

WORKING PAPERS ISSN 0781-4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

70
Pesonen Janne

Sijoitusten tuottoon kytketyt
säästövakuutussopimukset IAS-tyyppisessä
kirjanpidossa

(2004)

Sisältö

1	Johdanto	1
1.1	Ajankohtaista	1
1.2	Vastuuvelan käypä arvo	2
1.3	Käyvän arvon kassavirrat	3
1.3.1	Tulevat korvaukset	4
1.3.2	Tulevat hoitokulut	4
1.3.3	Tulevat maksut	5
1.3.4	Riskimarginaali	5
1.3.5	Pääoma-arvo	6
1.4	Vastuun erittely ja oma pääoma	6
1.5	Voittojen tuloutuminen	7
2	Skenaariotekniikka	9
2.1	Deflatointi	9
2.2	Analyttiset ratkaisut	10
2.3	Stokastisten skenaarioiden tekniikka	12
3	Sijoitusmalli ja sen deflaattori	15
3.1	Sijoitusmalli	15
3.2	Yhtiön sijoitussalkku	16
3.3	Bondituotto	16
3.4	Deflaattori	17
3.5	Kalibrointi	19
3.6	Empiirinen deflaattori	20
3.6.1	Tuotto- ja deflaattoridatan muodostaminen	20
3.7	Koeasetelma	21
4	Sijoitussidonnainen vakuutus	25
4.1	Perustapaus	25
4.2	Kuolevuus	26
4.3	Riski- ja kustannusliikkeen ylijäämien erottelu	27
4.4	Kuormituskatto	30
4.5	Tulevat hoitokulut	31

5	Perustekorkoinen vakuutus	33
5.1	Yhden askeleen esimerkki	33
5.1.1	Terminologiaa	35
5.1.2	Tase-erittelyitä	36
5.1.3	Nettovaraosuuden tulkinta	38
5.2	Esimerkki	39
5.2.1	Laskentatuloksia	41
5.3	Herkkyysanalyysia	42
5.3.1	Vakavaraisuuden ja hyvityspolitiikan vaikutus	42
5.3.2	Sijoitussalkun riskillisyyden vaikutus	43
5.3.3	Loppuun asti pidettävät sijoitukset	44
5.4	Paluu esimerkkiin	45
6	Erityiskysymyksiä	47
6.1	Perustekorkoinen vakuutuskanta	47
6.1.1	Maturiteettiositus	49
6.2	Rationaalinen vakuutuksenottaja	50
A	Black-Scholes deflaattori	53
B	Vektoriautoregressiivinen malli	55
C	Historiadata	57
D	Estimoitu malli	59
E	Sijoitustuotot	63

Luku 1

Johdanto

1.1 Ajankohtaista

Tässä työssä tarkastellaan sijoitusten tuottoon kytkettyjen (*performance-linked*) vakuutus sopimusten käyvän arvon (*fair-value*) periaatteen mukaista vastuuvetä IAS -tyyppisessä kirjanpito ympäristössä.

Uusi lopullinen kirjanpito standardi on vakuutus sopimusten osalta vielä periaatelunnonksen (*draft statement of principles, DSoP [4]*) asteella. IAS -laskentaan¹ siirtyminen tapahtuu kahdessa vaiheessa. Ensimmäisessä vaiheessa tilivuodesta 2005 eteenpäin sovelletaan taseen vastattavaa puoleen pääasiassa kansallisia voimassa olevia tilinpäätöskäytäntöjä muutamien poikkeuksien ja lisäyksien. Täyteen käyvän arvon periaatteeseen siirrytään vastuuvetä osalta vasta projektin toisessa vaiheessa. Tämän odotetaan tapahtuvan aikaisintaan tilivuonna 2007.

Heinäkuussa 2003 julkistettiin vaiheen I standardia edeltävä luonnos (*exposure draft*). Vaihetta I koskeva standardi IFRS4 ([6]) julkistettiin maaliskuussa 2004. Perustavaa laatua olevat kysymykset on lykätty vaiheeseen II, jonka osalta virallista luonnosta odotetaan alkuvuonna 2005.

Vaiheen II mukainen vastuuvetä käypä arvo ja sen määrittämisessä käytettävät kassavirrat ovat edelleen tarkemmin määrittelemättä. Pääperiaatteet toki tunnetaan, mutta harmaita alueita on paljon. Henkiyhtiöiden osalta sijoitusten tuottoon kytkettyjen - sijoitussidonnaisten ja ylijäämän jakoon osallisten - sopimusten käsittely on keskeisessä asemassa, muodostuuhin henkiyhtiöiden vastuuvetä lähes yksinomaan näistä sopimuksista. Tilannetta hankaloittaa se, että tuottokytettyjen sopimusten käsittelystä ei ole olemassa virallista materiaalia. Periaateluonnos sisältää vain otsikkotasolla luvun 7 *Performance-linked insurance contracts*. Kyseisen osion luonnos (siis luonnoksen luonnos) on kuitenkin tarkoituksellisesti vuodettu alan sisällä kommentoitavaksi. Tähän osioon ja sen kommentaareihin perustuvat myös tässä työssä tehdyt tulkinnot.

¹virallisesti IFRS = International Financial Reporting Standard

Joulukuussa 2003 standardia valmisteleva IAS-Board ilmoitti, että vaiheen II työstäminen aloitetaan standardin I osan valmistumisen jälkeen puhtaalta pöydältä. Tämä tarkoittaa sitä, että kaikki periaateluonnoksen linjaukset voidaan kyseenalaistaa. On siten mahdollista, että luonnos ja sen tuottokytkettyjä sopimuksia käsittelevä julkaisematon osa muuttuvat vielä huomattavasti matkallaan uudeksi luonnokseksi ja edelleen standardiksi. Siitä työn nimeen sisältyvä varaus. Luonnostasaisen lähdemateriaalin lisäksi varaus käsittää kirjoittajan tekemät tulkinnot.

Toisaalta standardin I vaiheen (IFRS4) harkinnanvaraista ylijäämän jakoa (*discretionary participation*) käsittelevät kohdat sisältävät paljon yhtymäkohtia DSoPin lukuun 7. IFRS4 jättää kyllä vaiheessa I ovet avoimeksi periaateluonnoksen viitoittamaan suuntaan.

1.2 Vastuuvelan käypä arvo

DSoP Principle 3.1 "*Fair value* is the amount for which an asset could be exchanged or a liability settled between knowledgeable, willing parties in an arm's length transaction. In particular, the fair value of a liability is the amount that the enterprise would have to pay a third party at the balance sheet date to take over the liability."

Periaateluonnoksen käyvän arvon määritelmä ei suoraan ilmaise hypoteettisen vastuunsiirron olosuhteita. Kirjanpidon jatkuvuusperiaate (*going concern*) pätee kuitenkin IAS -aikanakin. Vastuusta ei siten käydä kauppaa *run-off* -olosuhteissa. Kuvitteellisen vastaanottavan osapuolen ei voida ajatella selvittävän vastuutaan minimivelvoittein. Vastaanottaja on sitoutunut samoihin vakuutuksenottajien taholta nouseviin kohtuullisiin odotuksiin kuin luovuttajakin. Tällä on erityisesti merkitystä ylijäämän jakoon osallisten sopimusten käypää arvoa määritettäessä. Jatkuvuusperiaatteen täydellinen toteutuminen edellyttää itse asiassa sitä, että vastaanottava taho on siirron jälkeen täsmälleen samassa asemassa kuin luovuttava taho ennen siirtoa. Vastuunsiirron kauppatapahtuma on näin ollen vain käsitteellinen apuväline. Tällöin ollaankin jo hyvin lähellä periaateluonnoksen yksikkökohtaisen arvon määritelmää.

DSoP Principle 3.1 "*Entity-specific value* represents the value of an asset or liability to the enterprise that holds it, and may reflect factors that are not available (or not relevant) to other market participants. In particular, the entity-specific value of an insurance liability is the present value of the costs that the enterprise will incur in settling the liability with policyholders or other beneficiaries in accordance with its contractual terms over the life of the liability."

Tammikuun 2003 IASB -päivityksessä otettiin se kanta, että näistä määritelmistä nimenomaan *fair-value* on se, jota pääsääntöisesti sovelletaan vaiheen II IAS -tilinpäätöksissä. Samalla kuitenkin korostetaan, että useimmissa

tapauksissa periaatteet ovat identtisiä ja johtavat samaan lopputulokseen. Yksikkökohtaisia (lue: yhtiökohtaisia) oletuksia voidaan kuitenkin käyttää, jos laajempaa markkinainformaatiota ei ole saatavilla tai markkinainformaation hankkiminen vaatii kohtuutonta vaivannäköä. Käyvän arvon periaatteen seurauksena todetaan, että

IASB Update 1/2003 "Expectations about the performance of assets should not be incorporated into the measurement of an insurance contract, directly or indirectly (unless the amounts payable to a policyholder depend on the performance of specific assets)"

Henkivakuutusyhtiöiden osalta suluissa esitetty pääsäännön poikkeus sisältää käytännössä lähes koko vastuuvelan. Ulkopuolelle jäävät oikeastaan vain ylijäämän jakoon osallistumattomat riskivakuutussopimukset. (Maaliskuussa 2004 ilmestynyt vaihetta I koskevan IFRS 4 standardin liitteen *Basis for Conclusions* osio *Tentative conclusions for phase II* toistaa saman tekstin). Esimerkiksi perustekorkotakuun tasearvoa arvioitaessa on otettava huomioon vastuuta kattavan omaisuuden luonne ja yhtiön sijoituspolitiikka. Henkivakuutusyhtiöihin sovelletaan yksikkökohtaista hintaa siten ainakin näiltä osin.

1.3 Käyvän arvon kassavirrat

Vastuuvelan käypä arvo saadaan tilinpäätöshetken vakuutuskannan tulevaisuudessa generoimien kassavirtojen markkinakorkoisen pääoma-arvon odotusarvona:

- + Tulevien korvausten pääoma-arvon odotusarvo
- + Tulevien hoitokulujen pääoma-arvon odotusarvo
- (– Tulevien maksujen pääoma-arvon odotusarvo)
- + Riskimarginaali (market value margin, MVM)
- = Vastuuvelan käypä arvo

Merkillepantavaa on, että

- vastuuvelka lasketaan puhtaasti yhtiöstä ulos maksettaviin kassavirtoihin perustuen (IAS -terminologiassa *exit-value principle*)
- kassavirrat realisoituvat tulevaisuudessa, joten laskentaperuste on täysin prospektiivinen.
- diskonttaus tapahtuu tilinpäätöshetken markkinakorkoja käyttäen. Kassavirran ajoitus ratkaisee käytettävän koron. Diskonttauksessa käytetään siten koko korkokäyrää lyhyistä pitkiin korkoihin.

- diskontattavien kassavirtojen nykyarvo on stokastinen jakauma, josta taseeseen päätyy odotusarvo, eli keskiarvo tulevaisuutta kuvaavien satunnaisskenaarioiden yli. Satunnaisia ovat sekä kassavirtojen suuruus että niiden ajoittuminen. Laskentatavan johdosta myös mahdollisille - vain joissakin skenaarioissa toteutuville - riskeille lasketaan toteutumistodennäköisyyksillä painotettu hinta, joka päätyy taseeseen yhtiön vastattavaksi.

1.3.1 Tulevat korvaukset

Tuleviin korvauksiin sisältyvät kaikki nykyisille sopimuksille maksettavat edut: määräiässä erääntyvät säästösummat, eläkkeet, takaisinostot ja säästönnostot sekä erilaiset riskikorvaukset, kuten kuolintapauksessa maksettavat summat.

Korvausmenon ennakointi edellyttää erilaisten arvionvaraisten intensiteettien käyttöä. Perinteisten riski-intensiteettien lisäksi on tehtävä kokonaismarkkina- tai yhtiön omaan historiaan perustuvia oletuksia esimerkiksi takaisinosto- ja säästönnostointensiteeteistä. Oletettavasti on otettava myös huomioon näiden intensiteettien ja sijoitusmarkkinan välinen riippuvuussuhde.

Sijoituskohteen tuotosta riippuvien sopimusten osalta on määriteltävä kassavirtojen ja sijoitusten tuottokehityksen välinen laskennallinen kytkös. Sijoitussidonnaisille vakuutuksille tämä on suhteellisen suoraviivaista. Perustekorkeisten vakuutusten käsittely edellyttää laskennallisen asiakashyvityspolitiikan määrittelyä ja julkistamista. Laskennallinen hyvityspolitiikka määrää kohtuullisen yksikäsitteisesti vakuutuslajeille jaettavien hyvitysten tason esimerkiksi sijoitustuottojen, vakavaraisuusaseman ja aiemmin myönnettyjen hyvitysten funktiona. Vaihtoehtoisesti voidaan kiinnittää osittamattoman ylijäämän jakoperuste, jolla määrätään vakuutuksenottajien ja omistajien suhteelliset osuudet. Tämä ei tarkoita sitä, että yhtiön olisi jaettava hyvityksiä täsmälleen ennalta määrätyn kaavan mukaisesti. Julkistetun politiikan on oltava kuitenkin linjassa toteutuneen historian kanssa, joten liikkumavara jää pieneksi.

Maksettavien etujen osalta ulosmaksettavat kassavirrat syntyvät pääasiallisesti sijoitusten tuottokehityksellä korkoutetusta tilinpäätöshetken rahastovastuusta, mutta myös nykykannan tulevasta maksutulosta aiheutuvas- ta korvausmenosta siltä osin kuin maksutulo otetaan huomioon lopullisessa standardissa.

1.3.2 Tulevat hoitokulut

Tulevilla hoitokuluilla tarkoitetaan kokonaisliikekuluja, joista on vähennetty investointiluonteiset menot ja tulevien sopimusten hankintakulut. Tilinpäätöshetkellä maksamattomat hankintakulut ja jo tehtyjen investointien kuoletukset on sisällytettävä hoitokuluihin. Koska tulevaisuudessa myytävät sopimukset eivät kuulu laskennan piiriin, on kustannusliikkeen prospektiivisen tasapainon säilymiseksi vähennettävä tulevien hoitokulujen määrää kannan

kappalemäärän pienentyessä. Toisaalta inflaatiovauhtia voitaneen pitää kasvun minimitasona yhä jatkuvien sopimusten tulevia hoitokuluja arvioitaessa. Jos hoitokulujen kehitys sidotaan inflaatioon, on vastuovelkaa arvioitaessa otettava huomioon stokastisen diskonttotekijän ja inflaation välinen korrelaatio. Lisäksi monet henkivakuutustuotteet sisältävät suoraan inflaatiokehitykseen sidottuja komponentteja. On voitu esimerkiksi sopia, että sopimuksen päättyessä maksettavaa säästösummaa korotetaan vuosittain elinkustannusindeksillä tai sopimukseen voi sisältyä kiinteä kuluerä, jonka tasoa yhtiöllä on oikeus korjata elinkustannusten kehitystä vastaavasti. Tällaisten sopimusten vastuovelkaa arvioitaessa on käytettävä stokastista mallia, joka sisältää sijoitustuottojen lisäksi myös inflaation.

1.3.3 Tulevat maksut

Tulevat maksut nykyisistä sopimuksista otetaan IAS -periaateluonnoksen mukaan huomioon silloin, kun ne lisäävät vastuovelkaa. Näin käy, jos tulevista maksuista koituvan korvausmenon pääoma-arvo ylittää maksujen pääoma-arvon odotusarvoisesti. On esimerkiksi voitu sopia jostakin sopimuksen päättymisen yhteydessä realisoituvasta huomattavasta edusta, jonka edellytyksenä on maksusuunnitelman noudattaminen. Tällaisessa tapauksessa tulevan maksutulon kriteerien täyttyminen on ehkä helppo arvioida. Sen sijaan joustavamaksuisten (*recurrent single premium*) säästövakuutustuotteiden kohdalla ei ole yksikäsitteisesti selvää milloin ylitys tapahtuu. Yhtiölle ylijäämäisen yksittäisen sopimuksen kohdalla ehto voi täytyä, jos sopimukseen sisältyy asiakkaan hyväksi optioluonteinen etu, joka realisoituessaan reilusti ylittää tulevista maksuista koituvan ylijäämän. Säästövakuutuksiin liittyvinä esimerkkeinä voidaan mainita oikeus maksaa lisää perustekorkoiseen vakuutukseen korkotasosta riippumatta. Aihepiirin rajaamiseksi tämän työn esimerkeissä ei käsitellä tulevaa maksutuloa.

1.3.4 Riskimarginaali

Vastuuvelan kassavirtaerät ovat parhaaseen tietoon perustuvia riskineutraaleita arvioita. Vakuutusyhtiöt (ja sijoittajat yleensä) ovat kuitenkin riskiä karttavia toimijoita. Vastuuvelan käyvän arvon määrittely pohjautuu kahden osapuolen väliseen vastuunsiirron kauppatapahtumaan. Vastuun vastaanottava osapuoli vaatii riskipreemion parhaan arvion mukaisen kauppahinnan päälle. Tästä riskipreemiosta käytetään tässä työssä nimitystä riskimarginaali. IAS -luonnoksessa riskimarginaali tunnetaan nimellä *market-value margin* ja akronyymillä MVM.

IASin piirissä on käyty debattia siitä pitäisikö marginaali lisätä diskonttokorkoihin vai kassavirtoihin. Kassavirtapuoli on voitolla. Kassavirtoihin lisääminen tarkoittaa esimerkiksi sitä, että kuolemanvaralta otetun vakuutuksen kohdalla kuolevuus arvioidaan jonkin verran todellista (parhaan arvion mukaista!) kuolevuutta korkeammaksi. Vastuuelvakaerittelyssä tämän johdosta tapahtuva vastuun

lisäys esitetään omana eränään. Aihepiirin rajaamiseksi tässä työssä oletetaan, että riskimarginaali = 0.

1.3.5 Pääoma-arvo

Kassavirtojen pääoma-arvo lasketaan tilinpäätöshetken markkinakoroilla. Korkokäyrä estimoidaan mahdollisimman pieniriskisistä lainapapereista.

Sijoitusten tuottokehityksestä riippumattomat kassavirrat voidaan diskontata suoraan markkinakorkokäyrää käyttäen. Sijoitusten kehityksestä riippuvat kassavirrat on sen sijaan diskontattava sijoitusten kanssa korreloivaa stokastista diskonttaustekijää - deflaattoria - käyttäen.² Deflaattorin tärkeimmät ominaisuudet ovat

1. Deflaattorin odotusarvo on yhtä suuri kuin yksikön suuruisen nollakuponkilainan hinta kaikilla maturiteeteilla.
2. Deflaattorin ja portfoliotuoton tulon odotusarvo on yksi - maturiteetista ja portfolion allokaatiosta riippumatta.

Ensimmäisen ehdon mukaan bondihinnat ja siten korkokäyrä saadaan deflaattorin odotusarvona. Toisen ehdon mukaan sijoitusinstrumentit ovat oikein hinnoiteltuja ja markkinoilla ei siten ole arbitraasimahdollisuuksia. Jos diskontattu tuotto olisi suurempi kuin yksi voisi sijoittaja tehdä riskitöntä voittoa ottamalla velkaa ja ostamalla kyseistä portfoliota. Jos taas tulo olisi ykköstä pienempi voisi portfoliota lyhyeksi myymällä ja korkoon sijoittamalla rikastua riskittömästi.

Koska ensimmäisen ominaisuuden mukaan deflaattori on yhtenevä markkinakorkojen kanssa, voidaan myös sijoitusten kanssa korreloimattomat kassavirrat diskontata stokastisesti lopputuloksen siitä muuttumatta. Sopimuksen kaikki kassavirrat voidaan siten diskontata samaa deflaattoritekniikkaa käyttäen. Tämä on käytännöllistä, koska kassavirtojen erottelu korreloiviin ja korreloimattomiin saattaa olla teknisesti hankalaa.

1.4 Vastuun erittely ja oma pääoma

IAS periaateluonnoksen mukaan omaa pääomaa on taseen velkapuolella kaikki mikä ei ole vastuovelkaa. Oma pääoma saadaan siten, kun taseen vastaavista vähennetään vastuovelka käypään arvoon arvostettuna. Vastaavaa puoli on käytännössä sijoitusomaisuuden käypä arvo.

²Vaihtoehtoisesti voidaan käyttää erillisiä finanssimatemaattisia menetelmiä (esim. optiohinnoittelussa käytetyt menetelmät), joilla erikseen arvioidaan sijoitusten tuottokehityksestä riippuvien osien pääoma-arvo. Optiohinnoittelun analyttiset menetelmät voidaan johtaa stokastisen diskonttauksen erikoistapauksina, joten lähtökohdaltaan ne eivät ole erillisiä tai erilaisia deflaattoritekniikkaan nähden.

Vastuuvelan voidaan ajatella jakaantuvan retrospektiiviseen ja prospektiiviseen osaan. Retrospektiivinen osa on vanhan tilinpäätöskäytännön mukainen rahastovastuu tai vakuutussäästö, joka on usein säästövakuutus sopimuksissa sama kuin vakuutuksen kuluton takaisinostoarvo. Henkivakuutuksen laskuerusteissa tästä käytetään yleisesti nimitystä muutosarvo. Prospektiivinen osa syntyy riski-, kustannus- ja korkoliikkeiden tulevan yli- tai alijäämän kautta. Kustannusliike tässä poikkeaa perinteisestä liikekulujen osalta ja korkoliike on ymmärrettävä kokonaan uudella tavalla. Yhtiölle ei korkoliikkeessä tuloudu automaattisesti mitään omaisuuden ja vastuuvelan välistä korkomarginaalia. Jos vakuutusliike on ylijäämäistä, on vastuuvelka - vastoin nykyistä vakuutusyhtiölakia - pienempi kuin vastuun takaisinostoarvo. Ellei sitten riskimarginaali satu ylittämään tulevaa ylijäämää.

- + Rahastovastuu
- + Prospektiivinen vastuu (ylijäämäinen (< 0) tai alijäämäinen (> 0))
- + Riskimarginaali
- = Vastuuvelan käypä arvo

On myös väläytelty sitä mahdollisuutta, että vastuuta ei IAS -aikanakaan koskaan raportoitaisi takaisinostoarvoa pienempänä. Tämä nk. *deposit-floor* -periaate vesittäisi kuitenkin sen IASin peruslähtökohdan, että yrityksen prospekteista pyritään antamaan jatkuvuusperiaatetta noudattaen parhaimman arvion mukainen kuva.

Prospektiivinen vastuu, sen syntymekanismi ja erät, joista se muodostuu ovat se käyvän arvon ydin, johon tätä seuraavissa luvuissa paneudutaan tarkemmin. Tulosanalyysin mukainen jako riski-, kustannus- ja korkoliikkeisiin on yksi keino hahmottaa prospektiivisen vastuun olemusta. On muistettava, että vastuuvelan käypä arvo lasketaan ulos maksettavista kassavirroista. Näin ollen esimerkiksi kuormituksen osuutta prospektiivisesta vastuusta ei saada tulevien vuosien kuormitustuloa diskonttaamalla. Kuormitus on vain yksi osatekijä, jonka seurauksena aikanaan ulos maksettava etu tai korvaus on pienempi kuin kuormittamattoman sopimuksen saama etu tai korvaus. Pitkässä sopimuksessa vastuun määrää lisäävät tai vähentävät tekijät vaikuttavat ristiin, eikä minkään tekijän osuus lopulta ulos maksettavasta korvauksesta ole yksikäsitteinen. Näin ollen perinteisen analyysin mukainen jako liikkeisiin muuttuu prospektiivisessä katsannossa (entistä enemmän) sopimuksen varaiseksi.

1.5 Voittojen tuloutuminen

IAS -periaatteiden suora soveltaminen johtaa siihen, että tilikaudella myydyistä sopimuksista tulevaisuudessa saatava arvioitu voitto tai tappio tuloutuu

välittömästi. Jos myydyn vakuutuskannan tulevaisuus on (tilastollisesti) identtinen sen kanssa mitä myyntihetkeä seuranneessa tilinpäätöksessä arvioitiin ja arvio kannan tulevaisuudesta ei kannan vakuutusaikana muutu, ei kannasta (vakiokorolla) jatkossa tuloudu muuta kuin diskonttokoron purkautuminen. Jos tulevaisuus poikkeaa arvioidusta tai arvio tulevasta muuttuu, tuloutuvat nämä poikkeamat ja muutokset. Korkokäyrän muutokset, diskonttokoron purkautuminen ja tulevaisuutta koskevien oletusten muuttuminen esitetään tuloslaskelmassa omina erinään. Arvioidusta poikkeavat toteumat tuloutuvat tilikaudella realisoituneiden kassavirtojen kautta.

Tammikuun 2003 IASB-päivitystä [5] tuskin voidaan tulkita niin, että välittömän tuloutuksen periaate vesitetään kokonaan. Sen sijaan vaaditaan näyttöä siitä, että arviot tulevasta ylijäämästä vastaavat markkinoilla havaittuja toteumia. Jos tällaista näyttöä ei ole, ei tulevaa ylijäämää voida tulouttaa.

Luku 2

Skenaariotekniikka

2.1 Deflatointi

Tarkastellaan diskreettiaikaista stokastista diskonttausta.¹ Otetaan käyttöön seuraavat merkinnät.

$C(t)$	Kassavirta hetkellä t .
$E_t\{\cdot\}$	Hetken t informaatiolla ehdollistettu odotusarvo.
$r(t, t+n)$	n :n periodin kokonaistuotto hetkestä t hetkeen $t+n$. Jos $A(t)$ on sijoituskohteen hinta, niin $r(t, t+n) = A(t+n)/A(t)$
$r(t) := r(t-1, t)$	Lyhennelmä edellisestä yhden periodin tapauksessa. $r(t, t+n) = r(t+1) \cdots r(t+n)$.
$D(t, t+n)$	Stokastinen diskonttotehtäjä (deflaattori) hetkestä $t+n$ hetkeen t .
$D(t) := D(t-1, t)$	Yhden periodin stokastinen diskonttotehtäjä. $D(t, t+n) = D(t+1) \cdots D(t+n)$.
$P_n(t)$	Nollakuponkilainan hinta hetkellä t , kun lainan erääntymiseen on n periodia.
$i_f(t)$	Yhden periodin riskitön korko hetkestä t hetkeen $t+1$.
$F_{t+n, t+n+j}(t)$	Hetkellä t voimassaollut forward -korko hetkestä $t+n$ hetkeen $t+n+j$
$F_n(t) := F_{t+n, t+n+1}(t)$	Yhden periodin forward -korko $F_n(t) = E_t\{i_f(t+n)\}$

Vastuun käypä arvo saatiin diskonttaamalla tulevat kassavirrat:

$$V_{fv}(0) := E\left\{\sum_{t=1}^T D(0, t)C(t)\right\}. \quad (2.1)$$

¹Cochrane'in selkeästi kirjoitettu Asset Pricing [2] sisältää deflaattorilähtöisen johdatuksen finanssimatematiikkaan. Teoreettisempi johdatus stokastiseen diskonttaukseen löytyy esim. Duffie'n kirjasta Dynamic Asset Pricing Theory [3].

Tässä $D(0, t)$ on stokastinen diskonttaustekijä; jatkossa lyhyesti deflaattori. Kassavirta $C(t)$ voi olla laskentahetkellä tunnettu vakio tai monimutkainenkin stokastisista muuttujista riippuva deflaattorin kanssa korreloiva payoff -funktio. Johdanto-osassa todettiin, että deflaattorin odotusarvo on yhtä suuri kuin yksikön suuruisen nollakuponkilainan hinta kaikilla maturiteeteilla:

$$P_n(0) = E\{D(0, n)\} \forall n > 0. \quad (2.2)$$

Toisaalta todettiin, että arbitraasiehdon mukaan deflaattorin ja portfoliotuoton tulon odotusarvo on yksi - maturiteetista ja portfolion allokaatiosta riippumatta:

$$1 = E_0\{D(0, n)r(0, n)\} \forall n > 0. \quad (2.3)$$

Olkoon mahdollisia sijoitusinstrumentteja m -kappaletta. Tällöin deflaattorin on kaikilla aika-askeleilla t täytettävä ehdot

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + i_f(t)} &= E_t\{D(t + 1)\} \\ 1 &= E_t\{D(t + 1)r_j(t + 1)\}, j = 1, 2, \dots, m \end{aligned} \quad (2.4)$$

lyhyelle riskittömälle korolle i_f ja kaikille instrumenttituotoille r_j . Askelehtojen täyttyessä seuraa ehdollisesti riippumattomien todennäköisyyksien nojalla:

$$E_0\{D(1)r(1)\} \cdots E_{n-1}\{D(n)r(n)\} = E_0\{D(0, n)r(0, n)\} = 1. \quad (2.5)$$

Koska ehdot ovat voimassa kaikille sijoitusinstrumenteille, pätevät ne myös kaikille instrumenttien lineaarikombinaatioille.

Deflaattoritekniikkaa voidaan periaatteessa soveltaa simuloimalla, jos käytössä on sijoitusinstrumenttien tuotot (ja inflaation) sisältävä aikasarjamalli, deflaattorin askelehdot (2.4) ovat ratkaistavissa ja aikasarjamalli saadaan kalibroitua siten että bondihinnat saadaan (likimäärin) deflaattorin odotusarvona (2.2). Näin voidaan lähestyä vakuutus- ja sijoitustuotteita, joiden kassavirta riippuu esimerkiksi sijoitustuoton ja inflaation kulkemasta polusta ja joiden payoff -funktio on ilmaistavissa vain iteratiivisessa muodossa.

2.2 Analyttiset ratkaisut

Odotusarvolle $E\{DC\}$ voidaan joissakin erikoistapauksissa löytää ratkaisu suljetussa muodossa. Lähdetä [7] mukaillen tarkastellaan esimerkkiä, jossa tämä onnistuu.

Tarkastellaan bondin B ja osakkeen S muodostamaa sijoitusmaailmaa, jossa arvonkehitys t :n mittaisella jaksolla määräytyy yhtälöiden

$$\begin{aligned} B_t &= B_0 e^{\delta t} \\ S_t &= S_0 e^{X_t}, X_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t) \end{aligned}$$

mukaisesti. Parametri δ on t :n mittaisen nollakuponkilainan jatkuva riskitön korko ja X_t on Brownin liikkeen mukaisen parametrein μ, σ jakautuneen prosessin päätearvo ajan t kuluttua. Arvataan, että tuotoille on olemassa deflaattori muotoa

$$D(0, t) = e^{at + bX_t}.$$

Instrumenttituottojen $r_B(0, t) = B_t/B_0$ ja $r_S(0, t) = S_t/S_0$ ehdot ovat:

$$\begin{aligned} 1 &= E\{D(0, t)e^{\delta t}\} \\ 1 &= E\{D(0, t)e^{X_t}\}. \end{aligned}$$

Sijoitetaan deflaattori ja ratkaistaan ehdot, jolloin saadaan

$$\begin{aligned} a &= 0,5\sigma^{-2}(\mu^2 - (\delta + 0,5\sigma^2)^2) \\ b &= \sigma^{-2}(\delta - \mu - 0,5\sigma^2). \end{aligned}$$

Saadulla deflaattorilla voidaan määrittää mielivaltaisen kassavirran arvo bondin ja osakkeen muodostamassa sijoitusmaailmassa. Tarkastellaan esimerkkinä eurooppalaista osto-optiota. Option hinta saadaan diskonttaamalla stokastisesti t :n aikayksikön kuluttua erääntyvä payoff.

$$C = E_0\{D(0, t) \max(S_t - K, 0)\}.$$

Kun deflaattori sijoitetaan edelliseen (kts. liite A), saadaan

$$C = S_0 \phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + t \left(\delta + \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{t}} \right) - K e^{-\delta t} \phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + t \left(\delta - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma \sqrt{t}} \right),$$

missä ϕ on standardoidun normaalijakauman kertymäfunktio. Kyseessä on tuttu osto-option Black-Scholes -esitysmuoto. Yleisesti kuitenkin sijoitustuottojen ja kassavirtojen välinen riippuvuussuhde on sen verran kompleksinen, että analyttisten ratkaisujen löytäminen on hankalaa, ellei mahdotonta.

2.3 Stokastisten skenaarioiden tekniikka

Tarkastelemme seuraavassa tekniikkaa, joka ei edellytä odotusarvon $E\{DC\}$ analyttistä ratkaisua. Leikitään ajatuksella, että tilit todella päätettäisiin tätä menetelmää käyttäen. Tekniikan soveltamisen pohjatyönä

- päätetään omaisuuslajijako, joka on riittävä kuvaamaan vakuutusyhtiön sijoitussalkun kehitystä tilinpäätöstarkoituksessa. Olkoon mahdollisia sijoitusinstrumentteja m -kappaletta.
- muodostetaan aikasarjamalli, jonka muuttujista saadaan konstruoitua inflaation kehitys ja omaisuuslajijaon mukaisten sijoitusinstrumenttien tuotot.
- muodostetaan sijoitusmallille deflaattori ja ratkaistaan askelehdosta deflaattorin laskentatapa.

Tilinpäätöshetkellä riippumaton kirjanpitolahjo tai viranomaisen

- kalibroi mallin tilinpäätöshetkellä vallitsevaan korkotilanteeseen siten, että korkoehto $P_n(0) = E\{D(0, n)\}$ täyttyy kullakin maturiteetilla n .
- simuloi aikasarjamallilla tarvittavan määrän (esim. $N=10.000$) skenaarioita. Skenaarioiden on oltava yhtä pitkiä kuin vakuutuskannan pisimmät vastuut (esim. $T = 50$ vuotta $\times 4/\text{vuosi} = 200$ askelta). Prosessin tuloksena saadaan inflaatiota ja jokaista sijoitusinstrumenttia kohden $N \times T$ -dimensioiset askeltuottomatriisit R_{inf} ja R_j , $j = 1, \dots, m$. Esimerkiksi sijoituslajin j askeltuottomatriisi on siten

$$R_j = \begin{bmatrix} r_j[1, 1] & r_j[1, 2] & \dots & r_j[1, T-1] & r_j[1, T] \\ r_j[2, 1] & r_j[2, 2] & \dots & r_j[2, T-1] & r_j[2, T] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ r_j[N, 1] & r_j[N, 2] & \dots & r_j[N, T-1] & r_j[N, T] \end{bmatrix}$$

missä yksi rivi vastaa yhtä skenaariota ja sisältää sijoitusinstrumentin j askeltuotot kyseisessä skenaariossa. Merkintä $r_j[i, t]$ tarkoittaa siten instrumenttilajin j askeltuottoa $r_j(t)$ skenaariossa i .

- laskee kaikille skenaariolle deflaattorin, jolloin saadaan $N \times T$ -dimensioinen deflaattorimatriisi D . Olkoon tämä kumulatiivista muotoa siten, että matriisin elementti $D[i, t] = D(0, t) = D(1) \dots D(t)$ skenaariossa i .

$$D = \begin{bmatrix} D[1, 1] & D[1, 2] & \dots & D[1, T-1] & D[1, T] \\ D[2, 1] & D[2, 2] & \dots & D[2, T-1] & D[2, T] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ D[N, 1] & D[N, 2] & \dots & D[N, T-1] & D[N, T] \end{bmatrix}$$

Yhtiön tehtäväksi jää

- sijoitustuottojen laskeminen tilinpäätöshetken allokaatiolla $(w_1, \dots, w_m)$ (tai sijoituspolitiikan mukaisella tavoiteallokaatiolla) painottaen, jolloin saadaan $N \times T$ -askeltuottomatriisi R

$$R = w_1 R_1 + \dots + w_m R_m$$

- tuottoja vastaavien kassavirtojen laskeminen kussakin skenaariossa, jolloin saadaan $N \times T$ -kassavirtamatriisi C . Käytännössä tämä tehtäisiin vanhentamalla vakuutuskannat kunkin tuotto- ja inflaatiioskenaarion mukaisesti samalla laskien ja tallettaen kussakin skenaariossa ulosmaksettavat kassavirrat.
- vastuuvelan laskeminen diskonttaamalla kassavirrat annetulla deflaattoridatalla

$$V_{fv} = \hat{E} \left\{ \sum_{t=1}^T D[i, t] C[i, t] \right\} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T \{ D[i, t] C[i, t] \}$$

Tilejä päättävän yhtiön näkökulmasta menetelmä on kohtuullisen suoraviivainen. Riittää, kun määritellään vakuutuslajeittain miten tulevaisuudessa ulosmaksettavat kassavirrat riippuvat sijoitustuotoista ja inflaatiokehityksestä. Käytännössä aktuaarit laatisivat kullekin vakuutuslajille tai kirjanpidollisesti erilliselle sopimusten joukolle (*book of contracts*) sekä ensimmäisen että "toisen" kertaluvun diskreetin laskuperusteen. Ensimmäisen kertaluvun perusteella tässä tarkoitetaan perustetta, joka kuvaa vastuun kehittymisen sopimuksessa sovittuun päättymishetkeen asti, kun keskeytymisintensiteetit oletetaan nolleks. Toisen kertaluvun perusteella tarkoitetaan tässä perustetta, joka kertoo miten diskontattavaa kassavirtaa syntyy vakuutusaikana kuolintapausten, takaisinostojen ja muiden keskeytymissyiden seurauksena. Sekä sen paljonko erääntyvää kassavirtaa on em. keskeytymisten vaikuttaessa jäljellä sopimuksen viimein päättyessä.

Soveltajan kannalta huonona puolena voidaan pitää laskentaintensiivisyyttä. Sopimuskohmainen käsittely on toteutukseltaan suoraviivaisiin, mutta laskennallisesti raskas vaihtoehto. Monilla yhtiöillä on käytössään sopimus sopimukselta laskevia *embedded-value* -ohjelmistoja, jotka ovat jo varsin lähellä tähän tarkoitukseen tarvittavaa sovellusta. Tuhansien skenaarioiden läpikäynti jokaiselle sopimukselle erikseen ei ole kuitenkaan houkutteleva vaihtoehto. Laskennan keventämiseksi vakuutukset voidaan pakata sopiviin ryhmiin. Vanhennusperusteiden eteen joudutaan tällöin tekemään jonkin verran enemmän ajatustyötä.

Skenaariotekniikkaa käytettäessä voidaan valita monipuolisempi ja selitysvoimaisempi sijoitusmalli kuin siinä tapauksessa, että haetaan analyttistä ratkea-

vuutta. Ratkeavuutta on myös haettava jokaiselle payoff -funktiolle erikseen. Skenaariotekniikka puolestaan hinnoittelee yhtä lailla kaikki mahdolliset sijoitustuo-
toista ja muista mahdollisista mallimuuttujista riippuvat kassavirrat.

Skenaariotekniikan puutteena on se, että vakuutuksenottajan harkinnasta riippuvia kassavirtoja ei voida laskennan teknisen työläyden vuoksi arvottaa siten, että vakuutuksenottaja käyttäytyy rationaalisesti valiten kussakin tilassa itselleen odotusarvomielessä optimaalisen toimintatavan. Ongelma on sama kuin esimerkiksi amerikkalaisten optioiden hinnoittelussa, jossa joudutaan soveltamaan dynaamisen optimoinnin kaltaisia iteratiivisia menetelmiä. Stokastinen skenaariotekniikka on itsessään jo raskas eikä voida kuvitella, että sen jokaisessa tilassa käynnistetään vielä uusi raskas iteraatio. Harkinnanvaraisia kassavirtoja voidaan kuitenkin lähestyä mallittamalla vakuutuksenottajien käyttäytymistä sen hetkisen ja sitä aiempien tilojen funktiona.

Luku 3

Sijoitusmalli ja sen deflaattori

3.1 Sijoitusmalli

Skenaariotekniikkaa soveltaaksemme tarvitsemme sijoitusmarkkinaa kuvaavan aikasarjamallin. Perusrakenteeksi valittiin monimuuttajamalleista yksinkertaisin vektoriautoregressiivisten ¹ mallien luokka. Tavoitteeksi tässä otettiin, että mallilla pystyttäisiin kuvaamaan korko- ja inflaatiokehityksen lisäksi rahamarkkina-, bondi- ja osaketuottoja. Rakenteessa päädyttiin neljännesvuosifrekvenssin vektoriautoregressiiviseen malliin

$$\begin{bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \\ y_3(t+1) \\ y_4(t+1) \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \\ y_4(t) \end{bmatrix} + A_4 \begin{bmatrix} y_1(t-4) \\ y_2(t-4) \\ y_3(t-4) \\ y_4(t-4) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \epsilon_1(t+1) \\ \epsilon_2(t+1) \\ \epsilon_3(t+1) \\ \epsilon_4(t+1) \end{bmatrix}$$

tai lyhyemmin

$$y(t+1) = A_1 y(t) + A_4 y(t-4) + b + \epsilon(t+1). \quad (3.1)$$

Tässä A_j ovat viiveen j 4×4 -kerroinmatriiseja. Termi ϵ on prosessin innovaatio - satunnaisvektori, jonka elementit ovat tässä yhteisesti normaalijakautuneita keskiarvolla 0 ja kovarianssimatriisilla Σ . Tilamuuttujat y_j kuvaavat taloudellisia suureita seuraavasti

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \ln(i_f(t)) \\ y_2(t) &= \ln(P(t)) \\ y_3(t) &= \ln(S(t)/S(t-1)) \\ y_4(t) &= \ln(I(t)/I(t-1)), \end{aligned}$$

¹Vektoriautoregressiivisen mallin joitakin perusominaisuuksia on kuvattu liitteessä B. Kirjallisuutta etsiville voidaan suositella esimerkiksi Lutkepohlin teosta Introduction to Multiple Time Series Analysis [8].

missä $i_f(t)$ on (aina positiivinen!) lyhyt annualisoimaton neljännesvuoden nimelliskorko hetkestä t hetkeen $t+1$, $P(t)$ on kymmenvuotisen nollakuponkilainan hinta, $S(t)$ on osakeindeksi ja $I(t)$ elinkustannusindeksi. Kirjoitetaan sijoitusmalli vielä muodossa

$$y(t+1) = \mu(t) + \epsilon(t+1) \quad (3.2)$$

alleviivataksemme, että tilavektori $y(t+1)$ on normaalijakautunut ajanhetken t tilasta riippuvalla keskiarvolla $\mu(t)$ ja kovarianssimatriisilla Σ . Esimerkiksi bondihintaa kuvaavan tilamuuttujan askel on siten $y_2(t+1) = \mu_2(t) + \epsilon_2(t+1)$, missä

$$\mu_2(t) = A_1[2,]y(t) + A_4[2,]y(t-4) + b_2 \quad (3.3)$$

merkinnän $A[2,]$ tarkoittaessa matriisin toisen rivin vaakavektoria.

3.2 Yhtiön sijoitussalkku

Malliyhtiön sijoitussalkku koostuu lyhyeen korkoon sidotuista kassavaroista, jokaisella aika-askeleella uudelleen ostetusta pitkästä nollakuponkilainasta sekä osakesijoituksista. Kassavirrattoman portfolion arvonkehitys on määritelty yhtälöllä

$$P(t+1) = P(t)(w_I r_I(t+1) + w_B r_B(t+1) + w_S r_S(t+1)), \quad (3.4)$$

missä painokertoimet w summautuvat ykköseksi ja askeltuotot ovat

$$\begin{aligned} r_I(t+1) &:= 1 + i_f(t) = 1 + \exp(y_1(t)) \\ r_B(t+1) &:= P_{n-1}(t+1)/P_n(t) \\ r_S(t+1) &:= S(t+1)/S(t) = \exp(y_3(t+1)). \end{aligned}$$

Neljännevuoden mittaisen aika-askeleen sisällä portfolio kehittyy vapaasti ja askeleen päättyessä instrumentteja myydään ja ostetaan kulutta siten että päästään jälleen painokertoimien mukaiseen allokaatioon.

3.3 Bondituotto

Bondituottoa mallitetaan jokaisella aika-askeleella uudelleen ostetulla $10\frac{1}{4}$ vuoden mittaisella ($n = 41$) nollakuponkilainalla, jolloin

$$r_B(t+1) = \frac{P_{n-1}(t+1)}{P_n(t)} = \frac{P_{n-1}(t+1)}{P_{n-1}(t)}(1 + F_{n-1}(t)), \quad (3.5)$$

missä termit P_{n-1} saadaan suoraan aikasarjamallista ja F on forward-korko. Askeleen bondituotto siis muodostuu pitkän koron arvonmuutoksesta ja juoksevista forward -koron määräämistä tuotosta. Forward -korko on

$$F_n(t) = E_t\{i_f(t+n)\} = E_t\{\exp(y_1(t+n))\} = \exp(\mu_1(t,n) + 0,5\sigma_1^2(n)), \quad (3.6)$$

missä $\mu_1(t,n)$ on y_1 :n n -askeleen ennusteen odotusarvo ja $\sigma_1^2(n)$ tämän ennusteen varianssi. Nämä saadaan laskettua ensimmäisen viiveasteen vektoriauto-regressiivista mallista seuraavasti.

$$\begin{aligned} \mu_1(t,n) &= (A^n(y_t - \bar{y}) + \bar{y})[1] \\ \sigma_1^2(n) &= \left(\sum_{i=0}^{n-1} A^i \Sigma (A^i)' \right) [1, 1]. \end{aligned}$$

Tässä A , y ja $\bar{y}$ ovat ensimmäisen viiveasteen malliksi palautetussa muodossa liitteen B mukaisesti. Operaattori $[i]$ palauttaa vektorin i :nnen elementin ja $[i, j]$ matrisiin i :nnen vaakarivin ja j :nnen sarakkeen elementin.

Merkitään forward -tuoton $1 + F$ logaritmia f :llä ja kirjoitetaan bondituoton logaritmi auki

$$y_B(t+1) := \ln(r_B(t+1)) = y_2(t+1) - y_2(t) + f_{n-1}(t). \quad (3.7)$$

Merkitään vielä

$$\mu_B(t) := \mu_2(t) - y_2(t) + f_{n-1}(t), \quad (3.8)$$

jolloin bondituoton logaritmille saadaan esitysmuoto

$$y_B(t+1) = \mu_B(t) + \epsilon_2(t+1). \quad (3.9)$$

Mallia, sen pohjana olevaa historiadataa ja mallin tilastollisia ominaisuuksia on kuvattu tarkemmin liitteissä B-E. Tulosten valossa voidaan todeta, että mallilla simuloidun ja historiallisen datan välillä on tyydyttävä tilastollinen vastavuus. Meillä on siis käsissämme kohtuullisen uskottava sijoitusmalli. Tarvitsemme vielä sille deflaattorin.

3.4 Deflaattori

Yhden hinnan ehdot hetkellä t askeleelle $t \rightarrow t+1$ ovat

$$\frac{1}{1 + i_f(t)} = E_t\{D(t+1)\} \quad (3.10)$$

$$1 = E_t\{D(t+1)r_B(t+1)\} \quad (3.11)$$

$$1 = E_t\{D(t+1)r_S(t+1)\} \quad (3.12)$$

Ensimmäinen ehto määrää, että yhden askeleen deflaattorin odotusarvo on yhtä suuri kuin samalle jaksolle voimassa olevan lyhyen koron mukainen diskonttauskerroin. Toisen ja kolmannen ehdon mukaan bondi ja osake(indeksi) ovat oikein hinnoiteltuja eivätkä tarjoa arbitraasimahdollisuuksia. (Huomaa, että ehdot on kirjoitettu nimellistuotoille, eikä reaalitytuotoille.)

Arvataan, että aika-askeleen deflaattori on muotoa

$$D(t+1) = \exp(\alpha(t) + \beta_2(t)y_B(t+1) + \beta_3(t)y_3(t+1)), \quad (3.13)$$

missä $\alpha(t)$, $\beta_2(t)$ ja $\beta_3(t)$ ovat ajanhetkellä t askelehdoista ratkaistavat parametrit. Sijoitetaan deflaattori ja sijoitusmallin muuttujat askelehtoihin ja merkitään $\delta(t) := \ln(1 + i_f(t))$, jolloin ehdot saadaan muotoon

$$\exp(-\delta(t)) = E_t\{\exp(\alpha(t) + \beta_2(t)y_B(t+1) + \beta_3(t)y_3(t+1))\} \quad (3.14)$$

$$1 = E_t\{\exp(\alpha(t) + (\beta_2(t) + 1)y_B(t+1) + \beta_3(t)y_3(t+1))\} \quad (3.15)$$

$$1 = E_t\{\exp(\alpha(t) + \beta_2(t)y_B(t+1) + (\beta_3(t) + 1)y_3(t+1))\} \quad (3.16)$$

Eksponenttifunktioiden argumentit ovat ehdollisesti normaalijakautuneita, joten ehdot ovat

$$1 = \exp(\delta + \alpha + \beta_2\mu_B + \beta_3\mu_3 + 0,5\beta_2^2\sigma_2^2 + 0,5\beta_3^2\sigma_3^2 + \beta_2\beta_3c_{23}))$$

$$1 = \exp(\alpha + (\beta_2 + 1)\mu_B + \beta_3\mu_3 + 0,5(\beta_2 + 1)^2\sigma_2^2 + 0,5\beta_3^2\sigma_3^2 + (\beta_2 + 1)\beta_3c_{23}))$$

$$1 = \exp(\alpha + \beta_2\mu_B + (\beta_3 + 1)\mu_3 + 0,5\beta_2^2\sigma_2^2 + 0,5(\beta_3 + 1)^2\sigma_3^2 + \beta_2(\beta_3 + 1)c_{23}))$$

Aikariippuvuudet on tässä jätetty kirjoittamatta tilan säästämiseksi. Vakioita σ_1 , σ_2 , σ_3 ja c_{23} lukuunottamatta kaikki eksponenttifunktioiden argumentit ovat ajanhetkestä t riippuvia. Edelleen

$$0 = \delta + \alpha + \beta_2\mu_B + \beta_3\mu_3 + 0,5\beta_2^2\sigma_2^2 + 0,5\beta_3^2\sigma_3^2 + \beta_2\beta_3c_{23}$$

$$0 = \alpha + (\beta_2 + 1)\mu_B + \beta_3\mu_3 + 0,5(\beta_2 + 1)^2\sigma_2^2 + 0,5\beta_3^2\sigma_3^2 + (\beta_2 + 1)\beta_3c_{23}$$

$$0 = \alpha + \beta_2\mu_B + (\beta_3 + 1)\mu_3 + 0,5\beta_2^2\sigma_2^2 + 0,5(\beta_3 + 1)^2\sigma_3^2 + \beta_2(\beta_3 + 1)c_{23}.$$

Yhtälöryhmästä ratkaisemalla saadaan

$$\begin{aligned}\beta_2(t) &= \frac{c_{23}(\delta - \mu_3 - 0,5\sigma_3^2) - \sigma_3^2(\delta - \mu_B - 0,5\sigma_2^2)}{c_{23}^2 - \sigma_2^2\sigma_3^2} \\ \beta_3(t) &= \frac{c_{23}(\delta - \mu_B - 0,5\sigma_2^2) - \sigma_2^2(\delta - \mu_3 - 0,5\sigma_3^2)}{c_{23}^2 - \sigma_2^2\sigma_3^2} \\ \alpha(t) &= -(\delta + \beta_2\mu_B + \beta_3\mu_3 + 0,5\beta_2^2\sigma_2^2 + 0,5\beta_3^2\sigma_3^2 + \beta_2\beta_3c_{23})\end{aligned}$$

missä (aikariippuvuudet taas kirjoittaen)

$$\begin{aligned}\delta &= \delta(t) = \ln(1 + \exp(y_1(t))) \\ \mu_2 &= \mu_2(t) = A_1[2, y(t) + A_4[2, y(t-4) + b_2 \\ \mu_B &= \mu_B(t) = \mu_2(t) - y_2(t) + f_{n-1}(t) \\ \mu_3 &= \mu_3(t) = A_1[3, y(t) + A_4[3, y(t-4) + b_3 \text{ ja} \\ c_{23} &= \text{Cov}(\epsilon_2, \epsilon_3) = \sigma_2\sigma_3\rho_{23}.\end{aligned}$$

3.5 Kalibrointi

Bondihinnat - ja siten myös korkokäyrä - saadaan deflaattorin odotusarvona. Pituudeltaan n -periodin mittaisen nollakuponkilainan hinta on

$$P_n(t) = E_t\{D(t, t+n)\} = E_t\{D(t+1)D(t+2)\cdots D(t+n)\}. \quad (3.17)$$

tai forward -korkoja käyttäen

$$P_n(t) = \frac{1}{(1 + F_{t,t+1}(t)) \cdots (1 + F_{t+n-1,t+n}(t))}. \quad (3.18)$$

Toisaalta aikasarjamallimme sisältää bondihinnan suoraan tilamuuttujana. Vähintäänkin alkutilassa (tilinpäätöshetkellä) tarkasteltuna näiden kahden on yhdyttävä. On siis viritettävä mallin parametreja - lähinnä odotusarvon määrävää vektoria b - siten, että alkutilassa $t = 0$ pätee

$$\exp(y_2(0)) = \frac{1}{(1 + F_{0,1}(0))(1 + F_{1,2}(0)) \cdots (1 + F_{n-1,n}(0))}. \quad (3.19)$$

On huomattava, että ehto on voimassa vain lähtötilassa ja rikkoutuu tällä mallirakenteella heti ensimmäisellä aika-askeleella. Tällä ei kuitenkaan ole merkitystä, koska diskonttaus tapahtuu vain ja ainoastaan alkutilaan.

3.6 Empiirinen deflaattori

Askeldeflaattorin ja portfolion askeltuoton tulon otoskeskiarvo $\hat{E}\{D(t+1)r(t+1)\}$ konvergoi otoskoon funktiona nopeasti ykköseen - kunhan pidetään huolta siitä, että muuttujaa j ja ajanhetkeä t kohti satunnaisinnovaatioiden $\epsilon_j(t)$ otos yli skenaaroiden on keskittynyt nollaan. Tämä keskittäminen muuttuja/aika-paria kohden pitää tehdä $N(0,1)$ -jakautuneiden riippumattomien satunnaismuuttujien otokselle, jotta yhteisjakaumaotoksen kovarianssirakennetta ei rikota. Käytännössä siis skenaarion i innovaatioita laskettaessa

$$\epsilon(i, t) = S' \cdot \eta(i, t), \text{ missä } S'S = \Sigma \quad (3.20)$$

on ensin pitänyt huolehtia siitä, että vektorin $\eta(i, t)$ satunnaismuuttujat on keskitetty nollaan

$$\eta_j(i, t) = \hat{\eta}_j(i, t) - \hat{E}_i\{\hat{\eta}_j(i, t)\}. \quad (3.21)$$

Tässä $\hat{\eta}_j(t)$ on alkuperäinen (otosvirheen vuoksi nolasta poikkeava) $N(0,1)$ -jakaumasta poimittu otos ja merkintä $\hat{E}_i$ tarkoittaa, että keskiarvo lasketaan kaikkien skenaarioiden i yli.

Useamman aika-askeleen yli mitattuna odotusarvon $\hat{E}\{D(t, t+n)r(t, t+n)\}$ virheet kumuloituvat ja konvergenssi ykköseen heikkenee askelmäärän funktiona niin nopeasti, että otoskoon kasvattaminen ei käytännössä auta.

Usein on tapana ajatella, että pitkällä tulevaisuudessa erääntyvät kassavirrat ovat diskonttauksen seurauksena merkityksettömiä. Koska tuottoon kytkettyjen sopimusten tapauksessa kassavirtojen kasvu on yleisesti kääntäen verrannollista diskonttotekijän kehitykseen nähden, ovat kaikkien maturiteettien kassavirrat yhtä arvokkaita lopputulosten kannalta. Deflaattorin on oltava tarkka myös maturiteettijakauman loppupäässä.

Käytännössä stokastinen diskonttaus suoraan simuloiden ei onnistu järkevällä otoskolla - tarvitaan laskennallisia temppuja.

3.6.1 Tuotto- ja deflaattoridatan muodostaminen

Välttävästi koossa pysyvän tuotto-/deflaattoridatan muodostaminen onnistuu esimerkiksi seuraavalla *brute force* -menetelmällä. Olkoon N skenaarioiden lukumäärä. Jokaisella aika-askeleella $t = 1, 2, \dots, T$ generoidaan nollaan keskitetty prosessin satunnaisinnovaatio-otos $\epsilon(t)$ muodostamalla otos yhä uudestaan, kunnes jokin muuttujien yli tulolle $\hat{E}\{D(0, t)r(0, t)\}$ asetettu kriteeri toteutuu tai ennalta asetettu iteraatioiden maksimimäärä saavutetaan. Jos kriteerin täyttävää satunnaisotosta ei löydy, valitaan kokeiluista paras. Jos vaarana on satunnaislukujen ehtyminen, voidaan kokeiltavat otokset muodostaa permutoimalla yhden otoksen havaintojen järjestystä satunnaisesti.

Tämän työn deflaattoriotosta muodostettaessa oli sallittu iteraatiota muutamana sata ja kriteerinä oli instrumenttivarheiden neliöiden summa

$$\sum_{j=1}^3 \left(\hat{E}\{D(0, t+1)r_j(0, t+1)\} - 1 \right)^2 < \text{maksimivirhe.}$$

Pysähdytään tarkastelemaan mitä tapahtuu, kun ajanhetkellä t muodostetaan otosta $\epsilon(t+1)$. Kirjoitetaan kumulatiivisen deflaattorin ja tuoton tulo muodossa

$$\begin{aligned} \hat{E}\{D(0, t+1)r(0, t+1)\} &= \hat{E}\{D(0, t)r(0, t) \cdot D(t, t+1)r(t, t+1)\} \\ &= \hat{E}\{D(0, t)r(0, t)\} \hat{E}\{D(t, t+1)r(t, t+1)\} + \\ &\quad \hat{Cov}(D(0, t)r(0, t), D(t, t+1)r(t, t+1)) \end{aligned}$$

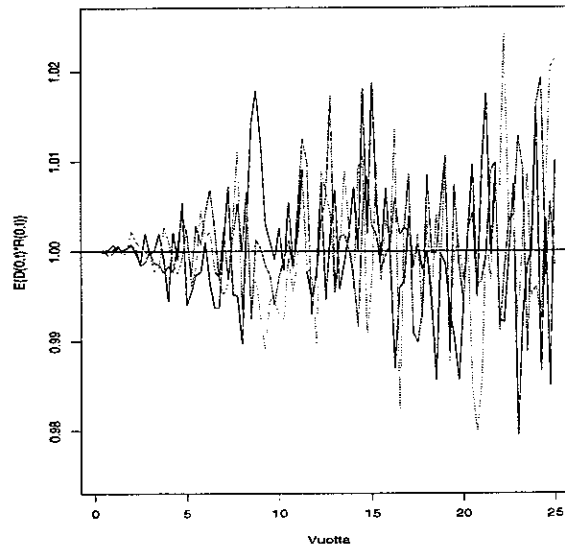
Termi $\hat{E}\{D(0, t)r(0, t)\}$ sisältää virheen hetkeen t asti. Tämän virheen kertomana on termi $\hat{E}\{D(t, t+1)r(t, t+1)\}$, joka kohtuullisella otoskokoilla on aina suhteellisen lähellä ykköstä. Kovarianssitermin pitäisi olla nolla mitä se ei tietenkään satunnaisotoksella koskaan ole. Osoittautuu, että nimenomaan kovarianssitermi hallitsee virheen muodostusta ja siten myös virheen korjausta tässä iteraatiossa. Niin kauan kuin tuoton ja deflaattorin tulo pysyy lähellä ykköstä ei korjaava kovarianssitermi poikkea ratkaisevasti nolasta eikä peräkkäisten ajanhetkien välille synny korrelaatiota. Aikahorisontin alkupäässä korjaavan otosjärjestyksen (tai uuden otoksen, jos ei permutoida) löytäminen on helppoa. Kun simulaatiossa edetään ajassa pidemmälle, käy kumulatiivinen jakauma hallitsevaksi, korjaavan otosjärjestyksen löytäminen vaikeutuu ja kovarianssitermi poikkeaa yhä enemmän nolasta. (Kts. kuva 3.1)

Käytännössä otoshajonta tekee sen, että iteroitukin deflaattoriotos joudutaan vielä sovittamaan tietyille instrumenttien lineaarikombinaationa saatavalle laskentaportfoliolle. Tämä tehtiin kertomalla kunkin ajanhetken t kumulatiivista deflaattoria sopivalla kertoimella siten että $E\{D(0, t)r_p(0, t)\} = 1$. Tämä vaikuttaa vähäisessä määrin jakauman skaalaan. Huolestuttavampaa olisi, jos korkokäyrä tämän sovituksen seurauksena vaihtelisi sijoitusallokaatiosta toiseen. Näin ei kuitenkaan (ratkaisevassa määrin) tapahdu, kuten kuvasta 3.2 voidaan havaita.

3.7 Koeasetelma

Myöhempien esimerkkien tilinpäätöshetkenä on 31.03.2003, jolloin 3 kuukauden korko oli 2,5 %, pitkä 10 vuoden korko 4,1 % ja inflaation vuosimuutos 1,6 %. Mallin pitkän ajan odotusarvot ovat huomattavasti korkeammat.

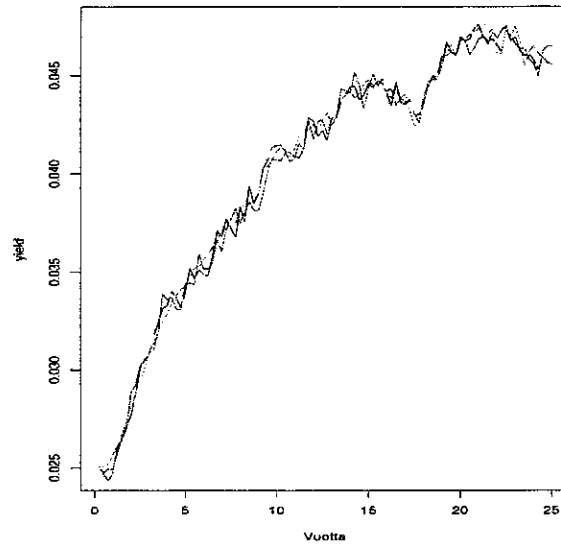
Mallilla generoitiin 10.000 satunnaiskenaariota. Kussakin skenaariossa otettiin 100 neljännesvuoden mittaista aika-askelta, joten vastaisten laskuesimerkkien aikahorisontti on maksimissaan 25 vuotta.



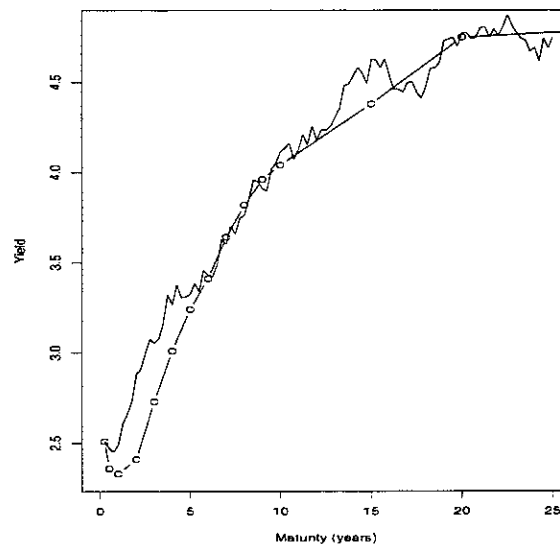
Kuva 3.1: Deflaattorin ja tuoton tulon odotusarvo aikahorisontin pituuden funktiona. Käyrät on piirretty kaikille instrumenttituotoille (lyhyt korko, jvk, osake).

Kuvaan 3.3 on piirretty ajankohdan todellinen korkokäyrä sekä kalibroimattoman deflaattoriotoksen mukainen korkokäyrä. Havaitaan, että kalibroimaton historiallisiin keskitasoihin perustuva simuloitu korkokäyrä on (tämän työn tarkoituksiin) riittävän lähellä markkinakorkokäyrää. Aikasarjamallimme sisältää 10 vuotta pitkän nollakuponkilainan hinnan suoraan tilamuuttujana. Deflaattorin mukaisen bondihinnan on yhdyttävä tähän. Kuvasta havaitaan, että tämäkin ehto toteutuu riittävällä tarkkuudella. Olemme siten onnekkaita ja säästymme kalibrointityöltä. Deflaattorin suuri otosvarianssi havaitaan korkokäyrän levottomuutena.

Vastaiset esimerkit on laskettu tähän 31.3.2003 tilanteen mukaiseen korkokäyrään ja sen mukaiseen deflaattoriotokseen perustuen.



Kuva 3.2: Kuvaan on piirretty sovittamattoman ja kullekin sijoitusinstrumentille sovitetun deflaattorin määräämä korko maturiteetin funktiona.



Kuva 3.3: Deflaattoriotoksesta keskiarvona laskettu korkokäyrä (yhtenäinen sahalaitainen viiva) ja Saksan valtionlainoista laskettu korkokäyrä (paloilla katkottu viiva) tilinpäätöshetkellä 31.03.2003.

Luku 4

Sijoitussidonnainen vakuutus

4.1 Perustapaus

Lähteen [1] esimerkkiä seuraillen tarkastellaan aluksi äärimmilleen yksinkertaistettua kertamaksuista sijoitussidonnaista sopimusta, jossa tilinpäätöshetken rahastovastuu $V(0) = 100$ ja sopimusaikaa on jäljellä 10 vuotta. Kuolevuus ja muut päättymisintensiteetit oletetaan nolllaksi. Sopimukseen ei sisälly mitään vakuutuksellista elementtiä (= 100 %:n rahastonpalautus). Vakuutuksesta peritään rahastoon suhteutettu 1 %:n vuotuinen kustannuskuormitus. Hoitokuluja ei käsitellä vielä lainkaan (hoitokulut=0). Oletetaan vielä, että rahaston kehityksen mukainen korkoutus tapahtuu vain kerran vuodessa.

Diskreetti peruste olkoon muotoa

$$V(t) = r(t)r_{\gamma}V(t-1) = (1+i(t))(1-i_{\gamma})V(t-1), \quad (4.1)$$

missä $r(t) = 1+i(t)$ on sijoituskohteen arvon $S(t)$ määräämä tuotto $S(t)/S(t-1)$. Vastuuvelan käypä arvo saadaan diskonttaamalla 10 vuoden päästä erääntyvä kassavirta $C(10) = r(0,10)r_{\gamma}^{10}V(0)$ tilinpäätöshetkeen

$$V_{fv}(0) = E\{D(0,10)C(10)\}.$$

Koska ulosmaksettava kassavirta on suoraan rahaston arvonkehitykseen verrannollinen ja riippuu vain siitä, voidaan deflaattorin korkoehto unohtaa ja valita deflaattoriksi tuoton käänteisarvo $D(t, t+n) = r(t, t+n)^{-1} = S(t)/S(t+n)$, jolloin on selvää, että ehto $1 = E\{D(t, t+n)r(t, t+n)\}$ toteutuu. Vastuuvelka on tällöin

$$V_{fv}(0) = E\{r(0,10)^{-1}r(0,10)r_{\gamma}^{10}V(0)\} = r_{\gamma}^{10}V(0) = 90,4.^1$$

Tulevan ylijäämän pääoma-arvo on siis $100-90,4=9,6$ ja vastuun käypä arvo on rahastovastuuta pienempi. Oletetaan, että yhtiöllä on tämä yksi ainoa sopimus

¹Suoraviivaisemmin tähän olisi päässyt valitsemalla korko=0.

vastuullaan ja tilinpäätöshetken sijoitusomaisuuden käypä arvo on $A(0) = 110$, josta 100 yksikköä on vakuutuksen kohde-etuutta. Oma pääoma on tällöin $V_e = A - V_{fv} = 110 - 90,4 = 19,6$.

Tämä yksinkertainen esimerkki nostaa esille tärkeän seikan: *sopimusten pituus vaikuttaa vastuuvelan ja siten myös oman pääoman määrään*. Vuoden mittaisella sopimuksella vastuuvelkaa vähentävä ylijäämä olisi ollut 1 ja kolmenkymmenen vuoden mittaisella 26 rahayksikköä. Henki- ja eläkevakuutukset ovat siten pääomavaatimuksiltaan hyvin erilaisessa asemassa. Sopimuksen pituuden merkitys asettanee paineita melko tiukan sääntelyn suuntaan esimerkiksi silloin, kun ollaan arvioimassa pitkiksi ajoiksi tehtyjen vapaasti takaisinostettavien säästövakuutusten takaisinostointensiteettiä. Säästövakuutusten tuotekehitys ajautunee myös suuntaan, jossa sopimusten takaisinostoja hillittää sanktioiden ja erääntymiseen sidottujen etuuksien avulla.

Periaateluonnoksen mukaan tulevan ylijäämän hyväksilukeminen vaatii sitä, että sopimukseen sisältyy etuus tai sanktio, jonka seurauksena vakuutuksenottajan kannattaa jatkaa sopimusta.

4.2 Kuolevuus

Jatketaan edellisen kappaleen esimerkkiä ottamalla kuolevuus mukaan tarkasteluun. Muutetaan sopimuksen rahastonpalautusturvaa siten, että kuolintapauksen sattuessa palautetaan 105 % ($k = 1,05$) kuolinhetken pääomasta. Olkoon jäljellä olevien sopimuskappaleiden määrä

$$n(t) = \hat{p}(t)n(t-1) = (1 - \hat{q}(t))n(t-1), \quad n(0) = 1,$$

missä $\hat{q}(t)$ on parhaan arvion mukaiseen kuolevuusintensiteettiin $\hat{\mu}$ perustuva aika-askeleen kuolintodennäköisyys ja $\hat{p}(t)$ tätä vastaava selviämistodennäköisyys

$$\hat{p}(t) := \exp \left(- \int_{x(t-1)}^{x(t)} \hat{\mu}(u) du \right)$$

iästä $x(t-1)$ ikään $x(t)$. Merkitään hatuttomilla symboleilla q , p ja μ laskuperusteiden mukaisia suureita. Olkoon vastuuperuste nyt vakuutetun eläessä

$$\begin{aligned} V(t) &= r(t)r_{\mu}(t)r_R(t)r_{\gamma}V(t-1) \\ &= (1 + i(t))(1 + i_{\mu}(t))(1 - i_R(t))(1 - i_{\gamma})V(t-1), \end{aligned} \quad (4.2)$$

missä $i_R(t) = ki_{\mu}(t)$ on rahastonpalautuksen riskimaksu ja $i_{\mu}(t)$ on kuolevuushyvitys

$$r_{\mu}(t) = 1 + i_{\mu}(t) = \frac{1}{1 - q(t)} = \frac{1}{p(t)}.$$

Aika-askeleella t vakuutuksesta lankeaa maksettavaksi kuolintapauskorvaus

$$C_k(t) = \hat{q}(t)kn(t-1)V(t), \quad (4.3)$$

jos kuolinrahastoksi on ehdoissa määritelty jakson pääterahasto. Sopimuksen päättyessä määräiässä 10 vuoden päästä maksetaan vakuutuksenottajalle määräikäiskorvaus

$$C_m(10) = n(10)V(10).$$

Vastuuvelan käypä arvo on nyt

$$V_{fv}(0) = E\left\{\sum_{t=1}^{10} D(0,t)C_k(t)\right\} + E\{D(0,10)C_m(10)\},$$

mistä esimerkiksi vakiokuolevuudella $\mu = \hat{\mu} = 0,02$ saadaan $V_{fv} = 90,9$. Tämä on jonkin verran enemmän kuin aiemmin ilman kuolevuutta laskettu vastuu, koska kuolevuusperuste ei ollut turvaava ja nollasta poikkeava kuolevuus lyhensi sopimuksen duraatiota, jolloin kuormitusta ehti kertyä lyhyemmältä ajalta. Jos taas lasketaan turvaavalla kuolevuusperusteella $\mu = 0,04$ ja $\hat{\mu} = 0,02$ saadaan $V_{fv} = 89,0$, jolloin riskiliikkeen ylijäämä kompensoi kuolevuuden johdosta alentuneen duraation vaikutuksen.

4.3 Riski- ja kustannusliikkeen ylijäämien erottelu

Haluamme nyt eritellä edellisen esimerkin vastuuvelan analyysityyppisesti. Tätä varten määrittelemme askelperusteen (4.2) sijaan kumulatiivisen vastuuperusteen

$$V(t) = V(0) + I(0,t) + I_\mu(0,t) - R_\mu(0,t) - I_\gamma(0,t), \quad (4.4)$$

missä termit $V(0)$, I , I_μ , R_μ ja I_γ ovat alkupääoma, kumulatiivinen korkotuotto, kuolevuushyvitys, rahastonpalautuksen riskimaksu ja kuormitustulo. Kumulatiivinen vastuuperuste kertoo kuinka suuri osuus ajanhetken t vastuusta on syntynyt kunkin vastuumuutoserän vaikutuksesta. Erottelua varten *sovitaan*, että nämä on määritelty seuraavasti

$$\begin{aligned} I(0,t) &= i(0,t)V(0) \\ I_\mu(0,t) &= i_\mu(0,t)(1+i(0,t))V(0) \text{ ja} \\ R_\mu(0,t) &= -i_R(0,t)(1+i_\mu(0,t))(1+i(0,t))V(0) \text{ ja} \\ I_\gamma(0,t) &= -i_\gamma(0,t)(1+i_R(0,t))(1+i_\mu(0,t))(1+i(0,t))V(0) \end{aligned}$$

Korot $i_*(0, t)$ edellä ovat kumulatiivisia korkoja; esimerkiksi korkotuoton tapauksessa $i(0, t) = r(1)r(2) \cdots r(t) - 1$. Huomaa, että korkotuotto $i(0, t)$ ja kuolevuushyvitys $i_\mu(0, t)$ ovat positiivisia ja riskimaksujen vaikutus $i_R(0, t)$ ja kuorimitus $i_\gamma(0, t)$ ovat negatiivisia. Kuolintapauskorvausten (4.3) kassavirrat voidaan nyt jaotella seuraavasti

$$C_k(t) = \hat{q}(t)kn(t-1)(V(0) + I(0, t) + I_\mu(0, t) - R_\mu(0, t) - I_\gamma(0, t))$$

ja vastaavasti sopimuksen päättyessä maksettavalle määräikäiskorvaukselle saadaan erottelu

$$C_m(10) = n(10)(V(0) + I(0, 10) + I_\mu(0, 10) - R_\mu(0, 10) - I_\gamma(0, 10)).$$

Vastuuvelan analyysityyppiseen erotteluun tarvittavat kassavirtaerät voidaan nyt listata:

	$C_k(t), t \in [1, T]$	$C_m(T)$
Kuolevuushyvitys	$\hat{q}(t)n(t-1)I_\mu(0, t)$	$n(T)I_\mu(0, T)$
Riskimaksutulo	$-\hat{q}(t)n(t-1)R_\mu(0, t)$	$-n(T)R_\mu(0, T)$
Riskikorvaukset	$\hat{q}(t)n(t-1)kV(t)$	0
Kuoll. vap. vastuu	$-\hat{q}(t)n(t-1)V(t)$	0
Riskiliikkeen kassav.	$\hat{q}(t)n(t-1)$ $(I_\mu(0, t) - R_\mu(0, t) +$ $(k-1)V(t))$	$n(T)(I_\mu - R_\mu)$
Hoitokulut	—	—
Kuorimitustulo	$-\hat{q}(t)n(t-1)I_\gamma(0, t)$	$-n(T)I_\gamma(0, T)$
Kust.liikkeen kassav.		
Alkupääoma	$\hat{q}(t)n(t-1)V(0)$	$n(T)V(0)$
Korkotuotot	$\hat{q}(t)n(t-1)I(0, t)$	$n(T)I(0, T)$
Pääoman kassav.	$\hat{q}(t)n(t-1)(V(0) + I(0, t))$	$n(T)(V(0) + I(0, T))$
Kassavirrat yht.	$C_k(t) = \hat{q}(t)n(t-1)kV(t)$	$C_m(T) = n(T)V(T)$

Tässä on huomattava, että esimerkin kassavirrat realisoituvat vain kuolintapauksissa ja sopimuksen päättyessä (IASin *exit-value principle*). Näin C_k sarakkeen riskikorvausten erä on yhtä suuri kuin kaikki samaisen sarakkeen erät yhteensä.

Kuolintapauskassavirtojen analyysijaottelun voi mieltää esimerkiksi niin, että merkitään analyysipohjaan ensin realisoituvat riskikorvaukset $\hat{q}(t)n(t-1)kV(t)$.

Tämän vastaeränä on kuolleilta vapautuva vastuu $-\hat{q}(t)n(t-1)V(t)$. Vapautuva vastuu ei ole realisoituvaa kassavirtaa, joten se on eliminoitava. Otetaan mukaan vapautuvan vastuun erimerkkinen vastaerä $\hat{q}(t)n(t-1)V(t)$, avataan $V(t)$ kumulatiivisen vastuuperusteen (4.4) mukaisesti ja sijoitetaan kuolevuushyvityksen, riskimaksutulon, kuormituksen, korkotuottojen ja pääoman kassavirrat paikoilleen. Tästä seuraa esimerkiksi se, että kuolevuushyvityksen ja riskimaksutulon kassavirrat ovat "toisen kertaluvun" perusteen mukaisia nekin.

Edellisessä kohdassa laskimme esimerkkisopimuksen vastuuvélaksi $V_{fv} = 89,0$ perustekuolevuuden ollessa $\mu = 0,04$ ja arvion todellisesta kuolevuudesta ollessa $\hat{\mu} = 0,02$. Rahasto palautettiin kuolintapauksessa 105 %:sti ja vuotuinen rahastoon suhteutettu kulu oli 1 %. Esimerkkisopimuksen vastuu voidaan nyt erotella analyysityyppisesti.

	kuolleet	päättyneet	yhteensä
Kuolleisuushyvitysten pääoma-arvo	4,5	40,3	44,7
Riskimaksutulon pääoma-arvo	-4,8	-43,3	-48,1
Riskikorvausten pääoma-arvo	17,7	0	17,7
Kuolleilta vap. vastuun pääoma-arvo	-16,8	0	-16,8
Riskiliikkeen alijäämän pääoma-arvo	0,5	-3,1	-2,6
Hoitokulujen pääoma-arvo	0	0	0
Kuormitustulon pääoma-arvo	-0,9	-7,5	-8,5
Kust.liikkeen alijäämän pääoma-arvo	-0,9	-7,5	-8,5
Alkupääoman pääoma-arvo	18,1	81,9	100
Korkojen pääoma-arvo	0	0	0
Pääoman ja korkojen nykyarvo	18,1	81,9	100
Vastuuvélka	17,7	71,3	89,0

Taulukon kuolleet sarakkeessa on kuolintapauserien pääoma-arvot aikaskelten yli summattuna $\sum_{t=1}^{10} E\{D(t)C_k(t)\}$ ja sarakkeessa päättyneet määräiässä päättyneiden pääoma-arvot $E\{D(10)C_m(10)\}$ analyysierittäin. Esimerkki voidaan laskea vapaasti valittavalla korkotuottoskenaariolla (tässä esimerkissä korko=0) käyttäen diskonttotehtijänä kumulatiivisen korkotehtijän käänteisarvoa (tässä = 1). Alkupääoman ja korkotuottojen summan pääoma-arvo on aina alkuperäinen rahastovastuu valitusta korosta riippumatta.

Seuraavassa kappaleessa tarkastelemme esimerkkiä, jossa ensimmäisen kerran ei voida käyttää suoraa diskonttausta vaan oikeaan lopputulokseen pääsemiseksi on sovellettava stokastista diskonttausta.

4.4 Kuormituskatto

Jatketaan edellisen kappaleen esimerkkiä ja otetaan mukaan tarkasteluun suomalaisessa henkivakuutuslaitteistossa yleinen kuormituskatto. Olkoon aika-asteleella perittävä kuormitus esimerkiksi

$$I_{\gamma}(t) = i_{\gamma} \min(V_{max}, V(t-1)),$$

jolloin rahastoon suhteutettua kulua ei peritä raja-arvon V_{max} ylittävältä rahaston osalta.

Tilinpäätöshetken rahastopääomalle on nyt voimassa (polkuriippuva) optiohuontainen etuus. Aikanaan ulos maksettava kassavirta riippuu sijoituskohteen arvon kulkemasta polusta. Kohde-etuuden arvon noustessa riittävästi kulujen suhteellinen määrä pienenee.

$V(0)$	V_{max}	Sijoituskohte		
		lyhyt korko	pitkä korko	osakeindeksi
$V(0)$	∞	$9,6V(0)$ (9,6 %)	$9,6V(0)$ (9,6 %)	$9,6V(0)$ (9,6 %)
50	100	4,8 (9,6 %)	4,8 (9,6 %)	4,7 (9,4 %)
90	100	8,2 (9,1 %)	8,1 (9,0 %)	7,3 (8,1 %)
100	100	8,5 (8,5 %)	8,4 (8,4 %)	7,6 (7,6 %)
110	100	8,5 (7,8 %)	8,5 (7,8 %)	7,9 (7,2 %)
500	100	8,5 (1,7 %)	8,5 (1,7 %)	8,5 (1,7 %)
1000	100	8,5 (0,9 %)	8,5 (0,9 %)	8,5 (0,9 %)

Taulukko 4.1: Kuormitustulon pääoma-arvo alkupääoman ja sijoituskohteen funktiona (suluissa pääoma-arvon suhde alkupääomaan). Rahastoon suhteutettu kuormitus ilman kattoa = 1 %, päättymisintensiteetit = 0 ja jäljellä oleva sijoitusaika 10 vuotta. Kuormitusta ei peritä V_{max} ylittävältä osalta. Luvut on laskettu luvussa 3 esiteltyä deflaattorimallia käyttäen.

Taulukkoon 4.1 on laskettu deflaattorimallilla erilaisille sijoituskohteille kuormitustulon pääoma-arvo alkupääoman funktiona. Taulukosta nähdään, että kuormituskatolla on vastuovelkaa lisäävä arvo myös *out-of-the-money* tapauksessa alkupääoman alittaessa raja-arvon. Lisäksi havaitaan, että kuormituskaton hinta on osakkeisiin sidottujen varojen osalta jonkin verran korkeampi kuin korkorahastojen tapauksessa. *Sijoitussidonnaisen katteen rakenne vaikuttaa tässä siten vastuuvelan määrään.* Alkupääoman kasvaessa moninkertaiseksi suhteessa rajaan lähestyy kuormitustulon pääoma-arvo maksimikuormituksen suuruiseen kiinteään kuormituserän pääoma-arvoa 8,5.

4.5 Tulevat hoitokulut

Tulevat hoitokulut käsittävät tilinpäätöshetken vakuutuskannan hoitamisesta tulevaisuudessa aiheutuvat menot, jotka on laskettava mukaan vastuuvetkaan. Periaateluonnoksen ohjeistus ei ole mukaan laskettavien liikekuluerien osalta yksityiskohtainen. Tässä työssä on tehty se tulkinta, että hoitokulut käsittävät kokonaisliikekulut, joista on vähennetty hankintakulut ja investointiluonteiset menot.

Tulevia kuluja arvioitaessa hinta- ja palkkainflaatio ovat luontevia käyvän arvon periaatteen mukaisia kiinnekohtia. Inflaatio on sijoitusmarkkinan kanssa vuorovaikuttava elementti, joten inflaation on sisällyttävä sijoitusmalliin, jolla tuotto- ja diskonttoskenaariot generoidaan. Tässä työssä inflaation kuvaajana käytettiin suomalaista elinkustannusindeksiä. Esimerkeissä hoitokulujen kehitys neljännesvuoden jaksolla on sidottu neljännesvuositasolle palautettuun inflaation vuosimuutokseen - inflaation neljännesvuosivaihtelu on liian voimakasta suoraan seurattavaksi.

vuotta	Hoitokulujen kasvu				
	infl.%	$E\{\text{infl.}\% \}$	0 %	3 %	5 %
1	1,00	1,00	0,98	1,00	1,02
5	4,9	5,0	4,6	5,0	5,2
10	9,3	10,1	8,4	9,7	10,7
25	21,9	26,3	15,4	21,2	26,8

Taulukko 4.2: Tilinpäätöshetkellä yksikön suuruisten hoitokulujen pääoma-arvo maturiteetin funktiona, kun hoitokulut kehittyvät stokastisen inflaation mukaisesti, inflaation odotusarvon mukaisesti tai vakioprosentilla.

Taulukossa 4.2 on tarkasteltu tilinpäätöshetkellä yksikön suuruisten hoitokulujen pääoma-arvoa eri maturiteeteilla. Kahden ensimmäisen sarakkeen lukuja vertaamalla huomataan, että inflaatioaskeleen odotusarvon mukaisesti vakioprosentilla per aika-askel kasvavat liikekulut ovat jonkin verran korkeammat kuin stokastisen inflaation mukaisesti kasvavat liikekulut. Tämä johtuu deflaattorin ja inflaatiovauhdin hienoisesta negatiivisesta korrelaatiosta. Taulukosta nähdään myös, että aiemman esimerkin mukainen 1 %:n rahastoon suhteutettu kulu riittää juuri ja juuri pitämään sopimuksen ylijäämäisenä 10 vuoden jaksolla, jos hoitokulut alunperin ovat 1 % vastuusta ja kasvavat inflaation määräämää vauhtia.

Luku 5

Perustekorkoinen vakuutus

5.1 Yhden askeleen esimerkki

Tarkastellaan kuormituksista, kuolevuuksista¹ ja tulevista maksuista riisutun vastuuperusteen

$$V(t) = r_g V(t-1) + \alpha_1 \max(i(t) - i_g, 0) V(t-1) + \alpha_2 \max(i(t) - i_g, 0) (A(t-1) - V(t-1))^+, \alpha_1, \alpha_2 \in (0, 1]. \quad (5.1)$$

mukaista sopimusta, missä yhtiö (julkistetun hyvityspolitiikkansa mukaisesti) on arvioinut jakavansa hyvityksinä sijoitusomaisuuden käyvän arvon tuoton ($r(t) = 1 + i(t)$) ja takuukoron ($r_g = 1 + i_g$) välisen positiivisen erotuksen kohdennettuna sopimuksen rahastoon vakiokertoimella α_1 ja vakavaraisuuspääomaan kertoimella α_2 . Merkitään sijoitusomaisuuden (tässä myös taseen) käyvän arvon ja rahastovastuun suhdetta $a(t) = A(t)/V(t)$ ja rajoitetaan tarkastelu yhteen aika-askeleeseen. Askeleen kuluttua erääntyvän vastuun kassavirta on

$$V(1) = r_g V(0) + \alpha_1 \max(i(1) - i_g, 0) V(0) + \alpha_2 \max(i(1) - i_g, 0) (a(0) - 1)^+ V(0) \quad (5.2)$$

Olkoon $X(1)$ sopimuksen hoitokulut. Omaa pääomaa ovat vakavaraisuuspääoma ja sille saatu tuotto vähennettynä vakuutuksenottajille optionaalina hyvityksinä maksetulla osuudella:

$$(r(1) - \alpha_2 \max(i(1) - i_g, 0)) (a(0) - 1) V(0).$$

Jos sijoitustuotto ylittää takuukoron, on yhtiöllä (omistajilla) oikeus siihen rahastovastuulle laskettuun ylijäämään, jota ei jaeta hyvityksinä:

¹Voidaan myös ajatella, että takuukorkotekijä r_g on efektiivinen takuukorko kuormituksen ja riskimaksutulon vähentämisen ja kuolevuushyvityksen lisäämisen jälkeen.

$$(1 - \alpha_1)(i(1) - i_g)V(0).$$

Omaa pääomaa vähentää mahdollinen takuukorosta syntyvä tappio

$$\max(i_g - i(1), 0)V(0).$$

Tämä on sen myyntioption payoff, joka kattaisi tappion. Lisäksi omaa pääomaa vähentämässä ovat hoitokulut $X(1)$. Edelliset kooten oman pääoman payoff on

$$\begin{aligned} E(1) &= (1 - \alpha_1) \max(i(1) - i_g, 0)V(0) \\ &\quad + (r - \alpha_2 \max(i(1) - i_g, 0))(a(0) - 1)V(0) \\ &\quad - \max(i_g - i(1), 0)V(0) \\ &\quad - X(1). \end{aligned}$$

Vastuun ja oman pääoman kassavirtojen summa on sijoitustuotoista riippumatta aina

$$V(1) + X(1) + E(1) = (1 + i(1))a(0)V(0) = (1 + i(1))A(0) = A(1) \quad (5.3)$$

niinkuin pitääkin. Kun edeltävät kassavirrat diskontataan, voidaan taseen vastattavaa puoli ryhmitellä esimerkiksi seuraavasti

+	Vakavaraisuuspääoma	$A(0) - V(0)$
-	Vak.ottajien osuus vakav.po:sta	$-\alpha_2 E\{D \max(i(1) - i_g, 0)\}(A(0) - V(0))$
+	Optio hyv. jälk. ylijäämään	$(1 - \alpha_1)V(0)E\{D \max(i(1) - i_g, 0)\}$
-	Perustekorkotakuu	$-V(0)E\{D \max(i_g - i(1), 0)\}$
-	Hoitokulujen pääoma-arvo	$-r_f^{-1}X(1)$
=	Oma pääoma yhteensä	$E = A(0) - V_{fv}$
+	Hoitokulujen pääoma-arvo	$r_f^{-1}X(1)$
+	Taattujen etujen vastuu	$r_f^{-1}(1 + i_g)V(0)$
+	Tulevien lisäetujen vastuu	$\alpha_1 E\{D \max(i(1) - i_g, 0)\}V(0) +$ $\alpha_2 E\{D \max(i(1) - i_g, 0)\}(A(0) - V(0))$
=	Vastuuvelka	V_{fv}
=	Vastattavaa	$A(0) = E + V_{fv}$

Taulukossa on diskontattu riskittömällä korolla $r_f^{-1} = E\{D\}$ silloin kun kassavirta ei riipu stokastisesta sijoitustuotosta $i(1)$. (Oletetaan, että tämä ehto on voimassa myös hoitokuluille). Varmistetaan vielä, että tase-erät summautuvat sijoitusomaisuudeksi $A(0)$. Kun erät summataan, saadaan

$$\begin{aligned} \text{Vastattavaa} &= A(0) - V(0) + V(0)E\{D \max(r(1) - r_g, 0)\} \\ &\quad - V(0)E\{D \max(r_g - r(1), 0)\} + r_f^{-1}r_g V(0). \end{aligned} \quad (5.4)$$

Odotusarvojen erotus on ²

$$E\{D \max(r(1) - r_g, 0)\} - E\{D \max(r_g - r(1), 0)\} = 1 - r_f^{-1}r_g,$$

jolloin nähdään, että yhtälön (5.4) oikealle puolelle jää vain $A(0)$.

5.1.1 Terminologiaa

Edeltävällä yksinkertaisella esimerkillä voidaan valaista muutaman termin sisältöä. ³ Jo työn johdanto-osassa otettiin käyttöön termi *rahastovastuu* (esimerkissä $V(0)$). Tämän synonyymejä ovat vakuutussäästöt, kuluton takaisinos-toarvo ja vastuun muutosarvo. Rahastovastuu on säästövakuutuksissa yleisesti nykykäytännön mukaisena vastuuvélkana raportoitava määrä.

Edeltävän kappaleen tase-erittelyssä otettiin käyttöön uusi termi *taattujen etujen vastuu*. Esimerkin tase-erittelyssä tämä oli $r_f^{-1}(1 + i_g)V(0)$, eli rahastovastuu takuukorolla korkoutettuna ja riskittömällä markkinakorolla diskontattuna. Taattujen etujen vastuu on tässä työssä käytetty suomennos termille *guaranteed liability* ja sillä tarkoitetaan yleisemmin annettujen takuiden seurauksena realisoituvien kassavirtojen pääoma-arvoa, joka on laskettu kunkin maturiteetin riskitöntä korkoa käyttäen. Ylijäämän jakoon osallisista sopimuksista realisoituvan kassavirran pääoma-arvo on siten vähintään taattujen etujen vastuun suuruinen. Realisoituvassa kassavirrassa on tällöin otettu huomioon kuormitustulo ja riskiliikkeen vaikutus.

Jatkossa käytetään myös termiä *diskonttoylijäämä*, jolla tarkoitetaan rahastovastuun ja taattujen etujen vastuun erotusta. Tietyn maturiteetin diskonttoylijäämä on negatiivinen, jos maturiteetin riskitön korko alittaa maturiteetin *efektiivisen takuukoron*. Efektiivisellä takuukorolla tarkoitetaan tässä sopimuksen takuukorolla laskettua efektiivistä korkoa kuormituksen ja riskiliikkeen huomioonottamisen jälkeen.

Otetaan arsenaaliin mukaan vielä muutama periaateluonnoksessa esiintyvä keskeinen termi.

DSoP 7.6 (a) "the term *participating net assets* refers to the assets (less liabilities, if any) in which policyholders have an effective interest under a performance-linked insurance contract, regardless of whether the assets are held in a segregated fund;"

²Tämä put-call -pariteettinakin tunnettu tulos saadaan yhtälöstä $E\{D(r - r_g)\} = E\{D \max(r - r_g, 0)\} - E\{D \max(r_g - r, 0)\}$.

³Kappaleessa esitetyt ias -termien suomennokset ovat kirjoittajan omia - eivät vakiintuneita alalla hyväksyttyjä termejä.

Koska esimerkissämme taseen vastaavaa puoli on yhtä kuin sijoitusomaisuus ja vastattavana on vain vakuutussopimuksesta aiheutuva vastuuvélka, on *ylijäämän jakoon osallinen netto-omaisuus* yksinkertaisesti sijoitusomaisuuden (ja tässä myös taseen) arvo $A(0)$.

DSoP 7.6 (b) "pre-allocation surplus refers to the aggregate carrying amount of participating net assets, after deducting the present value of guaranteed minimum payments to holders of the performance-linked contracts (as well as related expenses) and after adding the present value of guaranteed future premium receipts, if any. Pre-allocation surplus is not necessarily positive;"

Esimerkin tapauksessa *osittamaton ylijäämä* on katteen käypä arvo vähennettynä taattujen etujen vastuulla ja hoitokulujen pääoma-arvolla, eli $A(0) - r_f^{-1}(1 + i_g)V(0) - r_f^{-1}X(1)$.

DSoP 7.6 (c) "the term *allocations* refers to allocations of pre-allocation surplus to policyholders and/or shareholders. Alternative names are *dividends*, *distributions*, and *bonuses*. Allocations may take a number of forms, including cash, additional insurance cover or units in an invested fund managed by the insurer. Allocations may be made annually, at other periodic intervals throughout the term of the policy, on surrender, or at the end of the contract term."

Osittamaton ylijäämä jaetaan vakuutuksenottajien ja yhtiön (omistajien) kesken. Vakuutuksenottajien osuus luetaan *tulevina lisäetuina* vastuuvélkaan. Jäljelle jäävä osuus on omaa pääomaa.

5.1.2 Tase-erittelyitä

IAS periaateluonnoksessa esitetään vakuutuksenottajien ja omistajien intressejä painottava tasejako, jota soveltaen yhden askeleen esimerkkinä näyttäisi seuraavalta

+ Omistajien osuus nettovaroista	$(1 - \alpha)A_0$
- Siirto omistajilta vakuutuksenottajille	$-(1 - \alpha)r_f^{-1}(1 + i_g)V_0$
- Korkotakuiden hinta	$-\alpha E\{D \max(i_g - i(1), 0)\}V_0$
- Hoitokulujen pääoma-arvo	$-(1 - \alpha)r_f^{-1}X_1$
= Oma pääoma yhteensä	E
+ Hoitokulujen pääoma-arvo	$(1 - \alpha)r_f^{-1}X_1$
+ Vakuutuksenottajien osuus nettovaroista	αA_0
+ Siirto omistajilta vakuutuksenottajille	$(1 - \alpha)r_f^{-1}(1 + i_g)V_0$
+ Korkotakuiden hinta	$\alpha E\{D \max(i_g - i(1), 0)\}V_0$
= Vastuuvélka	V_{fv}
= Tasearvo	$A_0 = E + V_{fv}$

Periaateluonnoksen käsitteelle *policyholder's effective interest in the net participating assets* käytetään tässä suomennosta *vakuutuksenottajien osuus netto-varoista*. Suomennos on ehkä huono, koska se voi jättää mielikuvan, että kyseinen osuus todellakin suoraan kuuluu vakuutuksenottajille ja sen komplementti omistajille.

Kyseinen jaottelu saadaan, kun vakuutuksenottajille maksettava kassavirta on

$$C = r_g V_0 + \alpha(r(A_0 - V_0) + \max(i(1) - i_g, 0)V_0 - X_1). \quad (5.5)$$

Korko i_g on tässä efektiivinen takuukorko kuormituksen ja riskiliikkeen jälkeen. Vakuutuksenottajat saavat siten pääoma- ja korkotakuiden lisäksi osuuden $\alpha \in [0, 1]$ sekä vakavaraisuuspääomasta että efektiivisen takuukoron ylittävistä sijoitustuotoista, joista ensin on vähennetty hoitokulujen määrä. Vastuun käypä arvo saadaan, kun vakuutuksenottajille maksettava kassavirta diskontataan ja hoitokulujen pääoma-arvo lisätään.

$$V_{fv} = r_f^{-1} X_1 + r_f^{-1} r_g V_0 + \alpha((A_0 - V_0) + E\{D \max(i(1) - i_g, 0)\} V_0 - r_f^{-1} X_1). \quad (5.6)$$

Suoraan yhtälöstä (5.6) lähtien saadaan seuraava matemaattisesti identtinen erittely.

+	Omistajien osuus osittamattomasta ylijäämästä	$(1 - \alpha)(A_0 - r_f^{-1} r_g V_0 - r_f^{-1} X_1)$
-	Korkotakuiden hinta	$-\alpha E\{D \max(i_g - i(1), 0)\} V_0$
=	Oma pääoma yhteensä	E
+	Hoitokulujen pääoma-arvo	$r_f^{-1} X_1$
+	Rahastovastuu	V_0
-	Diskonttoylijäämä	$-(1 - r_f^{-1} r_g) V_0$
+	Tulevien lisätujen vastuu	$\alpha((A_0 - V_0) + E\{D \max(i(1) - i_g, 0)\} V_0 - r_f^{-1} X_1)$
=	Vastuuvetka	V_{fv}
=	Tasearvo	$A_0 = E + V_{fv}$

Oman pääoman pohjana on osittamaton ylijäämä, eli se määrä, jolla sijoitusomaisuuden käypä arvo ylittää sopimuksissa luvattujen kassavirtojen ja sopimusten hoitokulujen nykyarvon. Omaan pääomaan tästä luetaan omistajien osuus $(1 - \alpha)$. Tästä vähennetään vielä vakuutuksenottajille annetun korkotakuun hinta.

Vastuuvetka koostuu hoitokulujen, sopimuksissa luvattujen etujen ja tulevien lisätujen yhteenlasketuista pääoma-arvoista. Takuiden perusteella annettavien vähimmäisetujen nykyarvo on tässä jaettu vielä rahastovastuuksi (säästöt) ja diskonttoylijäämäksi. Diskonttoylijäämä voi myös vaikuttaa vastuuta lisäävästi, jos

efektiivinen takuukorko on suurempi kuin diskonttauksessa käytettävä riskitön markkinakorko.

Jos vastuuvellassa halutaan näyttää vakuutuksenottajien osuus osittamattomasta ylijäämästä, voidaan tase-erittely kirjoittaa vielä seuraavassa muodossa.

+	Omistajien osuus osittamattomasta ylijäämästä	$(1 - \alpha)(A_0 - r_f^{-1}r_gV_0 - r_f^{-1}X_1)$
-	Korkotakuiden hinta	$-\alpha E\{D \max(i_g - i(1), 0)\}V_0$
=	Oma pääoma yhteensä	E
+	Hoitokulujen pääoma-arvo	$r_f^{-1}X_1$
+	Rahastovastuu	V_0
-	Diskonttoylijäämä	$-(1 - r_f^{-1}r_g)V_0$
+	Vakuutuksenottajien osuus osittamattomasta ylijäämästä	$\alpha(A_0 - r_f^{-1}r_gV_0 - r_f^{-1}X_1)$
+	Korkotakuiden hinta	$\alpha E\{D \max(i_g - i(1), 0)\}V_0$
=	Vastuuvelka	V_{fv}
=	Tasearvo	$A_0 = E + V_{fv}$

5.1.3 Nettovaraosuuden tulkinta

Kun ratkaistaan α yhtälöstä (5.6), saadaan

$$\alpha = \frac{V_{fv} - r_f^{-1}r_gV_0 - r_f^{-1}X_1}{(A_0 - V_0) + E\{D \max(i(1) - i_g, 0)\}V_0 - r_f^{-1}X_1}. \quad (5.7)$$

Osoittajassa on vastuun käypä arvo vähennettynä pääoma- ja korkotakuiden sekä hoitokulujen pääoma-arvolla. Tämä on yhtä kuin tulevien lisätujen vastuu.

Koska

$$\begin{aligned} E\{D \max(i(1) - i_g, 0)\}V_0 &= E\{D(r(1) - r_g)\}V_0 + E\{D \max(i_g - i(1), 0)\}V_0 \\ &= V_0 - r_f^{-1}r_gV_0 + E\{D \max(i_g - i(1), 0)\}V_0, \end{aligned}$$

voidaan nimittäjä kirjoittaa myös muodossa

$$\alpha = \frac{V_{fv} - r_f^{-1}r_gV_0 - r_f^{-1}X_1}{(A_0 - r_f^{-1}r_gV_0 - r_f^{-1}X_1) + E\{D \max(i_g - i(1), 0)\}V_0}, \quad (5.8)$$

missä tulevat lisäedut suhteutaan nyt osittamattoman ylijäämän ja rahastovastuulle lasketun optionaalisen takuukorkotappion summaan. Näin mielivaltaisen laskennallisen hyvityspolitiikan tulos voidaan yhden askeleen tapauksessa

palauttaa vakuutuksenottajien ja omistajien intressiä erottelemaan periaatelunoksen mukaiseen muotoon. Voidaan tietenkin myös menetellä niinpäin, että hyvityspolitiikka määritellään suoraan vakioimalla vakuutuksenottajien osuus. Stokastisia tekniikoita tarvitaan tällöinkin korkotakuiden arvottamiseksi.

Mikä sitten on kerroin α yhden askeleen esimerkkinme tapauksessa, jossa vastuuperuste ei ollut yhtälön (5.5) mukainen? Jälkimmäistä α :n määrittelyä soveltaen saamme

$$\alpha = \frac{(\alpha_1 V_0 + \alpha_2 (A_0 - V_0)) E\{D \max(i(1) - i_g, 0)\}}{A_0 - r_f^{-1}(1 + i_g)V_0 - r_f^{-1}X_1 + E\{D \max(i_g - i(1), 0)\}V_0}.$$

Tämä harjoitus käytiin läpi lähinnä siksi, että kiinnittäisimme huomiota periaatelunoksen mukaisen kiinnitetyn netto-osuuden (α) ja dynaamisen asiakaspolitiikan väliseen yhteyteen. Jos tarkasteltavia maturiteetteja on useita, saadaan dynaamisella politiikalla erilaisia jako-osuuksia maturiteetista riippuen. Jos yhtiö ilmoittaa hyvityspolitiikassaan vakuutuksenottajien osuuden nettovaroihin, ei toteutuneen hyvityspolitiikan linjanmukaisuuden osoittaminen ole välttämättä yksinkertaista.

5.2 Esimerkki

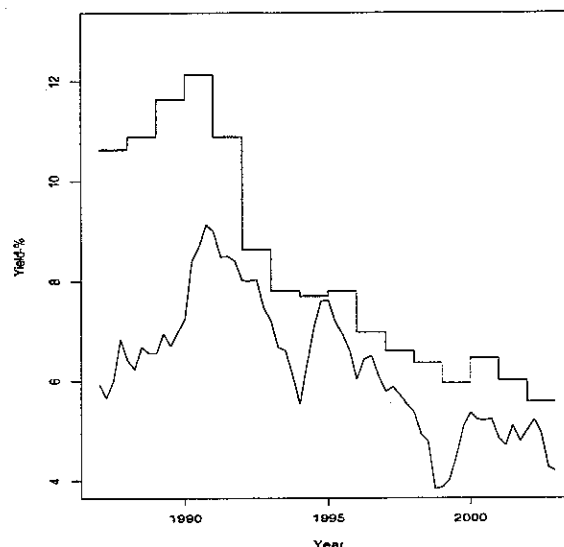
Kuvaan 5.1 on piirretty pitkä korko ja suomalaisten henkivakuutusyhtiöiden yksilölliselle eläkevakuutukselle maksama keskimääräinen perustekoron ja asiakas-
hyvitysten summana laskettu kokonaistuotto vuosina 1987-2002.

Olkoon esimerkkiyhtiön hyvityspolitiikka määritelty siten, että vakavaraisuuden asettamissa rajoissa pyritään kokonaistuottoon, jossa pitkän koron mukaisen tuottotason päälle rahastoa hyvitetään lisäkorolla, joka on vakio-osuus β siitä määrästä, jolla yhtiön sijoitussalkun tuotto ylittää hyvitysjaksolla voimassaolleen pitkän koron tason. Tai vakio-osuus siitä määrästä, jolla tuotto ylittää takuukoron, jos pitkä korko sattuu olemaan takuukorkoa pienempi. Olkoon laskennallinen vastuuperuste vakavaraisuuden tavoitevyöhykkeellä muotoa

$$V(t) = r_g V(t-1) + \max(i_L(t-1) - i_g, 0) V(t-1) + \beta \max(i(t) - \max(i_g, i_L(t-1)), 0) V(t-1), \quad (5.9)$$

missä i_L on hyvitysjaksolla voimassaollut pitkä korko ja i on yhtiön salkun tuotto. Vakavaraisuuden asettamat rajat otetaan huomioon tavoitevyöhykkeellä $[a_{min}, a_{max}]$, jonka alapuolella (tai alapuolelle vieviä) hyvityksiä ei makseta lainkaan. Yhtiö ei myöskään kasvata vakavaraisuuttaan rajatta, vaan jakaa hyvityksiä tarvittaessa enemmän siten että maksimi ei ylity.

Vakavaraisuuteen sidotun hyvityspolitiikan seurauksena on määriteltävä myös sijoitusomaisuuden arvonkehityksen prosessi. Takuukoron vaikutuksen erottelemiseksi olkoon se esimerkkinme tapauksessa yksinkertaisesti



Kuva 5.1: Saksan valtion 10 -vuoden korko ja yksilöllisen eläkevakuutuksen kokonaistuotto (porraskuvio) alan keskiarvona Suomessa vuosina 1987-2002.

$$A(t) = r(t)A(t-1) - C_m(t), \quad (5.10)$$

eli sopimuksen päättyessä maksettava korvaus on ainoa sijoitusomaisuuden määrään vaikuttava kassavirtaerä.

Olkoon esimerkkiyhtiön sijoituksista 10 % rahamarkkinassa, 60 % joukkolainoissa ja loput 30 % osakkeissa. Olkoon tilinpäätöshetken vakavaraisuus 120 %, tavoitevyöhykkeen alaraja 110 % ja yläraja 130 %. Taulukkoon 5.1 on laskettu deflaattorimallilla 10 vuotta pitkän 2,5 %:n korkotakuun sisältävän 100 yksikön suuruisen pääoman vastuu.

Vakavaraisuuspääoma	VPO	$A(0) - V(0)$	20
Vastuualijäämä	VAJ	$V(0) - V_{fv}$	-12,4
Oma pääoma yhteensä	OPO	$E = A(0) - V_{fv}$	7,6
Rahastovastuu	RV	$V(0)$	100
Diskonttoylijäämä	DYJ	$r_f^{-T} V_g(T) - V(0)$	-14,5
Tulevien lisäetujen vastuu	TLE	$E\{DV(T)\} - r_f^{-T} V_g(T)$	26,9
Vastuuvelka	VFV	$V_{fv} = E\{DV(T)\}$	112,4
Tasearvo	TASE	$A(0) = E + V_{fv}$	120

Taulukko 5.1: Esimerkki 10 vuotta pitkästä 2,5 %:n korkotakuun sisältävästä sopimuksesta. Ennenaikaisia päättymisiä ja hoitokuluja ei ole otettu huomioon. (erien lyhenteitä käytetään vastaisissa esimerkeissä)

Taulukossa $V_g(T)$ on takuukorolla korkoutettu alkupääoma sopimuksen päättymishetkellä, eli $V_g(T) = (1 + i_g)^T V(0)$. Taattu päätevastuu on diskontattu riskittömällä 10 vuoden korolla $r_f^T = E\{D(0, T)\}$. Tässä erittelyssä tulevien lisätujen vastuu on siten hyvityspolitiikan alaisen päätevastuun ja taatun päätevastuun erotuksen pääoma-arvo. Tuleviin lisätuihin sisältyy tällöin myös tuleville hyvityksille maksettava perustekorko.

Takuukoron ja hyvityspolitiikan yhteenlaskettu pääomavaade on esimerkin tapauksessa 12,4. Mikä sitten on korkotakuun erikseen laskettu arvo vakuutus-
senottajalle? IAS ei vaadi käsittelemään tätä, mutta arvo voitaisiin esimerkin tapauksessa laskea odotusarvona

$$E_0\left\{\sum_{t=1}^T D(0, t) E_{t-1}\{D(t-1, t) V(t-1) \max(i_g - i(t), 0)\}\right\},$$

eli hinta muodostuu hyvityspolitiikan alaiselle rahastolle jatkuvasti ostettujen askeleen mittaisten myyntioptioiden pääoma-arvona. Koska portfolion askeltuotto on lognormaalisti jakautunut ja sijoitusmalli sisältää lyhyen koron, voidaan myyntioption hinta (sisempi odotusarvo) laskea analyttisesti Black-Scholes'ia soveltaen. Ulompi odotusarvo on laskettava deflaattoriotosta käyttäen. Tämän korkotakuulle lasketun arvon kääntöpuolena ovat vakuutusyhtiön hyvityspolitiikkansa mukaisesti tekemät tuoton leikkaukset.

5.2.1 Laskentatuloksia

v	i_f	Takuukorko			
		0 %	2,5 %	3,5 %	4,5 %
1	2,5	2,4/-6,5/-4,1 -1,8/-7,3	0,0/-4,3/-4,3 -2,1/-7,6	-1,0/-3,4/-4,4 -2,2/-7,7	-2,0/-2,9/-4,9 -2,5/-8,2
5	3,3	15,1/-24,8/-9,7 -3,8/-13,6	3,9/-16,4/-12,5 -6,0/-16,9	-0,9/-13,4/-14,3 -7,5/-19,1	-5,8/-11,0/-16,8 -9,8/-21,9
10	4,1	33,2/-42,1/-8,9 -1,5/-12,2	14,5/-26,9/-12,4 -4,2/-15,3	5,7/-20,7/-15,0 -6,5/-18,2	-3,8/-15,5/-19,3 -10,4/-22,7
25	4,7	68,6/-77,1/-8,5 -5,2/-12,4	41,9/-52,8/-10,9 -6,2/-14,5	25,9/-39,9/-14,0 -7,0/-18,0	5,8/-26,7/-20,9 -12,8/-23,4

Taulukko 5.2: Solussa ylärivillä taulukon 5.1 mukaisesti DYJ/TLE/VAJ, kun vastuuperusteen (5.9) lisätukeroin $\beta = 0,5$. Alarivillä vastuuallijäämä, kun $\beta = 0/\beta = 1,1$. Korkotilanne on 30.3.2003 mukainen, sarakkeessa v on sopimuksen maturiteetti ja sarakkeessa i_f maturiteetin riskitön korko. Sopimuksen rahastovastuu on 100. Tilinpäätöshetken vakavaraisuus 120 %, tavoitevyöhykkeen alaraja 110 % ja yläraja 130 %. Allokaatio: rahamarkkina 10 %, joukkolainat 60 % ja osakkeet 30 %, jolloin sijoitussalkun vuositulon hajonta on vakuutusajasta riippuen välillä 8,2 % - 11 %. (Autoregressiivisen mallin keskitasoon hakeutuvuudesta johtuen muuttujillaon alkuvuosina (keskimääräistä useammin) pyrkimys tiettyyn suuntaan ja tuoton hajonta on tästä johtuen jonkin verran pienempää kuin myöhempinä vuosina muuttujien keskiarvon jo konvergoituttua lähelle pitkän aikavälin keskitasoja.

Taulukkoon 5.2 on koottu useampia esimerkkejä takuukorkoisen vakuutuksen pääomavaatimuksesta maturiteetin ja takuukoron funktiona. Esimerkiksi 10 vuoden pituisen 2,5 %:n takuukoron sisältävän sopimuksen tapauksessa pääoma- ja korkotakuun ylijäämä on saatu vähentämällä alkupääomasta takuukorolla korkoutettu ja riskittömällä korolla diskontattu pääoma, eli $100 - 100 \cdot 1,025^{10} \cdot 1,041^{-10} = 14,5$. Hyvityspolitiikan mukainen tulevien lisätujen vastuu on $-26,9$. Edellisten summana saadaan omaa pääomaa vähentäväksi määräksi $-12,4$. Vastuuvelka on siten $112,4$ ja omaksi pääomaksi saadaan $20 - 12,4 = 7,6$. Näin puolet pitkän koron ylittävistä sijoitustuotosta maksavan politiikan tapauksessa. Pelkästään korkotasoon pyrkivä politiikka verottaisi omaa pääomaa $4,2$ yksiköllä ja vakavaraisuuden alarajalla kaiken sijoitustuoton ulos maksava politiikka $15,3$ yksiköllä.

Pitkän koron tasoon pyrkivä ($\beta = 0$) minimipolitiikka on taulukossa mukana lähinnä kuriositeettina - kukapa olisi kiinnostunut riskillisestä instrumentista, joka yltää maksimissaan riskittömän koron suuruiseen tuottoon. Maksimipolitiikka ($\beta = 1,1$) taas jättää yhtiölle vain pitkän koron ylittävän tuoton sen osan, joka kohdentuu vakavaraisuuden alarajan ylittävään sijoitusomaisuuteen. Useimmissa tapauksissa maksimipolitiikka on selvästi liikaa ja $4,5$ %:n takuutasolla tämä johtaa negatiiviseen omaan pääomaan yli 5 vuotta pitkien sopimusten osalta.

Taulukosta voidaan tehdä se mielenkiintoinen havainto, että pääomavaade ei automaattisesti pienene sopimusajan pidentyessä. Alimmalla vain pääoman takaavalla tasolla pääomavaade alenee jonkin verran, kun sopimusaikaa pidennetään 5:stä 25:een vuoteen. Takuiden ollessa $2,5$ tai $3,5$ % vaade pysyy jotakuinkin samana ja $4,5$ %:n tapauksessa pääomavaade jopa nousee. Näin käy vaikka korkokäyrä on jyrkästi nouseva. Ilmiö johtuu siitä, että perustekorkotakuun hinta ja hyvitysten määrä on kullakin ajanhetkellä rahastoon verrannollinen. Toisaalta olemme nähneet jo aiemmin, että rahastoon verrannolliset suureet eivät diskontatessa häviä olemattomiin pitkälläkään aikahorisontilla, koska diskonttokertoimen pieneminen ja rahaston kasvu ovat kääntäen verrannollisia.

5.3 Herkkyysanalyysia

5.3.1 Vakavaraisuuden ja hyvityspolitiikan vaikutus

Taulukossa 5.3 on tarkasteltu tulosten herkkyyttä vakavaraisuuspositiolle. Tulevien lisätujen vastuu absorpoi suureksi osaksi vakavaraisuustilanteen vaikutuksen. Oma pääoma kasvaa vain $2,6$ yksikköä, kun vakavaraisuuspääoma kasvaa 20 yksikköä tavoitevyöhykkeen alarajalta ylärajalle. Näin ollen sijoitusomaisuuden suuretkaan arvovaihtelut eivät juuri näy omassa pääomassa, eivätkä siten tuloksessakaan. Vakuutuksenottaja voi tietenkin tehdä oman tulkintansa hyvityspolitiikan ja tulevien lisätujen pääoma-arvon pohjalta.

Sen sijaan noudatettu hyvityspolitiikka vaikuttaa suuresti oman pääoman

$a(0)$	VPO	DYJ	-TLE	VAJ	OPO
110 %	10	14,5	-18,3	-3,8	6,2
115 %	15	14,5	-22,5	-8,0	7,0
120 %	20	14,5	-26,9	-12,4	7,6
125 %	25	14,5	-31,2	-16,7	8,3
130 %	30	14,5	-35,7	-21,2	8,8

Taulukko 5.3: Vakavaraisuuden vaikutus tuleviin lisäetuihin ja oman pääomaan vaateeseen. Tarkastelun kohteena 2,5 %:n korkotakuun sisältävä 10 vuoden pituinen sopimus. Oletukset taulukon 5.2 mukaiset.

a_{min}	VAJ	a_{max}	VAJ	β	VAJ
1,00	-22,2	1,20	-12,7	0,00	-4,2
1,05	-17,3	1,30	-12,4	0,25	-8,8
1,10	-12,4	1,50	-12,4	0,50	-12,4
1,15	-7,9	2,00	-12,4	0,75	-14,3
1,20	-3,9	∞	-12,4	1,10	-15,3

Taulukko 5.4: Hyvityspolitiikan vaikutus oman pääomaan vaateeseen. Tarkastelun kohteena 2,5 %:n korkotakuun sisältävä 10 vuoden pituinen sopimus. Oletukset taulukon 5.2 mukaiset.

määrään, kuten taulukosta 5.4 nähdään. Taulukossa on tutkittu yhden parametrin muutoksen vaikutusta, kun muut pidetään ennallaan. Hieman yllättäen tavoitevyöhykkeen ylärajalla ei ole (tämän muotoilun yhteydessä) juurikaan vaikutusta. Sen sijaan tavoitevyöhykkeen alarajalle asetettu taso vaikuttaa voimakkaasti. Kuten myös osuus, jolla pitkän koron ylittäviä sijoitustuottoja leikataan asiakkaita hyväksi.

Hyvityspolitiikan suuri vaikutus asettaa haasteen yhtiöiden yhteismitallisuudelle vertailtavuudelle. Kuria pitävät yllä kohtuus- ja jatkuvuusperiaate, eli politiikan yhdenmukaisuus toteutuneen historian kanssa sekä osittamaton ylijäämä ja tulevien lisäetujen taso, jotka kertovat lahjomattomasti yhtiön potentiaalista maksaa hyvityksiä ja takuita.

5.3.2 Sijoitussalkun riskillisyyden vaikutus

Taulukosta 5.5 nähdään sijoitussalkun riskillisyyden vaikutus tulevien lisäetujen ja oman pääoman määrään.⁴ Rahamarkkina- ja osakesalkun välinen ero on suuri, mutta käypien salkkujen alueella vaikutus ei ole tämän esimerkin tapauksessa dramaattinen - merkittävä kuitenkin. Teoriassa siis yhtiö voisi manipuloida oman pääoman osuuttaan vaihtamalla portfolionsa allokaatiota hetkellisesti tilinpäätöstarkoituksiin sopivaksi. Tilinpäätösallokaation (tai salkun riskillisyyden)

⁴Tässä riskillisyyteen vaikuttavat muutkin tekijät kuin tuoton hajonta. Sijoitusmallin osake- ja jvk -tuottojen hienoinen negatiivinen korrelaatio [Liite D] aiheuttaa sen, että vuosituoton hajonta on jokseenkin sama salkuilla 10/*/*/. Kuitenkin oman pääoman vaade laskee korkeammalla jvk -osuuksilla. Tämä selittyy pääasiallisesti hyvityspolitiikan korkoriippuvuudella. Myös hyvityspolitiikan ja salkun autokorrelaatorakenteen yhteisdynamiikalla on vaikutuksensa. Sen sijaan salkun tuotto-oletus ei vaikuta laskelmien tuloksiin.

osakkeissa	allokaatio	hajonta	DYJ	-TLE	VAJ	OPO
0 %	100/0/0	2,1 %	14,5	-23,2	-8,7	11,3
0 %	0/100/0	10,4 %	14,5	-25,4	-10,9	9,1
10 %	10/80/10	9,2 %	14,5	-25,4	-10,9	9,1
20 %	10/70/20	10,2 %	14,5	-26,4	-11,9	8,1
30 %	10/60/30	10,1 %	14,5	-26,9	-12,4	7,6
40 %	10/50/40	11,0 %	14,5	-28,3	-13,8	6,2
100 %	0/0/100	20,4 %	14,5	-47,6	-33,1	-13,1

Taulukko 5.5: Sijoitussalkun riskillisyyden vaikutus oman pääomaan vaateeseen osakeosuuden funktiona. Allokaatio = rahamarkkina/jvk/osake, hajonta = porfolion vuosituoton hajonta (keskimäärin vakuutusaikana). DYJ -sarakeessa alkupääoman ja takuiden pääoma-arvon erotus. TLE = tulevat lisäedut, VAJ = omaa pääomaa vähentävä alijäämä edellisten summana. Tarkastelun kohteena 2,5 %:n korkotakuun sisältävä 10 vuotta pitkä sopimus; muut oletukset ovat taulukon 5.2 mukaiset.

tulisikin perustua julkistetun sijoituspolitiikan mukaiseen tavoiteallokaatioon (tai riskitasoon) tai vaihtoehtoisesti tilinpäätösallokaatio voidaan määrätä vaikkapa tilivuoden kuukausikeskiarvona.

Periaateluonnoksessa ja tammikuun 2003 IASB -päivityksessä todetaan, että sijoitusomaisuuden luonne ei saa suoraan tai epäsuoraan vaikuttaa vakuutus sopimusten arvonmääritykseen. Suluissa lisätään poikkeus tähän sääntöön: "elleivät vakuutuksottajalle maksettavat kassavirrat riipu sijoitusten tuottokehityksestä". Henkivakuutuksen osalta näiden sulkujen sisään sijoittuu käytännössä koko vastuuvelka.

5.3.3 Loppuun asti pidettävät sijoitukset

Kiinteän kassavirran instrumentteja on mahdollista sijoittaa loppuun asti pidettävien sijoitusten kategoriaan. Tällöin niitä vastaava osuus vastuun kassavirrasta voidaan katsoa sovitetuksi (*cash-flow matching*). Tutkitaan sovittamisen vaikutuksia esimerkin valossa jakamalla sijoitusprosessi riskilliseen (alaindeksi r) ja riskittömään (alaindeksi f) osaan:

$$\begin{aligned} A(t) &= A_r(t) + A_f(t) \\ A_r(t) &= r(t)A_r(t-1) \\ A_f(t) &= r_f A_f(t-1) \end{aligned}$$

Tarkastellaan edelleen 2,5 %:n takuun sisältävää 10 -vuotista 100:n rahayksikön suuruista sopimusta vakavaraisuuden ollessa 120 %. Maturiteetin korko on 4,1 % ja pääoma- ja korkotakuun yhteenlaskettu pääoma-arvo on 85,5. Rahastovastuun pääoma- ja korkotakuu voitaisiin nyt kokonaan kattaa ostamalla 10 -vuotinen bondi hintaan 85,5. Merkitään kattamisastetta φ :lla, jolloin esimerkin tapauksessa

$$A_r(0) = 120 - \varphi \cdot 85,5$$

$$A_f(0) = \varphi \cdot 85,5$$

Kun $\varphi = 1$, on joukkolainojen osuus vähintään 71,25 %. Olkoon kyseinen määrä riskillisten ja riskittömien joukkolainojen yhteenlaskettu vakio-osuus. Olkoon 20 % osakkeissa ja loput 8,75 % rahamarkkinassa. Pidetään hyvityspolitiikka entisen kaltaisena $\beta = 0,5$ ja taulukoidaan oman pääoman vaadetta ja lisätujen vastuuta sovitusasteen funktiona.

φ	Riskiallokaatio	DYJ	-TLE	VAJ	OPO
0 %	8,75/71,25/20,0	14,5	-26,1	-11,6	8,4
25 %	10,7/65,0/24,3	14,5	-25,3	-10,8	9,2
50 %	13,6/55,3/31,1	14,5	-24,8	-10,3	9,7
75 %	18,8/38,2/43,0	14,5	-24,5	-10,0	10,0
100 %	30,4/0,0/69,6	14,5	-24,4	-9,9	10,1

Taulukko 5.6: Loppuun asti pidettävien joukkolainojen osuuden vaikutus omaan pääomaan ja tuleviin lisätuihin. Sarakkeet: φ = loppuun asti pidettävien joukkolainojen osuus, Riskiallokaatio = salkun riskilliseen osaan jääneen sijoitusomaisuuden allokatio rahamarkkina/joukkolainat/osakkeet, DYJ = alkupääoma vähennettynä takuiden pääoma-arvolla, TLE = tulevien lisätujen pääoma-arvo, VAJ = vaikutus omaan pääomaan edellisten summana ja OPO = oma pääoma. Tarkastelun kohteena 2,5 %:n korkotakuun sisältävä 10 vuotta pitkä sopimus. Muut oletukset ovat taulukon 5.2 mukaiset.

Taulukosta nähdään, että myös näin voidaan hieman vähentää pääomavaadetta tulevien lisätujen kustannuksella. Avoin kysymys on kuinka suuren osan lainasalkusta yhtiö voi kiinnittää tai kuinka järkevää kiinnittäminen on sijoituksellisesti. Ehtonahan on, että varoihin ei tarvitse kajota missään tilanteessa. Jos varoja joudutaan realisoimaan, tulee koko tase-erä kerralla käyvän arvon piiriin. Tällaista korkoriskiä ei yhtiö voi ottaa kovin suurissa erissä. Ja vaikka realisointitarvetta ei ilmenisikään, ottaa yhtiö joka tapauksessa tuottoa lukitessaan sijoituksellisen riskin.

5.4 Paluu esimerkkiin

Kappaleen 5.2 esimerkeissä ja niitä seuranneissa analyysissä käytettiin yksinkertaistettua tase-erittelyä. Toistetaan vielä taulukon 5.2 mukaisen 2,5 %:n perustekorona omaavan sopimuksen laskenta periaatelunnon mukaisella erittelyllä ja katsotaan millaiseksi vakuutuksenottajan netto-osuus muodostuu.

Taulukosta havaitaan miten vakuutuksenottajan intressi osittamattomaan ylijäämään kasvaa, kun jäljellä oleva vakuutusaika pitenee. Myyntioptio -rivillä on

$$E\{D(0, T) \max(r_g^T - r(0, T), 0)\} V_0,$$

Sopimuksen pituus (vuotta)	1	5	10	25
Osittamaton ylijäämä	20,0	23,9	34,5	61,9
Vak.ottajien osuus os.ylij.	18,5 %	59,1 %	73,3 %	85,2 %
Myyntioptio	3,1	3,9	2,2	0,0
Omistajien osuus osittamattomasta ylijäämästä	16,3	9,8	9,2	9,2
Korkotakuut	-0,6	-2,3	-1,6	0,0
Oma pääoma yhteensä	15,7	7,5	7,6	9,1
Hoitokulujen pääoma-arvo	0	0	0	0
Rahastovastuu	100	100	100	100
Diskonttoylijäämä	0,0	-3,9	-14,5	-41,9
Vakuutuksenottajien osuus osittamattomasta ylijäämästä	3,7	14,2	25,3	52,7
Korkotakuut	0,6	2,3	1,6	0,0
Vastuuvelka	104,3	112,5	112,4	110,9
Tasearvo	120	120	120	120

Taulukko 5.7: Taulukon 5.2 mukainen 2,5 %:n perustekoron omaava sopimus kappaleen 5.1.2 viimeisen tase-erittelyn mukaisesti.

eli takuun hinta on laskettu päätevastuulle. Korkotakuiden tase-eräksi tulee tässä myyntioption hinta vakuutuksenottajien osuudella kerrottuna kappaleen 5.1.2 tase-erittelyjen mukaisesti.

Luku 6

Erityiskysymyksiä

6.1 Perustekorkoinen vakuutuskanta

Tähän astiset esimerkit ovat käsitelleet yhtä vakuutus sopimusta tai identtisten vakuutus sopimusten joukkoa. Vakuutuskannan sopimusten kassavirrat ovat kuitenkin hyvityspolitiikan ja yhteisen katteen kautta toisistaan riippuvaisia. Havainnollistetaan tätä esimerkillä, jossa vakuutuskanta koostuu kolmesta 1, 5 ja 10 vuotta pitkistä taulukon 5.2 mukaisesta 2,5 %:n takuun sisältävästä sopimuksesta.

	DYJ	TLE	VAJ	OPO
sopimusten summana	18,4	-47,6	-29,2	30,8
vakuutuskantana	18,4	-68,2	-49,8	10,2

Taulukko 6.1: Kassavirtojen riippuvuus. Vakuutuskanta muodostuu taulukon 5.2 mukaisista 2,5 %:n korkotakuun sisältävistä 1, 5 ja 10 vuotta pitkistä sopimuksista. Kunkin sopimuksen rahasto on 100 yksikön suuruinen. Sijoitusomaisuutta on 360 yksikköä ja vakavaraisuusaste täten 120 %.

Havaitaan, että kannalle laskettu pääomakustannus on korkeampi kuin sopimuksista summattu. Tavoitevyöhykkeeseen sidottu hyvityspolitiikka aiheuttaa sen, että run-off -kannan vahvistuva vakavaraisuuspääoma päättyy saman tien hyvityksinä vielä jatkuville vakuutus sopimuksille. Näin tulevien lisätujen määrä kasvaa suuremmaksi kuin sopimuskohtaisessa evaluaatiossa.

Tilinpäätösten jatkuvuusperiaatteen mukaisesti toimittaessa uusmyynnin aiheuttama pääomasite pitäisi ottaa huomioon. Vapautuva toimintapääoma ei jatkuvuusperiaatteen alla tuloudu vanhalle kannalle, vaan sitoutuu takaisin uusmyynnin maksutuloa vastaan.

Periaateluonnos rajaa uusista vakuutuksista aiheutuvat kassavirrat tarkastelun ulkopuolelle. Tätä voitaisiin tulkita niinkin, että uusista sopimuksista aiheutuva korvausmeno jätetään vastuun ulkopuolelle, mutta pääomavaadetta aiheuttava maksutulo otetaan huomioon hyvityspolitiikkaan vaikuttavana tekijänä.

Samoin olisi tällöin meneteltävä liikekulujen kanssa. Uusien sopimusten hankintakulut otettaisiin huomioon hyvityspolitiikan kautta, mutta suoraan vastuuvέλkaan luettaisiin vain vanhan kannan hoitokulut. Tällainen tulkinta johtaa kuitenkin hankalalle tielle. On käytännössä mahdoton tilanne, että tilinpäätösvastuut perustettaisiin pitkälle ulottuviin lajikohtaisiin myyntiennusteisiin.

Jos vakuutuskannan arvonmääritys ei voi perustua run-off -tilanteeseen ja uusmyyntiä ei voida ottaa huomioon, niin mitä vaihtoehtoja jää jäljelle? Näiden kysymysten äärellä liikutaan jo heikoilla jäillä mitä tulee IAS -periaateluonnoksen antamaan osviittaa.

On oletettavaa, että kirjanpidon täytyy tässä kohden erkaantua puhdasverisestä asset-liability -tutkimuksesta, jossa tulevaisuutta koskevia oletuksia voidaan tehdä vapaammin. Se mikä ehkä prospektien realistisuudessa menetetään saadaan toivottavasti takaisin ymmärrettävyytenä, yhteismitallisuutena ja tulosten jäljitettävyytenä.

Luontevin ja neutraalein ratkaisu lienee se, että vastuu (sittenkin) lasketaan sopimuksittain tai sopimusryhmittäin ajan yli iteroiden. Sopimuksen vastuuta laskettaessa ei silloin saa ottaa huomioon muista sopimuksista vapautuvaa vastuuta tai uusmyynnin seurauksena sitoutuvaa uutta pääomaa.

Toisena - vielä yksinkertaisempänä - vaihtoehtona voisi olla maturiteetti-kohtainen laskenta. Tällöin sijoitustuotoista riippumattomat (vakiokorolla lasketut) kassavirrat summataan ensin sopimusten yli maturiteeteille. Kate osoitetaan tämän jälkeen myös maturiteeteille ja kunkin maturiteetin tuottokytketyt erät lasketaan erikseen ja summataan yhteen.

Sopimuskohmainen laskenta on näistä kahdesta siinä mielessä monipuolisempi vaihtoehto, että siinä säilytetään mahdollisuus kytkeä hyvitykset, kassavirtojen ajoitus (takaisinostot) ja lisäsijoitukset (maksutulo) makroekonomiseen kehitykseen. Sopimuskohmaisessa laskennassa voidaan myös ottaa huomioon inflaatioidonnaiset elementit ilman erillisiä laskentoja. Maturiteettilaskentaa puolestaan puoltaisi se, että tuottokytkettyjen laskentojen määrä on ehkä pienempi ja laskennan tulokset olisivat ehkä paremmin jäljitettävissä.

Kummassakin tavassa joka tapauksessa menetetään se informaatio, että yhtiöt todellakin ovat erilaisessa asemassa vakuutuskantojensa erilaisen purkautumistahdin vuoksi. Sopimuskohmaisesta laskennasta samaan lopputulokseenhan johtaa myös kannalle laskenta sillä oletuksella, että uusi pääoma ja vapautuva vastuu ovat täsmälleen yhtä suuret. Uuden pääoman virta määräytyy markkinoiden yleisen kehityksen kautta ja sen vaikutuksen voidaan ajatella olevan yhtäläinen kaikille yhtiöille. Yhtiöiden vakuutuskantojen purkautumisvauhdit voivat kuitenkin poiketa toisistaan merkittävästi. Tämä informaatio voidaan kuitenkin välittää tilinpäätöksen liitetiedoissa vakuutuskantojen maturiteettirakenteiden kautta.

6.1.1 Maturiteettiositus

Tarkastellaan vielä suuntaa antavasti millä tavoin maturiteettilaskenta voisi käytännössä tapahtua ja mitä mahdollisia ongelmia siihen liittyy.

- Lasketaan ensin sopimuskohtaiset sijoitustuotoista riippuvat kassavirrat takuukorolla (asiakashyvitykset=0) vakuutuskannan ylitse. Sopimukselle j saadaan takuukoron alaiset kassavirrat $C_j(1), C_j(2), \dots$. Sopimuksen j alkuvastuu jaetaan myös maturiteeteille, jolloin saadaan alkuvastuiden ositus $V_j(0) = V_j(0, 1) + V_j(0, 2) + \dots$. Ositusperiaatteena voidaan käyttää vaikkapa

$$V(0, t) = \frac{r_g^{-t} C_t}{\sum_j r_g^{-j} C_j} \cdot V_0.$$

- Summataan sopimusten kassavirrat ja ositetut lähtövastuut maturiteeteittain, jolloin saadaan takuukorkoinen kassavirta $C_g(1), C_g(2), \dots$ ja rahastovastuun ositus $V_0 = V_0(1) + V_0(2) + \dots$.
- Ositetaan vielä vakuutuskantaa kattava omaisuus vastaavasti $A_0 = A_0(1) + A_0(2) + \dots$. Ositus voitaisiin tehdä myös sijoituslajeittain, jolloin salkun riskillisyyys voidaan sovittaa maturiteeteille.

Olemme nyt tehneet maturiteettiosituksen vakuutuskannalle ja sen katteelle. Oletetaan, että tarkasteltavan kannan sopimuksilla on sama takuukorko ja että sopimukset ovat saman hyvityspolitiikan alaisia. Käsitellään seuraavaksi tiettyä maturiteettia T . Jaetaan maturiteetin perustekorolla laskettu kassavirta $C_g(T)$ tekijöihin

$$C_g(T) = r_g^T r_e^T V_0(T), \quad (6.1)$$

missä takuukorko r_g ja alkuvastuu $V_0(T)$ tunnetaan. Termi r_e^T on kuormituksen ja riskiliikkeen yhteisvaikutus (tyypillisesti $r_e < 1$).

Kirjoitetaan kassavirta periaateluonnoksen esittämässä muodossa (5.5).

$$C_T = C_g(T) + \alpha r(0, T)(A_0(T) - V_0(T)) + \alpha \max(r(0, T) - r_g^T r_e^T, 0) V_0(T). \quad (6.2)$$

Ylijäämää jaetaan nyt maturiteetilla T poistuville kassavirroille kertoimen α (ja kateosituksen $A_0(T)$) määrämässä suhteessa, täysin riippumatta siitä mitä aiemmilla tai myöhemmillä ajanhetkillä tapahtuu. Tähän muotoon saatettu jakoperuste on nähtävä laskennallisena välineenä, jonka avulla irrottaudutaan ylijäämän jaon mekanismiin ja dynamiikkaan liittyvistä ongelmista. Poliitiikan määräävä kerroin α on sidottava jollakin tavalla realiteetteihin. Tämä voitaisiin tehdä esimerkiksi määräämällä α siten, että vakuutuksenottajan saamaa tuottoa $E\{C_T\}/V_0$ koskevat kohtuulliset (historiaan perustuvat) odotukset toteutuvat.

Tämän lähestymistavan houkuttelevuus on siinä, että stokastisia laskentoja on vain maturiteettijaon mukainen määrä. Lisäksi kassavirran odotusarvoon sisältyvä optio voitaisiin ehkä hinnoitella tilinpäätöstarkoituksiin riittävällä tarkkuudella käyttäen Black-Scholes -tekniikkaa ja korjauskertoimia, joilla otettaisiin huomioon mm. tuottojakauman (korkoinstrumenteista aiheutuvat) poikkeamat logaritmisesta normaalijakaumasta.

Puutteita ja ratkaistavia ongelmia on toki useita. Jos sopimuksiin sisältyy inflaationsidonnaisia komponentteja, on niiden vaikutus arvioitava erikseen. Erikseen on myös arvioitava tuotto- ja inflaatiokytkettyjen takaisinostojen ja maksujen vaikutus. Sijoitusomaisuuden ositus on myös ongelmallinen. Kuinka omaisuus jaetaan maturiteeteille ja sallitaanko sijoituslajikohtainen allokointi, jolloin salkun riski vaihtelee maturiteeteittain? Jos sallitaan, niin suoritetaanko ositus jonkin säännön mukaisesti vai voivatko yhtiöt päättää siitä itse? Jos yhtiöt päättävät itse, niin tilejä päättävät aktuaarit ovat haastavan optimointiongelman edessä.

6.2 Rationaalinen vakuutuksenottaja

Finanssi-instrumenttien matemaattisessa hinnoittelussa on tapana olettaa, että sijoittaja on riskineutraali ja rationaalinen toimija. Tällä tarkoitetaan sitä, että sijoittaja valitsee sen vaihtoehdon, jonka odotusarvoinen tuotto on suurin. Hinnoittelumallit olettavat yleensä lisäksi, että kaikilla sijoittajilla on käytössään sama markkinainformaatio ja sijoittajilla on yhtenäinen näkemys markkinan mekanismista, eli mallista, jota hinnoittelussa käytetään. Hinnoittelumallit eivät myöskään aseta rajoituksia sijoittajan (markkinan) varallisuudelle tai rahoitusmahdollisuuksille.

Vastuuvelan käyvän arvon määrittämisessä oletus rationaalisesta vakuutuksenottajasta johtaa erikoisiin tilanteisiin. Ajatellaan esimerkiksi perustekoron muodossa annettua korkotakuuta tilanteessa, jossa markkinakorko jollakin maturiteetilla alittaa sopimuksessa taatun koron. Jos sopimuksessa ei ole maksukattoa, tekee rationaalinen vakuutuksenottaja rajatta voittoa lainaamalla markkinakorolla ja sijoittamalla rahat sopimukseen. Seurauksena on ääretön vastuuvelka - silloinkin, kun takuukorko alittaa markkinakoron, sillä korko-optio on hinnoiteltava ja luettava osaksi vastuuvelkaa. Käytännössä näin ei tietenkään tapahdu, koska yhtiö kieltäytyisi vastaanottamasta rahaa siinä määrin, että se vaarantaisi yhtiön vakavaraisuuden ja siten muiden vakuutuksenottajien edut. Meillä ei siis ole tässä paradoksia - vain huonosti määritelty ongelma.

Jos vakuutuskannan sopimuksille on voimassa ehdoissa määritelty maksukatto, ei tällöinkään nähdä korkotason laskun seurauksena ylärajaan asti ulottuvaa maksutulopiikkiä. Tämä johtuu mm. siitä, että tavallisen vakuutuksenottajan rahoitusmahdollisuudet ovat rajalliset ja ehkä myös siitä, että vaivan katsotaan ylittävän hyödyn tai jopa siitä, että vakuutuksenottaja ei ylipäättään seuraavaksi tarkasti sijoitusmarkkinoiden liikkeitä. Vakuutuksenottajat kollektiivina eivät

käyttäydy rationaalisesti - ainakaan puhtaasti ekonomisessa mielessä.

Todennäköistä on, että rationaalisuus kasvaa varallisuuden ja rahoitusmahdollisuuksien kasvaessa. Rationaalisuusoletuksen voitaisiin katsoa olevan perusteltu, kun ollaan hinnoittelemassa suuren yrityksen tekemää kapitalisaatiosopimusta. Valtaosa säästövakuutusten vastuuvélasta koostuu kuitenkin tavallisten kuluttajien varoista. Näiden vakuutusten osalta rationaalisuusoletuksen soveltaminen johtaa turvaavasti laskettuun vastuuvélkaan, josta turvaavuusmarginaalin osuus ei ole tiedossa. IAS -periaatteiden mukaan vastuuvélka pitäisi kuitenkin laskea parhaaseen arvioon (odotusarvoon) perustuen ja vasta tähän tulisi lisätä eksplisiittinen riskimarginaali.

Vastaaviin pohdiskeluihin ajaututaan, kun tarkastellaan muita vakuutuksenottajan päätöksistä riipuvia transaktioita, kuten takaisinostoja tai jatko-oikeuden käyttämisä. Vapaasti takaisinostettavan säästövakuutuskannan kohdalla rationaalisuusoletus voi johtaa siihen, että takaisinoston matemaattinen edellytys täyttyy ja koko ylijäämäinen kanta on arvostettava takaisinostoarvoon nykyisen vakuutusyhtiölain ja tilinpäätöskäytännön (sekä IAS -kaavailuissakin esiintyneen deposit-floor -ajattelun) mukaisesti. Tämä ei kuitenkaan anna parhaan arvion mukaista kuvaa tulevien kassavirtojen nykyarvosta ja siihen lisätystä riskimarginaalista niin kuin tavoitteena pitäisi olla.

Vakuutuksen pitämiseen tai siitä luopumiseen vaikuttavat maksujen yhteydessä käsiteltyjen käyttäytymiserojen lisäksi myös vakuutuksenottajan henkilökohtaiseen talouteen liittyvät seikat (esim. verotus) sekä säästövakuutuksen muut ominaisuudet, kuten vastaavien sijoituskohteiden ja sopimukseen liittyvän riskiturvan saatavuus ja hinta sopimuksesta irrotettuna.

Edellä esitetyt ristiriidat ilmenevät kuitenkin myös silloin kun vakuutusso-
pimuksessa ei ole muista sijoitusinstrumenteista poikkeavia erityispiireitä. Sopimukselle voidaan kyllä laskea rationaaliperiaatteen mukainen arvo perinteisiä finanssimatematiikan keinoja käyttäen. Tämä arvo on kuitenkin sopimuksen (finanssimatemaattinen) arvo vakuutuksenottajalle - ei vastuuvélan käypä arvo.

Vastuuvélan käyvän arvon määritelmä lähtee IAS -määrittelyssä vastuun haltijoiden välisestä vastuunsiirron kauppatapahtumasta. Vastuun haltijoiden vakuutuskannalle määrittämä hinta ei kohtaa rationaaliperusteen mukaista, vakuutuksenottajien näkökulmasta laskettua sopimusten yhteenlaskettua arvoa. Tilinpäätöksiä lukevia intressiryhmiä kiinnostaa näistä ensimmäinen, sillä se kertoo yrityksen liiketoiminnan nykyarvosta. Rationaalisuusongelma ei siten juonu siitä, että vakuutusso-
pimuksille ei ole olemassa jälkimarkkinoita vaan siitä, että IASin käypä arvo on määritelty (aivan oikein) liiketoimintaa harjoittavien yhtiöiden näkökulmasta.

Jos rationaaliperustetta suoraan soveltamalla ei päästä haluttuun lopputulokseen, niin kuinka sitten? Liiketoiminnan käypää nykyarvoa voidaan lähestyä arvioimalla vakuutuksenottajakollektiivin käyttäytymistä. Asiaa voidaan lähestyä tuottokytettyjen sopimusten osalta esimerkiksi sijoitusmarkkinoihin ja vakavaraisuustilanteeseen sidottujen intensiteettien kautta. Voidaan esittää laskennalli-

sia arviota (malleja) esimerkiksi siitä kuinka paljon korkotason putoaminen alle takuukoron nostaa maksamisen intensiteettiä tai vastaavasti kuinka paljon vakavaraisuustilanteen heikentyminen ja hyvitysten putoaminen vaikuttaa takaisinostointensiteettiin. Laskelmat perustuvat väistämättä karkeisiin arvioihin, sillä historiatietoa on niukalti. Toisaalta vaikutukset ovat kuitenkin oikean suuntaisia ja yhteismitallisia, jos perusteet ovat alalle yhtenäiset.

Liite A

Black-Scholes deflaattori

Tarkastellaan kappaleen 2.2 oletuksien ostioption hinnan määräävää odotusarvoa

$$C = E\{D(0, t) \max(S_t - K, 0)\}$$

Tämän integraalimuoto on

$$C = \int_d^\infty D(0, t) S_t f(x) dx - K \int_d^\infty D(0, t) f(x) dx \quad (\text{A.1})$$

missä $d = \ln(K/S_0)$ on raja, jota suuremmilla x :n arvoilla option payoff on nolasta poikkeava ja $f(x)$ on $N(\mu t, \sigma^2 t)$ normaalijakautuneen x :n tiheysfunktio

$$f(x) = c \cdot \exp\left(-\frac{0,5(x - \mu t)^2}{\sigma^2 t}\right), \quad c = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}$$

Ostioption integraalimuodon ensimmäinen termi on

$$S_0 \int_d^\infty c \cdot \exp\left\{at + (b+1)x - \frac{0,5(x - \mu t)^2}{\sigma^2 t}\right\} dx$$

Kun vakiot a ja b sijoitetaan, osaketuotto μ eliminoiduu ja saadaan

$$S_0 \int_d^\infty c \cdot \exp\left\{-\frac{0,5(x - t(\delta + 0,5\sigma^2))^2}{\sigma^2 t}\right\} dx$$

Integrandi tunnustetaan $N(t(\delta + 0,5\sigma^2), \sigma^2 t)$ jakautuneen satunnaismuuttujan $N(0, 1)$ -standardoiduksi tiheysfunktioiksi. Integraalissa lasketaan siten todennäköisyyttä

$$P\left(z := \frac{x - t(\delta + 0,5\sigma^2)}{\sigma\sqrt{t}} > \frac{\ln(K/S_0) - t(\delta + 0,5\sigma^2)}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Normaalijakauma on symmetrinen, joten edeltävä on sama kuin

$$P\left(z < \frac{\ln(S_0/K) + t(\delta + 0,5\sigma^2)}{\sigma\sqrt{t}}\right),$$

jolloin siis

$$\int_d^\infty D(0, t) S_t f(x) dx = S_0 \phi \left(\frac{\ln(S_0/K) + t(\delta + 0,5\sigma^2)}{\sigma\sqrt{t}} \right),$$

missä ϕ on standardoidun normaalijakauman kertymäfunktio. Integraalisumman toiselle tekijälle ratkaisu etenee saman tapaisesti. Sijoitusten ja sievennysten jälkeen yhtälö saadaan muotoon

$$\int_d^\infty D(0, t) f(x) dx = e^{-\delta t} \int_d^\infty c \cdot \exp \left\{ -\frac{0,5(x - t(\delta - 0,5\sigma^2))^2}{\sigma^2 t} \right\} dx$$

Tästä saadaan edelleen

$$\int_d^\infty D(0, t) f(x) dx = e^{-\delta t} \phi \left(\frac{\ln(S_0/K) + t(\delta - 0,5\sigma^2)}{\sigma\sqrt{t}} \right)$$

Osto-option hinnaksi saadaan siten

$$C = S_0 \phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + t \left(\delta + \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma\sqrt{t}} \right) - K e^{-\delta t} \phi \left(\frac{\ln \left(\frac{S_0}{K} \right) + t \left(\delta - \frac{\sigma^2}{2} \right)}{\sigma\sqrt{t}} \right).$$

Liite B

Vektoriautoregressiivinen malli

Tarkastellaan vektoriautoregressiivistä¹ viiveasteen p VAR(p) -mallia:

$$y(t) = A_1 y(t-1) + \dots + A_p y(t-p) + b + \epsilon(t). \quad (\text{B.1})$$

Olkoon muuttujia K kappaletta, jolloin y , b ja ϵ ovat $K \times 1$ vektoreita ja kertoimet A_i ovat $K \times K$ matriiseja. Satunnaisinnovaatioita generoi K -dimensioinen ϵ -prosessi, jolle $E\{\epsilon\} = 0$, $E\{\epsilon_t \epsilon_t'\} = \Sigma_\epsilon$ ja $E\{\epsilon_t \epsilon_s'\} = 0$ kaikille $t \neq s$.

Tarkastellaan aluksi yhden viiveen mallia

$$y(t) = A_1 y(t-1) + b + \epsilon(t). \quad (\text{B.2})$$

Ottamalla puolittain odotusarvot saadaan muuttujavektorin y odotusarvo

$$\mu := E\{y\} = (I - A_1)^{-1}b, \quad I \text{ on } K \times K \text{ yksikkömatriisi} \quad (\text{B.3})$$

VAR -prosessin sanotaan olevan *stabiili*, jos karakteristisen yhtälön juuret ovat kompleksitason yksikköympyrän ulkopuolella. VAR(1) -prosessille ehto on muotoa

$$\det(I - A_1 z) \neq 0 \text{ kaikille } |z| \leq 1. \quad (\text{B.4})$$

VAR(1) -prosessin n :n askeleen ennuste ja ennustevirheen kovarianssimatriisi saadaan yhtälöistä

$$y(t, n) = (A_1^n (y(t) - \mu) + \mu) \quad (\text{B.5})$$

$$\Sigma_y(n) = \sum_{i=0}^{n-1} A_1^i \Sigma_\epsilon (A_1^i)'. \quad (\text{B.6})$$

¹Monimuuttuja-aikasarjoja yleensä ja vektorimuotoista autoregressiota erityisesti esitellään esimerkiksi teoksessa [8]

Jos $y(t)$ on yhtälön (B.1) mukainen VAR(p) -prosessi, niin voidaan määritellä vastaava Kp -dimensioinen VAR(1) -prosessi

$$z_t = Az_{t-1} + c + u_t, \quad (\text{B.7})$$

missä

$$z_t := \begin{bmatrix} y_t \\ y_{t-1} \\ \vdots \\ y_{t-p+1} \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & \cdots & A_{p-1} & A_p \\ I_K & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & I_K & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & I_k & 0 \end{bmatrix},$$

$$c := \begin{bmatrix} b \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{ja} \quad u_t := \begin{bmatrix} \epsilon_t \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tässä z , c ja u ovat $Kp \times 1$ vektoreita ja A on $Kp \times Kp$ dimensioinen matriisi. VAR(p) -prosessin n :n askeleen odotusarvo ja ennustevirheen kovarianssimatriisi voidaan laskea muuntamalla prosessi ensin VAR(1) muotoon ja soveltamalla sen jälkeen yhtälöitä B.5 ja B.6. Tätä on hyödynnetty forward -koron laskennassa kappaleessa 3.3.

Liite C

Historiadata

date	y(3m)	y(10y)	eki	stoxx	date	y(3m)	y(10y)	eki	stoxx
31.12.1959	4.69	6.2	136	20.55	31.3.1969	4.21	6.4	214	28.59
31.3.1960	4.71	6.4	137	20.29	30.6.1969	5.5	6.7	217	28.96
30.6.1960	5.25	6.6	138	26.23	30.9.1969	6.94	7.2	218	29.58
30.9.1960	5.61	6.5	138	27.11	31.12.1969	8.83	7.6	218	30.61
31.12.1960	5.06	6.2	140	26.26	31.3.1970	9.81	8.1	221	28.16
31.3.1961	3.73	5.9	140	26.37	30.6.1970	9.88	8.7	222	22.86
30.6.1961	3.13	5.6	140	27.25	30.9.1970	9.36	8.5	224	23.93
30.9.1961	3.06	6	140	23.48	31.12.1970	8.12	8.2	225	21.83
31.12.1961	3.83	6	142	24.09	31.3.1971	7.46	7.9	231	26.48
31.3.1962	3.02	5.6	144	22.97	30.6.1971	6.8	8.2	237	24.89
30.6.1962	3.13	5.9	146	18.43	30.9.1971	7.59	8.1	243	23.6
30.9.1962	3.2	6	148	17.43	31.12.1971	6.63	7.9	245	23.28
31.12.1962	4.35	6.1	150	19	31.3.1972	4.8	7.4	247	27.56
31.3.1963	3.53	6	151	17.91	30.6.1972	4.65	7.9	254	27.01
30.6.1963	3.83	6.1	153	20.82	30.9.1972	5.32	7.9	259	27.29
30.9.1963	3.75	6.1	156	22.24	31.12.1972	8.6	8.6	262	26.38
31.12.1963	4.98	6	158	21.59	31.3.1973	8.77	8.5	269	28.15
31.3.1964	3.46	6	167	25.07	30.6.1973	13.62	9.9	280	23.35
30.6.1964	3.75	6.3	170	23.88	30.9.1973	14.25	9.6	295	21.42
30.9.1964	4.08	6.4	172	24.86	31.12.1973	13.2	9.6	303	19.49
31.12.1964	5.36	6.4	174	23.5	31.3.1974	11.2	10.4	317	19.67
31.3.1965	4.28	6.5	176	22.16	30.6.1974	9.46	10.7	329	19.54
30.6.1965	4.8	7.1	178	21.36	30.9.1974	9.69	10.7	348	18.52
30.9.1965	5.36	7.4	179	22.71	31.12.1974	8.6	9.8	354	19.76
31.12.1965	6.55	7.7	180	20.77	31.3.1975	5.71	8.7	375	24.55
31.3.1966	5.69	7.7	182	21.14	30.6.1975	4.88	8.2	388	23.86
30.6.1966	6.81	8.4	184	17.83	30.9.1975	3.93	8.3	405	24.18
30.9.1966	6.8	8.5	187	18.06	31.12.1975	4.21	8.3	418	27.7
31.12.1966	7.57	7.7	189	16.39	31.3.1976	3.74	7.6	436	28.7
31.3.1967	5.04	7.2	192	19.1	30.6.1976	4.14	8	442	26.67
30.6.1967	3.98	6.9	194	17.8	30.9.1976	4.56	7.9	460	26.12
30.9.1967	3.43	6.7	197	21.76	31.12.1976	4.93	7.3	469	25.03
31.12.1967	4.07	6.8	203	24.75	31.3.1977	4.73	6.8	489	25.07
31.3.1968	3.52	6.7	210	26.34	30.6.1977	4.28	6.1	506	25.81
30.6.1968	3.72	6.4	213	29.08	30.9.1977	4.15	5.7	520	26.62
30.9.1968	3.54	6.3	214	27.9	31.12.1977	3.98	5.7	525	27.02
31.12.1968	4.44	6.3	215	27.32	31.3.1978	3.51	5.2	533	27.03

Taulukko C.1: Historiadata. y(3m) = Saksan 3 kk:n talletuskorko, y(10y) = Saksan valtion 10 vuoden korko, eki = Suomen elinkustannusindeksi, stoxx = osingot sisältävä euroalueen SXXR -osakeindeksi 31.12.1986 alkaen - tätä ennen Saksan DAX -indeksi. (Jatkuu seuraavalla sivulla...)

date	y(3m)	y(10y)	eki	stoxx	date	y(3m)	y(10y)	eki	stoxx
30.6.1978	3.68	5.6	544	27.2	31.12.1990	9.11	8.99	1264	85.03
30.9.1978	3.7	6	551	29.42	31.3.1991	9.02	8.48	1291	99.97
31.12.1978	4.06	6.3	556	28.28	30.6.1991	8.99	8.49	1301	100.64
31.3.1979	4.47	6.9	571	27.29	30.9.1991	9.22	8.4	1304	105.44
30.6.1979	6.46	7.8	582	25.21	31.12.1991	9.51	8.01	1313	100
30.9.1979	7.89	7.5	593	26.34	31.3.1992	9.65	8	1327	104.09
31.12.1979	9.58	7.9	604	24.48	30.6.1992	9.7	8.03	1336	106.57
31.3.1980	9.64	9.4	626	23.37	30.9.1992	9.43	7.47	1337	98.05
30.6.1980	10.11	8.2	648	25.35	31.12.1992	8.98	7.2	1340	105.75
30.9.1980	8.97	8.1	669	25.02	31.3.1993	7.91	6.67	1360	114.03
31.12.1980	10.2	8.9	686	23.65	30.6.1993	7.55	6.62	1364	120.91
31.3.1981	13.6	10.3	708	23.79	30.9.1993	6.57	6.1	1362	131.26
30.6.1981	13.09	10.9	731	26.24	31.12.1993	6.05	5.53	1361	148.78
30.9.1981	12.5	11.1	745	24.36	31.3.1994	5.79	6.33	1365	141.7
31.12.1981	10.82	9.7	755	24.12	30.6.1994	5.01	7.08	1382	134.74
31.3.1982	9.87	9.5	780	25.85	30.9.1994	5.02	7.6	1388	137.48
30.6.1982	9.28	9.1	800	24.64	31.12.1994	5.35	7.62	1383	139.23
30.9.1982	8.18	8.7	806	25.91	31.3.1995	5.02	7.19	1388	135.76
31.12.1982	6.62	7.9	823	27.18	30.6.1995	4.48	6.94	1394	145.84
31.3.1983	5.45	7.4	839	32.53	30.9.1995	4.15	6.6	1393	155.2
30.6.1983	5.57	8	871	35.39	31.12.1995	3.89	6.03	1387	163.16
30.9.1983	5.88	8.3	881	35.37	31.3.1996	3.3	6.44	1396	172.49
31.12.1983	6.48	8.2	890	38.06	30.6.1996	3.34	6.5	1401	180.26
31.3.1984	5.86	7.9	908	38.08	30.9.1996	3.1	6.1	1400	186.49
30.6.1984	6.13	8.1	926	37.54	31.12.1996	3.21	5.78	1399	203.59
30.9.1984	5.82	7.6	939	39.29	31.3.1997	3.24	5.88	1405	229.85
31.12.1984	5.83	7	945	40.37	30.6.1997	3.11	5.71	1417	259.22
31.3.1985	6.39	7.6	968	42.24	30.9.1997	3.29	5.52	1423	284.77
30.6.1985	5.68	6.9	985	50.09	31.12.1997	3.71	5.36	1425	287.42
30.9.1985	4.69	6.3	989	56.19	31.3.1998	3.5	4.92	1429	352.34
31.12.1985	4.83	6.5	992	67.19	30.6.1998	3.54	4.78	1438	368.34
31.3.1986	4.54	5.32	1005	72.86	30.9.1998	3.46	3.83	1441	293.23
30.6.1986	4.6	5.73	1018	66.76	31.12.1998	3.36	3.86	1437	347.85
30.9.1986	4.5	6.04	1021	69.24	31.3.1999	3.03	4	1441	371.6
31.12.1986	4.81	5.93	1025	70.43	30.6.1999	2.6	4.49	1454	390.25
31.3.1987	3.99	5.65	1044	75.68	30.9.1999	2.71	5.08	1457	384.39
30.6.1987	3.7	6	1053	81.77	31.12.1999	3.43	5.35	1466	480.77
30.9.1987	3.99	6.84	1060	85.62	31.3.2000	3.73	5.22	1485	500.62
31.12.1987	3.65	6.42	1063	60.33	30.6.2000	4.48	5.2	1504	481.69
31.3.1988	3.39	6.23	1084	65.03	30.9.2000	4.83	5.23	1519	484.09
30.6.1988	3.89	6.68	1107	71.2	31.12.2000	4.92	4.84	1517	462.34
30.9.1988	4.96	6.56	1119	73.96	31.3.2001	4.69	4.7	1529	415.07
31.12.1988	5.33	6.56	1132	76.17	30.6.2001	4.43	5.1	1550	428.4
31.3.1989	6.62	6.95	1156	84.28	30.9.2001	3.96	4.79	1552	347.75
30.6.1989	6.96	6.7	1182	89.21	31.12.2001	3.33	5	1542	390.74
30.9.1989	7.36	6.98	1195	96.97	31.3.2002	3.37	5.22	1559	398.31
31.12.1989	8.05	7.25	1205	98.62	30.6.2002	3.45	4.94	1566	336.9
31.3.1990	8.43	8.41	1232	97.17	30.9.2002	3.29	4.27	1568	259.61
30.6.1990	8.27	8.68	1248	102.89	31.12.2002	2.93	4.19	1567	269.54
30.9.1990	8.41	9.13	1262	81.58	31.3.2003	2.51	4.05	1584	237.44

Taulukko C.2: (...jatkoa edelliseltä sivulta.)

Liite D

Estimoitu malli

Aikasarjamalli estimoitiin liitteen C dataan perustuen käyttäen seuraavia muunnoksia:

$$\begin{aligned}y_1(t) &= \ln((1 + y_{3m}(t)/100)^{1/4} - 1) \\y_2(t) &= \ln\left(\frac{1}{(1 + y_{10y}(t)/100)^{10}}\right) \\y_3(t) &= \ln(\text{stoxx}(t)/\text{stoxx}(t-1)) \\y_4(t) &= \ln(\text{eki}(t)/\text{eki}(t-1)).\end{aligned}$$

Estimointiin käytettiin SAS -ohjelmiston ETS -aikasarjapaketin varmax -proseduuria. Parhaimmaksi selitysvoiman ja yksinkertaisuuden kompromissiksi osoittautui työssä käytetty ensimmäisen ja neljännen viiveasteen yhdistelmä VAR(1,4). Erityisesti inflaation selittäminen vaati vuosiviiveen mukanaoloa. Muiden muuttujien osalta olisi tyydyttävään lopputulokseen päästy yksinkertaisella ensimmäisen viiveasteen mallilla. Kokeiltujen mallien joukossa olivat VAR -mallit viiveasteeseen 5 asti sekä muutama yhteisintegroitunut VECM -konstruktio. Selitysvoimaa mitattiin informaatiokriteereillä: Akaike (AIC), korjattu Akaike (AICC), Hannan-Quinn (HQC), Schwarz Bayesian (SBC) ja Final Prediction Error (FPEC). Mallin

$$y(t+1) = A_1 y(t) + A_4 y(t-4) + b + \epsilon(t+1).$$

parametreiksi saatiin suoraa pienimmän neliösumman estimointimenetelmää soveltaen seuraavat arvot.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0.9085 & -0.6428 & 0.1134 & 0.9825 \\ -0.0282 & 0.9534 & -0.0177 & -0.3850 \\ -0.0400 & 0.0798 & -0.0596 & -1.5061 \\ 0.0031 & -0.0161 & 0.0023 & 0.2431 \end{pmatrix},$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -0.0911 & 0.3714 & -0.0338 & -1.0734 \\ -0.0108 & -0.1658 & 0.0408 & -0.5820 \\ -0.0004 & -0.3199 & 0.0800 & -0.0413 \\ -0.0067 & -0.0074 & -0.0128 & 0.4452 \end{pmatrix},$$

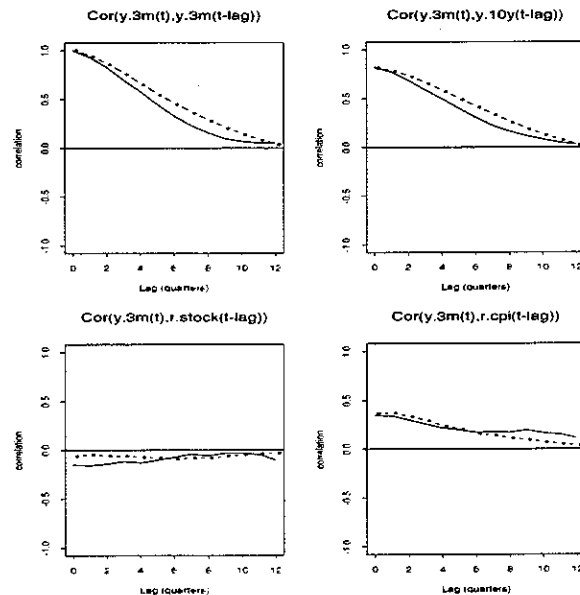
$$b = (-0.9765, -0.2990, -0.3041, -0.0267)'$$

Satunnaisinnovaation kovarianssimatriisiksi ja sen Cholesky -hajotelmaksi jäivät:

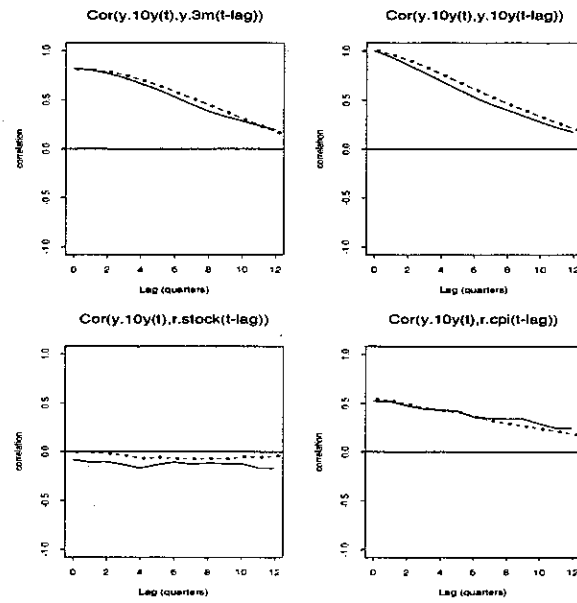
$$\text{Cov}(\epsilon) = \begin{pmatrix} 18.1 & -2.7 & -1.6 & -0.1 \\ -2.7 & 1.9 & 0.4 & -0.1 \\ -1.6 & 0.4 & 8.5 & 0.1 \\ -0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3},$$

$$\text{Chol}(\text{Cov}(\epsilon)) = \begin{pmatrix} 134.6 & -20.4 & -12.0 & -0.5 \\ 0.0 & 38.3 & 5.3 & -1.7 \\ 0.0 & 0.0 & 91.3 & 1.4 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 8.7 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}.$$

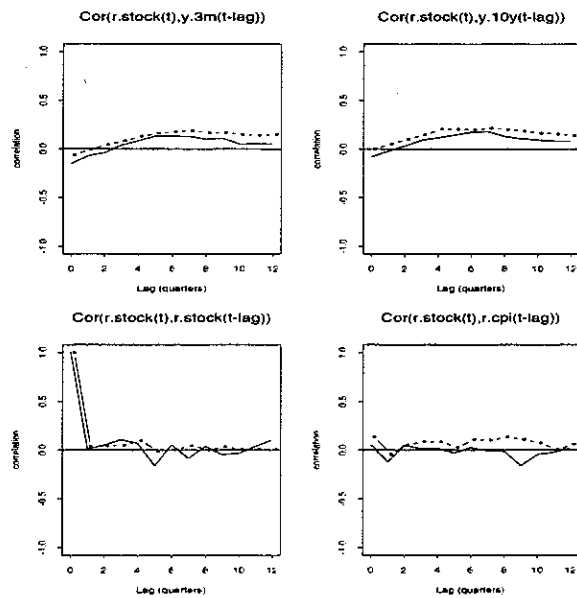
Seuraavissa kuvissa on vertailtu mallilla simuloidun otoksen ja historiadatan korrelaattiorakenteita. Historiasta havaintoja oli 173 kappaletta, eli reilu 43 vuoden jakso. Simuloituun otokseen generoitiin 250 vuoden skenaario (1000 havaintoa).



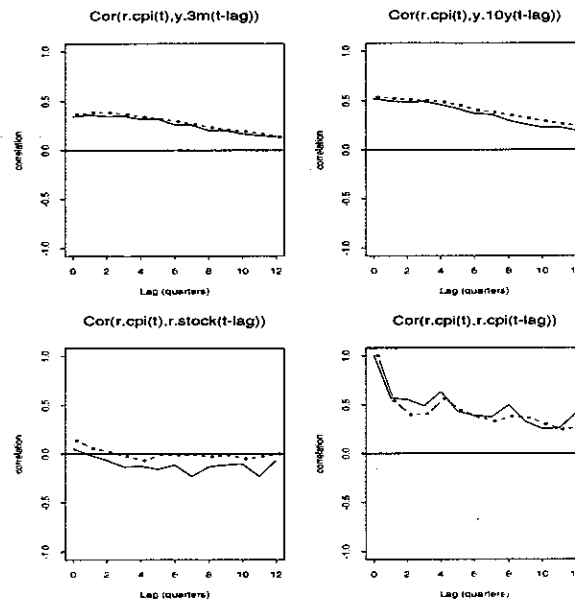
Kuva C.1 Lyhyen koron havaittu (yhtenäinen viiva) ja simuloitu (katkoviiva) viiveellinen korrelaatio.



Kuva C.2 Pitkän koron havaittu (yhtenäinen viiva) ja simuloitu (katkoviiva) viiveellinen korrelaatio.

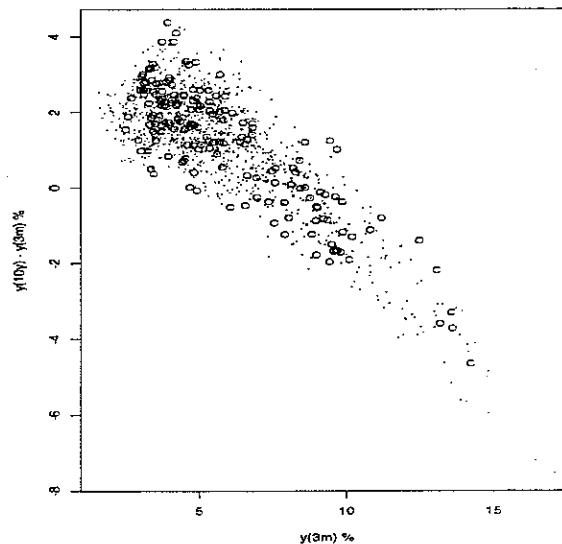


Kuva C.3 Osaketuoton havaittu (yhtenäinen viiva) ja simuloitu (katkoviiva) viiveellinen korrelaatio.



Kuva C.4 Inflaatiokehityksen havaittu (yhtenäinen viiva) ja simuloitu (katkoviiva) viiveellinen korrelaatio. Inflaatiokehitys = $EKI(t)/EKI(t-1)$

Kuvista C.1-4 havaitaan, että estimoitu malli toistaa havaitun korrelaatiokenteen varsin onnistuneesti. Seuraavassa kuvassa on havainnollistettu pitkän ja lyhyen koron välisen eron riippuvuutta korkotasosta.



Kuva C.5 Pitkän ja lyhyen koron välisen erotuksen riippuvuus korkotasosta. Pallot ovat havaintoja historiasta - pisteet mallilla simuloidusta otoksesta.

Havaitaan, että simuloitu otos on näiltäkin osin hyvin linjassa historian kanssa.

Liite E

Sijoitustuotot

Seuraavassa taulukossa on vertailtu deflaattoriesimerkeissä käytetyn 10.000 satunnaisskenaarion vuositason tuottoja historiallisiin tuottoihin. Simuloidun otoksen tuottoina on käytetty 25 vuoden horisontin viimeistä 10 vuotta, jotta alkuarvojen 31.3.2003 vaikutus ehtii riittävästi vaimentua. Tuottoja on mitattu vuosifrekvenssillä.

vuosituotot	E	Std	Acf(1)	Acf(2)	Acf(3)	Acf(4)	Acf(5)
rahamarkkina	5,9 (5,9)	2,5 (2,5)	0,72 (0,63)	0,36 (0,19)	0,14 (0,04)	0,03 (-0,14)	0,00 (-0,31)
jvk (10v)	6,4 (8,0)	11,0 (10,2)	0,06 (-0,04)	-0,13 (0,02)	-0,17 (-0,29)	-0,13 (-0,18)	-0,07 (0,00)
osakkeet	8,0 (8,5)	21,5 (22,7)	0,14 (-0,01)	-0,01 (-0,07)	-0,06 (0,02)	-0,03 (0,09)	-0,01 (-0,21)
inflaatio	5,9 (5,9)	4,3 (4,5)	0,79 (0,78)	0,62 (0,59)	0,47 (0,44)	0,35 (0,34)	0,27 (0,25)
portfolio	6,7 (7,3)	8,7 (8,4)	0,20 (0,07)	-0,06 (-0,08)	-0,12 (-0,04)	-0,11 (0,03)	-0,06 (-0,24)

Taulukko E.1: Simuloidujen (ja havaittujen) vuosituottojen keskiarvo, hajonta ja autokorrelaatio viiveillä 1-5 vuotta.

Yhden vuoden rahamarkkinatuotto on tässä

$$r_M(t-4, t) = (1 + i_{3M}(t-1))^{1/4} \cdots (1 + i_{3M}(t-4))^{1/4}.$$

Osaketuottoa ja inflaatiota on mitattu indeksisuhteilla

$$\begin{aligned} r_S(t-4, t) &= S(t)/S(t-4) \\ r_I(t-4, t) &= I(t)/I(t-4). \end{aligned}$$

Jatkuvasti neljännesvuosittain uudelleen ostetun $10\frac{1}{4}$ vuotisen nollakuponkilainan historiallisesta tuotosta (holding period return) ei ole havaintoja, joten

näiltä osin on historiatsuottoja taulukossa approksimoitu olettamalla, että $10\frac{1}{4}$ vuoden korko on sama kuin 10 vuoden korko. Tällöin neljännesvuosidatasta vuosifrekvenssillä mitatuksi vuosituotoksi saadaan

$$r_B(t-4, t) = \frac{P_{10}(t)}{P_{10\frac{1}{4}}(t-1)} \cdot \frac{P_{10}(t-1)}{P_{10\frac{1}{4}}(t-2)} \cdot \frac{P_{10}(t-2)}{P_{10\frac{1}{4}}(t-3)} \cdot \frac{P_{10}(t-3)}{P_{10\frac{1}{4}}(t-4)}$$

$$\stackrel{(i_{10}=i_{10\frac{1}{4}})}{=} \frac{(1+i_{10}(t))^{-10}}{(1+i_{10}(t-1))^{-10\frac{1}{4}}} \cdots \frac{(1+i_{10}(t-3))^{-10}}{(1+i_{10}(t-4))^{-10\frac{1}{4}}}$$

Portfoliotuottoa on mitattu neljännesvuosittain tavoitejakaumaan palautetulle allokaatiolle: rahamarkkina 35 %, joukkolaina 35 % ja osakkeet 30 %.

Näin mitattujen vuosituottojen viiveetön korrelaatio on simuloidussa otoksessa (ja historiadatassa) seuraava.

Korrelaatio	raham	jvk	osak	infl	portf
rahamarkkina	1,00 (1,00)	0,03 (-0,11)	-0,04 (-0,23)	0,48 (0,42)	0,09 (-0,13)
jvk (10v)		1,00 (1,00)	0,37 (0,32)	0,01 (0,09)	0,73 (0,67)
osakkeet			1,00 (1,00)	0,03 (-0,04)	0,90 (0,91)
inflaatio				1,00 (1,00)	0,07 (0,05)
portfolio					1,00 (1,00)

Taulukko E.2: Simuloidujen (ja havaittujen) vuosituottojen viiveetön korrelaatio.

Kirjallisuutta

- [1] Michael Abbink and Matt Saker. Getting to grips with fair value. Technical report, The Staple Inn Actuarial Society, 3 2002.
- [2] John H. Cochrane. *Asset Pricing*. Princeton University Press, USA, 2001.
- [3] Darrell Duffie. *Dynamic Asset Pricing Theory*. Princeton University Press, USA, 2001.
- [4] IASB Insurance Advisory Committee. *Draft Statement of Principles - Insurance Contracts*, 4 2002. (Not for release to the press or the public).
- [5] The International Accounting Standards Board. *IASB Update - Board Decisions on International Accounting Standards*, 1 2003. Insurance Contracts - Phase II.
- [6] International Accounting Standards Board. *International Financial Reporting Standard - IFRS4 Insurance Contracts*, 3 2004.
- [7] Stuart Jarvis, Francis Southall, and Elliot Varnell. Modern valuation techniques. Technical report, The Staple Inn Actuarial Society, 2 2001.
- [8] Helmut Lutkepohl. *Introduction to Multiple Time Series Analysis*. Springer-Verlag, Germany, 1993.

