1975-05-15

-> Savelius
Kalsolko ja Räkelat
Simbergille
RS

Hyväksytty 12/3 76

Osastopäällikkö A. Aurela
Sosiaali- ja terveysministeriön
Vakuutusosasto
Bulevardi 28

00180 HELSINKI 18

Luovutan kunnioittaen tarkastettavaksi oheisen kirjoituksen "14.5.1975 T. Hirvonen: Stokastis-dynaamisen prognoosimallin ohjelmointi- ja laskentatyö" mahdollista aktuaaritutkinnon riskiteorian harjoitustyöksi hyväksymistä silmälläpitäen. Kirjoitus liittyy tri Pentikäisen suunnittelemaan Tokion aktuaarikongressissa esitettävään raporttiin.

Tuomas Hirvonen

Tuomas Hirvonen

14.5.1975 T. Hirvonen

Stokastis-dynaamisen prognoosimallin ohjelmointi- ja laskentatyö

1. Johdanto

Tämä kirjoitus on syntynyt kirjoittajan toimeksi annetun stokastis-dynaamisen prognoosimallin ohjelmointi- ja laskentatyön suorittamisen perusteella. Laskentatyö liittyy tri T. Pentikäisen suunnittelemaan Tokion aktuaarikongressissa esitettävään raporttiin. Kirjoituksessa käsitellään malliin sisältyvät laskentakaavat, mallin ohjelmointi, laskentatyön suoritusvaiheet, optimistrategian etsiminen ja esitetään menettelytapa vapaiden varojen hajonnan estimoimiseksi deterministisen mallin tapauksessa.

2. Malli

Perusajatukset laskentatyössä ovat samat kuin Turku-raporttia [4] varten suoritetuissa laskuissa. Tällä kertaa on käsiteltäviä vakuutuslajeja 2 kpl; Hovisen [3] 'Industrial Fire' ja 'Compsolsory Motor Third Party Insurance'. Vakuutustilastojen luvut korjattiin inflaation eliminoimiseksi kertomalla ne 2:lla kuten Turku-raportissakin. Kahden vakuutuslajin mukaantulosta johtuen useimmat laskukaavat ovat muuttuneet. Laskukaavoissa eroitellaan vakuutuslajit vasempaan alanurkkaan merkityllä indeksillä. Mallissa käytetään seuraavia laskukaavoja muuttujien arvoilla eri vuosina $t = 0, 1, \ldots, 5$.

Vastuumenojen lukumäärien odotusarvot määrätään yhtälöistä

$$(1) \quad {}_1n(t+1) = 1.04 \cdot {}_1n(t) + {}^{2}/\left({}_1m_{\infty}\right) \cdot {}_1C(t+1) + {}^{0.5}/\left({}_1m_{\infty}\right) \cdot {}_1C(t),$$

$$(2) \quad {}_2n(t+1) = 1.03 \cdot {}_2n(t) + {}^{2}/\left({}_2m_{\infty}\right) \cdot {}_2C(t+1) + {}^{0.5}/\left({}_2m_{\infty}\right) \cdot {}_2C(t) \text{ ja}$$

$$(3) \quad n(t) = {}_1n(t) + {}_2n(t).$$

Yhtiön nettomaksutulo määrätään siten kaavoista

(4) $_1P(t) = {}_1n(t) \cdot {}_1m(t)$,

(5) $_2P(t) = {}_2n(t) \cdot {}_2m(t)$ ja

(6) $P(t) = {}_1P(t) + {}_2P(t)$.

Bruttomaksutulolle käytetään kaavaa

(7) $B(t) = {}_1n(t) \cdot {}_1m_\infty + {}_2n(t) \cdot {}_2m_\infty$.

Yhdistetyt momentit vakuutusliikkeelle saadaan kaavasta

(8) $n\alpha_i(t) = {}_1n(t) \cdot {}_1\alpha_i(t) + {}_2n(t) \cdot {}_2\alpha_i(t)$ $\qquad i = 2,3$.

Vakuutusliikkeen nettotuotto määrätään kaavalla

$$(9)\quad Y(t) = \left({}_1\lambda - \mathcal{H}(t) - \omega(t)\right) {}_1P(t) + \left({}_2\lambda - \mathcal{H}(t) - \omega(t)\right) {}_2P(t) - \sqrt{n\alpha_2(t)} \cdot Z(t)\sqrt{1 + \mathcal{H}(t) + \omega(t)} - \frac{n\alpha_3(t)}{n\alpha_2(t)} \cdot \frac{Z^2(t) - 1}{6},$$

missä varmuusmarginaalit ${}_1\lambda$ ja ${}_2\lambda$ ovat mallin päätösparametreja, $\omega(t)$ on suhdannevaihtelua kuvaava termi ja $Z(t)$ sekä $\mathcal{H}(t)$ ovat satunnaislukuja joiden jakautumat ovat $N(0,1)$ ja $N(0,\ 0.05)$. Tarvittavat satunnaisluvut on muodostettu 12:n tasaisesti välillä (0,1) jakautuneen satunnaisluvun summasta muuntamalla summaa vaaditun keskiarvon ja hajonnan saamiseksi. Tasaisesti jakautuneet satunnaisluvut on kehitetty 'power residue' -menetelmällä [5]. Vapaiden varojen määrä lasketaan kaavasta

(10) $U(t) = 1.02\ U(t-1) + Y(t) - C(t)$,

missä hankintakustannukset $C(t)$ on määrätty kaavalla

$$(11)\quad C(t+1) = \begin{cases} \beta \dfrac{\left(U(t) - U_1(t)\right)^{\mu+1}}{U(t)^{\mu}} & , \text{ jos } U(t) \geq U_1(t), \\ 0 & , \text{ jos } U_1(t) > U(t) \geq U_2(t), \\ -\delta P(t) & , \text{ jos } U(t) < U_2(t). \end{cases}$$

Kaavassa (11) esiintyvät päätösparametrit μ ja β sekä parametri δ (kiinnitetty 0.1) joka kuvaa yhtiön mahdollisuuksia säästää tilanteissa jolloin vapaat varat alittavat hälytysrajan $U_2(t)$. Purku-, vakavaraisuus- ja hälytysrajat (12), (13) ja (14) määritellään seuraavasti:

$$(12)\quad U_3(t) = 1 \cdot 10^6 + 0.1\, B(t),$$

$$(13)\quad U_1(t) = U_3(t) + Z_o\sqrt{n\alpha_2(t)} + \frac{n\alpha_3(t)}{n\alpha_2(t)} \cdot \frac{Z_o^2 - 1}{6} + a\, P(t) \quad \text{ja}$$

$$(14)\quad U_2(t) = 0.5 \cdot \left(U_3(t) + U_1(t)\right).$$

Kaavassa (13) esiintyvät parametrit on laskuissa kiinnitetty $Z_o = 2.5$ ja $a = 0.05$. Myyntiin allokoitava määrä varoja jaetaan eri vakuutuslajeille seuraavasti

$$(15)\quad {}_1C(t+1) = f\, C(t+1) \quad \text{ja}$$

$$(16)\quad {}_2C(t+1) = (1 - f)\, C(t+1),$$

missä parametri f on eräs mallin päätösparametreista.

Ylitteen arvo on

$$(17)\quad \lambda'(t) = Y(t)/P(t).$$

Kolmen viimeisen vuoden ylitteen keskiarvoa merkitään

$$(18)\quad \bar{\lambda}(t) = \frac{1}{3}\left(\lambda'(t) + \lambda'(t-1) + \lambda'(t-2)\right).$$

Enitteiden arvot määrätään seuraavalla tavalla:

Lasketaan suureet

$$(19)\quad M_1(t+1) = \mu\, \bar{\lambda}(t)\left(U(t) - U_1(t)\right)$$

(20) $M_2(t+1) = \mu_0 \left(U(t) - U_3(t) \right)$,

missä μ_0 on kiinnitetty 0.02 ja μ on päätösparametri. Suureista (19) ja (20) valitaan suurempi, yleismaksimi, jonka avulla määrätään enitteet

(21) ${}_1M(t+1) = {}_1\rho\, M(t+1)$ ja

(22) ${}_2M(t+1) = {}_2\rho\, M(t+1)$, missä

(23) ${}_v\rho = \dfrac{{}_v\lambda P(t)}{{}_1\lambda\, {}_1P(t) + {}_2\lambda\, {}_2P(t)}$, $v = 1,2$; $M(t) = \max\left(M_1(t), M_2(t) \right)$.

Enitteiden arvojen avulla määrätään taulukoidusta vakuutustilastosta vastaavat vahinkojakautuman keskiarvot ja momentit kaavoihin (4), (5) ja (8). Enitteiden arvojen sallitaan laskea vapaasti taulukossa mutta nouseminen on rajoitettu 1:een askeleeseen. On suoritettu myös kokeilu jossa enite saa nousta vapaasti.

Osinko ja osinkojen kumulatiivinen summa määräytyvät kaavoista

(24) $D(t) = d \cdot P(t)$ ja

(25) $D(t) = \sum_{i=1}^{t} v^i D(i)$,

missä parametrit on kiinnitetty $d = 0.02$ ja $v = \frac{1}{1.02}$. Alkuarvoina yhtiön tilaa kuvaavilla muuttujilla on käytetty $U(0) = 40$, $C(0) = 0$, ${}_1M = 1$, ${}_2M = 0.5$ MILJ.MK. Vahinkojen lukumäärän eri vakuutuslajeilla lähtövuonna on oletettu olevan ${}_1n(0) = 1\,000$ ja ${}_2n(0) = 40\,000$ ja ylitteille lähtöä edeltävinä vuosina oletettiin arvot $\lambda(-1) = 0.05$, $\lambda(-2) = 0{,}08$.

3. Mallin ohjelmointi

Edellä kuvattujen kaavojen määrittelemä matemaattinen malli on ohjelmoitu tietokoneelle PL/1 -ohjelmointikielellä ja ohjelmaa on suoritettu IBM 370-tietokoneella Tietokonepalvelu Oy:ssä. Ohjelmalle annetaan syöttötietoina vakuutuslajeja koskevat tunnusluvut, suhdannetermin arvot eri vuosina sekä edelläluetellut yhtiön tilaa lähtövuonna kuvaavat

muuttujien arvot. Lisäksi annetaan syöttötietona päätösparametrien arvot joita laskennassa halutaan käyttää. Ohjelman tulosteena saadaan vakuutuslajitilastot alkuperäisessä muodossa sekä inflaation eliminoimiseksi suoritetun muunnoksen jälkeisessä muodossa. Tämän jälkeen kirjoitetaan luettelo tulostuksessa käytetyistä symboleista. Jokaista syötettyä päätösparametri-kombinaatiota kohti tulostetaan 1) luettelo laskennassa käytetyistä alkuarvoista ja päätösparametreista 2) haluttu lukumäärä simulointiprosessin reaalisaatioita sekä kaikki reaalisaatiot jotka ovat päättyneet yhtiön vararikkoon 3) simulointiprosessin tulokset sisältäen t:n arvoilla 1,2,...,5 muuttujien U ja P keskiarvot, hajonnat sekä suurimmat ja pienimmät arvot, D-muuttujan keskiarvot ja hajonnat sekä vararikkojen ja hälytystilojen lukumäärät.
Lisäksi kirjoitetaan yhteenvetotulostus joissa on koottu yhden tai useamman simulointiprosessin tulokset ja käytetyt päätösparametrien arvot helposti luettavan taulukon muotoon. Ohjelmaa voidaan käyttää myös determinististen ennusteiden laskemiseen jolloin ohjelma suorittaa laskut ilman simulointia käyttäen satunnaislukuina niiden keskiarvoja. Ohjelman rakennetta ja käyttöön liittyviä seikkoja kuvaa tarkemmin kirjoitus [2].

4. Laskentatyön suoritus

Laskentatyön päämääräksi asetettiin strategian selvillesaaminen joka johtaa mahdollisimman suureen maksutuloon vielä kuitenkaan vakavaraisuutta vaarantamatta. Esimerkin luonteisesti tarkasteltiin laskentatyössä tällaista strategiaa parhaana mahdollisena tavoitteena.
Laskentatyö aloitettiin simuloimalla eri strategioita 200 simulointia kutakin muunnellen päätösparametrien γ, β ja ζ arvoja seuraavasti

γ = 1.0, 0.5, 0.25, 0.0; β = 0.2, 0.3, 0.4; ζ = 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7,

Simuloinnin tulokset on esitetty kuviossa I. Tuloksista voitiin päätellä että pienet γ:n arvot ja suuret β :n arvot johtivat vakuutusmaksutulon kannalta parempaan tulokseen ollen kuitenkin alttiita vararikolle. Muuten tulokset näyttivät sen verran epästabiileilta että muita johtopäätöksiä ei voitu tehdä. Koska näytti siltä että riittävä stabiilisuus tuloksiin voitaisiin saada vasta n. 1 000:n simulaation jälkeen päätettiin kustannusten säästämiseksi jättää aluksi stokastiset tekijät Z(t) ja $\mathcal{H}$ (t) pois ts. korvata ne laskukaavoissa keskiarvoillaan ja laskea näin deterministisiä ennusteita eri päätösparametrien arvoille oikeiden parametriarvojen selvillesaamiseksi. Tuloksia tarkastellessa havaittiin vapaiden varojen hajonta melko stabiiliksi ts. riippumattomaksi lähtöarvokombinaatioista. Tähän havaintoon perustuu kohdassa 5 käytetty likimääräinen menettelytapa optimistrategian etsimiseksi. Laskut suoritettiin edellä mainituilla päätösparametrien arvoilla käyttäen satunnaismuuttujien keskiarvoja. Saadut tulokset on esitetty kuviossa II. Ne vahvistivat aikaisempaa γ ja β :n arvojen vaikutuksesta saatua käsitystä jolloin tarkastelut päätettiin rajoittaa arvoihin $\gamma = 1.0, \beta = 0.4$; $\gamma = 0.25, \beta = 0.2$; $\gamma = 0.5, \beta = 0.3$; $\gamma = 0.0, \beta = 0.2$; $\gamma = 0.25, \beta = 0.3$; $\gamma = 0.5, \beta = 0.4$ rajoittamatta toistaiseksi f:n arvoja.
Tässä vaiheessa haluttiin tarkistaa mikä vaikutus suhdannevaihtelua kuvaavalla termin ω(t) muutoksilla on tuloksiin. Kokeiltiin kolmea eri tapausta:

1) noususuhdanne vuosina 4 ja 5, taantuma vuosina 1 ja 2
2) noususuhdanne vuosina 1 ja 2, taantuma vuosina 4 ja 5
3) noususuhdanne vuosina 2 ja 3, taantuma vuosina 0 ja 5.

Suhdannetermin sykli on kaikissa tapauksissa 6 v. Tähän saakka suoritetuissa laskuissa on suhdannetermi ollut tapauksen 1) mukainen. Suhdannetermin ohella muutettiin liikennevakuutuksen varmuuslisäkerrointa $_2\lambda$ arvoon 0.075. Saadut tulokset on esitetty kuviossa III.
Tulokset osoittivat että tapaus 1) on kaikkien kriittisin vararikon esiintymisen kannalta (kuvio 3) ja tarkastelut on syytä keskittää siten tähän tapaukseen. Varmuuslisän nostaminen liikennevakuutuksen osalta paransi tulosta selvästi (kuvio 5).

Yhteenvetona voitiin laskentatuloksista tehdä tässä vaiheessa seuraavanlaisia johtopäätöksiä edellä rajatulla parametrialueella.

1) Parametrien γ ja β vaikutus on käänteinen ja samaa suuruusluokkaa eri kokeiluarvoilla. Parametrien muutoksilla $\gamma \downarrow$ ja $\beta \uparrow$ eli hankintakustannuksia lisäämällä voidaan kasvattaa nettomaksutuloa huomattavasti suhteellisen vähäisin vapaiden varojen menetyksin. (Kuviot 1 ja 2).

2) Parametrin f pienentäminen eli hankintakustannusten suuntaaminen vähemmän tuottavaan liikennevakuutukseen lisää vain vähän maksutuloa aiheuttaen maksutulon lisäykseen nähden suuren vapaiden varojen menetyksen (kuviot 1 ja 2).

3) Suhdannetaantuman esiintymisajankohta tarkastelujaksolla vaikuttaa oleellisesti vapaiden varojen ja maksutulon kehitykseen. Edullisinta on suhdannetaantuman lopun sattuminen lähtövuodeksi. Epäedullisinta ja samalla kriittisintä vararikon esiintymisen kannalta on taantuman sattuminen 1. tai 2. vuodeksi (kuva 3).

5. Optimistrategian etsiminen

Edellä selvitettyjä keskiarvotuloksia tarkasteltiin lähemmin tarkoituksena arvioida ilman simulointia mitkä strategiat johtaisivat vararikkoon ja päätellä siten mitä strategioita olisi syytä tarkemmin tutkia simuloimalla. Keskiarvotuloksista karsittiin oletettavasti vararikkoon johtavat strategiat siten että strategia jonka reaalisaatio alitti käyrän U3 + 2.8 S(u) hylättiin, missä $S(u) = \sqrt{\left(t \cdot n\alpha_2(1) + \sigma_{\mathcal{H}}^2 \sum_{v=1}^{t} P^2(v)\right)}$ on kokeilemalla saatu arvio vapaiden varojen hajonnalle ja 2.8 on normaalijakautuman prosenttipiste $X_{.9975}$. Menettely merkitsi siten niiden strategioiden hylkäämistä joissa vararikon todennäköisyys olisi suurempi kuin 2,5 ‰ olettaen että vapaat varat olisivat normaalisti jakautuneet.

Hyväksytyistä strategioista 4 parasta strategiaa ovat 1) $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.3$, $f = 0.7$ ja 2)-4) $\gamma = 1.0$, $\beta = 0.4$, $f = 0.7$, 0.5, 0.3, joista ensiksi mainittu johtaa selvästi muita parempaan tulokseen. Mainituilla strategioilla suoritettiin simulointi 1 000 kierrosta ja verrattiin tuloksia keskiarvotuloksiin. Vararikkojen määräksi saatiin 1) 1 ‰ 2) 2 ‰ 3) 4 ‰ ja 4) 0 ‰ joten ainoastaan tapauksessa 3) simuloimalla saatu vararikon esiintymistiheys oli hieman suurempi kuin edelläesitetyllä keskiarvomenettelyllä saatuna. Simulointi näytti antavan säännöllisesti hieman pienenpiä arvoja vapaiden varojen määrälle kuin keskiarvomenettely virheen ollessa kuitenkin suhteellisen pieni. Huonoimmassa tapauksessa erotus oli ~ 4.5 · hajonta (kuvio 6).

Edelläolevan perusteella pääteltiin että optimaalisena strategiana näyttäisi olevan $\gamma = 0.5$, $\beta = 0.3$ ja $f = 0.7$ (kun ${}_1\lambda = 0.15$, ${}_2\lambda = 0.05$). Tällöin vararikon todennäköisyys kaikilla suhdannevaihteehdoilla näyttää olevan pienempi kuin 2,5 ‰. Luultavasti γ:n pienentäminen tai β:n kasvattaminen (so. hankintamenojen kasvattaminen) suhdannetaantuman jälkeen (v:na 3, 4 ja 5) parantaisi vielä lopputulosta. Jos tiedetään suhdannetaantuman esiintyvän vasta tarkastelujakson lopussa voidaan turvallisesti lähteä liikkeelle pienemmällä γ:n tai suuremmalla β:n arvolla eli käyttää enemmän varoja hankintatoimintaan alusta lähtien.

Parametrin μ eli jälleenvakuutuspolitiikan tutkimiseksi suoritettiin simulointi optimistrategialla ja μ:n arvoilla 1.0, 0.6, 0.4. Maksutulo ja vapaat varat kasvavat μ :n arvon kasvaessa mutta vaikutus lopputulokseen on sangen vähäinen johtuen mallin sisältyvästä rajoituksesta joka estää enitettä nousemasta enempää kuin askeleen kerrallaan. Arvot $\mu = 1.0$ ja 1.5 simulointiin myös siten että enitteen sallittiin nousta vapaasti. Tällöin maksutulon ja vapaiden varojen kasvu oli huomattava (kuviot 1 ja 4).

Seuraavassa verrataan tarkemmin optimistrategian etsimisessä käytettyä likimääräistä menettelyä ja simulointia eräissä esimerkkitapauksissa.

6. Vapaiden varojen hajonnan estimointi

Tutkittiin edelleen edellämainittua vapaiden varojen hajonnalle kokeilemalla saatua kaavaa, sen mahdollista käyttökelpoisuutta vapaiden varojen keskiarvon ja hajonnan sekä vararikkojen ennustamiseksi eri vuosina. Ohjelmaa muutettiin siten että jos simulointia ei suoriteta ohjelma estimoi vapaiden varojen hajonnan kaavalla

$$(26) \quad S_{(u)} = \sqrt{\left(t \cdot n\alpha_2(0) + \sigma_{\mathcal{R}}^2 \sum_{v=1}^{t} P^2(v)\right)}.$$

Näin estimoidun hajonnan avulla ohjelma laskee vapaiden varojen keskiarvolle M(u):lle 99,5 prosentin luottamusvälin edellyttäen että M(u) olisi normaalijakautunut. Luottamusvälin päätepisteet ilmoitetaan tulostuksessa arvoina MIN(u) ja MAX(u). Mikäli näin saatu arvo MIN(u) alittaa purkurajan U3 tällöin ohjelma ilmoittaa vararikon asianomaisena vuonna jolloin olettamusten voimassaollessa vararikon todennäköisyys olisi suurempi kuin 2,5 %.

Ilman simulointia satunnaislukujen keskiarvoja käyttäen saatujen tulosten ja kaavan (26) antamien arvojen vertailemiseksi simuloimalla saatuihin tuloksiin laskettiin 4:ssä tapauksessa 1 000:n simuloinnin tuloksista 99 %:n luottamusvälit vapaiden varojen keskiarvolle M(u) ja hajonnalle S(u) olettaen keskiarvo normaalijakautuneeksi käyttämällä keskiarvon ja hajonnan hajonnan arvioimiseksi kaavoja [1] (§ 8.5 ja § 11.7)

$$(27) \quad S_{M(u)} \cong \sqrt{\left(S(u)^2/n\right)}$$

$$(28) \quad S_{S_{M(u)}} \cong \sqrt{\left(S(u)^2/2n\right)}.$$

missä S(u) on simuloimalla saatu vapaiden varojen hajonta. Tulokset on esitetty liitteessä 1. Tuloksista nähdään että lukuunottamatta eräitä poikkeuksia keskiarvomenettelyllä lasketut arvot M(u) ja S(u) ovat simuloinnin perusteella laskettujen luottamusvälien rajojen sisäpuolella. Keskiarvomenettelyn perusteella vararikkojen lukumäärälle saadaan tarkempi arvio seuraavasti. Oletetaan kuten edellä että M(u) on normaalijakautunut. Tällöin tapauksessa 1 purkuraja U3 saavutetaan vuonna 2

M(u):n jakautuman prosenttipisteessä $X_{.0039}$. Tämän perusteella voidaan olettaa että keskimäärin 3.9 ‰ tapauksista päättyy vararikkoon toisena vuonna. Vastaavasti saadaan tapauksille 2)-4) luvut 4.1 ‰, 3.1 ‰ ja 3.2 ‰ jotka siten keskiarvomenettelyn tuloksena mittaavat ko. strategian vaarallisuutta. Samoilla strategioilla suoritettu 1 000 simuloinnin laskenta antoi tulokseksi vararikkoja eri tapauksissa 1) 1 kpl, 2) 4 kpl, 3) 2 kpl ja 4) 4 kpl.

Liitteessä 1 suoritettu tulosten vertailu on kustannussyistä suoritettu vain muutamassa esimerkkitapauksessa. Yhden tapauksen simulointi 1 000 kierrosta vie nopean tietokoneen keskusyksikön aikaa n. 8 min. Tulosten perusteella näyttää kuitenkin ilmeiseltä että vapaiden varojen vaihtelu ja vararikkojen siirtymistodennäköisyys voidaan arvioida riittävän tarkasti käyttämällä keskiarvomenettelyä ja arvioimalla kaavalla (26) vapaiden varojen hajonta.

Vertailutaulukko simuloimalla ja keskiarvomenettelyllä (K.A.) saaduille tuloksille 4:ssä esimerkkitapauksessa.

1) $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.7$, $\mu = 1.0$

T	Simuloitu M(u)	$M(u) \pm 2.58 S_{M(u)}$	K.A. M(u)	Simuloitu S(u)	$S(u) \pm 2.58 S_{S_{M(u)}}$	K.A. S(u)	Simuloitu RUINS	K.A. RUINS
1	42.8	43.5 - 42.1	42.8	8.0	8.5 - 7.5	7.7	0	
2	45.5	46.4 - 44.6	45.8	11.3	12.0 - 10.6	11.2	1	>2,5 ‰
3	56.2	57.3 - 55.1	56.4	13.2	14.0 - 12.4	14.0	0	
4	74.6	75.9 - 73.3	74.6	16.2	17.1 - 15.3	16.6	0	
5	93.1	94.7 - 91.5	93.2	20.1	21.3 - 18.9	19.3	0	

2) $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.5$, $\delta = 0.5$, $\mu = 0.6$

1	42.9	43.5 - 42.3	42.5	7.9	8.4 - 7.4	7.7	0	
2	44.9	45.8 - 44.0	45.3	10.8	11.4 - 10.2	11.1	4	>2,5 ‰
3	55.8	56.9 - 54.7	55.9	12.9	13.6 - 12.2	14.0	0	>2,5 ‰
4	74.3	75.6 - 73.0	74.0	16.1	17.0 - 15.2	16.6	0	
5	92.8	94.4 - 91.2	92.2	19.7	20.8 - 18.6	19.3	0	

3) $\beta = 0.4$, $\gamma = 1.0$, $\delta = 0.7$, $\mu = 0.4$

1	43.1	43.8 - 42.4	43.0	8.0	8.5 - 7.5	7.6	0	
2	45.6	46.5 - 44.7	46.2	11.0	11.6 - 10.4	11.1	2	>2,5 ‰
3	56.3	57.4 - 55.2	56.9	13.0	13.7 - 12.3	13.8	0	
4	74.6	75.9 - 73.3	75.0	16.5	17.5 - 15.5	16.4	0	
5	92.1	93.7 - 90.5	93.2	19.6	20.7 - 18.5	19.0	0	

4) $\beta = 0.4$, $\gamma = 1.0$, $\delta = 0.5$, $\mu = 0.4$

1	42.6	43.2 - 42.0	43.0	7.9	8.4 - 7.4	7.7	0	
2	45.3	46.2 - 44.4	46.1	10.9	11.5 - 10.3	11.1	4	>2,5 ‰
3	55.7	56.8 - 54.6	56.7	13.1	13.9 - 12.3	13.8	0	
4	72.7	74.0 - 71.4	74.7	15.5	16.4 - 14.6	16.4	0	
5	89.6	91.1 - 88.1	92.5	18.7	19.8 - 17.6	19.1	0	

Tulokset on esitetty graafisesti kuvioissa 7 - 10.

Kuviot I - III ja 1 - 10. Kuvioissa 4 ja 7 - 10 on esitetty kustakin tapauksesta koko reaalisaatio ts. vapaiden varojen ja maksutulon arvot eri vuosina. Muissa kuvioissa on esitetty ainoastaan lopputilanne ts. edellämainitut arvot 5. vuonna. Kuvioissa I ja II on värillisillä viivoilla pyritty ainoastaan tekemään kuvio helpommin luettavaksi. Kuvioissa esiintyvä tähti merkitsee että simuloinnissa on esiintynyt vararikkotilanne tai keskiarvomenettelyn kohdalla pykälässä 5 lähemmin selvitetyn menettelyn tuloksena on päätelty ko. strategian johtavan vararikkoon.

Kuvio I: 200 simulointikierroksen tulokset parametrien arvoilla $\gamma = 1.0,\ 0.5,\ 0.25,\ 0.0$; $\beta = 0.2,\ 0.3,\ 0.4$; $f = 0.3,\ 0.4,\ 0.5,\ 0.6,\ 0.7$. Katkoviivalla yhdistetyt tapaukset esittävät tietyn tapauksen reaalisaatiota eri satunnaislukusarjalla.

Kuvio II: Keskiarvomenettelyn tulokset parametrien arvoilla $\gamma = 1.0,\ 0.5,\ 0.25,\ 0.0$; $\beta = 0.2,\ 0.3,\ 0.4$; $f = 0.3,\ 0.5,\ 0.7$.

Kuvio III: Keskiarvomenettelyn tulokset tapauksille $\gamma = 1.0, \beta = 0.4$; $\gamma = 0.25, \beta = 0.2$; $\gamma = 0.5, \beta = 0.3$; $\gamma = 0.0, \beta = 0.2$; $\gamma = 0.25, \beta = 0.3$; $\gamma = 0.5, \beta = 0.4$. Lisäksi f saa kaikissa tapauksissa arvot $f = 0.3,\ 0.5,\ 0.7$. Tulokset on esitetty 3:lla eri suhdannetermin arvolla: I noususuhdanne tarkasteluajanjakson lopussa, II noususuhdanne tarkasteluajanjakson alussa, III noususuhdanne keskellä tarkasteluajanjaksoa. Varmuuslisä $_2\lambda = 0.075$ kuvioista I ja II poiketen.

Kuvio 1: Keskiarvomenettelyn tulokset tapauksissa $\beta = 0.3$; $\gamma = 1.0,\ 0.5,\ 0.25$; $f = 0.3,\ 0.5,\ 0.7$. Tapaus $\beta = 0.3, \gamma = 0.5, f = 0.7$ on simuloitu u:n arvoilla $u = 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.1$ ja enitteen noustessa vapaasti arvoilla $u = 1.0,\ 1.5$.

Kuvio 2: Keskiarvomenettelyllä lasketut tapaukset $\gamma = 0.5$; $\beta = 0.2$, 0.3, 0.4; $\varphi = 0.3$, 0.5, 0.7.

Kuvio 3: Keskiarvomenettelyllä laskettu tapaus $\gamma = 0.25$; $\beta = 0.3$; $\varphi = 0.3$, 0.5, 0.7 suhdannetermin eri arvoilla (vrt. kuvio III). $_2\lambda = 0.075$ muista kuvioista poiketen.

Kuvio 4: Keskiarvomenettelyllä tapausten $\gamma = 0.5$; $\beta = 0.3$; $\varphi = 0.3$, 0.5, 0.7 reaalisaatioiden kulku eri vuosina ja tapauksen $\gamma = 0.5$; $\beta = 0.3$; $\varphi = 0.7$ vastaavat tulokset simuloimalla μ:n arvoilla $\mu = 0.6$, 1.0, 1.5.

Kuvio 5: Keskiarvomenettelyllä tulokset tapauksista $\gamma = 0.5$; $\beta = 0.3$; $\varphi = 0.3$, 0.5, 0.7; $_2\lambda = 0.05$, 0.075.

Kuvio 6: Keskiarvomenettelyllä lasketut tapaukset $\gamma = 1.0$; $\beta = 0.4$ $\varphi = 0.3$, 0.5, 0.7 ja $\gamma = 0.5$; $\beta = 0.3$; $\varphi = 0.7$ on kuviossa rengastettu. Samat tapaukset on simuloitu ja lisäksi viimeksimainittu tapaus on simuloitu μ:n arvoilla $\mu = 1.0$, 1.5.

Kuviot 7 - 10: Kuvioissa on esitetty kaavan (26) antama arvo vapaiden varojen hajonnalle sekä simuloinnin perusteella laskettu vapaiden varojen luottamusväli. Lisäksi on kuvattu simuloinnin perusteella laskettu vapaiden varojen keskiarvon luottamusväli ja keskiarvomenettelyn tulos vapaiden varojen keskiarvolle. Edellämainitut tulokset on esitetty tapauksille $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.5$, $\varphi = 0.7$, $\mu = 1.0$; $\beta = 0.3$, $\gamma = 0.5$, $\varphi = 0.5$, $\mu = 0.6$; $\beta = 0.4$, $\gamma = 1.0$, $\varphi = 0.7$, $\mu = 0.4$; $\beta = 0.4$, $\gamma = 1.0$, $\varphi = 0.5$, $\mu = 0.4$.

Kirjallisuusviitteet:

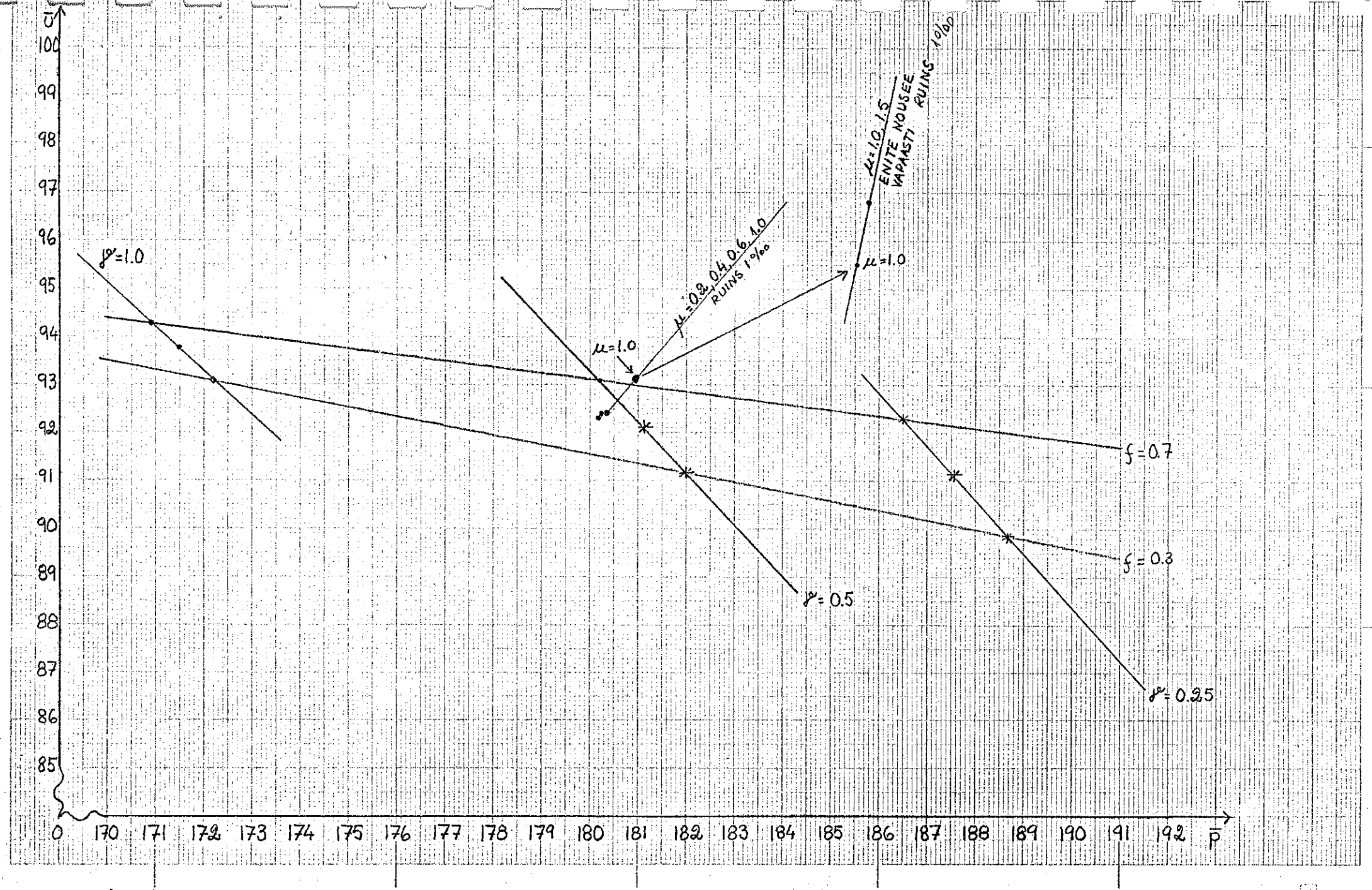
[1] Hald: Statistical Theory with Engineering Applications

[2] Hirvonen: Stokastis-dynaamisen prognoosimallin atk-toteutus 1975

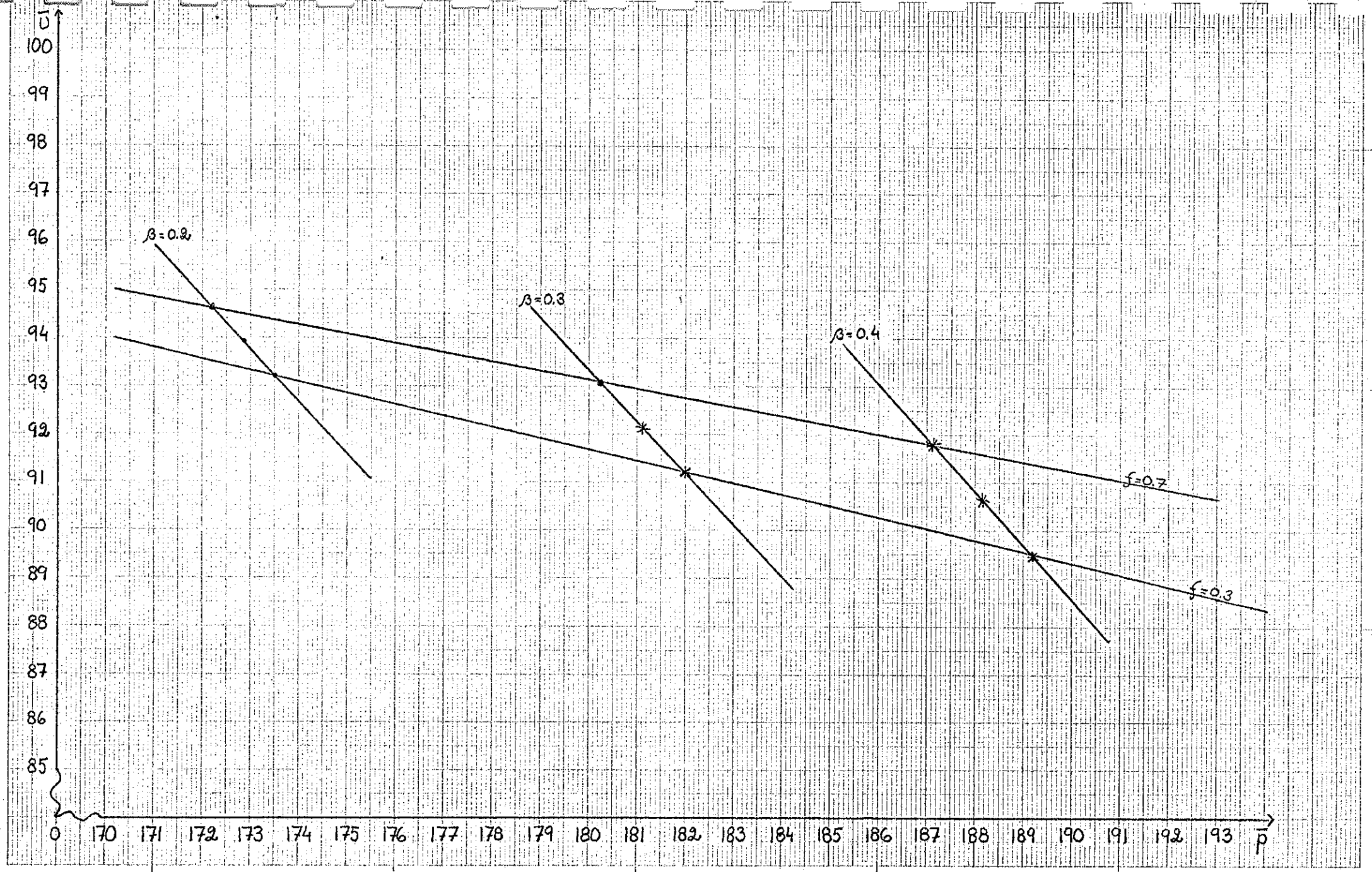
[3] Hovinen: Basic Statistic to be used in Control of Equalisation reserves (ASTIN-Bulletin V, 2 1969)

[4] Pentikäinen: Stochastig-Dynamic Prognosis An Application of Risk Theory to Business Planning

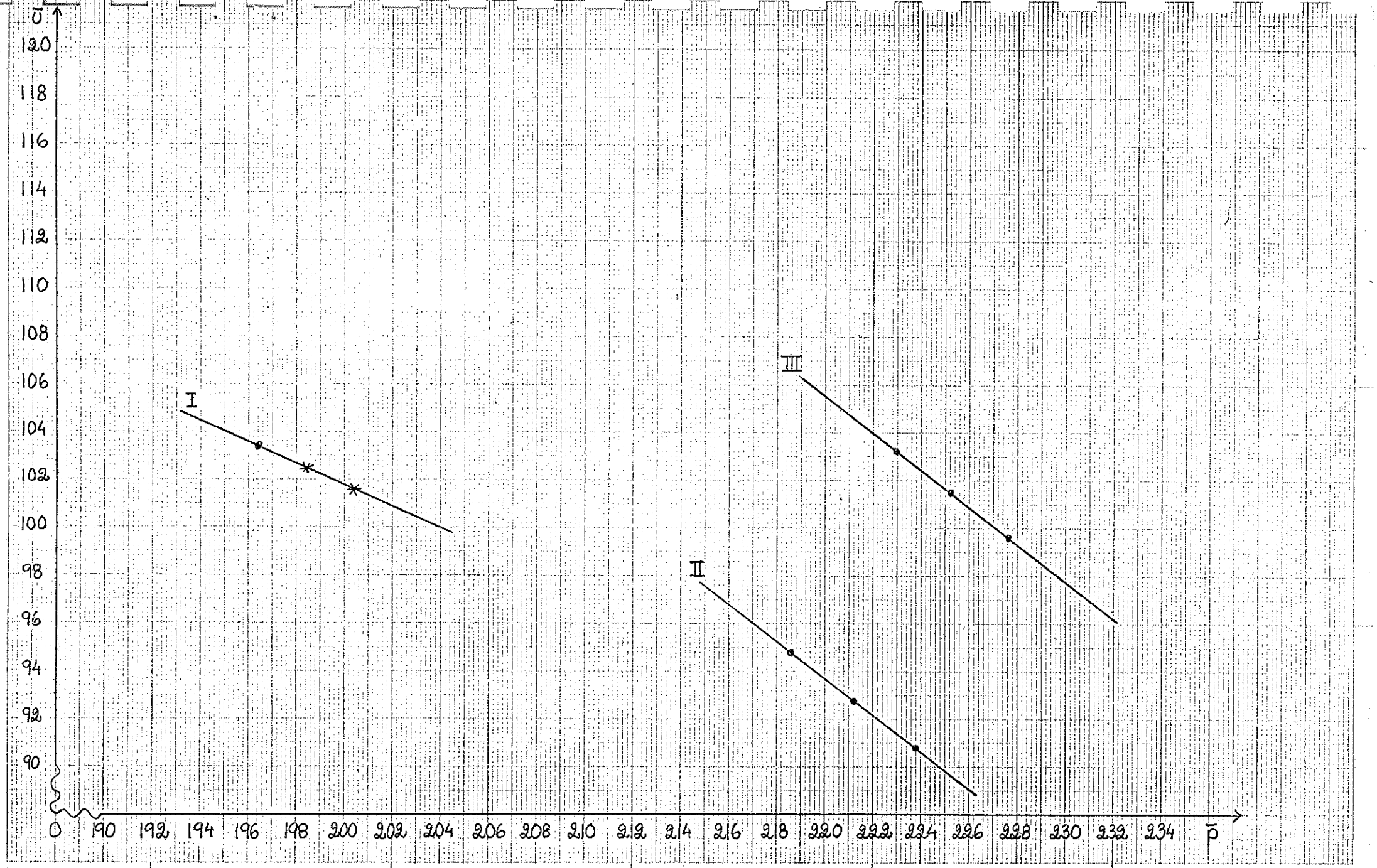
[5] Random Number Generation and Testing, IBM GC20-8011-0


$\bar{U}$
100
99
98
97
96
95
94
93
92
91
90
89
88
87
86
85
0
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
$\bar{p}$
$\gamma=1.0$
$\mu=1.0$
$\mu=0.2, 0.4, 0.6, 4.0$
RUINS 1‰
$\mu=1.0, 1.5$
ENITE NOUSEE
VAPAASTI
RUINS 1/60
$\mu=1.0$
$f=0.7$
$f=0.3$
$\gamma=0.5$
$\gamma=0.25$

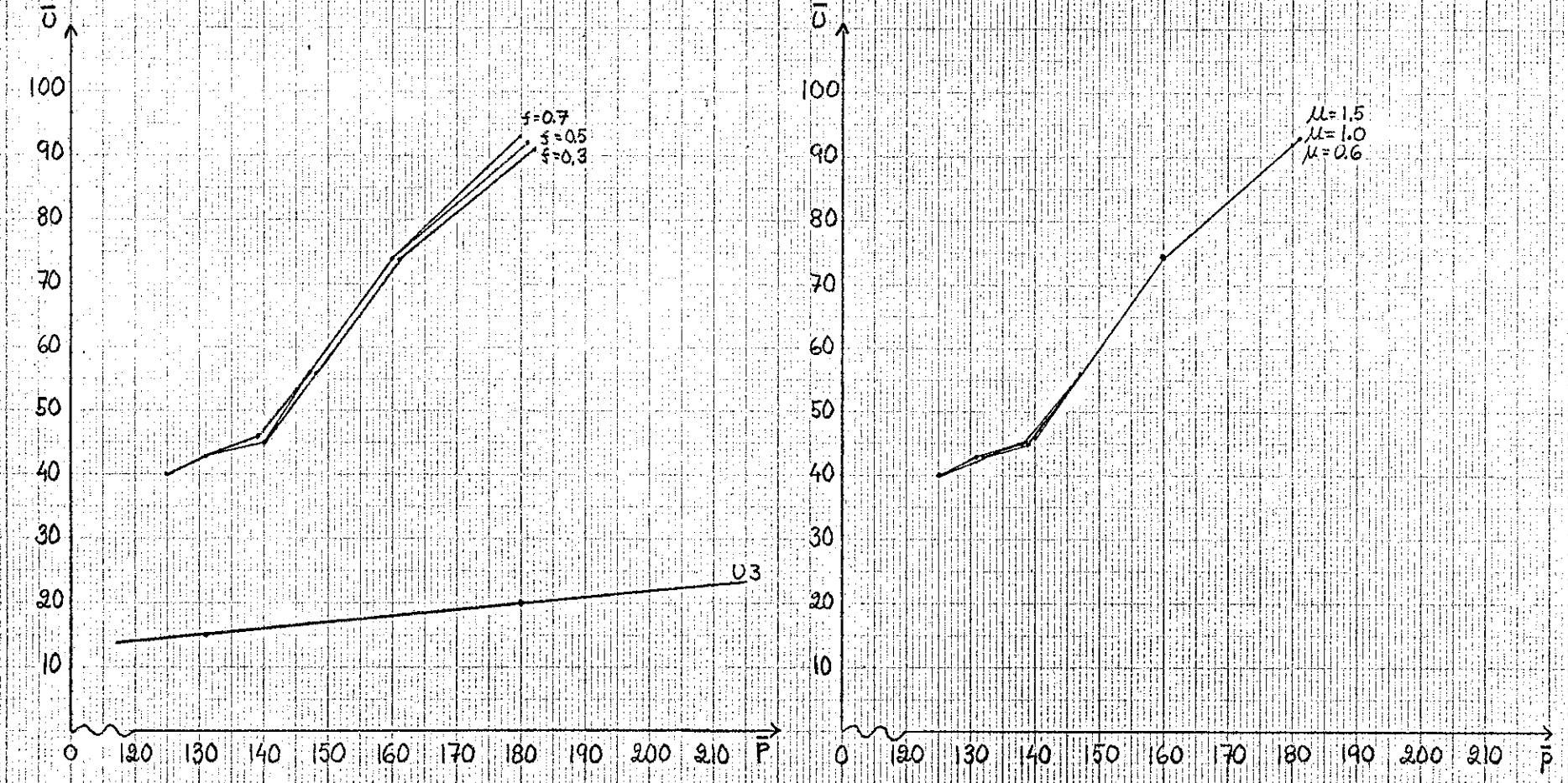
KUVIO 1


$\bar{U}$
100
99
98
97
96
95
94
93
92
91
90
89
88
87
86
85
0
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
193
$\bar{p}$
$\beta = 0.2$
$\beta = 0.3$
$\beta = 0.4$
$f = 0.7$
$f = 0.3$

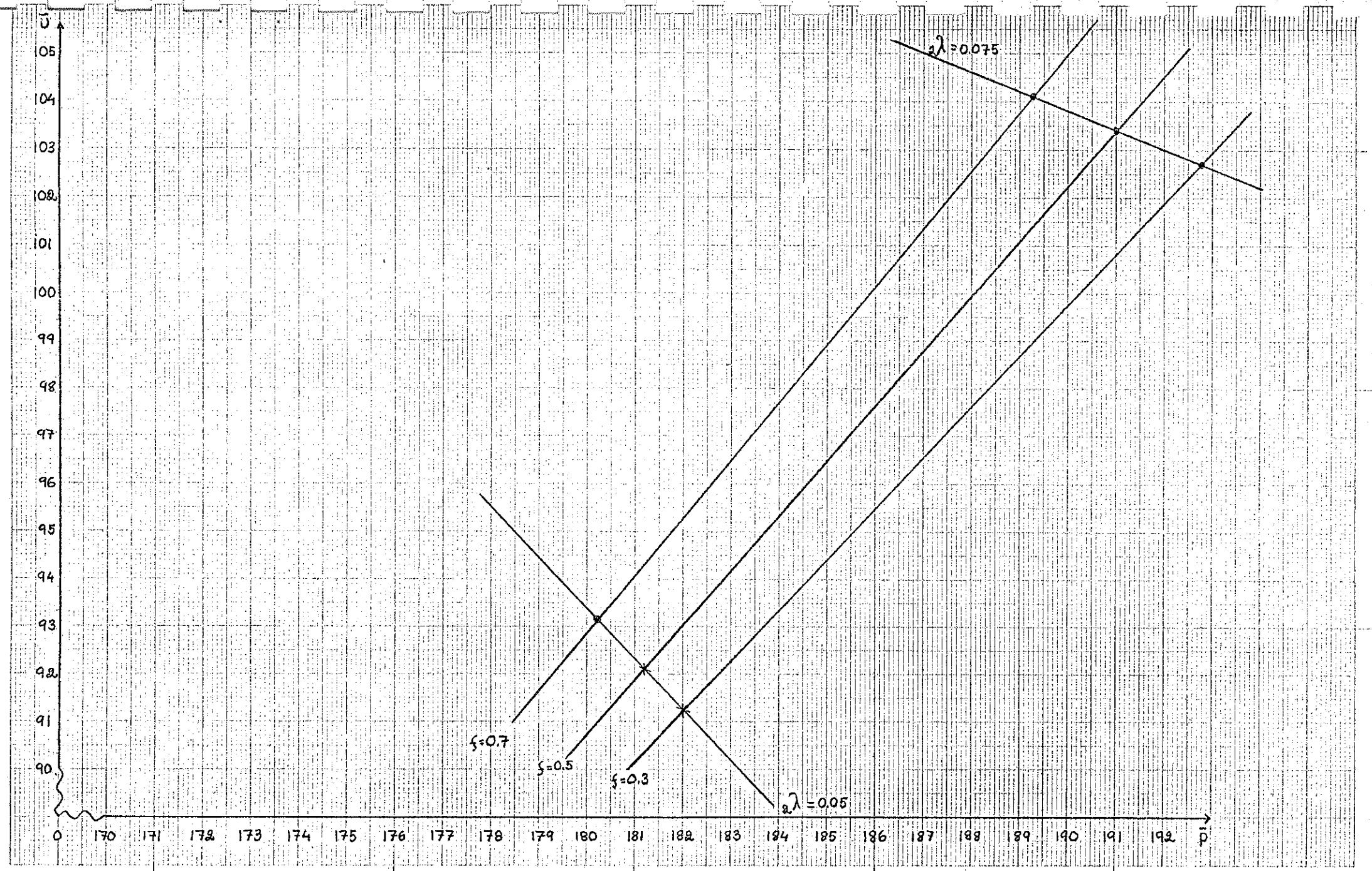
KUVIO 2


$\bar{U}$
120
118
116
114
112
110
108
106
104
102
100
98
96
94
92
90
0
190
192
194
196
198
200
202
204
206
208
210
212
214
216
218
220
222
224
226
228
230
232
234
$\bar{p}$
I
II
III

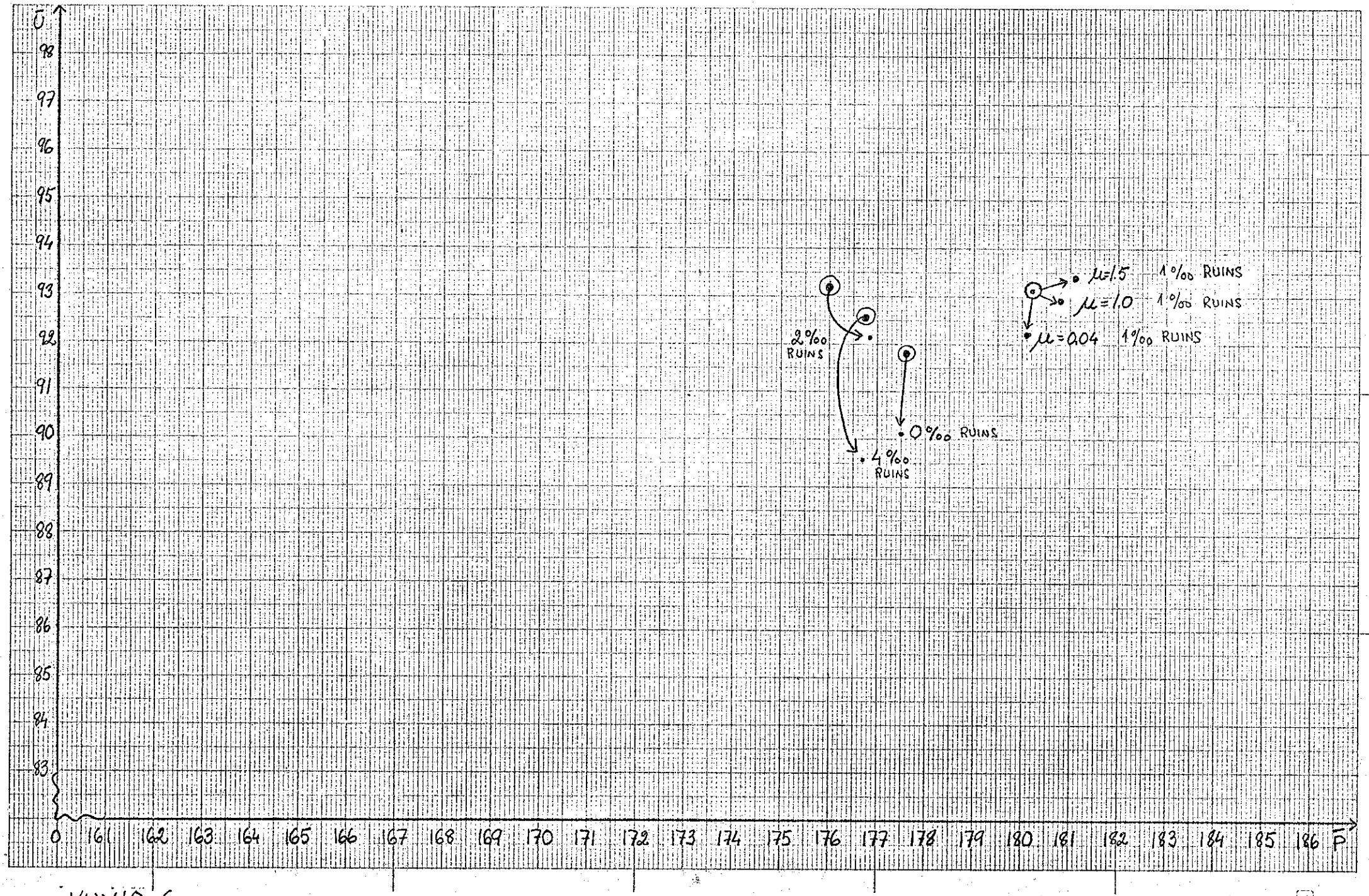
KUVIO 3


Ū
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
120
130
140
150
160
170
180
190
200
210
P̄
ξ=0.7
ξ=0.5
ξ=0.3
U3
μ=1.5
μ=1.0
μ=0.6

KUVIO 4

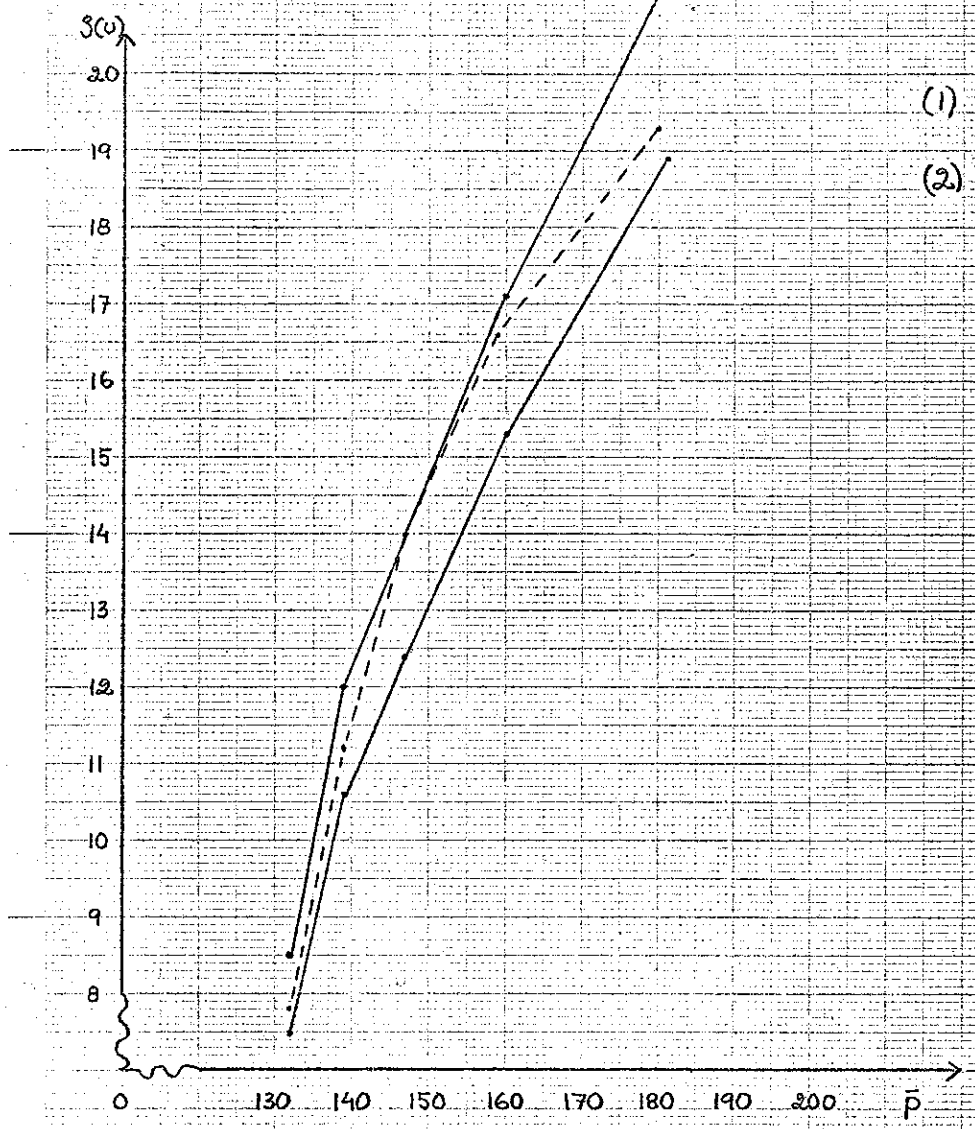

$\bar{U}$
105
104
103
102
101
100
99
98
97
96
95
94
93
92
91
90
0
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
187
188
189
190
191
192
$\bar{p}$
$_2\lambda = 0.075$
$_2\lambda = 0.05$
$\zeta = 0.7$
$\zeta = 0.5$
$\zeta = 0.3$

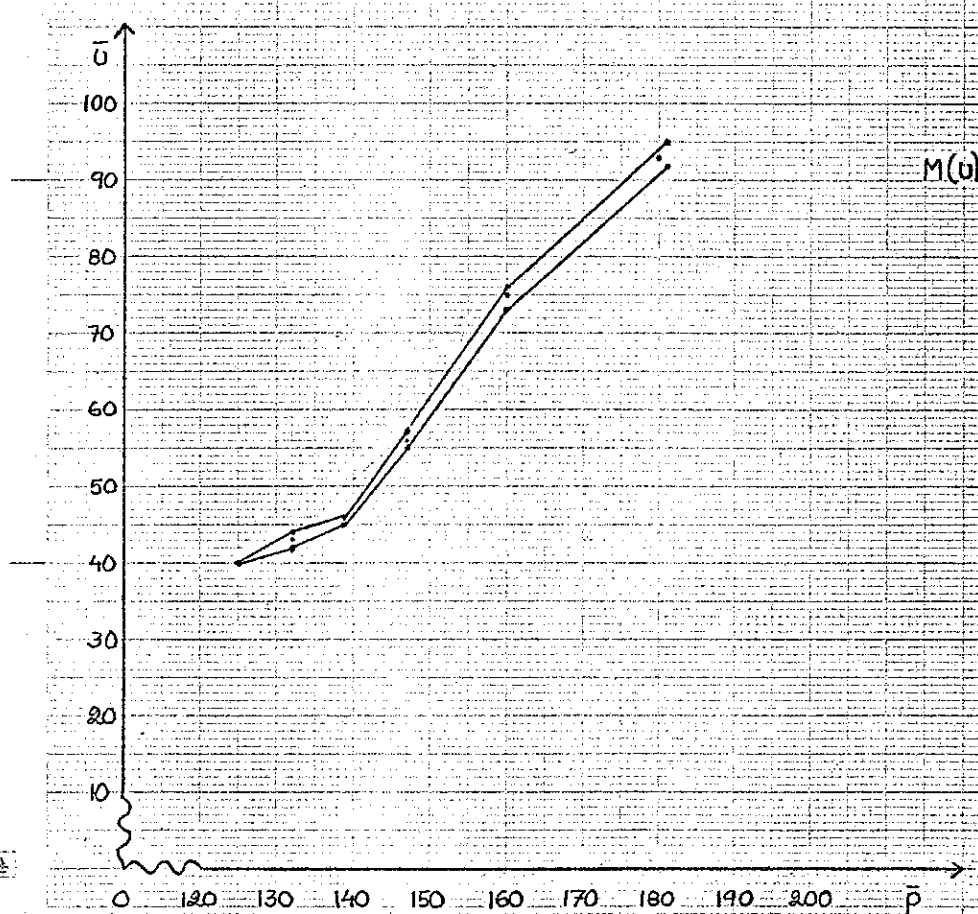
KUVIO 5


Ō
98
97
96
95
94
93
92
91
90
89
88
87
86
85
84
83
0
161
162
163
164
165
166
167
168
169
170
171
172
173
174
175
176
177
178
179
180
181
182
183
184
185
186
P̄
2‰ RUINS
0‰ RUINS
4‰ RUINS
μ=1.5 1‰ RUINS
μ=1.0 1‰ RUINS
μ=0.04 1‰ RUINS

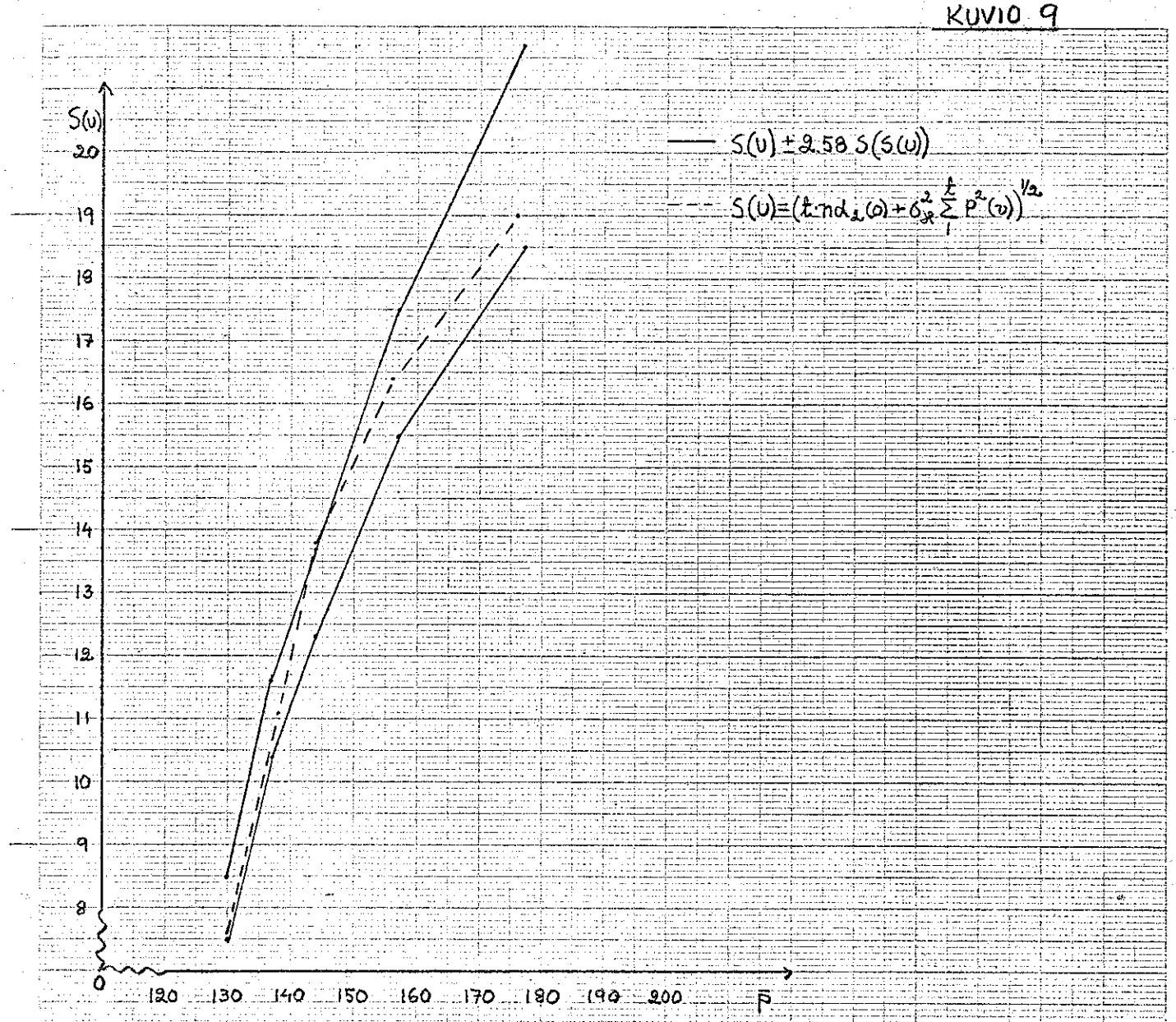
KUVIO 6

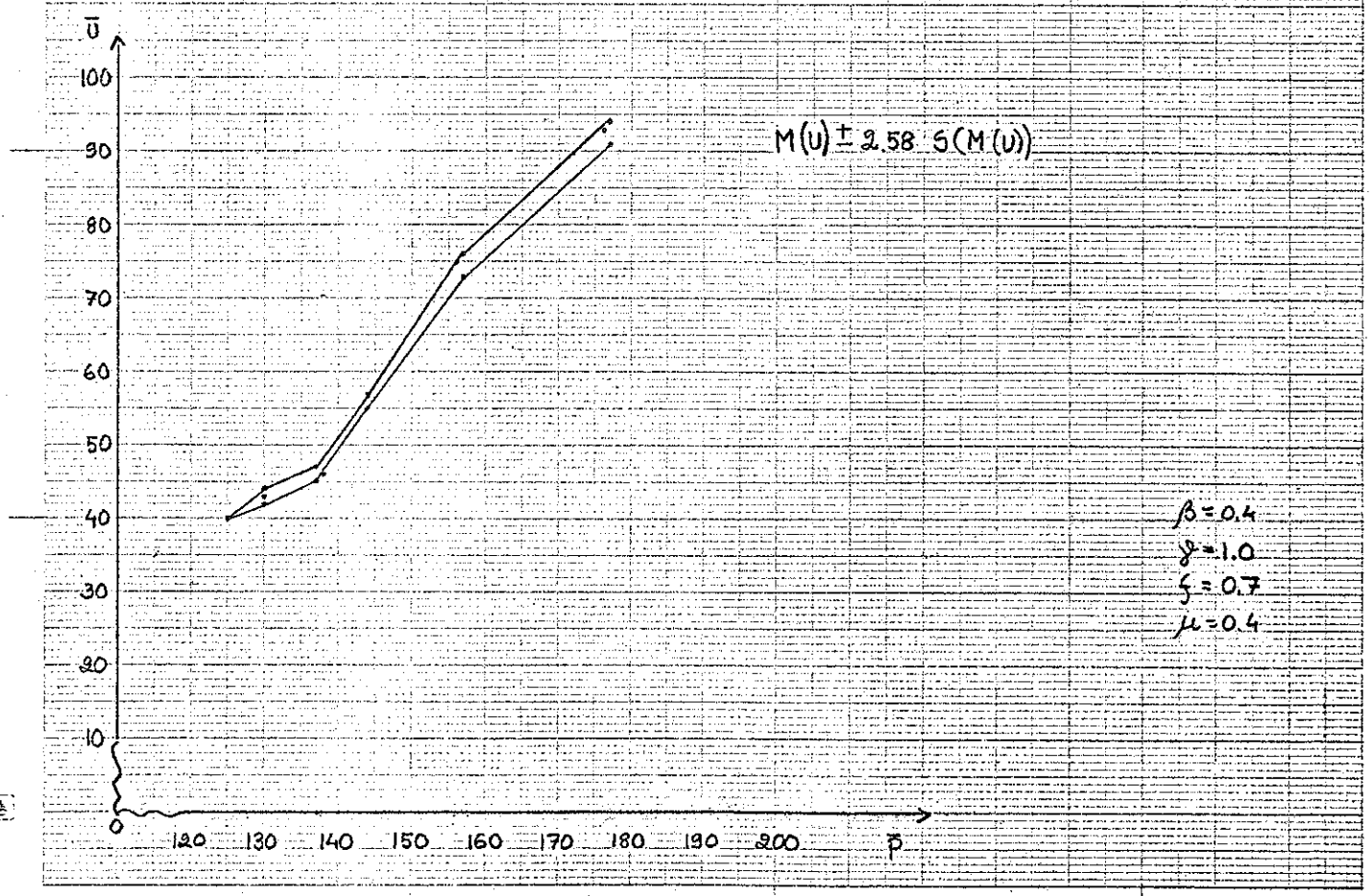
KUVIO 7


S(U)
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
0
130
140
150
160
170
180
190
200
$\bar{p}$
(1) — $S(U) \pm 2.58\, S_{S_M(U)}$
(2) - - - $S(U) = \sqrt{(t \cdot n d_2(0) + \sigma_x^2 \sum_1^t p^2(U))}$

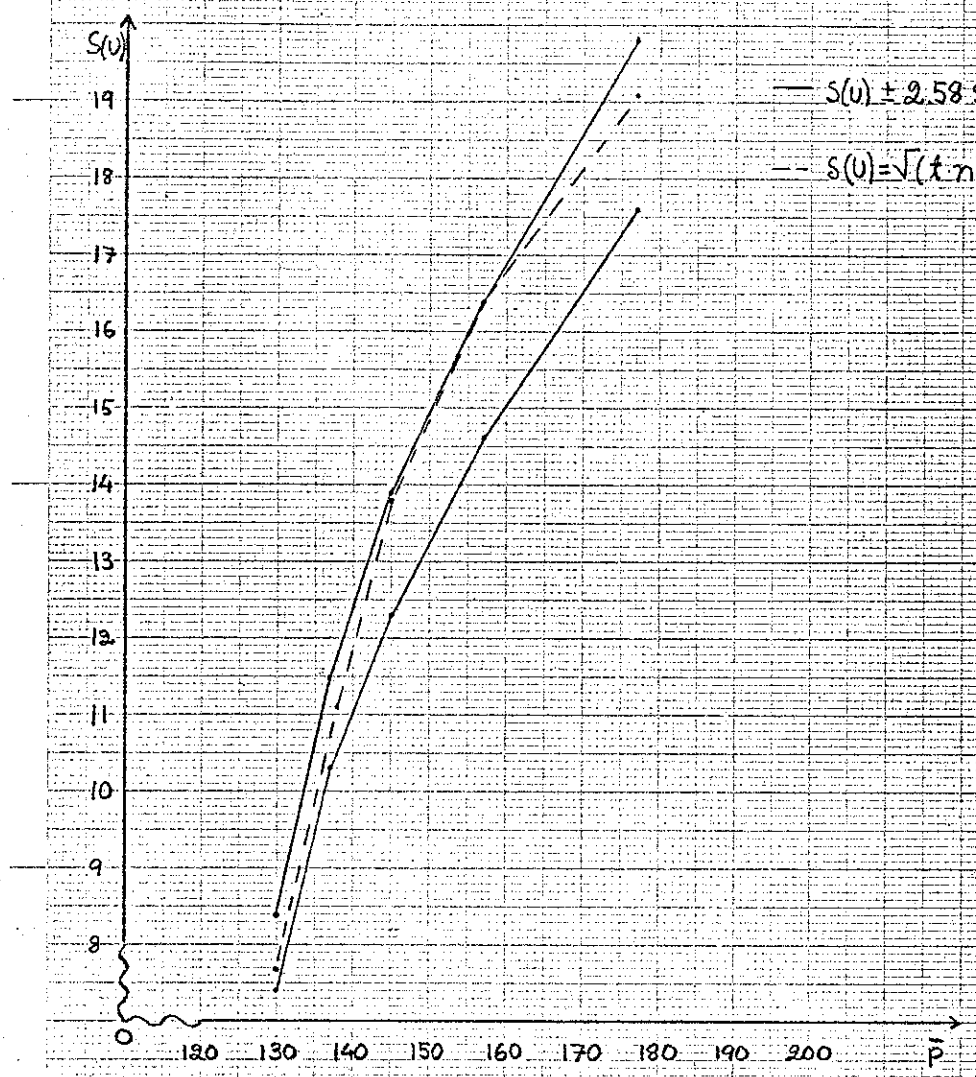

$\bar{U}$
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
120
130
140
150
160
170
180
190
200
$\bar{p}$
$M(U) \pm 2.58\, S_{M(U)}$
$\beta = 0.3$
$\gamma = 0.5$
$\zeta = 0.7$
$\mu = 1.0$

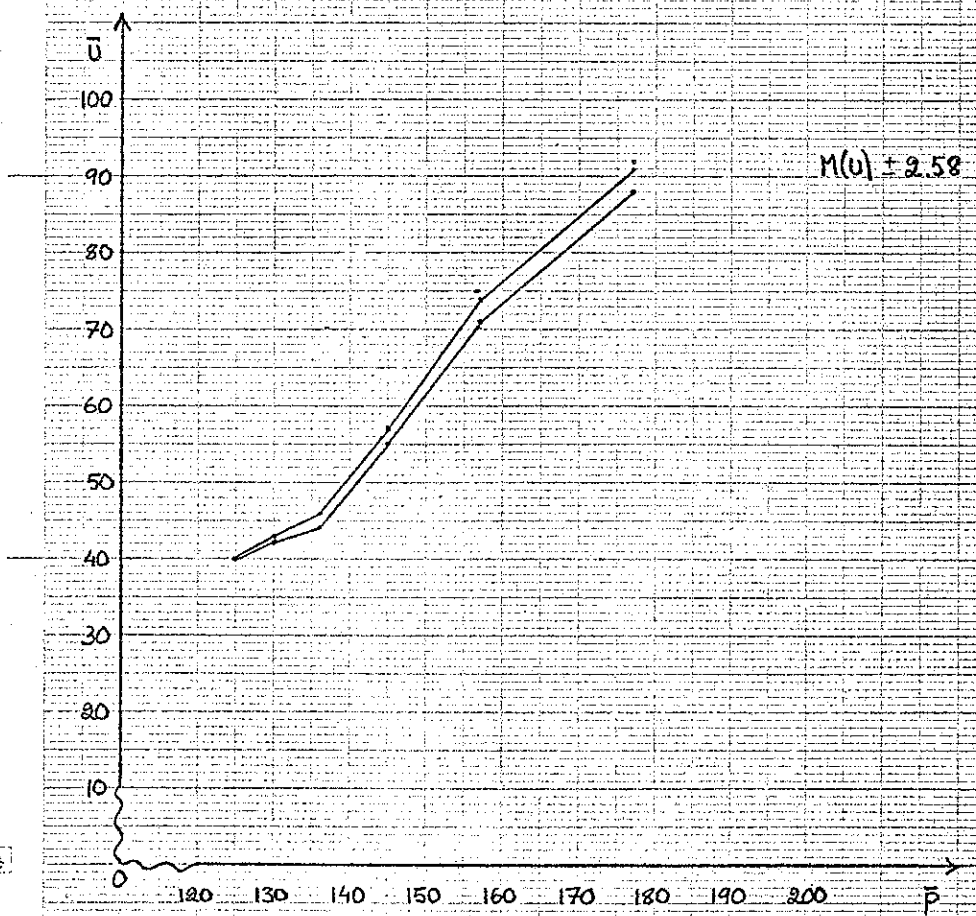
KUVIO 9

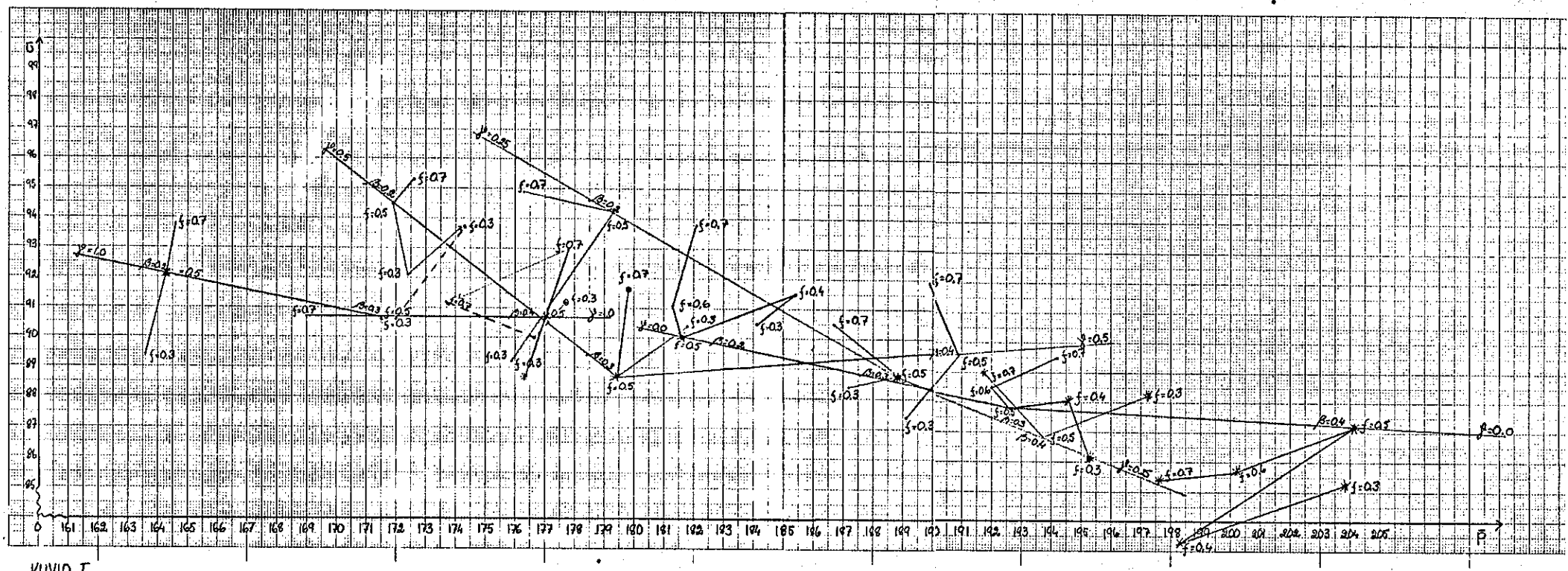

S(U)
20
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
0
120
130
140
150
160
170
180
190
200
$\bar{p}$
S(U) ± 2.58 S(S(U))
S(U)=(t·n·α₂(0)+σ²ₚ Σ p²(U))^1/2


Ū
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
120
130
140
150
160
170
180
190
200
$\bar{p}$
M(U) ± 2.58 S(M(U))
β=0.4
γ=1.0
ζ=0.7
μ=0.4

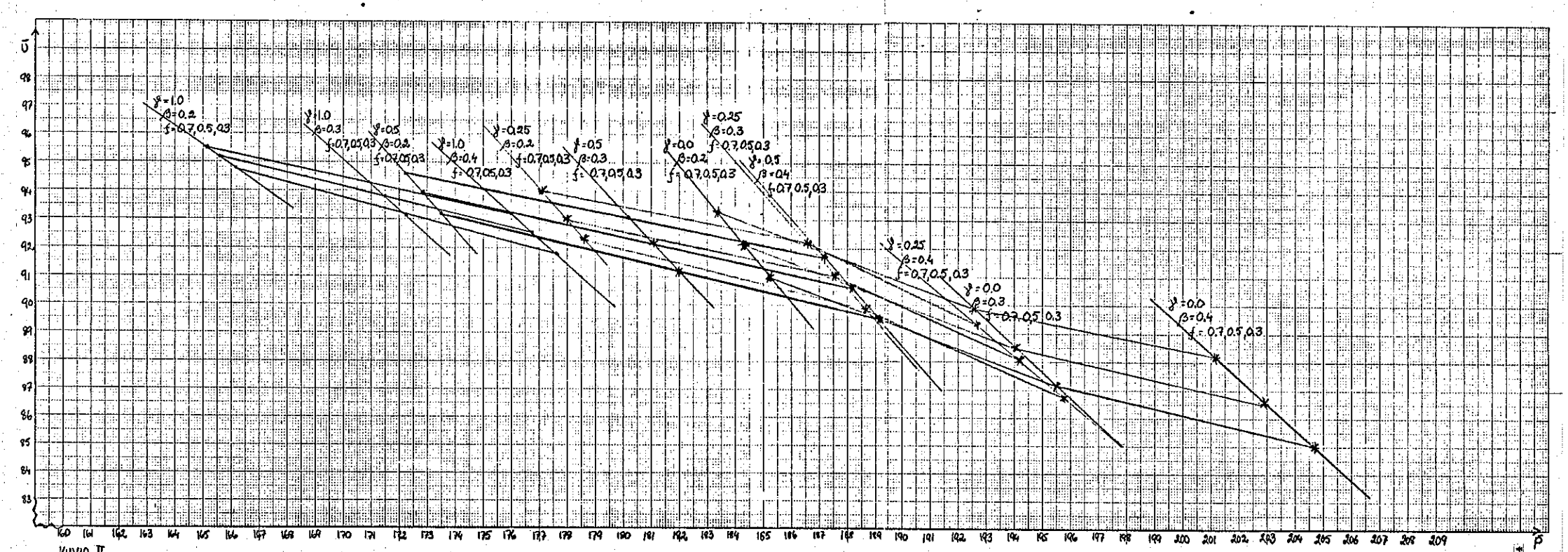
KUVIO 10


S(U)
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
9
8
0
120
130
140
150
160
170
180
190
200
$\bar{P}$
— $S(U) \pm 2.58\, S_{S_M(U)}$
-- $S(U) = \sqrt{(t\, n\, d_2(0) + \sigma_x^2 \sum_{v=1}^{t} P^2(v))}$

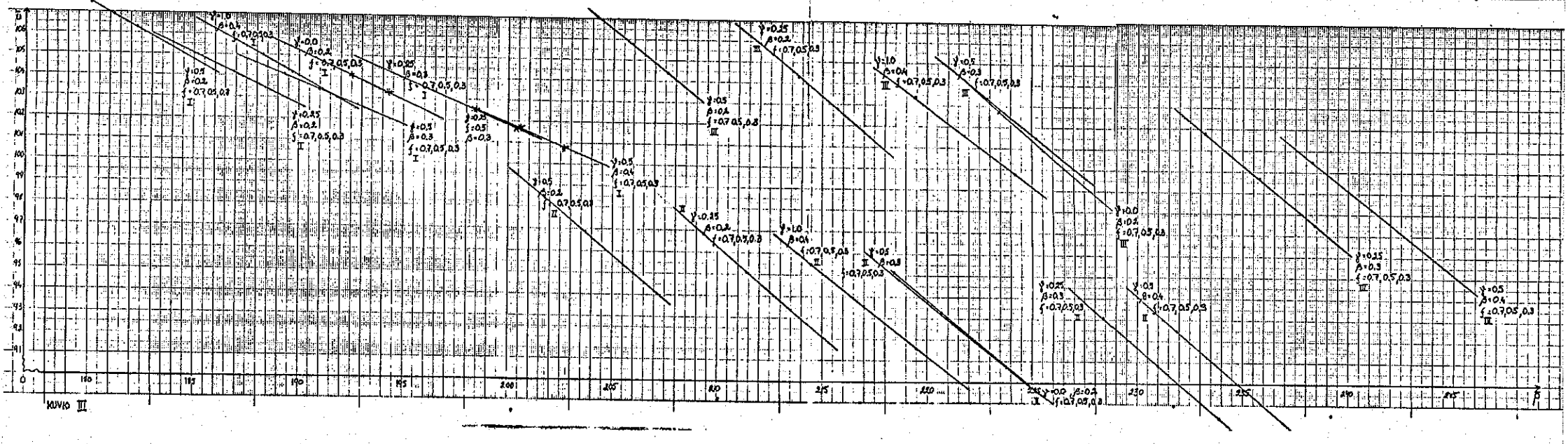

$\bar{U}$
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
120
130
140
150
160
170
180
190
200
$\bar{P}$
$M(U) \pm 2.58\, S_{M(U)}$
$\beta = 0.4$
$\gamma = 1.0$
$\zeta = 0.5$
$\mu = 0.4$



KUVIO I


Ū
P
γ=1.0
β=0.2
f=0.7,0.5,0.3
γ=1.0
β=0.3
f=0.7,0.5,0.3
γ=0.5
β=0.2
f=0.7,0.5,0.3
γ=1.0
β=0.4
f=0.7,0.5,0.3
γ=0.25
β=0.2
f=0.7,0.5,0.3
γ=0.5
β=0.3
f=0.7,0.5,0.3
γ=0.0
β=0.2
f=0.7,0.5,0.3
γ=0.25
β=0.3
f=0.7,0.5,0.3
γ=0.5
β=0.4
f=0.7,0.5,0.3
γ=0.25
β=0.4
f=0.7,0.5,0.3
γ=0.0
β=0.3
f=0.7,0.5,0.3
γ=0.0
β=0.4
f=0.7,0.5,0.3

KUVIO II



KUVIO III