101

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
THE ACTUARIAL SOCIETY OF FINLAND

WORKING PAPERS ISSN 0781- 4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

101
Karhunen, Markku

Stabiilit jakaumat osaketuottojen mallintamisessa

(2009)

Stabiilit jakaumat osaketuottojen mallintamisessa

Suppea SHV-harjoitustyö

Markku Karhunen, 17.4.2009

Abstract

In this exercise, stable distributions are studied from the practical viewpoint of actuarial modeling. Firstly, the stable distributions are briefly introduced. Secondly, a generic life insurance portfolio is built. The stable distributions are used for modeling the assets that cover the calculation reserves of this life business. The ruin probabilities of the business are studied with Monte Carlo simulations, and confidence limits are obtained.

Stable distributions are suggested as an alternative method for modeling the log-return of investments. They include the widely used normal distribution as a special case. The results suggest that deviations from the normal distribution increase the ruin probability in substantial amounts.

Sisältö

1. Johdanto

Matemaatikot Nassim Taleb ja Benoit Mandelbrot ovat käsitelleet populaariteoksissaan sattuman vaikutusta yhteiskuntaan ja talouteen (Taleb 2007, Mandelbrot 1994). Taleb väittää, että ihmiset aliarvioivat suurten poikkeamien, ”mustien joutsenten”, merkitystä. Asiaan liittyy se, että ihmiset käsittelevät satunnaisuutta liian konservatiivisten matemaattisten mallien avulla. Tyypillinen esimerkki on rahoitusteoriassa käytettävä normaalijakaumaoletus. Mandelbrot puolestaan esittää, että normaalijakaumaoletus olisi hylättävä. Hän tarjoaa normaalijakauman tilalle stabiileja jakaumia, joiden sovittamista aineistoon hän tutki jo 60-luvulla (Mandelbrot 1963). On olemassa empiirisiä tutkimuksia, jotka puoltavat yleisiä stabiileja jakaumia normaalijakaumaa vastaan, ks. (Rachev & Mitnik 2000).

Tässä harjoitustyössä kokeillaan stabiilien jakaumien käyttöä vakuutusyhtiön sijoitustoiminnan mallintamisessa. Erityisesti tarkastellaan stabiilien jakaumien α- ja β-parametrin vaikutusta vakavaraisuuteen. Tähän käytetään simulointimallia, joka kuvaa yksinkertaista, run off -tilassa olevaa henkivakuutusportfoliota (vrt. Daykin ym. 1994 s 400). Suuren Monte Carlo -otoksen avulla pystytään laskemaan vararikkotodennäköisyys ajan funktiona, ja vertailemaan eri skenaarioiden vaikutusta siihen.

2. Osaketuottojen jakauma

2.1 Standardimallit

Jos A_t on osakkeen (tai osakeindeksin) hinta vuonna t, osakkeen vuosituotto on

$$\frac{A_t}{A_{t-1}} - 1 = e^r - 1 \approx r \quad ,$$

missä r on jokin satunnaismuuttuja. Rahoitusteorian standardimalleissa, kuten CAPM:ssa ja Black-Scholes-hinnoittelussa, oletetaan että r noudattaa normaalijakaumaa. (Kaavan toinen yhtäsuuruus on ensimmäisen kertaluvun approksimaatio origon ympäristössä.) r:n normaalisuudesta seuraa, että A_t noudattaa log-normaalia satunnaisprosessia. On monia syitä, jotka puoltavat osakkeen hinnan mallintamista tällaisena prosessina.

1. Normaalista r:ää on teknisesti helppo käsitellä. Jakauman estimoimiseksi tarvitsee vain laskea r:n otoskeskiarvo ja -hajonta.
2. Ajatellaan, että r on monen eri satunnaistekijän summa. Tällöin r:n pitäisi olla likimain normaalijakautunut, jos keskeisen raja-arvolauseen oletukset ovat voimassa.
3. Log-normaali satunnaisprosessi on itsesimilaarinen. Tällöin tuotto noudattaa log-normaalia jakaumaa kaikilla aikaskaaloilla, siis esim. yhden pörssipäivän ja kymmenen vuoden aikana.

2.2 Stabiilit jakaumat

Kuten alussa todettiin, on olemassa viitteitä siitä, että log-normaalinen satunnaisprosessi aliarvioi äärimmäisten hinnanmuutosten todennäköisyyttä. Tämä on vakava puute riskienhallinnan kannalta. Yksi keino kiertää ongelma voisi olla siinä, että ”tuottavuuden” *r* oletettaisiin noudattavan jotakin stabiilia jakaumaa. Tällöin hinta A_t muodostasi log-stabiilin prosessin. Nämä prosessit muistuttavat log-normaalia satunnaisprosessia seuraavilla tavoilla:

1. Stabiilit jakaumat ovat jakaumaperhe, joka sisältää normaalijakauman erikoistapauksena. Tällöin normaalijakautunut *r* voidaan ottaa työhypoteesiksi, jota testataan yleistä stabiilia jakaumaa vastaan.
2. Ajatellaan, että *r* on monen eri satunnaistekijän summa. Kolmogorov ja Gnedenko osoittivat, että *r*:n jakauma lähestyy jotakin stabiilia jakaumaa hyvin yleisten ehtojen vallitessa, ks. (Samorodnitsky & Taqqu 2000).
3. Myös log-stabiilit prosessit ovat itsesimilaarisia.

Stabiilien jakaumien huono puoli on siinä, että tiheys- ja kertymäfunktioita ei pystytä määräämään analyyttisinä lausekkeina. (Normaalijakauma, Cauchy- ja Lévy-jakaumat ovat poikkeus tästä säännöstä.) Hieman yllättäen stabiilit jakaumat määrittyvätkin karakteristisen funktionsa kautta:

$$\phi(t) = \exp\{-\sigma^{\alpha} |t|^{\alpha} [1 - i\beta sign(t) \tan\tfrac{\pi\alpha}{2}] + i\mu t\}, \alpha \neq 1$$
$$\phi(t) = \exp\{-\sigma |t| [1 + i\beta sign(t) \tfrac{2}{\pi} \ln|t|] + i\mu t\}, \alpha = 1.$$

Jotta tästä päästäisiin kertymäfunktioon, olisi laskettava Fourier-muunnos

$$S_{\alpha}(\sigma, \beta, \mu) = (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it} \phi(t)\, dt\,.$$

Yleisessä tapauksessa tämä on tehtävä numeerisesti. Stabiilin jakauman parametrien tulkinta on seuraava:

Taulukko 1. Stabiilin jakauman klassinen parametrisointi.	
$\alpha \in (0,2]$	Ns. stabiilisuusindeksi. α määrää häntien paksuuden, eli toisin sanoen todennäköisyyden P{|r|>x} rajalla $x \to \pm\infty$. Arvo α=2 tuottaa normaalijakauman.
$\sigma > 0$	Skaalaparametri. Normaalijakauman tapauksessa keskihajonta saadaan skaalaparametrista: $\sigma_N = \sqrt{2}\sigma$.

$\beta \in [-1,1]$	Vinousparametri. Positiivinen β merkitsee oikealle vinoa jakaumaa, negatiivinen vasemmalle vinoa. Normaalijakaumalla β menettää merkityksensä.
$\mu \in R$	Lokaatioparametri. Määrää jakauman huipun (moodin) sijainnin reaaliakselilla.

Eri parametrien vaikutus äärimmäisten tapahtumien todennäköisyyteen ilmenee seuraavasta kaavasta:

$$\lim_{x\to\infty} x^{\alpha} P\{|r|> x\} = \frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi}\sin(\frac{\pi\alpha}{2})\times(1+\beta)\sigma^{\alpha}.$$

Stabiilisuusindeksin ja hajontaa vastaavan skaalaparametrin eroa on havainnollistettu kuvassa 1. Nähdään, että lähellä jakauman keskikohtaa α ei vaikuta sanottavasti kertymäfunktion arvoon, kun taas σ:n vaikutus näkyy kaikilla x. Toisaalta α:n vaikutus dominoi rajalla $x\to\pm\infty$, eikä sitä ole mahdollista kompensoida σ:aa kasvattamalla.

Lukijalla saattaa olla kiusaus ajatella, että stabiilin jakauman parametrit voidaan tulkita odotusarvoksi, varianssiksi jne. Tämä on kuitenkin väärin, koska varianssi on olemassa vain neliöintegroituvassa tapauksessa α=2. Odotusarvokin on olemassa vain, jos α>1. Huom! Väärinkäsitysten välttämiseksi on syytä lisätä, että kirjallisuudessa esiintyy muitakin tapoja parametrisoida stabiili jakauma.

(Samorodnitsky & Taqqu 1994) on standardilähde stabiilien jakaumien matemaattisten ominaisuuksien suhteen. (Rachev & Mitnik 2000) on yleisesitys stabiilien jakaumien soveltamisesta ekonometriaan ja rahoitusteoriaan.

3. Simulointimalli

3.1 Vakuutuskanta

Tässä työssä simuloidaan vakuutusportfoliota, joka koostuu yksinkertaisista säästöhenkivakuutuksista, joihin liittyy 105 % kuolemanvaraturva. Vakuutuskannan yhteenlaskettu vastuuvelka on simulaation alussa 500 miljoonaa euroa. Vakuutuksenottajien iät ja sukupuolet noudattavat Suomen ikäjakaumaa ikävälillä 40-70 (ks. kuva 2). Vakuutussopimukset on ajateltu pysyviksi; toisin sanoen vakuutetut poistuvat kannasta kahden tapahtuman, takaisinoston ja kuoleman, kautta.

Takaisinostoihin liittyy vakio 3 % suuruinen vuotuinen intensiteetti. Vakuutettujen kuolevuus perustuu Suomen ikäkohorttikuolevuuteen vuodelta 2007 (HMD 2008). Tätä väestökuolevuutta on alennettu 10 % vakuutuksenottajien valikoitumisen mallintamiseksi. Olisi elegantimpaa käyttää jotakin kuolevuutta, joka sisältää sukupolviefektin, esim. henkivakuutusyhtiöiden referenssikuolevuutta K2004 (Mäkinen 2004), mutta tässä työssä pitäydytään väestökuolevuudessa laskennan nopeuttamiseksi.

Vakuutussäästöille hyvitetään 2,5 % laskuperustekorkoa ja harkinnanvaraista asiakashyvitystä 0-2 %. Vakuutussäästöistä veloitetaan 105 % kuolemanvaraturvan ylläpitämiseen tarvittava puhdas riskimaksu. Erityisiä kuormituksia ei ole. Voidaan ajatella, että yhtiö on perinyt kulujaan vastaavan palkkion vakuutussopimusten solmimisen yhteydessä.

Esimerkin vuoksi kuvassa 3 on piirretty vastuuvelan ns. purkautumisjakauma, eli vastuuvelka ajan funktiona sillä oletuksella, että asiakashyvitystä ei makseta. Nähdään, että run off tilassakin olevan yhtiön vastuut ulottuvat kauas tulevaisuuteen; henkivakuuttaminen on pitkän aikavälin bisnestä.

3.2 Sijoitustoiminta

Yhtiö sijoittaa kahteen sijoituskohteeseen, markkinaportfolioon ja riskittömään korkoon. Markkinaportfolio koostuu pörssiosakkeista, ja riskitön korko kuvaa joukkovelkakirjoja. Stabiileja jakaumia käytetään markkinaportfolion tuottojen mallintamiseen. Riskitön korko on vakio 3 % vuodessa.

Sijoittajan riskipreferenssi mallinnetaan vakavaraisuusasteen, eli toimintapääoman ja sen vähimmäismäärän suhteen, funktiona. Kun vakavaraisuusaste on yli 400 %, osakkeiden suhteellinen osuus on 50 %, mikä on lakisääteinen maksimi vastuuvelkaa kattavan omaisuuden osalta (Asetus ensivakuutusliikettä harjoittavan vakuutusyhtiön vastuuvelan katteesta 461/1995). Vararikkorajalla osakkeiden osuus on nolla. Välillä 100-400 % interpoloidaan lineaarisesti edellisten lukujen välillä. Tämä kuvaa sitä, että vakavaraisuuden huonontuessa yhtiön johto siirtänee varoja velkakirjoihin, joiden tuotto riittää kattamaan laskuperustekoron ja liikekulut.

Osakkeiden 50 % osuus saattaa vaikuttaa paljolta ottaen huomioon osakesijoitusten tunnetusti korkean volatiliteetin. Täysin tuulesta temmattu tämä luku ei kuitenkaan liene; vuoden 2007 lopussa suomalaisten henkivakuutusyhtiöiden sijoitusomaisuudesta 41 % oli sijoitettu osakkeisiin, ja 6 % lisäksi niitä riskiprofiililtaan muistuttaviin kiinteistösijoituksiin, joita tässä työssä ei mallinneta erikseen. Samanaikaisesti keskimääräinen vakavarisuusaste oli melko lähellä 400 % (Peltola 2008).

On varmasti monia mielipiteitä, mitä vakuutusyhtiön pitäisi olettaa osaketuottojen jakaumasta. Alla on kolme esimerkkiä kenties perustelluista arvauksista.

Indeksi	Tuottavuuden (*r*) otoskeskiarvo	Tuottavuuden (*r*) otoskeskihajonta
OMX Helsinki 25	0,12	0,44

Dow Jones	0,05	0,17
Lakiteksti	0,08	0,18

OMX Helsinki 25:n tunnusluvut perustuvat ko. indeksin (ja sen edeltäjän HEX 25:n) toteutuneeseen tuottavuuteen 1992-2008 (Kauppalehti 2008). Dow Jonesin tunnusluvut perustuvat maailman ehkä seuratuimman osakeindeksin Dow Jones Industrial Averagen tuottavuuteen 1958-2008 (Dow Jones 2008). Laki eläkelaitoksen vakavaraisuusrajan laskemisesta ja vastuuvelan kattamisesta (1114/2006) sisältää määräyksiä siitä, mitä eri sijoituskohteiden tuottavuudesta on oletettava, joskin vuosituottoa approksimoidaan lineaarisesti e^r-1 ≈ r. Tähän on valittu OECD-maissa listattujen osakkeiden luvut.

On selvää, että näin suppeat tarkastelut eivät voi kertoa, mikä osakesijoitusten tuottavuus on todellisuudessa. Täytyy myös huomata, että esitetyt tunnusluvut perustuvat siihen oletukseen, että jakauman ensimmäinen ja toinen momentti ovat äärellisiä (α>1 ja α=2 vastaavasti), koska muuten näiden lukujen laskemisessa ei olisi mitään mieltä.

Tässä työssä ei pyritä estimoimaan tuottavuuden ”oikeaa” jakaumaa minkään tietyn aineiston pohjalta, vaan tavoite on ainoastaan demonstroida jakaumaoletusten vaikutusta. Enemmän tai vähemmän mielivaltaiseksi lähtökohdaksi valitaan lakitekstin normaalijakauma N(0.08,0.18), eli stabiili jakauma S_2(0.18/√2,0,0.08). Simuloitava yhtiö ei ole eläkelaitos, mutta voidaan olettaa, että se harjoittaa samankaltaista pitkän aikavälin sijoitustoimintaa.

Kun lokaatioparametri μ ja dispersioparametri σ on kiinnitetty, parametreja α ja β varioidaan skenaariopohjaisesti. α:n annetaan vaihdella välillä 1.5-2 ja β:n välillä -0.3-0.3. Teoreettisesti mikään ei estäisi kokeilemasta suurempia tai pienempiä arvojakin, mutta jo α:n arvolla 1.5 stokastiikka alkaa olla melko radikaalia tavanomaiseen normaalijakaumaan verrattuna. (Arvosta α=1 lähtien jakaumalla ei ole enää ensimmäistäkään momenttia.)

Normaalijakaumaan rajoittunut tarkastelu ei tekisi mitään eroa edellä kuvattujen skenaarioiden välille, koska μ ja σ määräävät normaalijakauman yksikäsitteisesti. α:n ja β:n muuntelu voidaankin tulkita epänormaalisuusriskin tutkimiseksi.

3.3 Yhtiötason parametrit

Simulointimallissa oletetaan, että rahastojen vapautuminen ja riskimaksut vastaavat täsmälleen kuolemantapauksista ja takaisinostoista koituvaa riskimenoa. Vakuutuskantaan liittyvä riski on toisin sanoen eliminoitu. Tämä vastaa Boothin ym. (2005 s 348, 364) näkemystä henkivakuutusyhtiöiden simuloimisesta, vrt. kuitenkin (Daykin ym. 1994 s 433). Menettelyllä saavutetaan se etu, että vakavaraisuuden poikkeamat eri skenaarioiden välillä johtuvat vain ja ainoastaan osaketuottojen vaihtelusta.

Yhtiö antaa vakuutuskannalle 2 % asiakashyvityksen sillä ehdolla, että vakavaraisuussuhteen on oltava tämän jälkeenkin vähintään 400 %. Mikäli ehto ei täyty, kokeillaan asiakashyvityksen alentamista puoli prosenttiyksikköä kerrallaan. Laskuperustekorko on luonnollisesti hyvitettävä aina.

Voitonjako on mallinnettu sillä tavoin, että positiiviset tulokset rahastoidaan (kenties epärealistisesti) kasvattamaan vakavaraisuutta aina 1200 % vakavaraisuusasteeseen saakka, jolloin toimintapääoman määrä on noin 48 % vakuutusteknisestä vastuuvelasta. Jos positiivista tulosta syntyy tämän rajan yläpuolella, rahastoja puretaan siten, että vakavaraisuusaste palaa 1200 %:iin. Vapautuvat varat käytetään osinkoihin ja veroihin. Yhtiön toimintapääoma on simulaation alussa 500 % vähimmäismäärästään.

Runsaan pääomittamisen kääntöpuoli on siinä, että pääomamarkkinat eivät sisälly malliin. Toisin sanoen yhtiö ei voi ottaa pääomalainaa vararikon uhatessa.

Toimintapääoman miniminä käytetään lakisääteistä 4 % vakuutussäästöistä ja 0,03 % positiivisista kuolemanvaraturvan riskisummista (Vakuutusyhtiölaki, 521/2008). Tässä tapauksessa kuolemanvaraturvaan verrannollinen osuus on 0,0015 % suhteessa vakuutussäästöihin, eli sangen vähän. Yhtiön kiinteät kulut ovat 200 000 €, ja muuttuvia kuluja arvioidaan laskemalla 0,1 % vastuuvelasta.

Mallin "ansaintalogiikka" voidaan tiivistää seuraavaksi yhtälöpariksi, missä ensimmäinen yhtälö kuvaa toimintapääoman muutosta, ja toinen vastuuvelan muutosta:

$$\Delta\ TPO = R + V + \Lambda - X - E - D$$

$$\Delta\ VV = \delta \mathrm{VV}_{t-1} - (1 + \delta)(V + \Lambda + B).$$

Yllä R on sijoitustoiminnan tuotto, V vastuuvelasta vapautuva rahasto, Λ riskimaksu, X korvausmeno, E liiketoiminnan kulut, D voitonjako omistajille, ja B takaisinostot. Kerroin δ on vastuuvelan korkoutuminen, eli laskuperustekorko plus asiakashyvitys.

Alla on yhteenveto mallissa käytettävistä parametreista:

Taulukko 3. Simulointimallin parametrit.		
Parametri	Arvo/kuvaus	Perustelu
Vakuutussopimukset	Toistaiseksi voimassa olevia säästöhenkivakuutuksia, joihin liittyy	Likipitäen yksinkertaisin mahdollinen vakuutustuote.

	105 % kuolemanvaraturva	
Laskuperustekorko	2,5 %	Lakisääteinen maksimi.
Vastuuvelka simulaation alussa	500 miljoonaa euroa jakautuneena 21 400 vakuutuksenottajalle, joiden ikä- ja sukupuolijakauma vastaa Suomen väestöä ikävälillä 40-69 vuotta	Kenties tyypillinen säästöhenkivakuutuskanta.
Kuolevuus	Suomen väestökuolevuus 2007 minus 10 %	10 % kuolevuuden alenema kuvaa vakuutuksenottajien valikoitumista.
Takaisinostot	3,0 % vuodessa kaikissa ikäluokissa	Vakuutusten on päätyttävä takaisinoston kautta, koska ne eivät eräänny.
Liikekulut	200 000 € + 0,001×vastuuvelka, eli simulaation alussa 700 000 €	Run off -yhtiössä on pienet kulut.
Osakkeiden osuus sijoituksista	Vakavaraisuusasteen funktio $w = 0{,}5 \min\left\{ 1, \left(\frac{TPO - TPO_{\min}}{TPO_{mni}}\right)/3 \right\}$	Funktio asettaa osakkeiden osuuden 50 %:iin, kun vakavaraisuus on saavuttanut tavoitetason 400 %. Kun TPO lähestyy TPO_{min}:iä, joukkovelkakirjojen osuus kasvaa.
Riskitön korko	3,0 %	Kattaa laskuperustekoron ja liikekulut.
(Osakkeiden tuottavuuden) stabiilin jakauman α	α=1.5, 1.6, 1.7, 1.8, 1.9, 2.0	Eri skenaarioita, jotka havainnollistavat epänormaalisuusriskiä.
Stabiilin jakauman σ	0.18 / √2	Skaalaparametri, joka tuottaa lakitekstin normaalijakauman.
Stabiilin jakauman β	β=-0.3,-0.2,-0.1, 0, 0.1, 0.2, 0.3	Eri skenaarioita, jotka havainnollistavat epänormaalisuusriskiä.
Stabiilin jakauman μ	0.08	Lokaatioparametri, joka tuottaa lakitekstin normaalijakauman.
Asiakashyvitys	Maksimi joukosta {0, 0.5 %, 1.0 %,	Yhtiö pyrkii antamaan asiakkaiden

	1.5 %, 2.0 %} siten, että vakavaraisuusaste on voitonjaon jälkeen vähintään 400 %	vakuutussäästöille vakaan 4,5 % tuoton, mutta ei tingi vakavaraisuudesta.
Voitonjako omistajille	Se toimintapääoman osa, joka ylittää enimmäismäärän $12 \times TPO_{min}$, poistetaan yhtiön taseesta	Toimintapääoman enimmäismäärän yläpuolella yhtiö jakaa voittoa omistajilleen. Muutoin voitot rahastoidaan taseen vahvistamiseksi.

R-kielinen simulointimalli, Dow Jones- ja OMX-aineisto ovat saatavilla osoitteessa www.helsinki.fi/~mkarhune/SHV/ .

3.4 Vertailu yksinkertaisempaan malliin

Varsinaisen simulointimallin tarkistamiseksi sitä verrataan yksinkertaisempaan malliin, jossa tutkitaan sijoitusomaisuuden A_t ja vararikkorajan erotusta:

$$U_t = A_t - 1{,}04L_t.$$

Vararikkorajaksi on otettu vakuutussäästöt (L_t) ja niihin verrannollinen pääomavaatimus ($0{,}04L_t$). Takaisinostot ja korvauskulut on abstrahoitu pois, koska täsmälleen yhtä suuri summa vapautuu sekä sijoitusomaisuudesta että vastuuvelasta. Liikekulut, riskisummaan verrannollinen pääomavaatimus jne. on abstrahoitu pois, koska ne ovat melko vähämerkityksellisiä verrattuna sijoitustoiminnan tulokseen.

Sijoitustoiminta noudattaa varsinaisen simulointimallin strategiaa sen tavoitevyöhykkeellä ja normaalisilla osaketuotoilla. Tällöin on voimassa:

$$\frac{A_t}{A_{t-1}} - 1 = \frac{0{,}03 + e^r - 1}{2},$$

missä r noudattaa lakitekstin normaalijakaumaa N(0.08,0.18). Kuten varsinaisessa mallissa, tällöin ei myöskään jaeta voittoa omistajille.

Vakuutusäästöt kasvavat deterministisesti kaavan

$$L_t = 1{,}045^t L_0,$$

mukaan, eli samoin kuin varsinaisen mallin vakuutussäästöt toimintapääoman tavoitevyöhykkeellä. Tässäkin tapauksessa vakavaraisuussuhde on simulaation alussa 500 %, jolloin

$$A_0 = 1{,}2L_0 .$$

Kokonaisuutena tämä malli pyrkii kuvaamaan samanlaista liiketoimintaa, kuin varsinainen malli, mutta mahdollisimman yksinkertaisesti ja läpinäkyvästi, ja ilman strategiamuutosten kaltaisia sekoittavia tekijöitä. Tämän mallin pitäisi antaa vähintään yhtä suuria vararikkotodennäköisyyksiä, kuin varsinaisen mallin, koska tässä tapauksessa yhtiö toimii sokeasti reagoimatta solvenssimarginaalin heikkenemiseen.

4. Tulokset

4.1 Tulosten virherajat

Simulointimallin avulla voidaan laskea muitakin muuttujia, mutta tässä työssä tarkastellaan edellä kuvatun yhtiön kumulatiivista vararikkotodennäköisyyttä eli ajan funktiota

$$\Psi_t = \mathbf{P}\{\text{ vararikko on tapahtunut vuonna } T \le t\ \}.$$

Simulointi toistetaan kullakin jakaumaoletuksella, eli kullakin parilla (α,β), 10 000 kertaa. Simulaation eri realisaatiot muodostavat riippumattoman otoksen. Kunakin vuonna t=0,...,25 tarkastellaan vararikkoon johtaneiden realisaatioiden lukumäärää, joka on riippumattomuuden nojalla binomijakautunut satunnaismuuttuja parametrilla $(10^4, \Psi_t)$. Binomijakauman keskihajonnalle pätee

$$\sigma_X = n^{0,5}\,\Psi_t^{0,5}(1-\Psi_t)^{0,5} \le n^{0,5} / 2,$$

jolloin vararikkotodennäköisyyden luonnolliselle estimaattorille pätee

$$\mathbf{D}\ (\#\text{ vararikot } / \text{ n}) = \sigma_X / \text{n} \le \text{n}^{0,5} / 2\text{n} = 1 / 200.$$

Kun $0{,}01 < \Psi_t < 0{,}99$, parametrilla $(10^4, \Psi_t)$ binomijakautunut satunnaismuuttuja on melko lähellä normaalijakautunutta muuttujaa, joten vararikkotodennäköisyyden 90 % luottamusväli saadaan normaaliapproksimaatiosta:

$$(\#\text{ vararikot } / \text{ n}) \pm 1{,}96 / 200 = (\#\text{ vararikot } / \text{ n}) \pm 1 \text{ \%-yks.}$$

4.2 Vararikkotodennäköisyydet

Kuvassa 4 on esimerkin vuoksi piirretty viisikymmentä vakavaraisuusasteen realisaatiota. Vararikko nähdään kymmenessä tapauksessa, mutta muiden realisaatioiden toimintapääomat näyttävät keskittyvän lähelle ylärajaa. Lähellä toimintapääoman alarajaa kuvaajat muistuttavat eksponenttikäyrää, koska sijoitusstrategian muuttaminen vähentää stokastisuutta.

Varsinaiset tulokset on esitetty kuvissa 5 ja 6. Ensinnäkin havaitaan, että vararikkotodennäköisyydet ovat kiusallisen korkeita. On kuitenkin muistettava, että tässä on kysymyksessä run off -simulaatio, jossa yhtiö ei voi hankkia lisää pääomaa tai pienentää sen tarvetta jälleenvakuutuksen avulla. Kohdan 3.4 mukaisen satunnaiskulun tuottamat luvut tukevat näitä tuloksia vahvistamalla sen käsityksen, että vararikkotodennäköisyys on joka tapauksessa korkea. Alla on yhteenveto kohdan 3.4 satunnaiskulun ja varsinaisen simulointimallin log-normaalin version antamista tuloksista:

Taulukko 4. Vararikkotodennäköisyyksiä eri ajanhetkillä, α=2.

Malli	t=5 vuotta	t=10 vuotta	t=15 vuotta	t=20 vuotta	t=25 vuotta
Satunnaiskulku	24 %	34 %	38 %	41 %	43 %
Simulointimalli	7 %	11 %	14 %	16 %	18 %

Taulukon 4 tunnusluvut on laskettu kohdan 4.1 menetelmällä ja 10 000 otoskoolla. Taulukosta havaitaan, että mallinnettu yhtiö menestyy paljon paremmin, kuin sokea satunnaiskulku. Tämä johtuu siitä, että simuloidulla yhtiöllä on mahdollisuus reagoida vakavaraisuuden heikkenemiseen muuttamalla asiakashyvityksiä ja sijoitusstrategiaa.

Kuvista 5 ja 6 nähdään, että osaketuottojen jakauma vaikuttaa huomattavasti vararikon todennäköisyyteen. Tämä yhteys ei voi johtua otantavaihtelusta. Kuten edellisessä kohdassa todettiin, tulosten virherajat ovat luokkaa ±1 %-yksikkö. Parametrilla α on erittäin merkittävä vaikutus. Lisäksi parametrilla β on kullakin α:n arvolla pienempi, mutta havaittava vaikutus.

5. Pohdintaa

Työssä käytettyä simulointimallia voidaan kritisoida monin tavoin. Yhtiön strateginen toiminta (voitonjako, sijoitustoiminta, toiminta vararikon uhatessa) pitäisi pystyä mallintamaan paremmin. Toisaalta tulokset osoittavat selvästi, että osaketuottojen jakaumaoletuksella on merkitystä työssä käytetyn mallin puitteissa. Poikkeamat α:n arvosta 2 (log-normaaleista tuotoista) kasvattavat vararikon todennäköisyyttä jyrkästi. Luultavasti sama ilmiö pystytään havaitsemaan monimutkaisemmissa ja realistisemmissa malleissa.

Ovatko osakkeiden hinnat log-stabiileja prosesseja? Luultavasti eivät ole. Voi olla, että nämä prosessit sopivat aineistoon sopivilla parametrien arvoilla. Toisaalta voi olla, että poikkeamat log-normaalista jakaumasta johtuvat ”mustista joutsenista”, ennakoimattomasta satunnaisuudesta, jota on mahdoton hallita kvantitatiivisesti. Musta joutsen voisi olla esimerkiksi maailmanlaajuinen finanssikriisi, joka painaa osakekurssit pitkäksi aikaa epärationaalisen alas. Nassim Talebin näkökulmasta stabiilit jakaumatkin ovat hyvänlaatuinen ”harmaa joutsen”, koska niitä ylipäänsä voidaan käsitellä matemaattisesti (Taleb 2007).

Joka tapauksessa stabiilien jakaumien avulla on saavutettavissa tiettyjä etuja normaalijakaumaan nähden, eikä näiden jakaumien näennäinen vaikeus saisi olla este niiden soveltamiselle. Vaikka stabiileja jakaumia ei osata käsitellä analyyttisesti, niitä voidaan simuloida suhteellisen helpoilla numeerisilla menetelmillä.

Lähteet

Booth P., Chadburn R., Haberman S., James D., Khorasanee Z., Plumb R.H., Rickayzen B. (2005): *Modern Actuarial Theory and Practice*. 2. painos. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

Daykin C.D., Pentikäinen T. ja Pesonen M. (1994): *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton.

Dow Jones Indexes (2008): *Dow Jones Averages*. djindexes.com, http://www.djindexes.com (viitattu 12.12.2008).

The Human Mortality Database (HMD) (2008): *Data by Country/Area*. mortality.org, http://www.mortality.org (viitattu 12.12.2008).

Kauppalehti (2008): *Indeksi: OMX Helsinki 25*. kauppalehti.fi, http://www.kauppalehti.fi/5/i/porssi/porssikurssit (viitattu 12.12.2008).

Mandelbrot, B.B. (1963): *The variation of certain speculative prices*. Journal of Business 36: 394-419.

Mandelbrot, B.B. (2004): *The (Mis)behavior of Markets*. Basic Books, New York.

Mäkinen, M. (2004): *Referenssikuolevuus henkivakuutusyhtiöille*. Working papers, Suomen Aktuaariyhdistys, 69.

Peltola, J. (2008): *Vakuutusyhtiöt 2007*. Vakuutusvalvontaviraston julkaisusarja: Tilastot 2008:3.

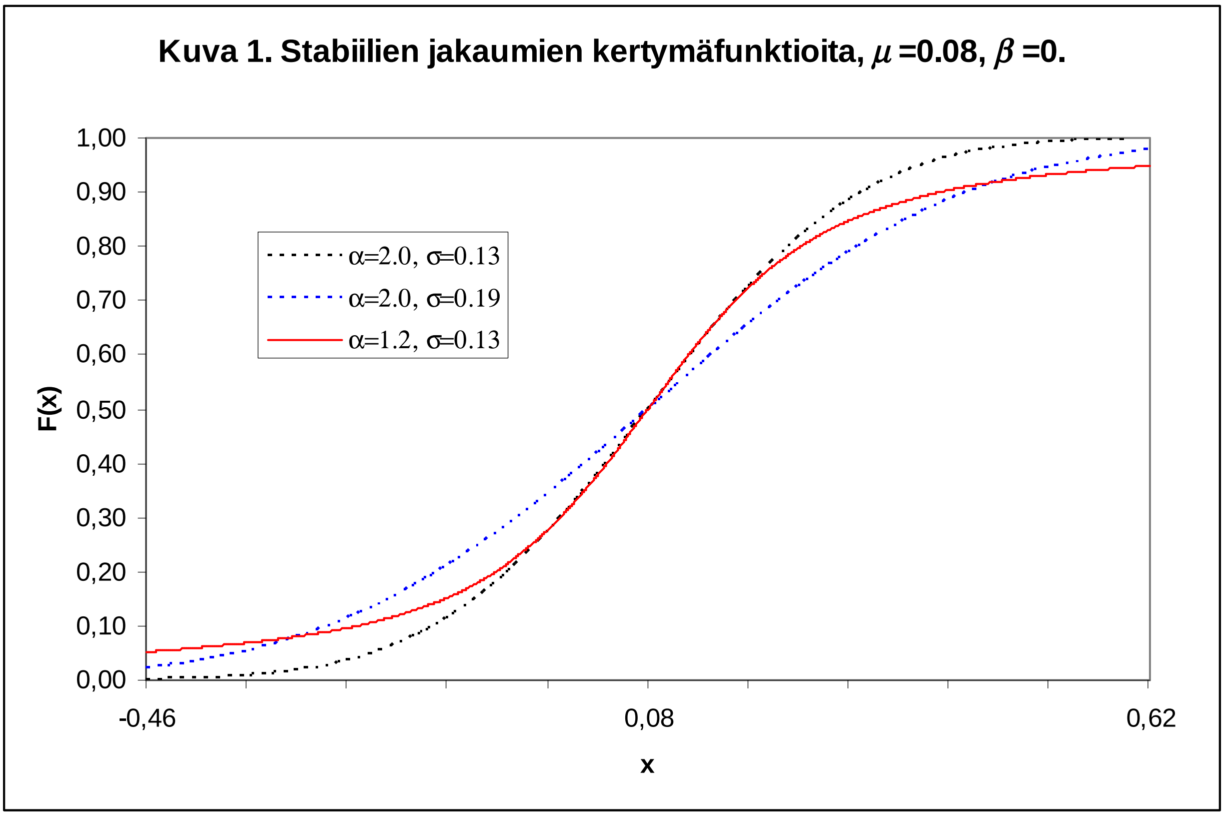
Rachev, S. ja Mitnik, S. (2000): *Stable Paretian Models in Finance*. Wiley, New York.

Samorodnitsky, G. ja Taqqu, M.S. (1994): *Stable Non-Gaussian Random Processes*. Chapman & Hall, New York.

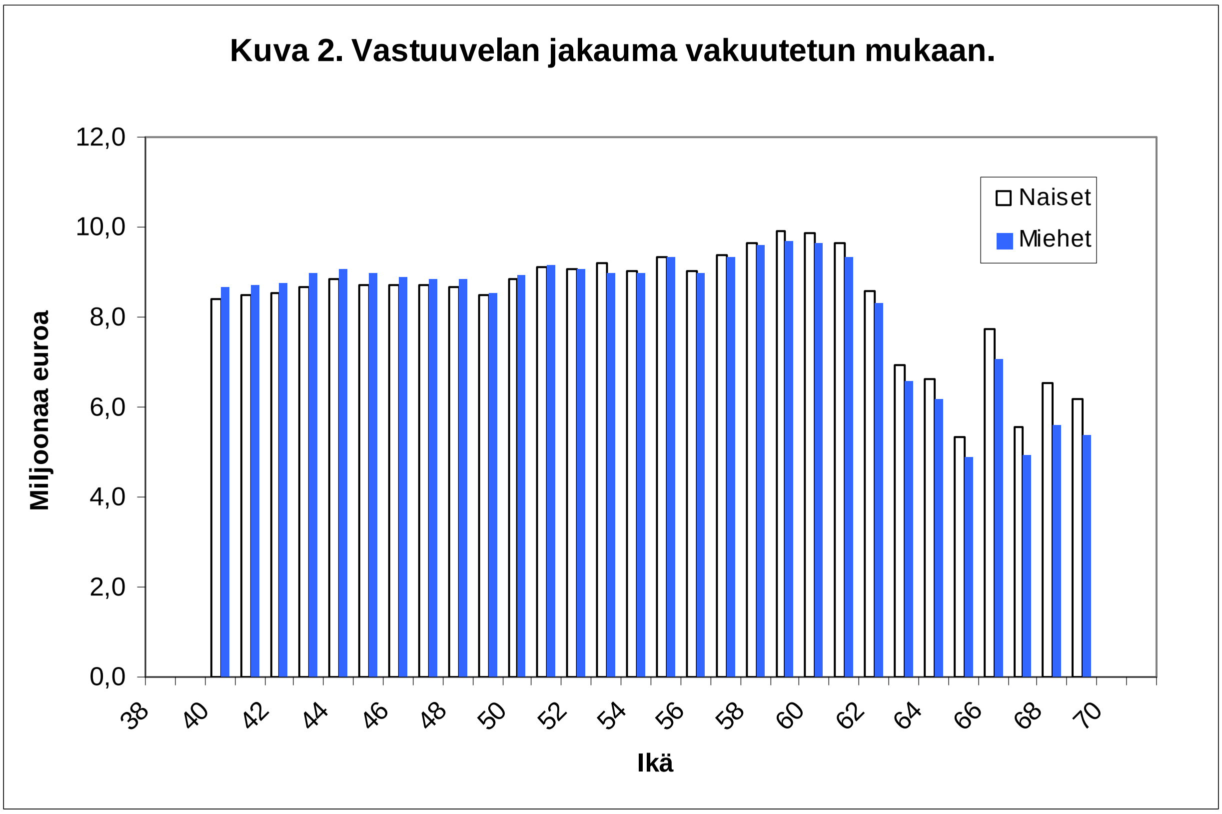
Taleb, N.N. (2007): *Musta Joutsen - Erittäin epätodennäköisen vaikutus*. Terra Cognita, Helsinki.

Weron, R. (1996): *On the Chambers-Mallows-Stuck method for simulating skewed stable random variables*. Statistics and Probability Letters 28: 165-171.

Kuvat

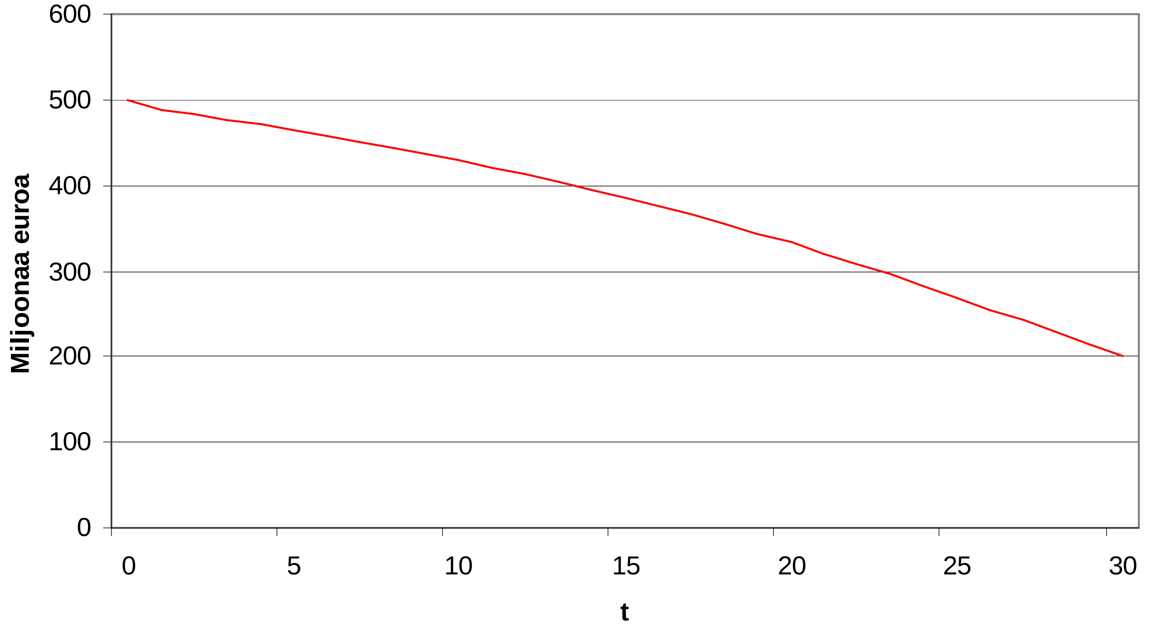


Kuva 1. Stabiilien jakaumien kertymäfunktioita, μ =0.08, β =0.
α=2.0, σ=0.13
α=2.0, σ=0.19
α=1.2, σ=0.13
F(x)
1,00
0,90
0,80
0,70
0,60
0,50
0,40
0,30
0,20
0,10
0,00
-0,46
0,08
0,62
x

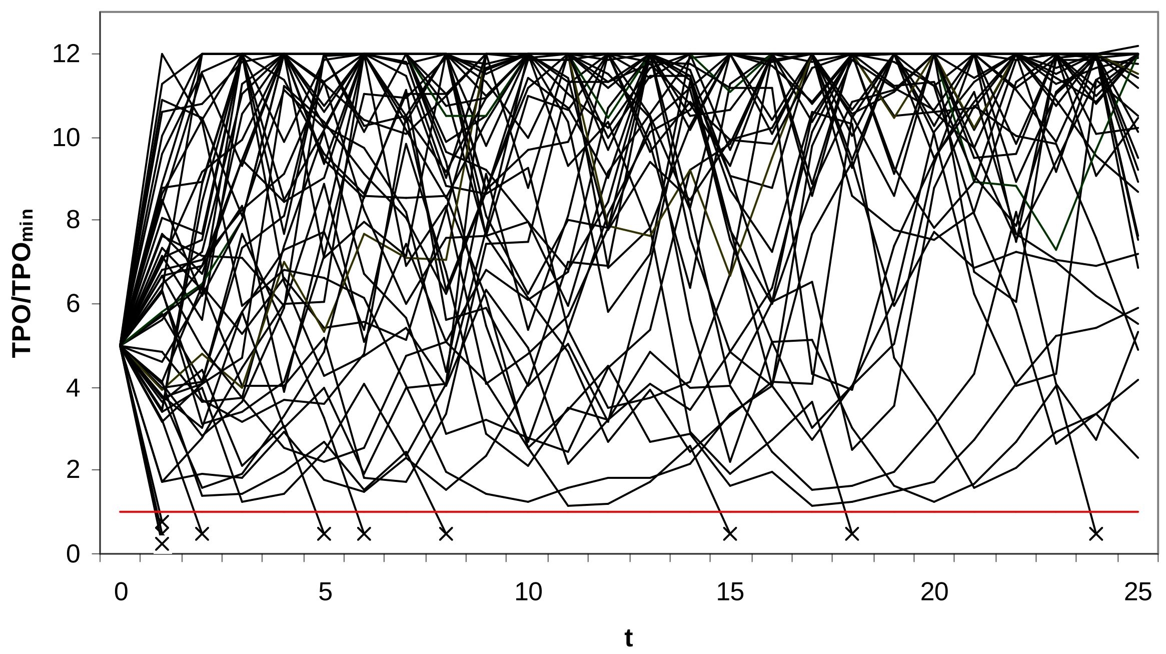


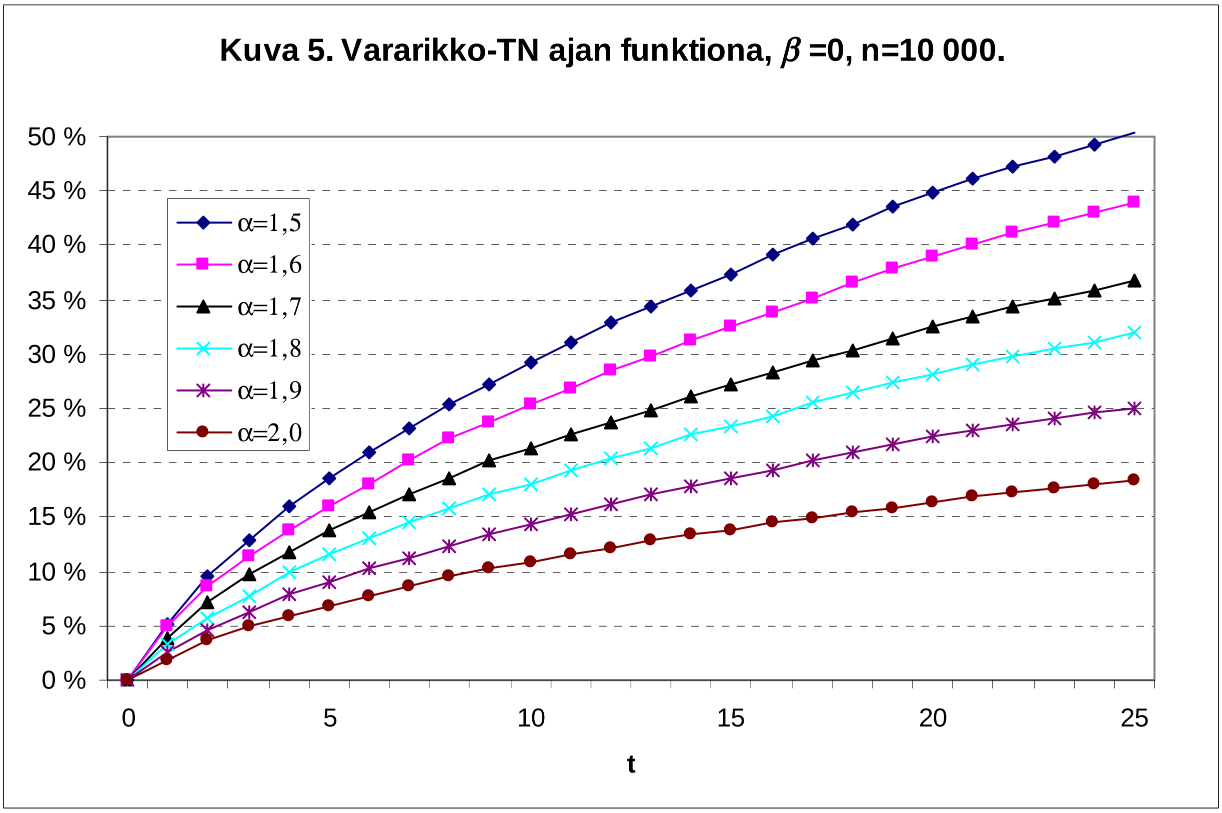
Kuva 2. Vastuuvelan jakauma vakuutetun mukaan.
Naiset
Miehet
Miljoonaa euroa
12,0
10,0
8,0
6,0
4,0
2,0
0,0
38
40
42
44
46
48
50
52
54
56
58
60
62
64
66
68
70
Ikä

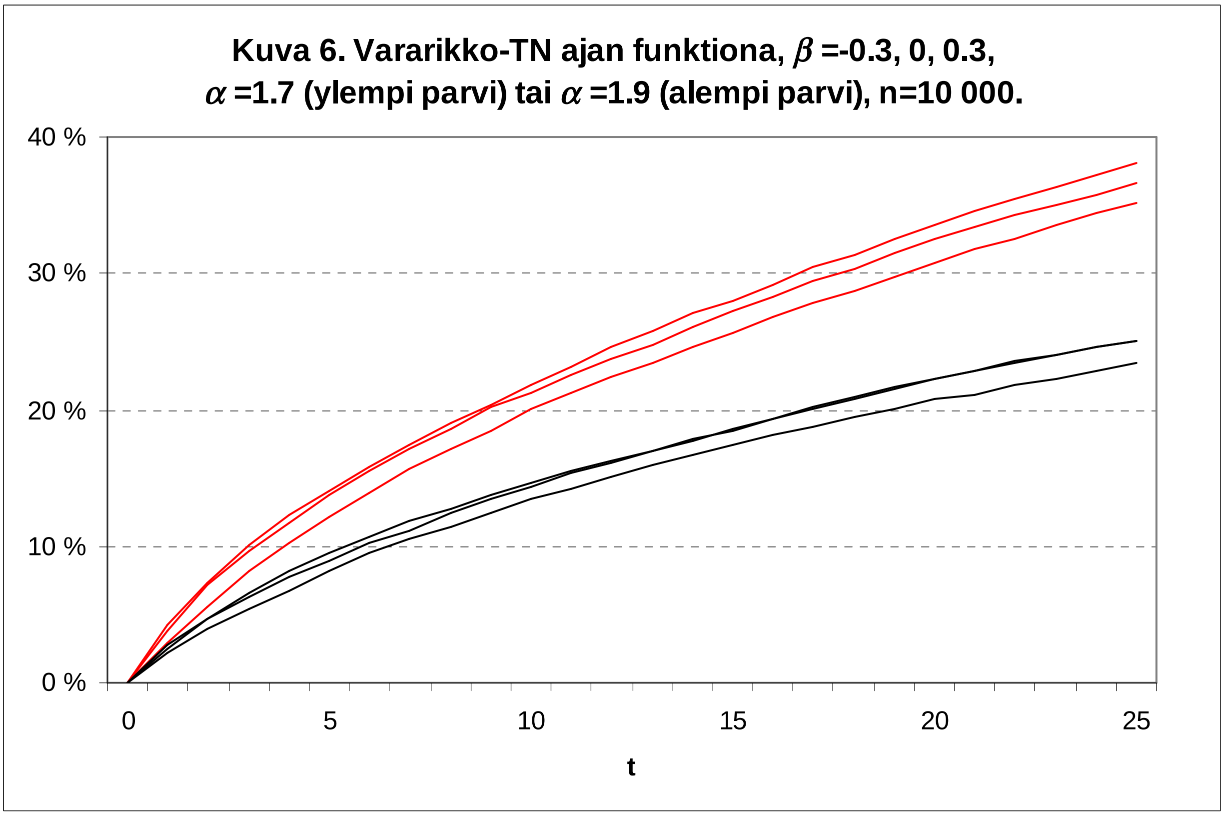
Kuva 3. Vastuuvelka ajan funktiona, ei asiakashyvityksiä.



Kuva 4. Vakavaraisuusasteen realisaatioita, α =2, β =0, n=50.




Kuva 5. Vararikko-TN ajan funktiona, β =0, n=10 000.
50 %
45 %
40 %
35 %
30 %
25 %
20 %
15 %
10 %
5 %
0 %
α=1,5
α=1,6
α=1,7
α=1,8
α=1,9
α=2,0
0
5
10
15
20
25
t


Kuva 6. Vararikko-TN ajan funktiona, β =-0.3, 0, 0.3,
α =1.7 (ylempi parvi) tai α =1.9 (alempi parvi), n=10 000.
40 %
30 %
20 %
10 %
0 %
0
5
10
15
20
25
t