jäsenyysfunktioksi

$$f_{B \circ A}(x,y) = \sup_v \min \left[f_A(x,v),\ f_B(v,y) \right] .$$

Huomattakoon, että kompositio on assosiatiivinen, eli

$$A \circ (B \circ C) = (A \circ B) \circ C .$$

Olkoon T kuvaus avaruudesta X avaruuteen Y. Olkoon B sumea joukko Y:ssä ja f_B sen jäsenyysfunktio. Käänteiskuvaus T^{-1} *indusoi sumean joukon A* avaruuteen X : A:n jäsenyysfunktioksi määritellään

$$f_A(x) = f_B(T(x)),\ \forall\ x \in X .$$

Olkoon nyt A tunnettu sumea joukko avaruudessa X. Mikäli T ei ole

bijektio, jolloin $\forall\ x_1,\ x_2 \in X,\ x_1 \neq x_2$, on $T(x_1) \neq T(x_2)$, saataisiin ylläolevalla menetelmällä useita jäsenyysasteita Y:n alkioille, joihin kuvautuu usea X:n alkio. Tämän ristiriidan välttämiseksi määritellään

$$f_B(y) = \sup_{x \in T^{-1}(y)} f_A(x), \quad \forall\ y \in Y.$$

Tällöin T indusoi sumean joukon avaruuteen Y.

2.4 KONVEKSISUUS

Konveksisuuden käsite voidaan laajentaa sumeille joukoille siten, että suuri osa konveksisuuden ominaisuuksista säilyy. Konveksisuus kuvaa sumean joukon muotoa siten, että konveksin sumean joukon voidaan ajatella "tiivistyvän" jonkin tietyn kohdan tuntumaan, sen sijaan ei-konveksilla joukolla tällaisia tiivistymiä saattaa olla useita. Määritellään seuraavassa milloin sumea joukko on konveksi, rajoitettu, sekä vahvasti konveksi. Oletetaan selvyyden vuoksi tässä luvussa tästä eteenpäin, että X on reaalinen vektoriavaruus, jossa seuraavassa määriteltävät käsitteet ovat testattavissa ja jossa on olemassa normi $\|\cdot\|$.

<u>Määritelmä</u> <u>2.9</u>

Sumea joukko A on *konveksi* jos ja vain jos *α-leikkaukset*

(2.13) $$\Gamma_\alpha = \{ x \mid f_A(x) \geq \alpha \}$$

ovat konvekseja kaikille luvuille α, $0 \leq \alpha \leq 1$.

Konveksisuus voidaan määritellä myös selkeästi jäsenyysfunktioiden avulla: Joukko A on konveksi jos ja vain jos

(2.14) $$f_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min [f_A(x_1) , f_A(x_2)]$$

kaikille x_1 ja $x_2 \in X$ ja kaikille λ, $0 \leq \lambda \leq 1$. Huomattakoon, että

määritelmä ei ota kantaa funktion f_A konveksisuuteen.

Todetaan, että ylläolevat määritelmät ovat ekvivalentteja: Ensin oletetaan, että A on konveksi ensimmäisen määritelmän mielessä ja merkitään $\alpha = f_A(x_1)$, ja oletetaan, että $f_A(x_1) \le f_A(x_2)$. Koska $f_A(x_2) \ge \alpha$, on voimassa $x_2 \in \Gamma_\alpha$ samoinkuin $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma_\alpha$ missä $0 \le \lambda \le 1$, sillä Γ_α oli konveksi. Täten on voimassa

$$f_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \alpha = f_A(x_1) = \min[f_A(x_1), f_A(x_2)] \quad .$$

Toiseksi lähdetään siitä, että A on konveksi kaavan (2.14) osoittaman määritelmän mukaisesti. Olkoon α, $0 \le \alpha \le 1$, mielivaltainen. Väitetään siis, että kaikille pisteille x_1 ja x_2 joukossa Γ_α on voimassa, että $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma_\alpha, 0 \le \lambda \le 1$. Mikäli joukko Γ_α on tyhjä, se on triviaalisti konveksi. Oletetaan siis, että Γ_α on ei-tyhjä joukko ja valitaan mielivaltaiset alkiot x_1 ja $x_2 \in \Gamma_\alpha$. Tällöin siis $f_A(x_1) \ge \alpha$ ja $f_A(x_2) \ge \alpha$. Tämän ja kaavan (2.14) nojalla on siis voimassa

$$f_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \ge \min[f_A(x_1), f_A(x_2)] \ge \alpha,$$

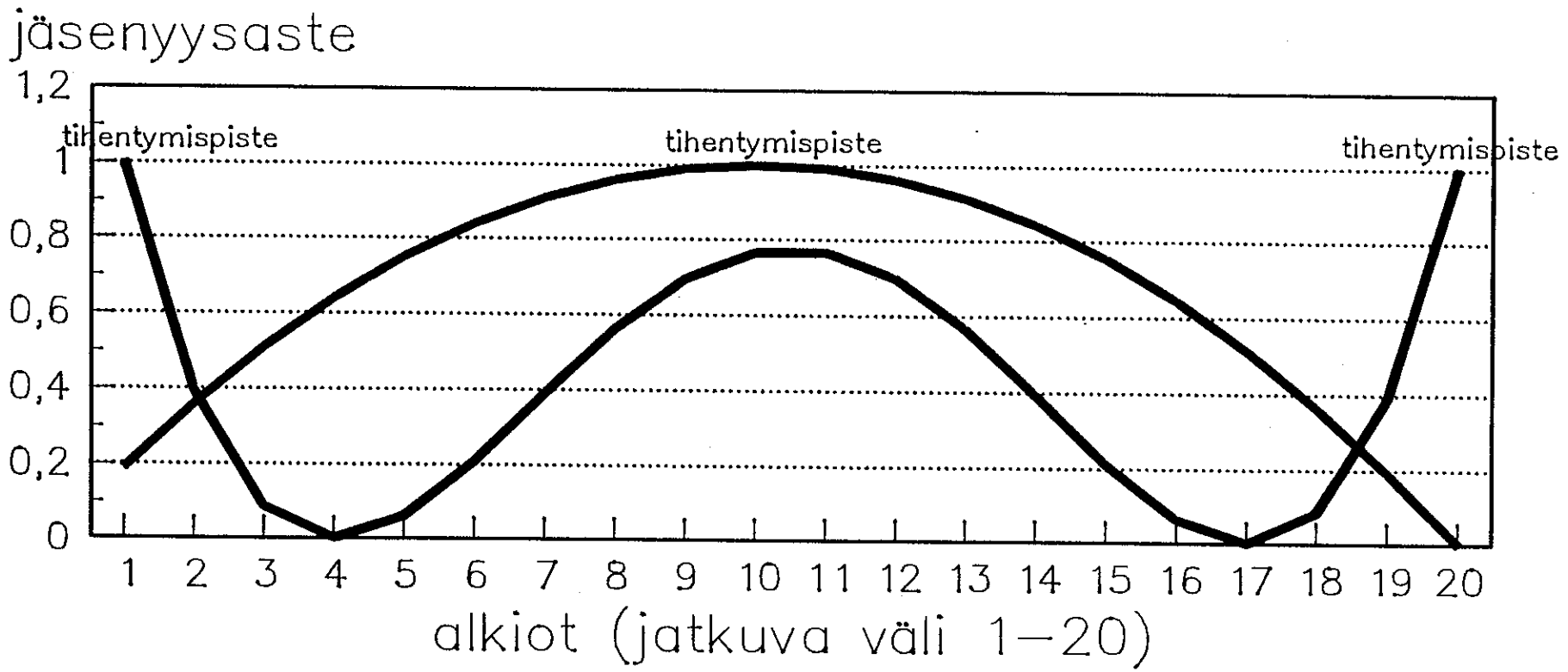
ja näinollen $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in \Gamma_\alpha$. Täten Γ_α on konveksi.□

Konveksien joukkojen muodon "siisteys" tuo lisämahdollisuuksia niiden käsittelemiseen. Kuvassa (2.2) on esitetty esimerkkinä kaksi sumeaa joukkoa jäsenyysfunktioidensa avulla, toinen konveksi ja toinen ei-konveksi joukko. Konveksisuuden merkitys lieneekin lähinnä siinä, että mikäli voidaan todeta joukon olevan konveksi, voidaan olettaa sen olevan muodoltaan hallittavampi kuin ei-konveksi joukko. Seuraava lause toteaa konveksisuuden säilyvän myös leikkauksessa:

Sumeiden joukkojen jäsenyysfunktioita

Konveksisuuden ja ei–konveksisuuden eroista

Esimerkki



konveksi joukko (2.aste)

ei–konveksi joukko (4.aste)

A.Sajo 13.2.1991
Kuva 2.2
SHV–työ

Lause 2.3

Jos A ja B ovat konvekseja sumeita joukkoja, on myös niiden leikkaus konveksi sumea joukko.

Todistus: Olkoon $C = A \cap B$. Silloin on

$$f_C(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) =$$
$$= \min[f_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2), f_B(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)].$$

Koska A ja B ovat konvekseja, on voimassa

$$f_A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \min[f_A(x_1), f_A(x_2)]$$

ja

$$f_B(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \min[f_B(x_1), f_B(x_2)] .$$

Näinollen

$$f_C(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq$$
$$\min[\min[f_A(x_1), f_A(x_2)], \min[f_B(x_1), f_B(x_2)]] =$$
$$= \min[\min[f_A(x_1), f_B(x_1)], \min[f_A(x_2), f_B(x_2)]].$$

Toisin sanoen

$$f_C(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \min[f_C(x_1), f_C(x_2)] ,$$

eli C on kaavan (2.14) nojalla konveksi. □

Määritelmä 2.10

Sumea joukko A on *rajoitettu* jos ja vain jos joukot $\Gamma_\alpha = \{x \mid f_A(x) \geq \alpha\}$ ovat rajoitettuja kaikille $\alpha > 0$. Toisin sanoen kaikille $\alpha > 0$ on olemassa äärellinen luku $R(\alpha)$ siten, että $\| x \| \leq R(\alpha)$ kaikille $x \in \Gamma_\alpha$.

Lisäksi kutsutaan pistettä x_0 joukon A *tihentymispisteeksi*, mikäli jokaiselle $\varepsilon > 0$ on olemassa piste y x_0:n ε-säteisessä ympäristössä $U_\varepsilon(x_0)$, siten, että y kuuluu joukkoon

$$Q(\varepsilon) = \{ x \mid f_A(x) \geq M - \varepsilon \} ,$$

missä M on joukon A *maksimiaste* $M = \sup_x f_A(x)$.

Huomattakoon, että tihentymispiste käsitteenä eroaa kasautumispisteestä. Nimi on jossain määrin harhaanjohtavakin sikäli, että riittää, että piste itse saavuttaa maksimiarvon: Näinollen on mahdollista, että jostain $\varepsilon > 0$ lähtien ε-säteinen ympäristö sisältää vain tihentymispisteen itsensä.

Jos A on rajoitettu, on jokaiselle $\varepsilon>0$ olemassa hypertaso H, jonka toisella puolella on jokaiselle alkiolle x voimassa $f_A(x) \leq \varepsilon$. Tämä voidaan päätellä siitä, että joukko $\Gamma_\varepsilon=\{x \mid f_A(x) \geq \varepsilon\}$ on $R(\varepsilon)$:n määritelmän mukaisesti $R(\varepsilon)$-säteisessä pallossa $\{x \mid \|x\| \leq R(\varepsilon)\}$, ja näinollen H:ksi voidaan valita mikä tahansa hypertaso, joka sivuaa kyseistä pallopintaa. Tällöin on kaikille pisteille H:n toisella puolella kuin joukko Γ_ε voimassa $f_A(x) \leq \varepsilon$.

<u>Apulause 2.1</u>

Ei-tyhjällä rajoitetulla sumealla joukolla on ainakin yksi tihentymispiste.

<u>Todistus:</u> Olkoon A ei-tyhjä rajoitettu sumea joukko ja M sen maksimiaste. Mikäli M olisi 0, olisi A tyhjä, näinollen voidaan olettaa, että $M > 0$.

Oletetaan ensin, että löytyy piste $x \in X$, jolle $f_A(x) = M$. Tällöin on selvästi määritelmän mukaisesti x tihentymispiste ja väite todistettu.

Oletetaan nyt, että ei ole olemassa sellaista $x \in X$, jolle olisi $f_A(x) = M$. Tarkastellaan sisäkkäisten rajoitettujen joukkojen jonoa $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$, missä

$$\Gamma_n = \left\{ x \mid f_A(x) \geq M - \frac{M}{n+1} \right\}, \quad n = 1,2,\ldots .$$

Koska oli määritelty, että $M = \sup_X f_A(x)$, on jokaiselle joukolle

Γ_n olemassa $x_n \in \Gamma_n$. Olkoon $x_1, x_2, \ldots$ tällaisten pisteiden jono. Voidaan valita pisteet $x_1, x_2, \ldots$erillisiksi, sillä muutenhan löytyisi n siten, että $x_{n+1} = x_{n+2} = \ldots$, ja tällöin pitäisi olla myös $M = f_A(x_{n+1}) = f_A(x_{n+2}) = \ldots$vastoin oletusta. Kaikki pisteet kuuluvat joukkoon Γ_1, joka on määrittelynsä mukaan suljettu ja rajoitettu joukko. Tällöin Bolzano-Weierstarssin lauseen nojalla tällä pistejonolla on ainakin yksi kasautumispiste, olkoon se x_0, joukossa Γ_1. Tällöin jokaiseen pisteen x_0 ν-säteiseen ympäristöön $U_\nu(x)$ $, \nu > 0$, sisältyy ääretön määrä jonon $x_1, x_2, \ldots$ pisteitä. Valitaan N:ksi suurin kokonaisluku, jolle $N < M/\nu$, jolloin erityisesti jonon pisteet $x_{N+1}, x_{N+2}, \ldots$ kuuluvat joukkoon Γ_N, ja selvästi $\Gamma_N \subseteq Q(\nu)$. Näinollen on olemassa ainakin yksi sellainen piste x_0, että mielivaltaisessa ympäristössä $U_\nu(x)$ $, \nu > 0$,on olemassa joukkoon $Q(\nu)$ kuuluvia pisteitä.□

<u>Määritelmä</u> <u>2.11</u>

Sumea joukko A on *vahvasti konveksi*, mikäli kaikille erillisille pisteille x_1 ja x_2 , sekä kaikille $\lambda \in (0,1)$, on voimassa

(2.15) $$f_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \min [\, f_A(x_1) \,,\, f_A(x_2)] \,.$$

Vahvasti konveksi joukko eroaa siis konveksista joukosta siten, että kahden pisteen välisen janan pisteiden jäsenyysasteen on oltava aidosti suurempi kuin päätepisteiden jäsenyysaste. Huomattakoon, että mikäli A ja B ovat rajoitettuja, on myös niiden unioni ja leikkaus rajoitettuja. Joukkojen A ja B leikkaus on vahvasti konveksi, mikäli joukot A ja B ovat vastaavasti vahvasti konvekseja.

Olkoon A konveksi sumea joukko ja $M = \sup_X f_A(x)$. Mikäli A on

rajoitettu, on apulauseen 2.1 mukaisesti A:lle olemassa ainakin yksi tihentymispiste x_0. Mikäli A on vahvasti konveksi ja x_0:ssa saavutetaan maksimiarvo, eli $M = \sup_x f_A(x) = f_A(x_0)$, tämä tihentymispiste on yksikäsitteinen, sillä mikäli maksimiarvo saavutettaisiin kahdessa pisteessä x_1 ja x_2, olisi

$f_A(x_1) = M = f_A(x_2)$.

Tällöin lausekkeen (2.15) mukaisesti olisi

$$f_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) > \min [f_A(x_1) , f_A(x_2)] = M,$$

mikä on ristiriidassa oletuksen $M = \sup_x f_A(x)$ kanssa.

<u>Määritelmä 2.12</u>

Kaikkien konveksin joukon A tihentymispisteiden joukkoa sanotaan joukon A *ytimeksi* ja sitä merkitään C(A).

Joukon C(A) tulkinta tuo sille keskeisen merkityksen sumeiden joukkojen hallinnassa: määrittelynsä mukaisesti joukon A ydin on niiden pisteiden joukko, joiden läheisyydessä tai joissa jäsenyysaste A:ssa on suurin . Todistetaan vielä seuraava ydintä koskeva lause:

<u>Lause 2.4</u>

Mikäli A on konveksi, on myös C(A) konveksi.

<u>Todistus:</u> Riittää osoittaa, että jos A:n tihentymispisteitä ovat x_2 ja $x_1, x_1 \neq x_2$, ovat tihentymispisteitä myös kaikki pisteet muotoa $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2$, $0 \leq \lambda \leq 1$. Tehdään vastaoletus: Löytyy arvo ν, $0 \leq \nu \leq 1$, jolle $\nu x_1 + (1-\nu)x_2 = y$ ei olekaan tihentymispiste. Tällöin siis jostain luvusta $\varepsilon > 0$ lähtien joukko $Q_y(\varepsilon) = Q(\varepsilon) \cap U_\varepsilon(y)$ on tyhjä. Näinollen ei myöskään piste y kuulu tähän joukkoon, ja siten on oltava $f_A(y) < M-\varepsilon$. Olkoot y_1 ja y_2 pisteet, jotka kuuluvat joukkoihin $Q_{x_1}(\varepsilon)$ ja $Q_{x_2}(\varepsilon)$. Silloin on

voimassa $f_A(y_1) \geq M - \varepsilon$ ja $f_A(y_2) \geq M^- - \varepsilon$. Nyt on, koska A on konveksi, on kaavan (2.14) mukaisesti myös

$$f_A(\nu y_1 + (1-\nu)y_2) \geq \min [\, f_A(y_1) \,,\, f_A(y_2)] \geq M - \varepsilon.$$

Toisaalta piste $\nu y_1 + (1-\nu)y_2$ kuuluu pisteen $y = \nu x_1 + (1-\nu)x_2$ ε-ympäristöön, joten päädymme ristiriitaan vastaoletuksemme kanssa, sillä tällöin piste $\nu y_1 + (1-\nu)y_2 \in Q_y(\varepsilon)$.□

<u>Seuraus 2.2</u>

Mikäli $X=\mathbb{R}$, ja A on vahvasti konveksi ja sillä on olemassa tihentymispiste, se on yksikäsitteinen.

Näistä tuloksista voitaisiin ajatella olevan hyötyä: Mikäli voitaisiin testata joukon konveksisuutta, erityisesti vahvasti konveksisuutta, tiedettäisiin, että joukolla ei ole useita huippuarvoja: jos siis löydettäisiin piste, jossa ominaisuus on voimakkain lähiympäristöönsä verrattuna, tiedettäisiin samalla todistettujen kohtien nojalla, että suurempia jäsenyysasteita ei tule löytymään, ja maksimaalinen kuulumisen aste on saavutettu kyseisessä pisteessä.

Tarkastellaan vielä lopuksi edellä jo sivuttua kysymystä sumeiden joukkojen erillisyyden asteesta. Kun ajatellaan, että tarkastellaan jonkin avaruuden alkioita erillisten sumeiden joukkojen kannalta, kertoo joukkojen erillisyys alkion mahdollisuudesta kuulua molempiin joukkoihin. Esimerkiksi arvioimme yritystä ja tarkastellaan kahta erilaista yritystä karakterisoivaa piirrettä. Kyseiset piirteet esitetään sumeina joukkoina: yritystä saattavat

kyseiset tekijät kuvata jonkin verran, toinen ehkä vähän enemmän ja toinen vähemmän. Jos nyt tekijät katsotaan hyvinkin olennaisiksi, on mielenkiintoista tutkia missä määrin molemmat tekijät olisi mahdollista ylipäätänsä löytää saman yrityksen vahvuuksista. Tutkitaan tekijöiden erillisyysastetta, ja todetaan, että yleisesti on melko mahdotonta, että molemmat tekijät olisivat voimassa, ja näinollen tätä taustaa vasten yritysarviointi vasta antaa mielekkään tuloksen.

Määritellään siis konveksien joukkojen separaatioaste eli erillisyysaste.

<u>Määritelmä 2.13</u>

Olkoot aluksi A ja B kaksi rajoitettua sumeaa joukkoa ja olkoon H mielivaltainen hypertaso E^n:ssä, jonka määrittelee lineaarinen yhtälö $h(x)=0$ siten, että kaikki pisteet hypertason toisella puolella toteuttavat ehdon $h(x)\leq 0$ ja toisella puolella $h(x)\geq 0$. Olkoon K_H sellainen H:sta riippuva luku, että $f_A(x) \leq K_H$ tason toisella puolella ja toisella puolella tasoa $f_B(x) \leq K_H$. Olkoon $M_H = \inf K_H$. Lukua $D_H = 1 - M_H$ sanotaan *A:n ja B:n erillisyysasteeksi H:n suhteen.*

Olkoon yleisesti $\{ H \}$ kaikkien E^n:n hypertasojen joukko. Joukkojen A ja B *erillisyysaste* on

$$D = 1 - \bar{M},$$

missä

$$\bar{M} = \inf_H M_H.$$

Seuraava lause antaa keinon erillisyysasteen löytämiselle kahden rajoitetun konveksin joukon tapauksessa. Intuitiivisesti on

selvää, että kahden joukon leikkauksen maksimiaste kertoo itse asiassa joukkojen "yhteisen jäsenyysasteen", ja näinollen luvun komplementti ykkösen suhteen vastaavasti kertoo joukkojen erillisyydestä. Juuri tämä onkin lauseen 2.5 tulos.

<u>Lause 2.5</u>

Olkoot A ja B rajoitettuja konvekseja joukkoja E^n:ssä ja olkoot niiden maksimiasteet vastaavasti M_A ja M_B. Olkoon M leikkauksen $A \cap B$ maksimiaste $\sup_x \min [f_A(x) , f_B(x)]$. Silloin on $D = 1 - M$.

<u>Todistus:</u> Tarkastellaan erikseen tapaukset

(1) $M = \min (M_A , M_B)$ ja

(2) $M < \min (M_A , M_B)$.

(1) Oletetaan, että $M = M_A$. Silloin on rajoitettujen joukkojen määritelmän (2.10) mukaisesti olemassa Γ_M:n sisältävän pallon ulkopuolella hypertaso H, jolle $f_B(x) \leq M$ kaikille x H:n yhdellä puolella. Toisella puolella H:ta puolestaan on $f_A(x) \leq M$ luvun M määritelmän nojalla. Nyt siis on $D \geq 1-M$. Jää jäljelle osoittaa, että ei ole olemassa lukua $M' < M$ ja hypertasoa H', joille $f_B(x) \leq M'$ tason yhdellä puolella ja $f_A(x) \leq M'$ tason toisella puolella. Osoitettava on siis, ettei ole $D = 1 - M' > 1 - M$. Tämä seuraa suoraan seuraavasta vastaväitteestä: oletetaan, että H' ja M' ovat olemassa ja oletetaan selvyyden vuoksi, että A:n ydin C(A) on tason positiivisella puolella. Tällöin ei voi olla kaikille alkioille positiivisella puolella voimassa $f_A(x) \leq M'$ ytimen määritelmän mukaisesti, ja näinollen olisi oltava $f_A(x) \leq M'$ kaikille alkioille x H':n negatiivisella puolella, ja siis $f_B(x) \leq M'$ hypertason H' positiivisella puolella. Näin ollen on voimassa sekä H':n negatiivisella että sen positiivisella puolella

$$\sup_x \min [f_A(x) , f_B(x)] \leq M'.$$

Silloin täytyy lausekkeen olla voimassa myös kaikkialla X:ssä, ja tämä on ristiriidassa oletuksen

$$\sup_x \min [f_A(x) , f_B(x)] = M > M'$$

kanssa.

(2) Tarkastellaan konvekseja joukkoja $\Gamma_M^{(A)} = \{ x \mid f_A(x) > M \}$ ja $\Gamma_M^{(B)} = \{ x \mid f_B(x) > M \}$. Nämä joukot ovat ei-tyhjiä ja erillisiä, sillä muussa tapauksessa olisi oltava olemassa alkio y, jolle sekä $f_B(y) > M$ että $f_A(x) > M$ ja täten olisi $f_{A \cap B}(x) > M$ vastoin luvun M määrittelyä. Koska joukot $\Gamma_M^{(A)}$ ja $\Gamma_M^{(B)}$ ovat erilliset, on tavallisten joukkojen separaatiolauseen mukaisesti olemassa hypertaso H, jolle joukko $\Gamma_M^{(A)}$ on toisella, sanokaamme positiivisella puolella ja $\Gamma_M^{(B)}$ toisella, siis negatiivisella puolella. Tällöin on Γ-joukkojen määrittelyjen mukaisesti kaikille hypertason H negatiivisen puolen pisteille voimassa $f_A(x) \leq M$ ja kaikille positiivisen puolen pisteille voimassa $f_B(x) \leq M$. Näinollen on osoitettu, että on olemassa sellainen hypertaso jonka suhteen A:n ja B:n erillisyysaste on 1-M. Lopuksi samalla tavalla kuin kohdassa (1) voidaan osoittaa, ettei korkeampi erillisyysaste ole mahdollinen.□

3. TODENNÄKÖISYYSLASKENTA JA SUMEIDEN JOUKKOJEN TEORIA

3.1 Yleistä

Sumeiden joukkojen teoriassa on joukko piirteitä, jotka tuovat mieleen todennäköisyyslaskennan käsitteistön. Osoittautuu kuitenkin, että sumeiden joukkojen teorian käsitteistö ja todennäköisyyslaskennan käsitteistö ovat sangen monissa kohdissa yhteensovittamattomia siten, että ristiriidatonta sumeata todennäköisyyslaskentaa ei onnistuttane laatimaan. Toisaalta saattaa todennäköisyyslaskenta sopia mukaan sumeaan analyysiin vieläpä tätä huomattavasti tehostavalla tavalla. Eräs esimerkki tästä on Sommerin [3] kehittämä päätösteoria.

Seuraavassa käsitellään ensin lyhyesti todennäköisyyslaskennan aksiomatiikkaa. Tämän jälkeen käsitellään eräitä todennäköisyyslaskennan formalismeja, jotka ovat luonteeltaan sumeita ja jotka voidaan nähdä todennäköisyyslaskennan yleistyksinä. Seuraavassa rajoitutaan peruskäsitteiden selvittelyyn. Tämä luku on pääosin Turun Yliopiston Sovelletun matematiikan laitoksella 1980-luvulla pidetyn sumeiden joukkojen seminaarin eri muistiinpanojen referointia.

Näyttää siltä, että kaikki referoidut tutkijat ovat lähinnä pohtineet, minkälaisiin tuloksiin päästään, kun sijoitetaan jäsenyysfunktio todennäköisyysfunktion ohelle totuttuihin todennäköisyyslaskennan peruslausekkeisiin. Perustelu tälle tuntuu luonnolliselta: on otettava jonkun sumean ominaisuuden eli sumean joukon todennäköisyyttä laskemaan pyrittäessä toki kunkin alkion

kohdalta huomioon se, missä määrin sillä mainittua ominaisuutta on. Yhdistelytapoja ja lähestymistapoja näyttäisi olevan useita. Kuitenkaan ei näy selvää luontevaa tapaa käytännössä lähestyä ongelmaa: läpikäytyjen artikkelien perusteella sumeiden joukkojen todennäköisyys ei selvene. Toisaalta jonkinlaista selvyyttä tullee todennäköisyyslaskennan ja sumeiden joukkojen teorian eroon.

3.2 Todennäköisyyslaskennan peruskäsitteitä

Aluksi luetellaan lyhyesti todennäköisyyslaskennan peruskäsitteet, koska näitä pyritään jatkossa laajentamaan sumeiden joukkojen yhteydessä toimivaksi.

Todennäköisyyslaskennassa on peruskäsitteenä alkeistapaus ω, joka voidaan saada kokeen tuloksena.Kaikkien alkeistapausten joukkoa, tapausavaruutta, merkitään Ω:lla, ja oletetaan, että Ω on ei-tyhjä joukko. Havaittavien tapausten luokka, tapahtumaperhe, $\mathcal{B}$ on σ-algebra avaruudella Ω, eli se toteuttaa ehdot

(1) $\emptyset \in \mathcal{B}$

(2) $A \in \mathcal{B} \Rightarrow A^c \in \mathcal{B}$

(3) $A_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}^+ \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}$.

(σ-algebra on aina Boolen algebra). Sanotaan, että A tapahtuu, mikäli kokeen tulos $\omega \in A$. Todennäköisyysmitta $P: \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ toteuttaa aksiomat

(1) $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{B}$

(2) $P(\Omega) = 1$

(3) $A,B \in \mathcal{B}$ ja $A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

(4) $A_n \in \mathcal{B}\ \forall n \in \mathbb{N}^+$, ja A_n on kasvava, $\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = A \Rightarrow$

$\lim_{n\to\infty} P(A_n) = P(A)$

Kolmikkoa ($\Omega, \mathcal{B}, P(\cdot)$) kutsutaan todennäköisyysavaruudeksi. Funktio $x: \Omega \to \mathbb{R}$ on satunnaismuuttuja, jos

$$\{ \omega \mid x(\omega) \leq x \} \in \mathcal{B} \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

eli x on Borel-mitallinen funktio.

Jos $\mathcal{A}$ on jokin Ω:n osajoukkojen luokka, on $\sigma(\mathcal{A})$ pienin σ-algebra, joka sisältää $\mathcal{A}$:n. Jos $x: \Omega \to \mathbb{R}$ on satunnaismuuttuja, on joukko

$$\mathcal{F}_x = \sigma\{ x^{-1}(B) \mid B \text{ on reaaliakselin Borel-joukko} \}$$

pienin x:n Ω:lle generoima σ-algebra. Se on myös pienin σ-algebra, jonka suhteen x on satunnaismuuttuja. Mikäli funktio on luokan $\mathcal{A}$ suhteen satunnaismuuttuja, sanotaan, että funktio on $\mathcal{A}$-mitallinen. Edelleen σ-algebran $\mathcal{A}$ sanotaan olevan satunnaismuuttujan x generoima, mikäli $\mathcal{A}$ on pienin σ-algebra, jonka suhteen x on satunnaismuuttuja.

Todettakoon, että edellä mainittu käsite reaaliakselin Borel-joukot $\mathbb{B}$ on tunnetusti pienin σ-algebra, joka sisältää kaikki reaaliakselin avoimet välit. Voidaan osoittaa, että ehdot

(1) $\{ \omega \mid x(\omega) \leq x \} \in \mathcal{B} \quad \forall x \in \mathbb{R},$

(2) $\{ \omega \mid x(\omega) \in B \} \in \mathcal{B} \quad \forall B \in \mathbb{B}$

ovat ekvivalentteja.

Jos merkitään $Q(B) = P(\omega \mid x(\omega) \in B) = P(x^{-1}(B))$, niin ($\mathbb{R}, \mathbb{B}, Q$) on x:n indusoima todennäköisyysavaruus. Tällöin Q on satunnaismuuttujan x jakautuma $\mathbb{R}$:llä. Funktio $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $F(x)=P(x \leq x)$, on satunnaismuuttujan x jakautumafunktio.

3.3 Zadehin sumea todennäköisyyslaskenta

Sumean joukon ja sumean todennäköisyyden tarkastelemista varten on luontevaa ensin määritellä alkiojoukko Ω, jonka alkioilla voi olla sumeita ominaisuuksia A,B,..., jolloin alkiolla $x \in \Omega$ on näitä ominaisuuksia jäsenyysfunktioiden $f_A(x), f_B(x), \ldots$ ilmoittamat määrät. Merkitään sumea joukko tässä symbolilla $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \ldots$, jolloin jäsenyysfunktio $f_A(x)$ määrittelee täysin sumean joukon $\mathcal{A}$ ja jäsenyysfunktio $f_B(x)$ sumean joukon $\mathcal{B}$ luvussa 2 määritellyllä tavalla.

Olkoon nyt alkioista $x \in \Omega$ muodostettu σ-algebra $\mathcal{B}$ ja olkoon $P(\cdot)$ tähän liittyvä todennäköisyysmitta, jolloin saatiin todennäköisyysavaruus $(\Omega, \mathcal{B}, P(\cdot))$. Joukon Ω alkioita tarkasteltaessa saadaan alkiot tarkasteltaviksi satunnaisesti, alkio $x \in \Omega$ todennäköisyydellä $P(x)$, tai terävän joukon $A \in \mathcal{B}$ alkio todennäköisyydellä $P(A)$. Joukkoa A kutsutaan tapaukseksi, ja se tapahtuu, kun joukon A alkiolla on varmuudella se ominaisuus jonka mukaan joukko A määriteltiin. Merkitään seuraavassa terävä joukko tai terävä tapaus pystykirjaimin ja sumea joukko vinoin kirjaimin. Joukon A karakteristinen funktio eli indikaattorifunktio määritellään seuraavasti:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } x \text{ tapahtuu} \quad (\rightarrow A \text{ tapahtuu}) \\ 0 & \text{muuten} \end{cases} \tag{3.1}$$

Terävä joukko A voidaan nyt kirjoittaa $A = \{ x \mid x \in \Omega,\ \chi_A(x)=1 \}$.
Terävä tapaus B tapahtuu, kun satunnaisesti saadun yksilön $x \in \Omega$ kohdalla pitää paikkansa, että $x \in B$. Toisin sanoen tapauksen B voidaan sanoa tapahtuvan, kun alkio $x \in \mathcal{B}$ antaa tulokseksi

$\chi_B(x)=1$.

Edellä siis lähdetään siitä, että tutkitaan perusjoukon Ω alkiota, ja selvitetään, onko sillä ominaisuus, joka tekee siitä joukon B alkion. Alkiolla x siis joko on tai ei ole tätä ominaisuutta.

Vastaavasti määriteltäisiin nyt, että sumea tapaus *B* on - ainakin jossain määrin - tapahtunut, kun tutkittavaksi otetulle perusjoukon alkiolla x pitää paikkansa, että $f_B(x) > 0$. Koska yleensä $0 < f_B(x) < 1$, on tapaus *B* luonteeltaan sumea. On vaikea näinollen sanoa, että *B* tapahtuu - sen sijaan voidaan kyllä sanoa, että *B* tapahtuu jossain määrin sen mukaisesti, mikä jäsenyysfunktion f_B arvo on. Eksaktia "tapahtumista" perinteisen todennäköisyyslaskennan vaatimalla tavalla ei siis suoraan voidan sumeisiin joukkoihin liittää. Yager [4] asettaakin peruskysymyksen: *Mitä tarkoittaa, että sumea tapaus on tapahtunut?* Vasta tämän selvittyä voimme alkaa tarkastella sumean tapauksen todennäköisyyttä.

Zadeh [5] yleistää todennäköisyyslaskennan sumeaksi siten, että perinteisen todennäköisyyslaskennan on oltava sumean todennäköisyyslaskennan erikoistapaus seuraavassa mielessä: Jos jokaisen sumean tapauksen *B* kohdalla pitää paikkansa, että sumean tapauksen *B* muuttuessa jollakin tavoin tasaisesti teräväksi tapaukseksi B siten, että $f_B(x) \to \chi_B(x)$ kaikille $x \in \Omega$ ja siten, että $P(B) \to P(B)$, missä $P(B)$ on sumeille tapauksille *B* määritelty todennäköisyys, päädytään tuttuun "terävään" todennäköisyyslaskentaan.

Olkoon nyt olemassa todennäköisyysavaruus $(\Omega,\mathcal{B},P(\cdot))$, jolloin perusjoukon Ω alkioihin liittyy sumeita ominaisuuksia $A,B,\ldots$ jäsenyysfunkioiden $f_A,f_B,\ldots$ mukaisesti. Jokaiseen perusjoukon Ω

alkioon x liittyvät siis todennäköisyyden lisäksi vielä jäsenyysfunktioiden arvot $f_A(x), f_B(x), \ldots$. Olkooon $A \in \mathcal{B}$ terävä tapaus, jonka todennäköisyys on P(A), jolloin

(3.2) $$P(A) = \int_A dP(x),$$

joka voidaan kirjoittaa indikaattorifunktion (3.1) avulla seuraavasti:

(3.3) $$P(A) = \int_\Omega \mathcal{X}_A(x)dP(x) .$$

Nyt $\mathcal{X}_A(x)$ on terävän joukon A jäsenyysfunktio. Sumeaan joukkoon S liittyvä integraali $\int_\Omega f_S(x)dP(x)$ on olemassa edellyttäen, että $f_S(x)$ on Borel-mitallinen, kuten käytännössä aina asian laita lienee. Zadeh määrittelee integraalin

(3.4) $$P(S) = \int_\Omega f_S(x)dP(x)$$

sumean tapauksen S todennäköisyydeksi.

Integraalin (3.4) määrittelemä joukkofunktio $P(S)$ noudattaa samoja laskusääntöjä kuin todennäköisyysfunktio $P(\cdot)$. Jäsenyysfunktiolle puolestaan on voimassa esimerkiksi laskusääntö

$$f_{S^c}(x) = 1 - f_S(x), \ \forall x \in \Omega .$$

Tämä laskusääntö on kylläkin voimassa jakautumafunktioille, mutta ei yleensä tiheysfunktioille.

Lausekkeelle (3.4) saadaan kuitenkin seuraava käyttökelpoinen tulkinta. Olkoon S sumea joukko , Ω perusjoukko, $x \in \Omega$ alkio jonka jäsenyysasteen joukkoon S kertoo jäsenyysfunktio f_S. Otetaan alkio x satunnaisesti joukosta Ω lain $P(\cdot)$ mukaisesti ja sen joukkoon S kuulumisen aste lasketaan annetusta jäsenyysfunktiosta $f_S(x)$, sekä tämän jälkeen alkio palautetaan joukkoon Ω. Toistamalla tätä saadaan lukujono $f_S(x_1), f_S(x_2), \ldots, f_S(x_n)$. Nyt on tunnetusti

(3.5) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left[f_S(x_1)+f_S(x_2)+\ldots+f_S(x_n) \right] = \int_\Omega f_S(x)dP(x) .$$

Siis joukosta Ω umpimähkäisesti, lain $P(\cdot)$ mukaisesti, otetulla yksilöllä x on ominaisuutta S keskimäärin integraalin (3.4) ilmoittama määrä. Voimme kirjoittaa nyt

(3.6) $$\int_\Omega f_S(x)dP(x) = E\{ f_S(x) \}$$

ja todeta, että kyseessä on juuri odotusarvo funktion f_S suhteen.

Sommer rakentaa varsin käyttökelpoisen päätöslaskentaformalismin odotusarvon (3.6) varaan, tosin käyttäen tästä nimitystä todennäköisyys. Ajatellaan, että esimerkiksi liiketoiminnan tulos on jokin rahasummista $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n$, ja luonnehditaan lisäksi toiminnan kokonaistulosta toteamalla, että tapahtui jokin sumeista tapauksista $F_1,F_2,\ldots,F_m$. Esimerkiksi F_1 voisi olla sumea käsite "tulos Δ on hyvä verotuksen kannalta" ja F_2 voisi olla sumeasti "tulos Δ on hyvä laajentumispyrkimysten kannalta". Sumean joukon määritelmän mukaisesti sumeisiin joukkoihin $F_1,F_2,\ldots,F_m$ liittyy jäsenyysfunktiot f_i, sekä vastaavat arvot $f_i(\Delta_j)$, $j=1,2,\ldots,n$, $i=1,2,\ldots,m$. Jokaiseen tulokseen $\Delta_1,\Delta_2,\ldots,\Delta_n$ liittyy myöskin annettu todennäköisyys $P(\Delta_i)$, $i=1,\ldots,n$. Lauseketta (3.6) vastaamaan saadaan nyt lauseke

(3.7) $$E\{ f_j(\Delta) \} = \sum_{i=1}^{n} f_j(\Delta_i)P(\Delta_i) \ .$$

Olkoon tilanteessa, missä edelliset tiedot ovat voimassa, mahdollisten päätösten joukko $d_1,d_2,\ldots, d_k$ (päätös voisi olla tässä esimerkiksi sijoitettu rahasumma) ja olkoon sumean tapauksen F_k yhteydessä tehdystä päätöksestä d_l hyöty $U(d_l,F_k)$. Jos tiedetään, että tulos on Δ_j, luonnehtii luku

(3.8) $$U(d_l,\Delta_j) = \sum_{k=1}^{m} f_k(\Delta_j)\ U(d_l,F_k)$$

hyvin päätöksestä d_l seurannutta hyötyä. Kun Δ_j on

satunnaismuuttuja, on keskimäärin saatava hyöty

$$(3.9) \qquad U(d_i) = E\{ U(d_i,\Delta_j) \} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} U(d_i,F_k) f_k(\Delta_j) P(\Delta_j)$$

$$\sum_{k=1}^{n} U(d_i,F_k) \sum_{j=1}^{m} f_k(\Delta_j) P(\Delta_j)$$

$$\sum_{k=1}^{n} U(d_i,F_k)\ E\{ f_k(\Delta) \} .$$

jolloin optimipäätös d_{opt} saadaan vaatimuksesta

$$U(d_{opt}) = \max_{1 \le i \le k} U(d_i) .$$

Sommer [3] yleistää edelleen formalismia ottamalla käyttöön sumeat päätökset $A_1, A_2, \ldots, A_l$: sumeaa on siis itse päätös, esimerkiksi A_1 on päätös ryhtyä liikkeen pienenpuoleiseen laajennukseen. Perusjoukkona ovat edelleen päätökset $d_1, d_2, \ldots, d_k$ ja merkitään jäsenyysfunktioita siten, että g_i on sumean joukon A_i jäsenyysfunktio. Jos siis päätös d_1 olisi se, että sijoitettaisiin rahasumma X_1, olisi aikaansaatava laajennus pienenpuoleinen arvon $g_1(d_1)$ osoittamassa määrin. Kun $U(A_1,F_k)$ on kokonaistulokseen F_k liittyvä päätöksestä A_1 saatu hyöty, saadaan yhtälön (3.9) asemesta yhtälö

$$U(A_1) = \sum_{k=1}^{n} U(A_1,F_k)\ E\{ f_k(\Delta) \} ,$$

ja tällöin voisi olla

$$U(A_1,F_k) = \sum_{i=1}^{k} U(d_i,F_k)\ g_1(d_i) \} .$$

Optimaaliselle sumealle päätökselle A_{opt} saadaan kuten edellä ehto $U(A_{opt}) = \max_{1 \le i \le l} U(A_i)$.

Sumea päätös A_i, missä i=1,...,l , voidaan perustaa käytettävissä olevaan lisäinformaatioon. Olkoot mahdolliset lisäinformaatiot $y_1, y_2, \ldots, y_a$, jolloin mahdolliset sumeat päätökset ovat $A_i(y_j)$, missä i=1,2,...,l ja j=1,2,...,a .Edelliset lausekkeet modifioidaan helposti siirtymällä todennäköisyyksistä $P(\Delta_i)$ ehdollisiis todennäköisyyksiin $P(\Delta_i|y_j)$, jolloin, jos todennäköisyydet $P(y_j|\Delta_i)$

tunnetaan, saadaan

$$(3.12) \qquad P(\Delta_i | y_j) = \frac{P(y_j | \Delta_i) P(\Delta_i)}{\sum_{k=1}^{m} P(y_j | \Delta_k) P(\Delta_k)} .$$

3.4 Hirotan sumea joukko

Edellä oletettiin jäsenyysfunktio f_S tunnetuksi, ja alkio $x \in \Omega$ valittiin satunnaisesti lain $P(\cdot)$ mukaisesti ja tämän jälkeen laskettiin tuolle satunnaisesti vakitulle alkiolle arvo $f_S(x)$, eli joukkoon S kuulumisen aste. Hirota [6] määrittelee *havaitsijoiden* joukon Λ: kukin $\lambda \in \Lambda$ mittaa omalla subjektiivisella tavallaan perusjoukolle Ω sumean ominaisuuden S jäsenyysfunktion, jota merkitään nyt $f_S(x,\lambda)$, koska jäsenyysfunktion arvo riippuu paitsi alkiosta x myös havaitsijasta λ. Oletetaan nyt, että jäsenyysfunktio saadaan satunnaisesti, ja se on $f_S(\cdot,\lambda)$ todennäköisyydellä $Q(\lambda)$. Yksilöllä $x \in \Omega$ on siis ominaisuutta S sekä satunnaisella että sumealla tavalla punnittuna, satunnaisuus johtuu jäsenyysfunktion satunnaisesta, havainnoijasta λ riippuvasta valintatavasta ja sumeus jäsenyysfunktiosta.

Oletetaan nyt, että havaitsijain joukosta Λ ja todennäköisyydestä $Q(\cdot)$ on rakennettu todennäköisyysavaruus $(\Lambda, C, Q(\cdot))$.

Kun $x \in \Omega$ on kiinnitetty, on $f_S(x,\lambda)$ satunnaismuuttuja, jolla on jakautuma

$$(3.13) \qquad \Phi_S(x,E) = Q(\{ \lambda \mid f_S(x,\lambda) \in E \}), \ \forall E \in B_c,$$ missä B_c on perusjoukkoon $[0,1]$ liittyvä σ-algebra. Nyt sisältyy kaikki tieto satunnaismuuttujan $f_S(x,\lambda)$ jakautumasta funktioon $\Phi_S(x,E)$. Samoin sisältää funktion $\Phi_S(x,E)$ Fourier-muunnos

(3.14) $$\Phi_S(x,t) = \int_0^1 e^{it\alpha} d\Phi_S(x,\alpha)$$

kaiken tiedon satunnaismuuttujan $f_S(x,\lambda)$ jakautumasta. Koska

(3.15) $$\Phi_S(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{i^n}{n!} m_S^n(x)\ t^n ,$$

missä merkitään

(3.16) $$m_S^n(x) = E_\lambda(f_S(x,\lambda)^n),$$

sisältyy kaikki tieto satunnaismuuttujan $f_S(x,\lambda)$ jakautumasta, ja siis sumeasta joukosta S, funktiojonoon $m_S^1(x)$, $m_S^2(x)$, ... Huomataan, että pelkkä odotusarvo

(3.17) $$E_\lambda(f_S(x,\lambda)) = \int_\Lambda f_S(x,\lambda)\ dQ(\lambda)$$

ei riitä, vaan tarvitaan vielä korkeammat momentit $m_S^2(x)$, $m_S^3(x)$, ... Hirota määrittelee jäsenyysfunktion m_S^1 rinnalle *epävarmuusfunktion*

(3.18) $$\nu_S(x) = m_S^2(x) - (\ m_S^1(x)\ )^2$$

ja toteaa, että sumea joukko S sekä sitä arvioivien havaitsijoiden erilaiset näkemykset voidaan ilmoittaa riittävän tarkasti funktioparilla $(m_S^1(x), \nu_S(x))$. Mitä paremmin eri havaitsijoiden $\lambda \in \Lambda$ mielipiteet käyvät yksiin joukon Ω alkioiden sumeuden S asteen arvioinnissa, sitä pienempi on ν_S . Jos $f_S(x,\lambda)$ on muuttujasta λ riippumaton, on $\nu_S(x) \equiv 0$.

Eräänlainen sumea joukko voidaan nyt määritellä seuraavasti: Olkoon $f_S(x,\lambda)$ jokaiselle $\lambda \in \Lambda$ karakteristinen funktio, toisin sanoen $f_S(x,\lambda) = \chi_S(x,\lambda)$ (vertaa (3.2)), jolloin S ei siis ole sumea. Jokainen havaitsija $\lambda \in \Lambda$ pystyy nyt ilmoittamaan jokaisesta $x \in \Omega$ kuuluuko tämä hänen mielestään joukkoon S vai ei, eli onko yksilöllä ominaisuus S. Jonkun havaitsijan mielestä ko. alkiolla on ominaisuus S, jonkun toisen mielestä taas ei. Joukko Ω voidaan nyt esittää muodossa $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$ ja joukko Λ muodossa $\Lambda = \Lambda_1(x)$ +

$\Lambda_2(x)$ siten, että

$$(3.19) \qquad \mathcal{X}_S(x,\lambda) = \begin{cases} 1, \text{ kun } x \in \Omega_1, \ \forall\lambda \in \Lambda \\ 0, \text{ kun } x \in \Omega_2, \ \forall\lambda \in \Lambda \\ 1, \text{ kun } x \in \Omega_3, \ \forall\lambda \in \Lambda_1(x) \\ 0, \text{ kun } x \in \Omega_3, \ \forall\lambda \in \Lambda_2(x) \end{cases} .$$

Nyt on

$$(3.20) \qquad \int_\Lambda \mathcal{X}_S(x,\lambda)\, dQ(\lambda) = \begin{cases} 0, \text{ kun } x \in \Omega_2 \\ 1, \text{ kun } x \in \Omega_1 \\ \int_{\Lambda_1(x)} \mathcal{X}(x,\lambda)\, dQ(\lambda), \text{ kun } x \in \Omega_3 \end{cases} .$$

Integraali (3.20) on luonteeltaan jäsenyysfunktio.

Hirota kutsuu joukkoa jonka määrittelee pari $(f_S(x,\lambda),Q(\cdot))$ stokastiseksi joukoksi.

3.5 Kandellin sumean tapahtuman todennäköisyys

Kandell [7] esittää lausekkeen joka voidaan nähdä integraalin (3.4) yleistyksenä:

$$(3.21) \qquad \overline{P}(S) = \max_{0 \le T \le 1} \{ \min \{ T, m(\Gamma_T) \} \} ,$$

missä Γ_T on luvussa 2 määritelty T-leikkaus:

$$(3.22) \qquad \Gamma_T = \{ x \mid x \in \Omega, f_S(x) \ge T \}$$

funktion f_S ollessa sumean joukon S jäsenyysfunktio ja m on aksiomat toteuttava mitta.

(On selvää, että T-leikkaus riippuu täysin joukosta S, ja näinollen olisi oikeampaa merkitä $\Gamma_T = \Gamma_T(S)$. Yleensä kuitenkin käsitellään vain yhtä sumeaa joukkoa S, ja tällöin on selvää, että käytettävät T-leikkaukset ovat kyseiseen joukkoon liittyen kaavan (3.22) mukaisia. Mikäli epäselvyydestä on vaaraa, pyritään T-leikkauksia täsmentämään merkitsemällä joko joukon symboli taikka joukon

järjestysnumero sulkuihin yläindeksiksi leikkauksen perään.)

Valitsemalla $f_A(x) = \chi_A(x)$ $\forall x$ ja $m(A) = \int_A dP(\omega)$, päädytään lausekkeeseen (3.3). Terävälle joukolle on siis

$$\min [\, T, m(A) \,] = \begin{cases} T, \text{ kun } T \in [\, 0, \int_A dP(\omega) \,] \\ \int_A dP(\omega), \text{ kun } T \in [\, \int_A dP(\omega), 1 \,] \end{cases},$$

joten nyt

$$\overline{P}(A) = \max_{0 \le T \le 1} \{ \min \{ T, m(A) \} \} = P(A) .$$

Olkoon edelleen $m(A) = \int_A dP(\omega)$, mutta Γ_T määritelmän (3.22) mukainen, ja f_S joukon S jäsenyysfunktio. Ilmeisestikin epäyhtälöstä $T' < T''$ seuraa epäyhtälö $m(\Gamma_{T'}) > m(\Gamma_{T''})$. Siis parametrin T kasvaessa ei $m(\Gamma_T)$ kasva. Jos

(3.23) $$\overline{\overline{T}} = \int_{\Gamma_{\overline{T}}} dP(\omega),$$

on ilmeisesti

$$\overline{P}(S) = \int_{\Gamma_{\overline{T}}} dP(\omega) = \int_\Omega \chi_{\Gamma_{\overline{T}}}(\omega) dP(\omega) .$$

Valitsemalla

(3.25) $$m(A) = (\int_A f_S(x) dP(x)) \cdot (\int_\Omega f_S(x) dP(x))^{-1}$$

saadaan kaavasta (3.21), että

(3.26) $$\overline{P}(S) = \int_{\Gamma_{\overline{T}}} f_S(x) dP(x)) \cdot (\int_\Omega f_S(x) dP(x))^{-1},$$

missä

(3.27) $$\overline{\overline{T}} = \int_{\Gamma_{\overline{T}}} f_S(x) dP(x)) .$$

Lauseke (3.26) sisältää, kuten pitääkin, terävän tapauksen erikoistapauksena.

3.6 Yagerin sumean tapauksen todennäköisyys

Yager [4] esittää lausekkeen sumealle todennäköisyydelle joka perustuu α-leikkauksen (Määritelmä 2.13) sekä funktion jatkamisen käsitteille. Huomattakoon, että α-leikkaus ei ole sumea joukko. Sumea joukko voidaan nyt esittää seuraavanlaisena kehitelmänä:

(3.28) $$S = \bigcup_{0 \le T \le 1} T \cdot \Gamma_T \ .$$

Tämä johtopäätös voidaan tehdä seuraavasti: Määritellään joukko $T\Gamma_T$ asettamalla sen jäsenyysfunktioksi $f_{T\Gamma_T}(x) = T\ f_S(x)\ \forall x \in \Omega$. saadaan yhtälö

(3.29) $$f_{\bigcup_{0 \le T \le 1} T\Gamma_T}(x) = \max_{0 \le T \le 1} f_{T\Gamma_T}(x) = \max_{0 \le T \le 1} (T f_S(x)) =$$

$$= \max_{0 \le T \le 1} (T) f_S(x) = f_S(x) \ . \square$$

Olkoon nyt G riittävän laaja terävien (tavallisten) joukkojen kokoelma sekä f joukkofunktio f: $G \to [\ -\infty, \infty\ ]$. Yager yleistää nyt teräville joukoille määritellyn funktion f olemaan voimassa sumealle joukolle S seuraavasti:

(3.31) $$f(S) = \max_{0 \le T \le 1} T \cdot f(\Gamma_T) = \max_{0 \le T \le 1} (T \cdot f(\Gamma_T)) \ .$$

Tarkastellaan esimerkkinä sumeata (x_1, x_2)-tasossa määriteltyä joukkoa S, jonka jäsenyysfunktio on

(3.32) $$f_S(x_1, x_2) = e^{-(1/R^2)((x_1 - x_a)^2 + (x_2 - x_b)^2)} \ .$$

T-leikkauksena Γ_T on nyt ympyrä $(x_1 - x_a)^2 + (x_2 - x_b)^2 = R^2 \ln(1/T)$, jonka pinta-ala $F(\Gamma_T)$ on $\pi R^2 \ln(1/T)$. Yagerin funktion avulla määritellään lauseke sumean joukon (3.32) pinta-alalle

(3.33) $$f(S) = \max_{0 \le T \le 1} (T \cdot \pi R^2 \ln(1/T)) = \pi R^2 \max_{0 \le T \le 1} T \cdot \ln(1/T) =$$

$$= \pi R^2 e^{-1}.$$

Olkoon nyt $P(\cdot)$ kolmikkoon $(\Omega,\mathcal{B},P(\cdot))$ liittyvä todennäköisyys. Se on määritelty joukaiselle α-leikkaukselle Γ_α, koska $\Gamma_\alpha \in \mathcal{B}$. Näinollen lausekkeen (3.31) avulla saadaan seuraava muoto sumealle todennäköisyydelle:

(3.34) $$P(S) = \bigcup_{0\le T\le 1} T\cdot P(\Gamma_T) = \max_{0\le T\le 1}(T\cdot P(\Gamma_T)) .$$

Näin määritellylle todennäköisyydelle ovat voimassa tavanomaiset laskusäännöt.

Yagerin formalismin pohjalta voidaan rakentaa todennäköisyys-avaruudesta $(\Omega,\mathcal{B},P(\cdot))$ lähtien sumeiden tapausten joukko tapauksiin liittyvine todennäköisyyden kaltaisine joukkofunktioineen seuraavalla menettelyllä. Olkoon $x \in \Omega$ mielivaltainen alkio, S_i sumea joukko ja f_i vastaava jäsenyysfunktio, $i=1,2,\ldots,n$. Sumeille joukoille S_i saadaan nyt kehitelmän (3.28) avulla konkreettinen muoto: $S_i = \bigcup_{0\le T\le 1} T\cdot\Gamma_T^{(i)}$. Kun jäsenyysfunktiot f_i, $i=1,2,\ldots,n$, oletetaan Borel-mitallisiksi, niin α-leikkaukset $\Gamma_\alpha^{(i)} \in \mathcal{B}, i=1,\ldots,n$ Jokaiseen joukkoon S_i liitetään nyt määritelmän (3.28) mukainen Yagerin todennäköisyys seuraavasti:

$$P(S_i) = \bigcup_{0\le T\le 1} T\cdot P(\Gamma_T^{(i)}) .$$

Olkoon nyt $\Psi = \{S_1,S_2,\ldots,S_k,\ldots\}$, ja $\mathcal{D}$ kaikkien joukon Ψ alkioista säännöillä $\cap$ ja $\cup$ yhdistelemällä saatujen kombinaatioiden joukko sekä $P(\cdot)$ Yagerin todennäköisyys, joka ilmeisesti on olemassa jokaiselle $D\in\mathcal{D}$. Silloin on $(\Psi,\mathcal{D},P(\cdot))$ *sumea todennäköisyysavaruus.* Alkuperäinen perusjoukko Ω ei ole enää näkyvissä, mutta se on kuitenkin mukana α-leikkausten $\Gamma_\alpha^{(i)}$ kautta.

Jos $\Omega = \{x_1,x_2,\ldots,x_k,\ldots\}$, on $x_1\cup x_2\cup\ldots\cup x_k\cup\ldots = \Omega$. Kun

$\Psi = \{S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots\}$, on $S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k \cup \ldots$ määritelty seuraavasti jäsenyysfunktioiden avulla:

$$f_{S_1 \cup S_2 \cup \ldots \cup S_k \cup \ldots}(x) = \max_k f_k(x) = f_{S_{k(x)}}(x) \leq 1 .$$

Toivottuun tulokseen $f_{S_{k(x)}}(x) = 1$ ei siis yleensä päästä, ellei jokaiselle $x \in \Omega$ ole olemassa sumeaa joukkoa S_i siten, että $f_i(x)=1$. Edelleen on aina $P(\bigcup_i S_i) \leq 1$ ja toisaalta $P(\bigcap_i S_i) = 0$.

4. VAKUUTUSALAN KÄSITTEISTÖÄ SUMEIDEN JOUKKOJEN KIELELLÄ

Tässä luvussa tarkastellaan lyhyesti, esimerkin omaisesti, joitakin vakuutusalan toiminnan osa-alueita. Kappaleen 4.1 tarkoituksena on lähinnä antaa kuva siitä, miten perinteiseen joukko-oppiin sitoutunutta ajatusmallimme ja käsitteistömme suurelta osin lienevät. Tarkastelu ei pyri olemaan matemaattinen, vaan siis lähinnä jossain määrin filosofinen. Pyrkimyksenä on vain kuvata todellisuutta käyttäen sumeiden joukkojen teorian tapaa katsoa asioita - käytännössä ei käsitteistön uudella formalisoinnilla saataisi aikaiseksi luultavasti mitään uutta: mahdollisesti jonkin verran elegantimpi ja kompaktimpi teoria käytäntöä kuvaamaan. On vaikea sanoa, olisiko tällaisella totutun formalismin uusimisella todellista arvoa, saati sitten todellistä käyttöä. Kappaleessa 4.2 esitetään käytännöllinen malli sille, kuinka sumeiden joukkojen kielellä ja sumeiden joukkojen käsitteistön avulla voimme esittää konkreettisesti vakuutuselämässä esiintyvän termin "vakava vamma". Kappaleen lopussa puututaan lyhyesti myös tällaisen käsitteen hinnoittelukysymykseen.

4.1 Korvaamisen käsitteistöä sumeiden joukkojen kannalta

Olkoon Ω kaikkien tapahtumien universaali avaruus. Jokainen alkio $\omega \in \Omega$ on siis jonkinlainen tapahtuma, ottamatta kantaa siihen, mitä oikeastaan tarkoitetaan tapahtumalla. Voidaan kuitenkin ajatella, että on olemassa "alkeistapahtumia", ja lähdetään siitä, että on

olemassa tällaisten alkeistapahtumien perusjoukko Ψ. Kaikkien tapahtumien universaali joukko Ω sisältää kaikki mahdolliset äärelliset ja äärettömät yhdistelmät alkeistapahtumista eli joukon Ψ alkioista. Intuitiivisesti tällaisen tapahtuma-avaruuden määritteleminen tuntuu melko luontevalta eikä se vielä eroa millään tavoin totutuista ajatusmalleistamme. Näinollen voidaan varovasti pohtia sumean joukko-opin avulla formalismia perusjoukossa Ω.

Liitetään nyt pariin (Ψ,Ω) ensin sumea käsite "vahinko" siinä merkityksessä kuin vakuutusalalla ymmärretään vahinkoa. Jokaiseen alkioon $\psi \in \Psi$ liittyy nyt jäsenyysfunktion arvo $\mu(\psi)$, joka kertoo alkion kuulumisen asteen vahinkojen sumeaan perusjoukkoon $\mathcal{V}$. Vastaavasti, perusteorian mukaisesti, on jokaiselle joukolle eli tapahtumalle $\omega \in \Omega$ määriteltävissä jäsenyysaste joukossa $\mathcal{V}$, toisin sanoen luku $\mu(\omega) = \sup\ (\mu(\psi) | \psi \in \omega\ )$. Tämä luku siis kertoo missä määrin tapahtuma ω on vahinkotapahtuma, ja on luontevaa ajatella sen suuruudeksi alkiotapahtumien unionin jäsenyysastetta: vahinko lienee vähintäänkin niin suuri kuin suurin osavahinko, mikäli ajatellaan vahingon suuruutta tässä teoreettisena, vahingon vakavuutta kuvaavana käsitteenä. On luonnollista ajatella, että vahinkokäsite nimenomaan liittyisi joukon Ω alkioihin, sillä usein tapahtunut vahinko on osavahinkojen summa - se, miten vahinko vakuutuselämässä ymmärretään, on puolestaan usein sidoksissa vakuutukseen, vahingon kohteeseen ja vakuutusturvaan. Näinollen voidaan siis ilmaista vahinko ω äärellisenä osavahinkojen unionina:

(4.1) $$\omega = \cup \{\omega_i \mid \omega_i \in \omega\ ,\ \omega_i \in \Psi\ \}.$$

Vahingon ω vakavuus olisi siis mainittu maksimijäsenyysaste, ja toisaalta vahingon suuruus määräytyy unionilausekkeen (4.1) avulla osavahinkojen suuruuksien summana. Olkoon x_i osavahingon ω_i suuruus markkoina. Tällöin vahingon suuruus on luonnollisesti osavahinkojen suuruuksien summa, eli $x = \Sigma\, x_i$, kun ajatellaan osavahinkoina erillisiä kokonaisuuksia vahingon tyyppijaotteluun puuttumatta. Tällöin hypoteettisesti kuvitellaan jokaiselle vahingolle, olkoon se laadultaan millainen hyvänsä, jokin mittari, jonka avulla sille voidaan antaa rahallinen arvo x_i.

Edelleen on todettavissa, että vahinkoja kuvaava sumea joukko V on itse asiassa unioni erilaisista sumeista joukoista V_j, j=1,...,k, nimittäin voidaan ajatella kutakin vahinkotyyppiä omana sumeana joukkonaan. Tapahtuman ω vakavuus vahinkona saadaan näinollen maksimijäsenyysasteena joukkoihin V_j, ja sen kokonaissuuruus x olisi saatavissa konveksina kombinaationa tai muun operaation avulla joko käyttämällä jäsenyysfunktiona yhdistettyä funktiota

(4.2) $$\mu_1'(x) * \mu_2'(x) *\ldots* \mu_k'(x)$$

missä μ_j on vastaava joukon V_j jäsenyysfunktio ja * sopivasti valittu operaatio sekä μ_j' sopivasti jäsenyysfunktiota vahinkotyypin mukaan painottamalla saatu uusi jäsenyysfunktio ja kertomalla tällä kokonaismarkkamäärä, taikka luonnollisemmin hakemalla eräänlainen painotettu summa markkamäärille. Koska eri vahinkotyypit menevät luonnollisella tavalla päällekkäin, jolloin niiden unioni olisi vahinkojen yhteissummaa pienempi, voisi olla ylimitoitettua ajatella yhden vahingon eri vahinkotyyppien yhteissummaksi suoraa summaa, ja tästä syystä päädytään teoreettiseen kaavaan

(4.3) $$x_{tot} = \mu_1'(x)\cdot x_1 + \mu_2'(x)\cdot x_2 + \ldots + \mu_k'(x)\cdot x_k \ .$$

Näin on teoreettisella tasolla määritelty tapahtuma, vahinko, vahinkotyyppi, vahingon vakavuus sekä vahingon suuruus. Pohditaan seuraavaksi vahingosta syntyvää korvausmenoa.

Liitetään jokaiseen vahinkoon - tällöin voidaan sopia, että vahingoksi kutsutaan alkiota, joka kuuluu tiettyyn α-leikkaukseen, esimerkiksi alkiota, jonka vahingon vakavuus on 0,2 tai suurempi, toisin sanoen $\omega \in \Gamma_{0,2}$ - korvausmeno. Joudumme uuteen sumeaan joukkoon $\mathcal{K}$, joka on selvästi (tai jonka ainakin pitäisi olla selvästi) joukon $\mathcal{V}$ osajoukko, nimittäin korvattavien tapahtumien joukkoon. Voidaan ajatella, että pitäydytään nyt vain sovitulla tavalla vahingoksi määritellyissä alkioissa. Tapahtuman korvattavuus riippuu monista ulkoisista seikoista: siihen vaikuttavat esimerkiksi seuraavat tekijät:

- mikä vahinko
- onko vakuutusta olemassa
- onko vakuutus oikein tehty
- onko vakuutus voimassa
- onko tapahtuma vakuutusehtojen mukainen
- missä olosuhteissa vahinko tapahtui (ehdot)
- kenelle vahinko tapahtui
- miksi vahinko tapahtui (syyllisyys)
- missä vahinko tapahtui
- miten vakuutuksenottaja oli ymmärtänyt vakuutuksen sisällön vakuutusta ottaessaan.

Se, missä määrin puolestaan korvausta korvattavasta tapahtumasta saadaan, riippuu jälleen lukuisista seikoista, edellämainittujen lisäksi esimerkiksi seuraavista:

- vahingon laajuus
- vakuutusten kattavuus
- tietoisuus vakuutusturvista
- vakuutusten vakuutusmäärät (henkilövahinko, alivakuutus)
- vahingon selviäminen.

Vahingon suuruus lienee aina jossain määrin sumea käsite, ja maksettava korvausmäärä on yleensä optimiratkaisu tästä sumeasta joukosta (esim luvussa 2 käsitelty sumean joukon ydin). Lisäksi voidaan todeta intuitiivisesti, että suuruus yleensä ei ole konveksi joukko, vaan sillä saattaa olla useita tihentymispisteitä. Jonkinlaisena summana voidaan korvausmeno esittää. Lähdetään summalausekkeesta (4.3), eli

$$x_{tot} = \mu_1'(x)\cdot x_1 + \mu_2'(x)\cdot x_2 + \ldots + \mu_k'(x)\cdot x_k$$

ja jaetaan se nyt kahteen osaan ja tarkennetaan lauseketta:

$$x_{tot} = \sum_{i \text{ esinevah}} \mu_i'(x)\cdot y_i + \sum_{j \text{ henkilövah.}} \mu_j'(x)\cdot z_j ,$$

missä $y_i = \alpha_i x_i$, ja α_i kerroin joka ilmoittaa alivakuutuksen määrän, toisin sanoen α_i on minimi luvuista 1 ja vakuutusarvon suhde todelliseen arvoon. z_j puolestaan on henkilövahingon vakuutusmäärä. Tällöin $\mu_j'(x)$ on esimerkiksi jäsenyysaste invaliditeettijoukossa, toisin sanoen se antaa invaliditeettiasteen, jolla invaliditeetin vakuutusmäärä kerrotaan. Liittyviä vakuutuksia ajateltaessa olisi hyvä huomioida myös eri kanavat, joita myöten vakuutusturvaa on olemassa. Yhä suuremmassa määrin ihmisellä on vakuutusturvaa erilaisten instanssien kautta,

joita hän ei niinkään voimakkaasti etukäteen tiedosta. Tällöin on vakuutuksille annettavissa järjestys, jota vakuutettu noudattaa vakuutusturvaa käyttäessään, lähinnä tutummasta vieraampaan. Tämä vaikuttanee myös saataviin vakuutusmääriin. Esinevahingoissa kyseeseen tulisi kuvitellun alivakuuttamisen taikka puutteellisen vakuuttamisen riski, ja henkilövakuutuksessa riski siitä, ettei kaikkia oikeutettuja korvauksia osata hakea. Tämän tiedostamisen asteen esittäminen tekijänä korvausmäärää haettaessa taitaisi johtaa melko monimutkaiseen formalisointiin. Toisaalta kanavien käsittelylle on selkeä esitystapa [8].

Nähdään, että kaiken kaikkiaan joudutaan monimutkaiseen formalismiin, ja on kyseenalaista, olisiko tällaisesta pohdiskelusta käytännöllistä hyötyä. On totta, että esimerkiksi edellä käsitelty korvausmäärä on varsin sumea käsite, mutta kun lopputuloksena on johonkin korvaussummaan päädyttävä, voidaan sanoa, että sumeiden joukkojen avulla formalisointi saattaa olla varsin turhaa. Mahdollinen hyöty saattaisi löytyä sitä kautta, että voidaan käyttää yksinkertaisia funktioita kuvaamaan jäsenyyttä tai yhdistelemään erilaisia tekijöitä, ja kun lopputuloksena emme oletakaan olevan mitään kovin eksaktia, saadaan jonkinlainen ensiarvio melko helposti. Lopullisiin päätöksiin ei kuitenkaan tällainen arvio tuone lisäarvoja. Edellä esitetty spekulointi tuo ilmi myös sen, että vaikka kyse on yksinkertaisista asioista, on niiden esittäminen sumeiden joukkojen teorian avulla formaalisesti ennemminkin hämärtävää kuin selventävää. Intuitiivisesti sumeille asioille sumea formalisointi ei näinollen tuone ainakaan

lisävalaistusta, päinvastoin saattaa olla, että niiden rungoksi kaipaa formalismina täsmällistä, ei-sumeaa formulointia.

4.2. Vakavan vamman määrittely ja hinnoittelu

Tarkastellaan seuraavaksi lyhyesti käytännöllisempää asiaa: sovelletaan sumeiden joukkojen teoriaa todelliseen, melko lailla sumeaan käsitteseen "vakava vamma". Lähdetään siitä, että vamman mittari on tapaturmien määrityksessä käytetty haitta-aste, joka saa arvoja väliltä 0 - 20. Nykyisin käytetty haitta-aste on, kuten on luvussa 2 esimerkissä jo todettukin, osahaittojen asteiden summa. Käsite on selkeä, ja lähtökohtana sitä voidaan pitää hyvin käyttökelpoisena ja erinomaisen tarpeellisena. Intuitiivisesti on yhtä selkeää mikä on vakava vamma: se on invalidisoitumisen aste, jossa haitta - yleensä pysyvä haitta - on suuri. Kuitenkin on vaikeaa vetää rajaa, jonka toisella puolella vamma olisi vakava ja toisella vähemmän vakava. Mikäli lähdettäisiin esimerkiksi vakuutuksesta, joka antaa korvausta vain vakavasta vammasta, olisi välttämätöntä jokin määrittelykeino keksiä.

Lähtökohtana käytetään kahta tosiasiaa: Ensinnäkin vamma, jonka haitta-aste on 12 tai suurempi, toisin sanoen vamma, jota vastaava invaliditeetti on ainakin 60 %, on *aina* vakava. Toisin sanoen kaikki tällaiset vammat kuuluvat täysin ja yhtä tasa-arvoisesti vakavien vammojen joukkoon. Toisaalta vammat, joiden haitta-aste on 8 tai yli,katsotaan sen verran vakaviksi, että esimerkiksi lakisääteisessä tapaturmassa näiden vammojen käsittely alistetaan

tapaturmalautakuntaan. Näinollen on lähdettävä siitä, että vammat joiden haittaluokka on välillä 8 - 11 ovat jo melko vakavia. Voidaan siis todeta, että ne kuuluvat jonkin verran vakavien vammojen sumeaan joukkoon. Lisäksi on selvää, että vamma kuuluu tähän joukkoon sitä selvemmin mitä suurempi se on, toisin sanoen mitä lähempänä haitta-aste on lukua 12. Eräs ratkaisumalli on tällöin lineaarinen: astetaan jäsenyysfunktioksi vakavien vammojen joukolle seuraava:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ kun } x \leq 39 \\ \dfrac{x - 40}{20} & , \text{ kun } 40 \leq x \leq 60 \\ 1 & , \text{ kun } x \geq 61 \end{cases} ,$$

missä x on invaliditeettiprosentti.

Koska käytännössä invaliditeettiprosenttien sijaan korvaus tapahtuu haitta-asteen mukaan eli viiden prosentin välein , voidaan tämä jäsenyysfunktio esittää taulukkomuodossa seuraavanlaisena:

haitta-aste	jäsenyysaste
0 - 7	0
8	20 %
9	40 %
10	60 %
11	80 %
12 - 20	100 %

Tämä karkea esitys jäsenyysfunktiolle invaliditeetin taikka haitta-asteen funktiona vammalle antaa yksinkertaisuudestaan huolimatta riittävän selkeän mallin sille, mikä on vakava vamma: Esimerkiksi vamma, jonka haitta-aste on 10 on hyvin vakava, sen jäsenyysaste vakavien vammojen joukossa on 60% . Tällainen esitys

on tarpeellinen kuvittelemassamme vakuutustuotteessa: olisi kohtuutonta, että vaikkapa kyseinen haitta-asteen 10 invalidisoituminen ei lainkaan kuuluisi korvattavien asioiden joukkoon, kun taas haitta-aste 12 kuuluisi siihen täysin. Vastaava korvaus voidaan nyt määritellä taulukon mukaisesti. Olkoon vakuutusmäärä esimerkiksi 500.000 mk. Tällöin korvataan seuraavasti:

haitta-aste	korvaussumma
0 - 7	0 mk
8	100.000 mk
9	200.000 mk
10	300.000 mk
11	400.000 mk
12 - 20	500.000 mk .

Todetaan, että jyrkkiä portaita ei esiinny (tosin näinkin haittaluokkien väliset erot ovat huomattavia), ja korvausmäärä on jäsenyysasteen mukainen.

Tämäntyyppisen vakuutuksen hinnoittelu voitaisiin johtaa perinteisen invaliditeettikorvausaineiston pohjalta.

Lopputulokseksi saattaisi kelvata esimerkiksi korvausmenon suhde perinteisen invaliditeettivakuutuksen korvausmenoon. Käytettävissä tulee olla paitsi korvauksen suuruus, myös haitta-aste tai invaliditeettiprosentti sekä vakuutusmäärä, joka voidaan saada edellämainittujen funktiona. Kerrotaan vakuutusmäärät haitta-asteiden osoittamilla jäsenyysfunktion arvoilla ja tutkitaan

näin saadun teoreettisen korvausmenon suhdetta todelliseen. On huomattava, että korvaukset tulisi normeerata ja selvityskerrointen käyttö huomioida, erityisesti olisi pohdittava sitä, että suurempien haitta-asteiden yhteydessä selvityskertoimen arvon tulisi ilmeisesti olla suurempi kuin perusaineistoon kokonaisuutena selvityskerrointa käytettäessä. Lisäksi on todettavissa, että invaliditeettikorvauksista valtaosa maksetaan pienistä haitta-asteista, jolloin vakuutus vakavasta vammasta saattaisi olla perusteltu siinäkin mielessä, että sen hinta saataisiin tavallisen invaliditeettivakuutukseen verrattuna huomattavan pieneksi suurillakin vakuutusmäärillä.

Voidaan ajatella, että määritellyn tyyppiselle vakuutukselle ainoa hyvä ja selkeä lähestymistapa, tai ainakin eräs parhaista lähestymistavoista, on juuri sumeiden joukkojen teoria. Kyseessä on varsin puhtaasti juuri joukkoon kuulumisen ongelma. Samoin huomataan, että ratkaisu on varsin yksinkertainen, helposti ymmärrettävä ja perusteltava. Näinollen se noudattaa sumeiden joukkojen teorian käytön perusaksiomia: teorian tulee olla lähellä ihmisen tavallista ajatustapaa, ja liian mutkikkaita funktioita ja malleja tulee välttää. Toisaalta ratkaisu lienee periaatteessa toimiva ja oikeudenmukainen.

4.3 Yhteenveto

Tässä luvussa esitettiin melko karkeasti kaksi äärilaitaa sumeiden joukkojen teorian käytössä: Kappaleessa 4.1 filosofoitiin

peruskäsitteillä, lopputuloksena melko toivottoman tuntuinen viidakko sumeita termejä sumeiden termien sisällä. Tämän kappaleen oppina lieneekin lähinnä se, että moinen teoretisointi tuonee käytäntöön vain vähän apua. Teoreettinen formalismi kyllä voidaan kehittää tällaisiin sanallisiin kysymyksiin - sen sijaan formalismin pitäminen tajuttavana ja käyttökelpoisena tuntuu jo ongelmallisemmalta. Sen sijaan kappaleessa 4.2 käsiteltiin selkeää ja yksinkertaista perusongelmaa, jolle haettiin vastaavasti selkeää ja yksinkertaista, vieläpä käyttökelpoista ratkaisua. Pysymällä perusfunktioissa ja matematiikan yksinkertaisimmalla tasolla saatiinkin kysymykselle kelvollisen näköinen ratkaisu. Syy, miksi ratkaisu näyttää kelvolliselta on se, että mallin luomiselle on vapaahkot kädet: sen tulee olla vain riittävän sujuva ja selkeä sekä oikeudenmukainen. Se, kuinka todellisesti määritellyt kuulumisen asteet vastaavat oikeaa elämää, ei ole ratkaiseva kysymys, mallin tulee olla ainoastaan "melko oikea". Tästä samasta syystä seuraavassa luvussa esitettävä toivottavan vakuutuksenottajan oneglman ratkaisu tuntuu toimivalta: viime kädessä yhtiötä ei vaadita tilille ratkaisun eksaktista oikeellisuudesta, riittää, että ratkaisu on melko oikea, ja joka tapauksessa parempi kuin jyrkkien rajojen tai karkean porrastamisen käyttäminen.

5. HINNOITTELUSTA SUMEIDEN JOUKKOJEN AVULLA

Artikkelissaan "Fuzzy Insurance" [2] Jean Lemaire esittää eräitä vakuutusalaan liityviä perusongelmia sekä niille sumeiden joukkojen teoriaan perustuvia ratkaisumalleja. Seuraavassa käydään läpi kyseisen artikkelin esittämiä mahdollisuuksia niiltä osin kuin artikkeissa pohditaan "suositeltava vakuutuksenottajan" ongelmaa ja esitetään Lemairen ehdottama "sumea" hinnoitteluratkaisu.

5.1 Toivottavan vakuutuksenottajan ongelma

5.1.1 Ongelma ja perusratkaisu

Henkivakuutuksessa on Yhdysvalloissa kova kilpailu johtanut siihen, että toivotut terveysehdot täyttävä vakuutuksenottaja saa huomattavia lisäetuja bonuksena vakuutusturvaan. Esimerkiksi tupakoimaton henkilö saa 65% lisäyksen vakuutusturviinsa, ja seuraavat tarkkaan rajatut ehdot täyttävä henkilö saa 100%:n lisäturvan:

1. vakuutuksenhakija ei ole tupakoinut yli vuoteen
2. hänen lepopulssinsa on enintään 72
3. hänen verenpaineensa on 134/80 taikka alle
4. hakijan veren seerumin kokonaiskolesteroliarvo ei ylitä lukua 200
5. hakija ei harrasta vaarallisia urheilulajeja
6. hän kuntoilee kolmesti viikossa vähintään 20 minuuttia kerralla
7. hän täyttää vaaditut pituus- ja painorajoitukset

8. hakijan lähisuvussa on ollut enintään yksi alle 60-vuotiaalle sattunut kuolemantapaus, jonka kuolinsyynä on ollut munuais- tai sydänsairaus, sydänkohtaus tai diabetes.

Voidaan todeta, että kyseessä on tarkoiksi numeroiksi muunnettu esitys lääketieteellisestä toteamuksesta, että ihmiset, jotka kuntoilevat, eivät tupakoi, joilla on matala kolesteroliarvo ja verenpaine ja jotka ovat sopivan painoisia, elävät todennäköisesti pitempään kuin muut.

Vakuuttaja vaatii tässä tapauksessa, että kaikki arvot on täytettävä, muussa tapauksessa hakija ehdottomasti ei kuulu joukkoon. Mikäli siis hänen kolesteroliarvonsa olisi 201 taikka verenpaineensa 137/80, ei hän olisikaan joukkoon kelvollinen, vaikka kaikki muut ehdot olisi toteutettu. (Todettakoon, että useimmiten ei tilanne ole se, että "melkein" ehdot täyttävä joutuisi jäämään täysin ilman etuja, vaan hänen etunsa ovat jollain tavalla pienemmät tai rajoitetummat.)

Tarkastellaan ongelman ratkaisua sumeiden joukkojen teorian avulla. Olkoon X vakuutuksenottajaehdokkaiden joukko, jonka alkioihin x liitetään neljä erilaista ominaisuutta:

$$x = x(t_1, t_2, t_3, t_4).$$

Määritellään ominaisuudet t_1, t_2, t_3 ja t_4 siten, että t_1 kertoo veren seerumin kokonaiskolesteroliarvon, t_2 kertoo verenpaineen, t_3 todellisen painon suhteen ihannepainoon pituuden ja rakenteen funktiona, ja lopuksi t_4 kertoo päivässä tupakoitujen savukkeiden lukumäärän. Olkoot nyt joukot T_1, T_2, T_3, ja T_4 vastaavat sumeat joukot: ne siis kertovat siitä, missä määrin vakuutuksenottajaehdokas kuuluu kunkin ominaisuuden puolesta

hyvien vakuutuksenhakijoiden joukkoon. Vastaavia jäsenyysfunktioita merkitään seuraavassa f_1, f_2, f_3 ja f_4. Tarkastellaan ensin kolesteroliarvoa. Alkuperäistä rajausta alle 200:n hyväksyttäviin kolesterolilukemiin voidaan lieventää seuraavasti siten, että yli 240:n lukemat ovat ehdottomasti hylättäviä ja alle 200:n ehdottomasti hyväksyttäviä:

$$f_1(x, t_1) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t_1 \leq 200 \\ 1 - 2\left(\frac{t_1 - 200}{40}\right)^2, & \text{kun } 200 < t_1 \leq 220 \\ 2\left(\frac{240 - t_1}{40}\right)^2, & \text{kun } 220 < t_1 \leq 240 \\ 0, & \text{kun } 240 < t_1 . \end{cases}$$

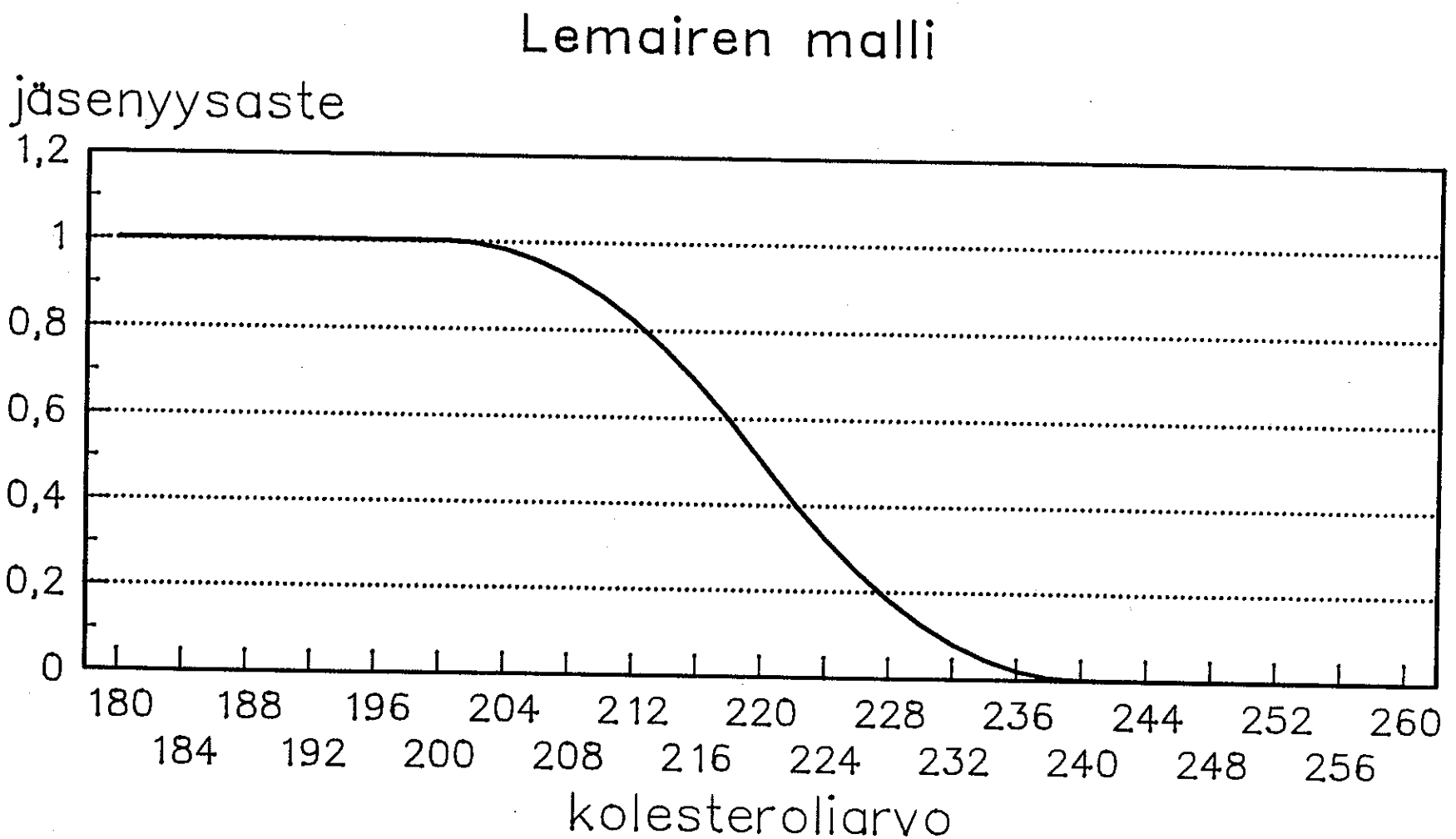
Tämän sumean joukon jäsenyysfunktion käyttäytymistä esittää kuva (5.1), jäsenyysfunktio siis vain yksinkertaisesti jatkaa hyväksyttävää aluetta vähän "laimennettuna", ja mahdollistaa näinollen "melkein" hyvien jonkinasteista huomioimista.

Samalla tyylillä määritellään hyvän verenpaineen omaavien joukkoon kuulumisen funktio f_2. Normaali systolinen verenpaine on noin 130 mmHg. Ihmiset, joiden verenpaine on yli 170 ovat yli viisi kertaa alttiimpia sepelvaltimotaudille kuin ihmiset, joilla on normaali verenpaine. Saamme samantyyppisen funktion:

$$f_2(x, t_2) = \begin{cases} 1, & \text{kun } t_2 \leq 130 \\ 1 - 2\left(\frac{t_2 - 130}{40}\right)^2, & \text{kun } 130 < t_2 \leq 150 \\ 2\left(\frac{170 - t_2}{40}\right)^2, & \text{kun } 150 < t_2 \leq 170 \\ 0, & \text{kun } 170 < t_2 . \end{cases}$$

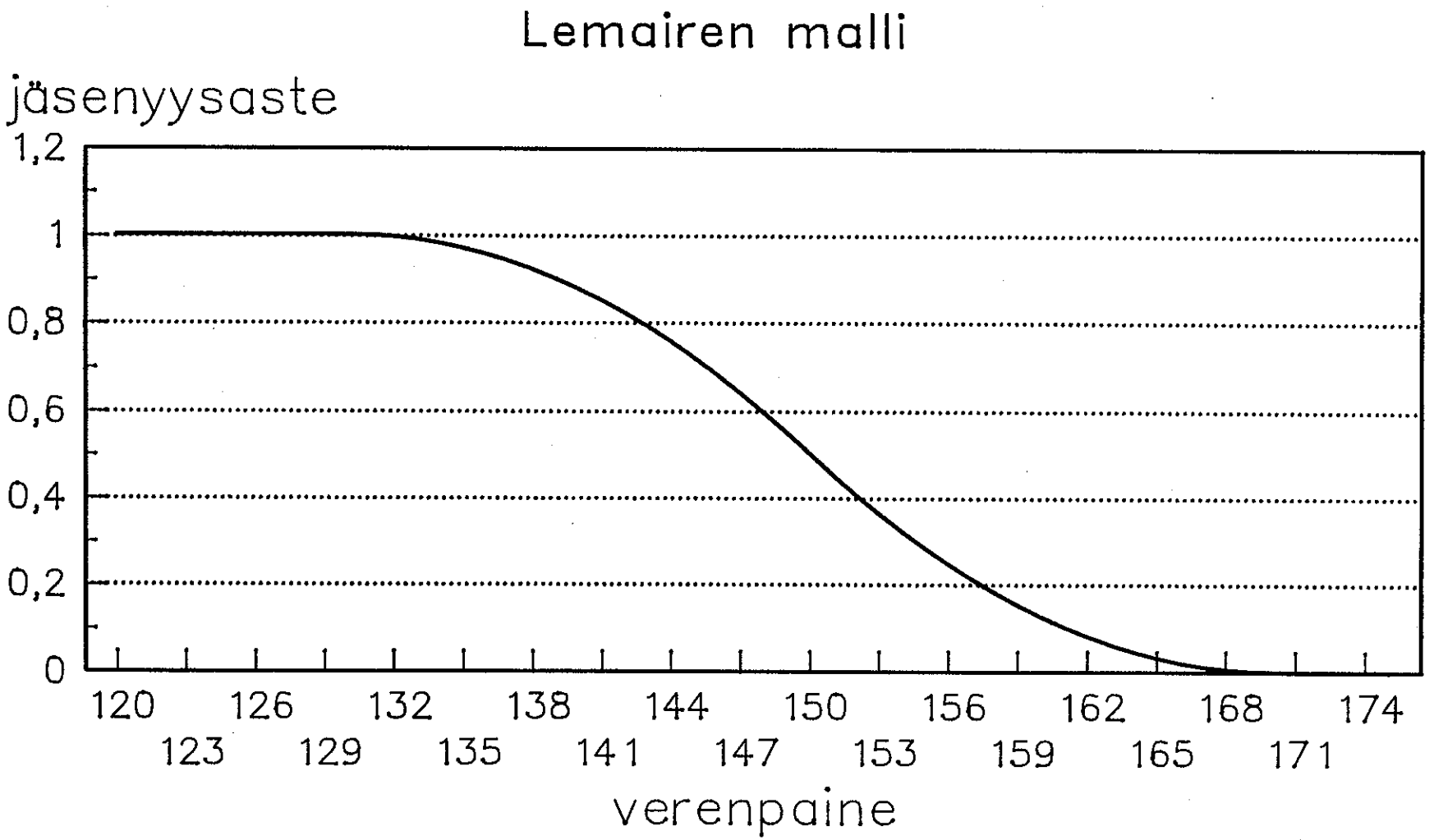
Kuva (5.2) näyttää jäsenyysfunktion f_2 edellisen jäsenyysfunktion kanssa samankaltaisen muodon. Tässäkin tapauksessa siis lähinnä

Jäsenyysfunktio kolesteroliarvoille



A.Sajo
Kuva 5.1
SHV–työ

Jäsenyysfunktio verenpaineen arvoille



A.Sajo
Kuva 5.2
SHV–työ

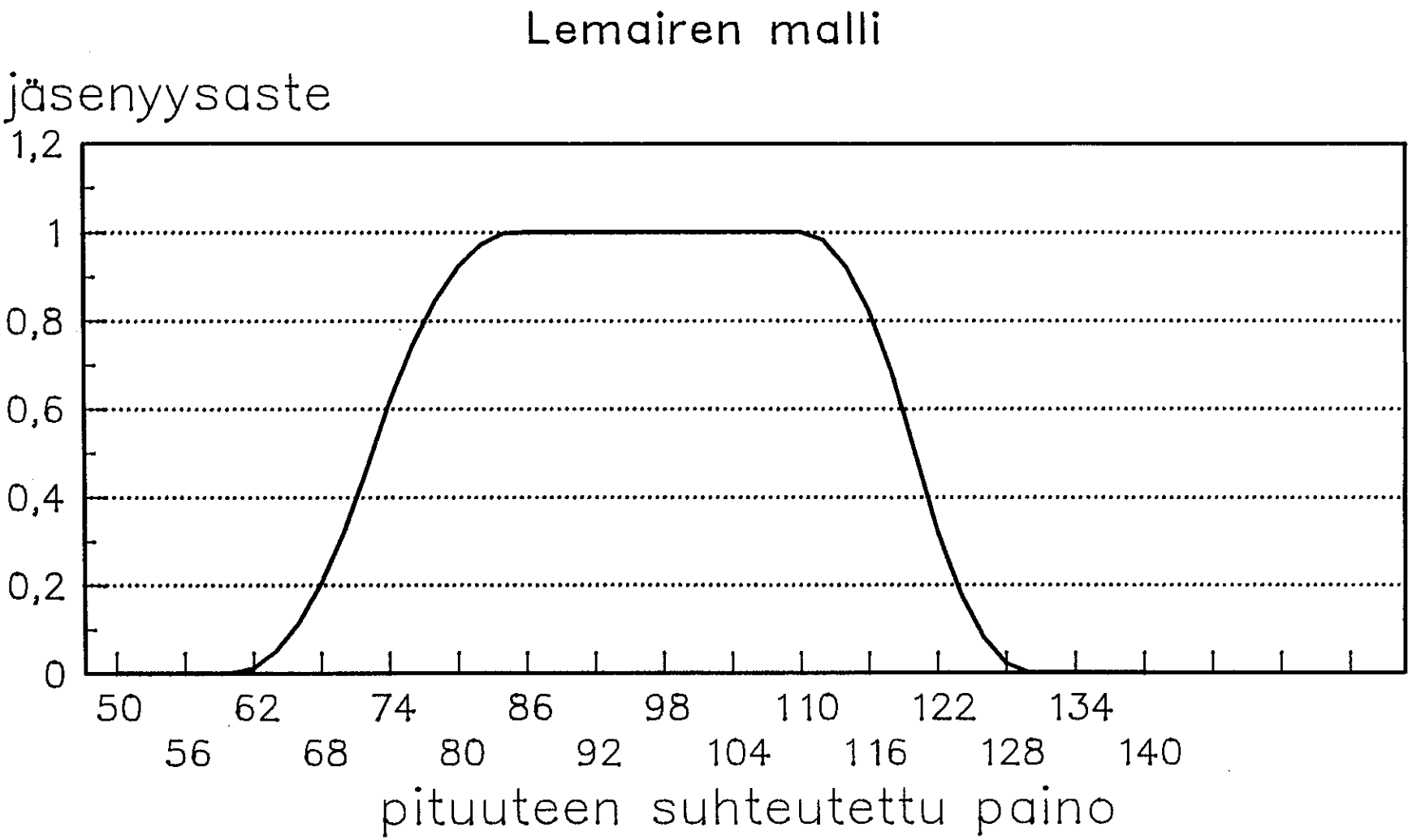
vähän loivennetaan jyrkkää rajoittamista ja huolitaan "hyviin" verenpaineisiin jonkinasteisesti mukaan myös vähän vähemmän hyviä verenpaineita arvoon 170mmHg saakka.

Yli- ja alipainoisten ihmisten kuolevuus on myös suurempi kuin normaalipainoisten ihmisten, ja näistä ylipainoisuus on terveydelle vakavampi uhka keskimäärin kuin alipainoisuus. Tämän vuoksi normaalipainoisuuden jäsenyysfunktio ei ole symmetrinen, vaan se on loivempi ihannepainoa alhaalta päin lähestyttäessä kuin ylhäältä päin. Kuva (5.3) esittä tämän jäsenyysfunktion muodon. Funktiolle f_3 annetaan seuraava määritys:

$$f_3(x, t_3) = \begin{cases} 0, & \text{kun } t_3 \le 60 \\ 2\left(\frac{t_3 - 60}{25}\right)^2, & \text{kun } 60 < t_3 \le 72{,}5 \\ 1 - 2\left(\frac{85 - t_3}{25}\right)^2, & \text{kun } 72{,}5 < t_3 \le 85 \\ 1, & \text{kun } 85 < t_3 \le 110 \\ 1 - 2\left(\frac{t_3 - 110}{20}\right)^2, & \text{kun } 110 < t_3 \le 120 \\ 2\left(\frac{130 - t_3}{20}\right)^2, & \text{kun } 120 < t_3 \le 130 \\ 0, & \text{kun } 130 < t_3 . \end{cases}$$

Tupakoinnissa ei katsota olevan mitään lieventäviä asianhaaroja: vähäinenkin tupakointi lisää syövän ja sydän- ja verisuonitautien riskiä. Näinollen tupakoiva henkilö ei ole koskaan "toivottava" vakuutuksenhakija ja tällöin joukko T_4 on itse asiassa terävä joukko jonka karakteristinen funktio f_4 on

Jäsenyysfunktio ali– ja ylipainoisuudelle



A.Sajo
Kuva 5.3
SHV–työ

$$f_4 = \begin{cases} 1, & \text{kun henkilö ei tupakoi} \\ 0, & \text{kun henkilö tupakoi} \end{cases} .$$

Määritelmät funktioille f_1, f_2, f_3 ja f_4 ovat jokseenkin teennäisiä ja niiden muoto on vailla selkeää todellisuuteen pohjautuvaa perustelua. Oleellista kuitenkin on, että joka tapauksessa niiden antama lopputulos on kuitenkin *paremmin* todellisuutta kuvaava kuin porrasfunktion, pahimmassa tapauksessa terävän joukon karakteristisen funktion, joka saa vain arvot 0 tai 1.

Tarkastellaan seuraavaksi eri vaihtoehtoja yhdistää edellämainitut neljä eri jäsenyysfunktiota.
Tuntuisi luonnolliselta, että sumea joukko, joka täyttäisi kaikki edellämainitut ehdot olisi, laajennuksena tavallisten joukkojen tapauksesta, neljän eri joukon leikkaus

$$T = T_1 \cap T_2 \cap T_3 \cap T_4 .$$

Tällöin saadaan jäsenyysfunktioksi leikkauksen määrittelyn (luku 2) mukaisesti

$$f(x) = \min \left[f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x),\ f_4(x) \right],\ x \in X.$$

Näinollen henkilön kokonaishyvyyden määrittelee täysin pienin kuulumisaste joukkoihin T_1, T_2, T_3 tai T_4 . Toisaalta tällainen määrittely onkin luonnollista: vähäisin kuulumisaste on melko hyvä mitta yleiselle kuulumiselle leikkaukseen. Kuitenkin toisaalta voidaan ajatella, ettei ole sama asia eikä hyvyys leikkausjoukon kannalta samanlainen, jos vaikkapa jäsenyysfunktioiden f_1 ja f_2 arvot ovat molemmilla 0,5, tai jos toisen arvo on 0,5 ja toisen 1. Lisäksi voidaan esittää kysymys siitä, eikö tilanne ole huonompi, mikäli f_1 ja f_2 ovat molemmat

arvoltaan 0,55 kuin jos on $f_1=0,5$ ja $f_2=1$. Tällainen tulkinta tuntuisi luonnolliselta. Tarkastellaan seuraavassa muita tapoja tulkita kuulumisen astetta joukkoon T. Näiden muiden tapojen käyttäminen tai tutkiminen on sumeiden joukkojen teorian perusteemojen kanssa lievässä ristiriidassa, toisaalta jo Zadeh perustusartikkelissaan esitti joukoille monia muitakin yhdistelytapoja kuin leikkauksen, ja nyt voidaan tulkita, että joukon T määrittelyä muunnetaan paremmin tarkoitukseen sopivaksi leikkauksen sijasta. Jotta luvussa 2 esitettyn leikkauksen jäsenyysfunktion määritelmän kanssa ei jouduttaisi missään vaiheessa ristiriitaan, merkitään jatkossa pohdittavia funktioita kirjaimilla g_i, eikä väitetä, että esimerkiksi merkintä $g_{A\cap B}$ olisi välttämättä sama kuin $f_{A\cap B}$, leikkauksen $A\cap B$ jäsenyysfunktio, vaan vain toinen leikkaukseen liittyvä funktio. Huomattakoon kuitenkin, että Lemaire esittää variaatioiden 1 - 4 funktiot vaihtoehtoisina jäsenyysfunktioina leikkausoperaatiolle.

5.1.2 Ratkaisuvariaatioita

Lähdetään siitä, että edellisessä kohdassa esitetty perusratkaisu on liian joustamaton. Haluamme ensin, että käyttämällämme yhdistetyllä jäsenyysfunktiolla (ja siis saatavalla sumealla joukolla) on muun muassa seuraavat ominaisuudet:

1. Kumuloituvuus: Kaksi rajoittavaa tekijää ovat yhteisvaikutukseltaan huonommat kuin yksi rajoittava tekijä, toisin sanoen

$$g_{A\cap B}(x) < \min\left[f_A(x),\ f_B(x) \right],\ x\in X,$$

mikäli $f_A(x) < 1$ ja $f_B(x) < 1$.

2. <u>Riippuvuus:</u> Saattaa olla, että funktion $g_{A \cap B}$ arvo riippuu paitsi erikseen funktioiden f_A ja f_B arvoista myöskin niiden keskinäisestä suhteesta. Toisin sanoen mikäli on $f_A(x) < f_B(x) < 1$ saatettaisiin ajatella, että myös f_A olisi arvoltaan huonompi kuin se olisi mikäli f_B olisi 1 .

3. <u>Kompensointi:</u> Jos $f_A(x) < 1$ ja $f_B(x) < 1$, voidaan arvon f_A laskua kompensoida arvon f_B nousulla . Toisin sanoen funktion $g_{A \cap B}$ arvoon voidaan vaikuttaa arvon f_A laskiessa arvoa f_B nostamalla.

<u>Variaatio 1:</u> Algebrallinen tulo (Määritelmä 2.5).

Funktiolle $g_{A \cdot B}$ saadaan arvo tulosta

$$g_{A \cdot B}(x) = f_A(x)\ f_B(x),\ x \in X.$$

Laajennettuna edellämainittuihin neljään jäsenyysfunktioon saadaan siis niiden yhditetylle funktiolle g arvoksi

$$g_{T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4}(x) = f_1(x)\ f_2(x)\ f_3(x)\ f_4(x)\ ,\ x \in X.$$

Olkoot nyt vakuutuksenhakijan tiedot $x = x(210,145,112,0)$.

Tällöin saadaan

$$g_{T_1 \cdot T_2 \cdot T_3 \cdot T_4}(\ x(\ 210,145,112,0\ )\ )$$
$$= 0{,}875 \cdot 0{,}71875 \cdot 0{,}98 \cdot 1 = 0{,}6163\ .$$

Tässä esimerkkitapauksessa paino on melko lailla kohdallaan, ja kolesteroliarvokin aika hyvä, mutta molemmat nämä tekijät lisäävät vähän huonomman verenpaineen vaikutuksta. Leikkauksen jäsenyysfunktiohan antaa jäsenyyden asteeksi selvästi huonoimman tekijän arvon, eli jäsenyysasteen 0,71875, joten näinollen algebrallinen tulo ominaisuuden 1 mukaisesti on ankarampi

arvostuksessaan.

Variaatio 2: Rajoitettu erotus.

Määritellään joukkojen A ja B *rajoitettu erotus* $A \ominus B$ seuraavasti:

$$f_{A \ominus B}(x) = \max\left[\, 0,\ f_A(x) + f_B(x) - 1 \,\right],\ x \in X.$$

Laajennetaan määritelmä koskemaan useaa sumeaa joukkoa asettamalla

$$A \ominus B \ominus C \ominus D = ((\, A \ominus B \,) \ominus C \,) \ominus D\ .$$

Tällä määrittelytavalla saadaan funktio g

$$g_{T_1 \ominus T_2 \ominus T_3 \ominus T_4}(x) =$$

$$\max\left[\, 0,\ f_1(x) + f_2(x) - 1 + f_3(x) - 1 + f_4(x) - 1 \,\right] =$$

$$\max\left[\, 0,\ f_1(x) + f_2(x) + f_3(x) + f_4(x) - 3 \,\right]\ .$$

Variaation 1 esimerkkitapauksessa saadaan nyt

$$g_{T_1 \ominus T_2 \ominus T_3 \ominus T_4}(x(\ 210,145,112,0\ )) =$$

$$\max\left[\, 0,\ \ 0{,}875 + 0{,}71875 + 0{,}98 + 1 - 3 \,\right] = 0{,}57375.$$

Intuitiivisesti rajoitettu erotus on melko ankara tapa arvostella jäsenyyttä yhdistettyyn joukkoon - toisaalta ominaisuus 3 on kyllä voimassa koska jäsenyysasteita summataan, näinollen huono ominaisuus voidaan muiden ominaisuuksien avulla saada kompensoitua. Ominaisuus 1 on myös voimassa, sillä käytännössähän ensimmäisen funktion jäsenyysasteen arvoon lisätään toisen joukon jäsenyysasteen arvo ja vähennetään yksi, näinollen jäsenyys huononee sitä enemmän, mitä pienempi jäsenyysaste toiseen joukkoon on. Ominaisuutta 2 eli riippuvuutta ei tämä variaatio kuitenkaan toteuta.

Variaatio 3. Hamacher-operaattori.

Hamacher-operaattori H määritellään kahdelle sumealle joukolle A

ja B seuraavasti:

$$g_H^p(x) = \frac{f_A(x) \cdot f_B(x)}{p + (1-p) \cdot (f_A(x) + f_B(x) - f_A(x) \cdot f_B(x))}$$

missä $0 \le p \le 1$.

Mikäli p=1, kyseessä on algebrallinen tulo. Kun p<1, on nimittäjä myöskin pienempi kuin 1 ja tällöin aina siis $g_H^p(x) > g_{A \cdot B}(x)$. Näinollen siis Hamacher-operaattori ei ole yhtä rajoittava ja ankara kuin tulo-operaattori, se vähentää samanaikaisten rajoitusten vaikutusta sitä enemmän mitä vakavampia rajoitukset ovat. Mitä pienempi arvo parametrilla p on, sitä enemmän operaattori lieventää samanaikaisten rajoitusten vaikutusta. Näinollen tämä operaattori on hyödyllinen, jos esimerkiksi katsotaan, että korkean kolesteroliarvon ja verenpaineen yhteisvaikutus on pienempi kuin algebrallinen tulo antaisi. Valitaan p=0,5 ja lasketaan edellisten variaatioiden esimerkin funktion arvo tälle operaattorille:

$$g_H^p(x(210,145)) =$$

$$= \frac{0,875 \cdot 0,71875}{0,5 + (1-0,5)(0,875 + 0,71875 - 0,875 \cdot 0,71875)} = 0,6402.$$

Kaikille neljälle kriteerille saamme arvoksi

$$g_H^p(x(210,145,112,0)) =$$

$$= \frac{0,6402 \cdot 0,98}{0,5 + (1-0,5)(0,6402 + 0,98 - 0,6402 \cdot 0,98)} = 0,6296 .$$

Hamacher-operaattori toteuttaa ominaisuudet 1-3 . Huomataan, että sen arvo on algebrallisen tulon ja leikkausoperaation eli minimin välillä.

Variaatio 4. Yagerin operaattori.

Vastaavasti kuin Hamacher-operaattorissa, on Yagerin operaattorissa myös parametri p, nyt $p \geq 1$, joka säätelee eri funktioiden samanaikaista vaikutusta. Yagerin operaattori on muodoltaan seuraavanlainen:

$$f_Y^p(x) = 1 - \min\left[1, \left[((1-f_A(x))^p + (1-f_B(x)^p)) \right]^{1/p} \right].$$

Tämä operaattori supistuu rajoitetuksi erotukseksi mikäli p=1. Kun $p \to \infty$, Yagerin operaattori lähenee leikkausoperaattoria, minimiä. Yagerin operaattorin määrittelemä f_Y^p on p:n suhteen kasvava funktio. Näinollen kaikki rajoitetun erotuksen ja leikkauksen jäsenyysfunktion väliset tilanteet pystytään esittämään sen avulla p:n arvoa säätelemällä sen mukaan kuinka vahvasti halutaan samanaikaisen vaikutuksen eri sumeiden joukkojen suhteen vaikuttavan funktion arvoon. Valitaan edellä käsitellyssä esimerkissä Yagerin funktion parametriksi p=2, ja saadaan

$$f_Y^p(x(\ 210,145,112,0\ )) =$$

$$= 1 - \min\left[1, \left[((1-0,875)^2 + (1-0,71875)^2 + (1-0,98)^2 \right]^{1/2} \right] =$$

$$0,69157\ .$$

Tämä operaattori toteuttaa myös kaikki kolme haluttua ominaisuutta lukuunottamatta tapausta $p = \infty$, jolloin kyseessä oli tavallinen minimifunktio.

Huomataan siis, että on varsin monia keinoja luoda uusia sumeita joukkoja vanhojen joukkojen yhdistelminä funktioita määrittelemällä. Vielä olisi löydettävä joitakin perusteita sille, minkä laskutavan ja minkä jäsenyysfunktion, (toisin sanoen minkä sumean joukon) katsoo tarkasteltavaan tilanteeseen sopivimmaksi. seuraavassa luvussa käydään läpi lyhyesti luvussa 2 esitetyn

teorian pohjalta funktion valinnan ongelmatiikkaa.

5.1.3 Funktion valinta

Luvussa 2 (Määritelmä 2.9) määriteltiin joukko Γ_α, niin sanottu *α-leikkaus,* siten, että se oli kaikkien niiden alkioiden $x \in X$ joukko, joiden jäsenyysaste kyseessä olevassa sumeassa joukossa on α tai suurempi. Käytännössä siis voitaisiin nyt määritellä jokin α-leikkaus, jonka jäsenet (huom.: α-leikkaus on terävä joukko!) olisivat haluttuja toivottuja vakuutuksenottajia. Sumeiden joukkojen leikkauksen jäsenyysfunktion määrittelyn kanssa analoginen lähestymistapa olisi se, että kaikkien sumeiden joukkojen suhteen on tiettyjen α-leikkausten jäsenyys saavutettava, esimerkiksi $x \in \Gamma^{(1)}_{0,75}$, $\Gamma^{(2)}_{0,75}$, $\Gamma^{(3)}_{0,75}$ ja $\Gamma^{(4)}_{0,75}$ missä $\Gamma^{(1)}_{0,75}$ on joukon T_1 0,75-leikkaus. Edellä esitetyt variaatiot puolestaan vastaavat sitä lähestymistapaa, jossa tarkastellaan yhdistelmäjoukon α-leikkausta Γ^T_α. Sen, mitä yhdistelyfunktiota päädytään käyttämään, pitäisi johtua ennenkaikkea funktion lääketieteellisestä sopivuudesta tarkoitukseen.

Edellä variaatioita tarkasteltaessa lähdettiin siitä, että kaikki sumeat ominaisuudet $T_1, \ldots, T_4$ ovat tasa-arvoisia. Usein on tilanne sellainen, että jonkin ominaisuuden vaikutusta halutaan korostaa ja jonkun toisen lieventää. Käydään seuraavassa läpi eräitä keinoja, joilla haetaan eri funktioiden todellista vaikutusta lopulliseen jäsenyysasteeseen. Ensin pohditaan keinoja, joilla vaikutetaan osajäsenyysfunktioiden arvoon ja sitten keinoja, joilla niitä yhdistellään. Funktioiden käsittely, jota

seuraavassa esitetään, ei ole ristiriidassa sumeiden joukkojen teorian kanssa: saatavat funktiot ovat yhtälailla jäsenyysfunktioita.

1. Konsentraatio. Sumea joukko *konsentroidaan* eli tiivistetään siten, että kaikkien niiden alkioiden osalta, jotka vain osittain kuuluvat joukkoon, ts. $0 < f_A < 1$, jäsenyysastetta pienennetään. Mitä vähemmän alkio joukkoon kuuluu, sitä enemmän jäsenyysastetta pienennetään. Sumean joukon A konsentraatio Con(A) määritellään seuraavasti:

$$f_{Con(A)}(x) = f_A^{\alpha}(x), \quad \alpha > 1.$$

2. Dilataatio. Vastaavasti sumean joukon *dilataatio* Dil(A) on sumean joukon lievennys siten, että jäsenyysastetta nostetaan sitä enemmän, mitä suurempi alkuperäinen jäsenyysaste on, eli

$$f_{Dil(A)}(x) = f_A^{\alpha}(x), \quad \alpha < 1.$$

3. Tihennys. Sumean joukon *tihennys* Int(A) lisää kaikkien niiden alkioiden jäsenyysastetta, joiden alkuperäinen jäsenyysaste on suurempi kuin 0,5, ja vähentää muiden alkioiden jäsenyysastetta. Määritellään Int(A) kaavasta

$$f_{Int(A)}(x) = \begin{cases} 2\, f_A^2\,(x), & 0 < f_A(x) \le 0{,}5 \\ 1 - 2\,(1 - f_A(x))^2, & 0{,}5 < f_A(x) \le 1\,. \end{cases}$$

4. Sumeutus. *Sumeutus* on tihennyksen vastakohta. Haluttaessa lieventää sumean joukon sumeita rajoja voidaan toimia esimerkiksi määrittelemällä joukko Fuz(A) päinvastaisesti:

$$f_{Fuz(A)} = \begin{cases} 1 - 2\,(1 - f_A(x))^2, & 0 < f_A(x) \le 0{,}5 \\ 2^2 f_A\,(x), & 0{,}5 < f_A(x) \le 1\,. \end{cases}$$

Konsentraatio ja dilataatio voidaan ymmärtää tekijän painotuksen arviointina: konsentrointi voisi vastata käsitettä "hyvin" tai

"melko lailla" ja dilatointi taas käsitettä "jonkin verran" tai "enemmän tai vähemmän". Kun käytetään useita erilaisia arviointiperusteita, voidaan merkittävämpiä tekijöitä konsentroida ja näin kasvattaa niiden merkitystä ja vähemmän merkittävien tekijöiden vaikutusta vastaavasti voidaan lieventää dilatoinnilla. Tällaisten operaatioiden käyttö on merkittävä sumeiden joukkojen teorian käytettävyyden lisääjä: kukin sumea joukko ja siihen kuulumisen funktio voidaan määrätä erikseen pohtimatta funktiota määrättäessä kuuluvuuden *merkitystä käyttötarkoituksen* kannalta. Käyttötarkoitus sitten erikseen määrää kuinka eri komponentteja painotetaan, esimerkiksi lääketieteelliset syyt saattavat aiheuttaa sen, että jonkin sumean joukon todellinen painoarvo on aivan pieni, jonkin toisen taas ratkaiseva.

Käyttämällä painotettuja jäsenyysfunktioita edellä esitettyjen variaatioiden funktioiden lausekkeissa saadaan uusia, todenmukaisempia vaihtoehtoje yhdistelmän jäsenyysfunktiolle. Toisaalta eri jäsenyysfunktioiden painotuksia voidaan muunnella käyttämällä konveksia kombinaatiota (Määritelmä 2.7). Käytettäessä konveksia kombinaatiota saadaan funktion g yleinen muoto lausekkeesta

$$g_\Lambda(x) = \lambda(x)\cdot f_\Lambda(x) + (1 - \lambda(x)\cdot f_\Lambda(x)),$$

missä λ on konveksin kombinaation määräävä sumean joukon jäsenyysfunktio. Voimme siis esittää pohtimallemme sovellutukselle vielä yhden funktion

$$g_\Lambda(x) = \lambda_1(x)\cdot f_1^*(x) + \lambda_2(x)\cdot f_2^*(x) + \lambda_3(x)\cdot f_3^*(x) + \lambda_4(x)\cdot f_4^*(x),$$

jossa $\lambda_1(x) + \lambda_2(x) + \lambda_3(x) + \lambda_4(x) \le 1$, ja f_i^* on funktiosta f_i konsentroimalla taikka dilatoimalla saatu uusi jäsenyysfunktio. Huomattakoon, että konveksi kombinaatio antaa sumean joukon, joka

voidaan ymmärtää kombinoitavien sumeiden joukkojen eräänlaiseksi sumeaksi painotetuksi keskiarvoksi. Näinollen konveksi kombinaatio antaa yleensä vähän suurempia jäsenyysasteita kuin leikkaus tai muut edellä käsitellyt vaihtoehdot. Sen voidaan siis ymmärtää kuvaavan jonkinlaista keskimääräistä jäsenyysastetta halutulla tavalla painotettuna.

Käytettävissä on siis kolme eri keinoa muokata lopullista jäsenyysfunktiota:

1. Jäsenyysfunktioiden valinta perusjoukoille
2. Jäsenyysfunktioiden painottaminen
3. Jäsenyysfunktioiden yhdistäminen .

Oletetaan nyt esimerkkitapauksessamme, että kokonaiskolesteroliarvo on parempi sydänongelmien ennustaja kuin verenpaine. Lisätään kokonaiskolesteroliarvon merkitystä ja verenpaineen merkitystä vähennetään . Näin modifioidun sumean joukon jäsenyysfunktio on siis

$$f^*(x(t_1,t_2,t_3,t_4)) = \min\left[f_1^2(x), f_2^{0,5}(x), f_3(x), f_4(x) \right] .$$

Edellä käytetylle esimerkkitapaukselle saadaan nyt jäsenyysfunktion arvoksi tähän modifioituun leikkausjoukkoon

$$f_T^*(x(\ 210,145,112,0\ )) =$$
$$= \min\left[0{,}875^2,\ 0{,}71875^{0,5},\ 0{,}98\ ,\ 1 \right] .= 0{,}7656 .$$

Mikäli tarkastellaan variaatiota 1, saadaan samalle esimerkkitapaukselle edellä esitellyillä painotuksilla arvoksi

$$f_T^*(x(\ 210,145,112,0\ )) =$$
$$= 0{,}875^2 \cdot 0{,}71875^{0,5}\ 0{,}98 \cdot 1\ .= 0{,}6361 .$$

Koska siis kolesteroliarvon suhteen jäsenyys toivottavien vakuutuksenhakijoiden joukossa on suuri, painotus suurentaa myös

kokonaisjäsenyysastetta algebrallisen tulon tapauksessa. Molempiin tapauksiin vaikuttaa lisäksi, leikkausoperaation arvoon jopa ratkaisevasti, se, että verenpaineen merkitystä vähennetään. Mikäli nyt suositeltavan vakuutuksenhakijan kriteeriksi asetetaan se, että hän kuuluu α-leikkaukseen $\Gamma^T_{0,60}$ algebrallisen tulon suhteen tai että hän kuuluu α-leikkaukseen $\Gamma^T_{0,75}$ leikkausoperaation suhteen, eli kaikkiin α-leikkauksiin $\Gamma^{(i)}_{0,75}$, i=1,2,3,4, voidaan todeta, että esimerkkitapauksemme olisi toivottava vakuutuksenhakija. Vastaavat päätelmät voidaan tehdä muilla operaatioilla.

5.2 SUMEA HINNOITTELU

5.2.1 Päätöksentekoprosessi sumeiden joukkojen avulla

Kun tarkastellaan päätöksentekoprosessia klassisen lähestymistavan kautta, ongelma koostuu yleensä joukosta vaihtoehtoja, niiden painoarvoista ja rajoituksista. Tarkastellaan nyt tuoko sumeiden joukkojen teorian soveltaminen jotain uutta selkeyttä tällaisten prosessien tueksi. Muodostetaan ensin päätöksenteko-ongelmalle muodollinen formalismi.

Olkoon X kaikkien vaihtoehtojen x joukko. Sumea *tavoite G* joukossa X on sumea joukko G, toisin sanoen tavoite G kertoo jokaiselle vaihtoehdolle $x \in X$ sen hyvyysasteen taikka jäsenyysasteen halutun lopputuloksen kannalta. Klassisesti ajatellen lopputuloksena tavoitellaan eri vaihtoehtojen järjestysvektoria, nyt sama asia halutaan ilmaista siis sumeana joukkona, järjestystä kuvaa tällöin luonnollisesti sumean joukon jäsenyysfunktio. (Itse asiassa klassinen järjestysnumerointi voidaan tietysti esittääkin

normeerauksen avulla jäsenyysfunktiona.) Vastaavasti määritellään sumea *rajoitusten* joukko C X:ssä. Näinollen saadaan sekä tavoitteet että rajoitukset sumeaksi joukoksi X:ssä, jolloin niitä voidaan käsitellä samalla tavalla ja soveltaa niihin sumeiden joukkojen teorian keinoja. Päätöstä kuvataan nyt tavoitteiden ja rajoitusten leikkauksena, jolloin tavoite ja rajoitus ovat symmetrisessä asemassa.

Oletetaan, että on olemassa rajallinen määrä vaihtoehtoja, nimittäin vaihtoehdot $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Olkoot $G_1, G_2, \ldots, G_m$ m eri tavoitetta ja $f_{G_1}, f_{G_2}, \ldots, f_{G_m}$ niiden vastaavat jäsenyysfunktiot, sekä $C_1, C_2, \ldots, C_p$ p eri rajoitusta ja $f_{C_1}, f_{C_2}, \ldots, f_{C_p}$ niiden jäsenyysfunktiot. Päätös on yhden tai useamman vaihtoehdon $x \in X$ valinta n:n vaihtoehdon joukosta siten, että rajoitukset ja tavoitteet on otettu huomioon mahdollisimman hyvin. Näinollen rajoitukset ja tavoitteet yhdistetään päätöksen saavuttamiseksi, joten luonnollisen tuntuinen esitys päätökselle D olisi leikkausjoukko

$$D = \left(\bigcap_{i=1}^{m} G_i \right) \cap \left(\bigcap_{i=1}^{p} C_i \right) .$$

Tällöin päätösen D identifioiva jäsenyysfunktio olisi siis

$$f_D = \min \left[f_{G_1}(x), \ldots f_{G_m}(x), f_{C_1}(x), \ldots, f_{C_p}(x) \right].$$

Tällaisen jäsenyysfunktion luonnollinen tulkinta on lähinnä , että se kertoo missä määrin *vähintään* vaihtoehto x toteuttaa annetut tavoitteet ja on annettujen rajoitusten puitteissa. Kuten edellä käsitellyssä esimerkissä, voidaan myös tämäntyyppisissä tulkinnoissa käyttää hyväksi jäsenyysfunktioiden konsentraatiota ja dilataatiota, joiden avulla toisten tavoitteiden taikka rajoitusten merkitystä voidaan lieventää ja toisten kasvattaa.

Olkoon K kaikkien niiden vaihtoehtojen joukko, joissa f_D saavuttaa maksimiarvonsa, eli $K = \sup f_D$.Tässä tapauksessa joukkoa K kutsutaan *optimaaliseksi joukoksi,* ja kaikki vaihtoehdot, jotka kuuluvat joukkoon K ovat optimaalisia vaihtoehtoja. Päätöksentekijä yksinkertaisesti valitsee parhaan vaihtoehdon, eli vaihtoehdon, jonka kuulumisenaste D:ssä on suurin. Päätöksentekoprosessi on oleellisilta osin maksimointiteoriaa, samalla tavalla kuin on laita optimointiteoriassa ja peliteoriassa. Jokaiselle vaihtoehdolle lasketaan pienin mahdollinen jäsenyysaste. Sen jälkeen kaikkien tällaisten vaihtoehtojen maksimiaste D:ssä valitaan.

5.2.2 Sumean luvun käsite

Sumea luku on sumea joukko, jonka korkeimmat jäsenyysasteet ovat klusteroituneet annetun reaaliluvun x_0 ympärille. Tämä reaaliluku on tällöin sumean joukon Apulauseessa 2.1 määritelty *tihentymispiste.* Sumea luku on siis sumea joukko, jonka jäsenyysfunktio on minkä muotoinen tahansa, edellyttäen että on aidosti kasvava jollain lukuvälillä ennen lukua x_0 ja aidosti vähenevä jollain lukuvälillä, kun $x > x_0$, sekä kasvava näitä välejä pienemmillä ja vähenevä suuremmilla arvoilla ja mahdollisesti vakio tihentymispisteen ympärillä. Sumea luku voidaan arvoltaan nimetä vakio-osan keskipisteeksi.Voitaisiin esimerkiksi ajatella, että jäsenyysfunktio olisi jakautunut tihentymispisteensä ympärille normaalijakautuman mukaisesti. (On kuitenkin oltava sotkematta tätä funktiota tiheysfunktioon.) Yleisesti voidaan siis määritellä sumea luku sellaiseksi sumeaksi joukoksi reaaliavaruudessa, että sen jäsenyysfunktio f_n toteuttaa

seuraavat vaatimukset:

(1) f_n on jatkuva kuvaus $R \to [\ 0,1\ ]$.

(2) $f_n(x)$ kasvava, kun $x \in (\ -\infty\ ,a_1]$

(3) f_n on aidosti kasvava välillä $[\ a_1,a_2\ ]$

(4) $f_n(x) =$ vakio $\forall x \in [\ a_2,a_3\ ]$

(5) f_n on aidosti vähenevä välillä $[\ a_3,a_4\ ]$

(6) $f_n(x)$ on vähenevä, kun $x \in [\ a_4,\ \infty\ )$,

missä $-\infty \le a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4 \le \infty$. Nähdään, että mikäli $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$ sekä $f_n(a_2) = 1$, on kyseessä tavallinen reaaliluku.

Seuraavassa oletetaan yksinkertaisuuden vuoksi, että jäsenyysfunktio on kummallakin puolella tätä reaalilukua enintään lineaarinen.Jatkossa esitettävät määritelmät lähtevät siitä, että sumea luku on seuraavan, paljon edellistä rajoitetumman määrittelyn mukainen. Määritellään sumea luku A siten, että sen jäsenyysfunktio $n = n(a_1,a_2,a_3,a_4)$ toteuttaa seuraavat ehdot:

(1) n on jatkuva kuvaus $R \to [\ 0,1\ ]$.

(2) $n(x) = 0 \quad \forall x \in (\ -\infty\ ,a_1]$

(3) n on aidosti kasvava välillä $[\ a_1,a_2\ ]$

(4) $n(x) = 1\ \forall x \in [\ a_2,a_3\ ]$

(5) n on aidosti vähenevä välillä $[\ a_3,a_4\ ]$

(6) $n(x) = 0 \quad \forall x \in [\ a_4,\ \infty\ )$,

missä $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$. Merkitään funktion n kasvavaa osaa (3) n1 ja vähenevää osaa (5) n2. Vastaavasti, mikäli funktiota on merkitty aiemmin käytetyllä tavalla f_A, merkitään sen näitä osia analogisesti f_{A1}ja f_{A2}. Sumeaa lukua sanotaan *positiiviseksi*, mikäli $a_1 > 0$ ja *negatiiviseksi*, mikäli $a_4 < 0$. Määritellään vielä

reaaliakselilla sumeat summa- ja tulo-operaatiot $\oplus$ ja $\odot$. Olkoot a ja b sumeita lukuja ja $c = a \oplus b$. Sumea luku c määräytyy jäsenyysfunktionsa perusteella seuraavasti:

$$f_c(z) = \max_{x+y=z} \min [f_a(x), f_b(y)] , \quad x,y,z \in R .$$

Vastaavasti määritellään sumea tulo $\odot$ ja sumea luku $d = a \odot b$:

$$f_d(z) = \max_{xy=z} \min [f_a(x), f_b(y)] , \quad x,y,z \in R .$$

Mikäli sumeassa summauksessa toinen luvuista on terävä luku ja vain toinen on sumea, antaa tällainen sumea summausoperaatio summalle samanmuotoisen jäsenyysfunktion, mutta se on siirtynyt terävän luvun osoittaman arvon verran reaaliakselilla sumean luvun jäsenyysfunktion alkuperäisestä kohdasta. Vastaavasti voidaan sanoa tapahtuvan tulo-operaatiossa, kun toinen tekijöistä on terävä.Kahden terävän luvun kyseessä ollessa molemmat operaatiot tuottavat saman tuloksen kuin tavallinen summa ja tulo. Luvun käänteisluvulle e voida a n myös määritellä formaalisesti edellä esitetyllä tavalla jäsenyysfunktio:

$$f_e(z) = \max_{1/x=z} \min [f_a(1), f_b(x)] , \quad x,z \in R .$$

Käytännössä tässäkin, koska 1 on terävä luku, saadaan eräänlainen siirretty jäsenyysfunktio. Terävä luku 0 on summausoperaation nolla-alkio, ja terävä luku 1 tulo-operaation ykkösalkio.

Todettakoon, että myös vastaluku voidaan määritellä: vastaluvulla on jäsenyysfunktio, joka on peilikuva neutraalialkion suhteen.

Nämä summa- ja tulo-operaatiot ovat assosiatiivisia ja kommutatiivisia, ja tulo on distributiivinen summan suhteen. Tulon n:s potenssi voidaan määritellään luonnollisella tavalla:

$$A^0 = 1 \text{ (terävä luku 1)}$$

$$A^n = A \odot A^{n-1} , \quad n=1,2,\ldots.$$

Esitetään seuraavassa kappaleessa sumeiden joukkojen teorian ja

erityisesti sumean luvun käyttömahdollisuuksia esimerkin valossa.

5.2.3. Hinnoitteluratkaisu

Lasketaan nettokertamaksu 10 vuoden pääomavakuutukselle elämisen varalta 55-vuotiaalle, kun $p = {}_{10}p_{55} = 0{,}87$. Korko i on sumea ja sen oletetaan olevan suunnilleen 6 %. Tätä sumeaa lukua kuvaa seuraava jäsenyysfunktio:

$$f_i(x) = \begin{cases} 0 , & x \le 1{,}03 \\ f_{i1}(x) = 50\,x - 51{,}5 , & 1{,}03 < x \le 1{,}05 \\ 1 , & 1{,}05 < x \le 1{,}07 \\ f_{i2}(x) = 54{,}5 - 50\,x , & 1{,}07 < x \le 1{,}09 \\ 0 , & 1{,}09 < x \end{cases} .$$

Merkitään $g_j(y) = x$, kun $f_j(x) = y$, eli siis g_j on f_j^{-1}. Edellä olevilla merkinnöillä on

$$g_{i1}(y) = 1{,}03 + 0{,}02\,y$$

sekä

$$g_{i2}(y) = 1{,}09 - 0{,}02\,y .$$

Pääoman, jonka sumea arvo on S n:n vuoden päästä, nykyarvo PV(S,n) voidaan esittää lausekkeena

$$PV(S,n) = S \odot (1 \oplus i)^{-n} .$$

Tällainen nykyarvon määritys vastaa normaalia eksaktia nykyarvolauseketta, nyt vain operaatiot ovat edellä määriteltyjä sumeita operaatioita. Huomattakoon tosin, että toisaalta yleensä $PV(S,n) \odot (1 \oplus i)^n$ ei ole S . Koska esimerkissä sekä vakuutussumma että kuolleisuus on tavallisia lukuja, on kertamaksun A sumea arvo laskettavissa lausekkeesta

$$A = 1000 \cdot 0{,}87 \cdot (1 \oplus i)^{-10} ,$$

jolloin A:n jäsenyysfunktioksi saadaan lauseke

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 , & x \le 367{,}50 \\ f_{A1}(x) \text{ tai } g_{A1}(y) , & 367{,}50 < x \le 442{,}26 \\ 1 , & 442{,}26 < x \le 534{,}10, \\ f_{A2}(x) \text{ tai } g_{A2}(y) , & 534{,}10 < x \le 647{,}36 \\ 0 , & 647{,}36 < x \end{cases}$$

missä

$$g_{A1}(y) = 870\ (1{,}09 - 0{,}02y)^{-10}$$

ja

$$g_{A2}(y) = 870\ (1{,}03 + 0{,}02y)^{-10} , \quad (0 \le y \le 1) .$$

Oletetaan seuraavaksi, että $p = {}_{10}p_{55}$ on myös sumea, ja että sen jäsenyysfunktio on

$$f_p(x) = \begin{cases} 0 , & x \le 0{,}77 \\ 10\ x - 7{,}7 , & 0{,}77 < x \le 0{,}87 \\ 9{,}7 - 10\ x , & 0{,}87 < x \le 0{,}97 \\ 0 , & 0{,}97 < x \end{cases} ,$$

sekä käänteisfunktiot $g_{p1}(y) = 0{,}77+0{,}01y$ ja $g_{p2}(y) = 0{,}97-0{,}01y$. Nyt saadaan kertamaksulle A jäsenyysfunktio seuraavanlaiseen muotoon:

$$f_A(x) = \begin{cases} 0 , & x \le 325{,}26 \\ f_{A1}(x) \text{ tai } g_{A1}(y) , & 325{,}26 < x \le 442{,}26 \\ 1 , & 442{,}26 < x \le 534{,}10, \\ f_{A2}(x) \text{ tai } g_{A2}(y) , & 534{,}10 < x \le 721{,}77 \\ 0 , & 721{,}77 < x \end{cases}$$

missä nyt

$$g_{Aj}(y) = 1000 \cdot g_{pj}(y)\ (\ 1 + g_{1,3-j}(y)\ ),\ j=1,2, \text{ eli}$$

$$g_{A1}(y) = 1000(0{,}77 + 0{,}1y)(1{,}09 - 0{,}02y)^{-10} \text{ ja}$$

$$g_{A2}(y) = 1000(0{,}77 + 0{,}1y)(1{,}09 - 0{,}02y)^{-10} .$$

Voidaan myös sumentaa kausien lukumäärä n.

Tämäntapaisella "sumentamisella" voidaan ehkä ajatella saavutettavaksi sellainen hyöty, että ei tarvitse keksiä tarkkaa oletusta esimerkiksi kuvitellulle tulevalle korkokannalle, vaan

voidaan lähteä luontevan tuntuisesta ajatuksesta, että "korko lienee suunnilleen tällaista suuruusluokkaa" ja päästään lopputulokseen "nettokertamaksu lienee puolestaan tällaista suuruusluokkaa". Teoria on tuntuvasti yksinkertaisempi kuin jos lähtisimme pohtimaan eri mahdollisten korkovaihtoehtojen todennäköisyyksiä tai peräti koron todennäköisyysjakautumaa taikka tiheysfunktiota. Toisaalta todennäköisyyslaskennan teoria antaa vahvat keinot tämän tapaisten ongelmien käsittelyyn. Kappaleen 5.1 tapaisiin ongelmiin sumeiden joukkojen teoria tuntuisi soveltuvan huomattavasti luontevammin kuin tämän esimerkin ongelmiin. Tämä johtunee siitä, että ensimmäisen ongelman perusluonne on tyypillisesti epämääräisen joukkoon sopimisen tai hyvyyden käsitteen formalisointia, kun taas tässä toisessa ongelmassa ollaan selkeästi alueella, johon todennäköisyyslaskenta tai tavallisilla luvuilla laskeminen antaa vahvoja ratkaisuja. Lisäksi voidaan ehkä kysyä, mitä arvoa on "sumealla" tuloksella tällaisissa tapauksissa: jos haluaa tietää nettonykyarvon ja saa tietää jäsenyysfunktion, ei vastauksessa ole merkitystä muuta kuin kyseessä olevan sumean luvun nimellä, sen edellä kuvatulla tihentymispisteellä taikka optimaalisella joukolla - ja tällöin olemme palanneet lähelle perinteistä käsittelytapaa ja todennäköisyyslaskentaa.

5.3. Yhteenveto

Edellä olevista esimerkeistä näemme, että sumeiden joukkojen teorian hyväksikäyttö antaa mahdollisuuden suurempaan joustavuuteen päätöksenteossa ja erityisesti sen avulla voidaan päästä luokittelun rajoista. Näinollen voidaan toivoa, että

lopputulos on tasapuolisempi ja oikeudenmukaisempi kuin käyttämällä porrastuksia taikka jyrkkiä rajoituksia perinteiden mukaisesti. Mikäli käytettävät jäsenyysfunktiot muovattaisiin simuloimaan todellisuutta mahdollisimman tarkasti, lienee toimivaan ja tehokkaaseenkin malliin mahdollista päästä sumeiden joukkojen teorian avulla. Toisaalta on muistettava, että eräs kantava ajatus tässä teoriassa on pitäytyminen mahdollisimman yksinkertaisissa ja helposti konkretisoitavissa funktioissa. Näin halutaan viimeiseen asti varjella teorian helppokäyttöisyyttä, ja pyritään välttymään siltä todennäköisyyslaskennan teorian ongelmalta, että useat ratkaisut näyttävät jäävän suljettuun muotoon, ja näinollen ratkaisun "tunteminen" ei ole käytännössä aina hyödyllistä.

Käsitellyistä esimerkeistä ensimmäinen, toivottavan vakuutuksenottajan ongelma, näyttäisi antavan yksinkertaisia jäsenyysfunktioita käyttämällä melko tehokkaan avun annettuun liian jyrkän rajauksen ongelmaan. Etuna lieneekin juuri se, että käytetty matemaattinen teoria on varsin yksinkertaista, ja silti ollaan saavutettu käyttökelpoinen apuväline hakijoiden arvioimiseksi, ja sen avulla päästään tasapuolisempaan ja oikeudenmukaiempaan käsittelyyn. Toinen esimerkki ei puolestaan vakuuttane käyttökelpoisuudellaan. Tämä johtuu lähinnä siitä, että sen antama vastaus selvään kysymykseen on epämääräinen ja sellaisenaan vailla arvoa: Ihminen tarvinnee kuitenkin arvioinnissaan tarkkoja numeroarvoja. Kuten edellisen kappaleen lopussa todettiin, todennäköisyyslaskennan ja finanssimatematiikan vahva perusteoria tuntuisi antavan riittävän ja hyvän mallin tällaisten tehtävien ratkaisemiseksi. Sumeiden joukkojen teorian