

SISÄLLYSLUETTELO

	sivu
JOHDANTO	i
I ENNUSTEET RAJOITUSTEN VALLITESSA (johdanto)	1
I.1 Ennusteet rahastoiduista eläkkeistä	2
I.2 Ennusteet rahastoiduista eläkkeistä Yhdyspankin eläkekassassa	10
II KONFIDENSSSIPÄÄLIT (johdanto)	26
II.1 Vastaisen yksikköeläkkeen vastuu satunnaismuuttujana	27
II.2 Ikäryhmän vastainen vanhuuseläkevastuu satunnaismuuttujana	32
II.3 Koko kassan vastainen vanhuuseläkevastuu satunnaismuuttujana	36
III ENNUSTEET YLEISESSÄ TAPAUKSESSA (johdanto)	39
III.1 Työsuhteesta poistuneiden merkitys	40
III.2 Uudet jäsenet	41

Tällöin

$$\begin{aligned}
 ES &= \int_0^{w-x} 0 \cdot d(-zP_x) + \int_{w-x}^{\infty} \frac{e^{-\delta(w-x)} e^{-\delta z}}{\delta} d(-zP_x) \\
 &= \frac{e^{-\delta(w-x)}}{\delta} \Big|_{w-x}^{\infty} - zP_x - \frac{1}{\delta} \int_{w-x}^{\infty} e^{-\delta z} d(-zP_x) \\
 &= \frac{e^{-\delta(w-x)}}{\delta} w - x P_x - \frac{1}{\delta} \int_{w-x}^{\infty} e^{-\delta z} d(-zP_x) .
 \end{aligned}$$

Tarkastellaan integraalia

$$\begin{aligned}
 \int_{w-x}^{\infty} e^{-\delta z} d(-zP_x) &= \int_{w-x}^{\infty} -e^{-\delta z} zP_x - \delta \int_{w-x}^{\infty} e^{-\delta z} zP_x dz \\
 &= e^{-\delta(w-x)} w - x P_x - \delta \int_{w-x}^{\infty} e^{-\delta z} zP_x dz .
 \end{aligned}$$

Odotusarvo ES voidaan sieventää muotoon:

$$(1.2) \quad ES = \frac{e^{-\delta(w-x)}}{\delta} x$$

missä $\frac{e^{-\delta(w-x)}}{\delta} x$ on lykätty elinkorko korkoutuvuudella δ .

Satunnaismuuttujan S varianssi lasketaan kaavasta

$$D^2 S = ES^2 - (ES)^2 .$$

Satunnaismuuttujan $\underline{S}$ neliö on:

$$(1.3) \quad \underline{S}^2 = \begin{cases} 0 & \text{kun } Z \leq w-x \text{ ja muulloin} \\ \frac{e^{-2\delta(w-x)} - 2e^{-\delta(w-x)} \frac{\delta(w-x) - \delta Z}{e} - 2\delta Z}{\delta^2} \end{cases}$$

Tällöin on neliön $\underline{S}^2$ odotusarvo:

$$\begin{aligned} ES^2 &= \int_0^\infty S^2(z) dF(z) \\ &= \frac{e^{-2\delta(w-x)}}{\delta^2} \int_{w-x}^\infty d(-zP_x) + \\ &\quad - \frac{2e^{-\delta(w-x)}}{\delta^2} \int_{w-x}^\infty e^{-\delta z} d(-zP_x) + \\ &\quad \frac{1}{\delta^2} \int_{w-x}^\infty e^{-2\delta z} d(-zP_x) \\ &= \frac{e^{-2\delta(w-x)}}{\delta^2} w-xP_x + \\ &\quad - \frac{2e^{-\delta(w-x)}}{\delta^2} \cdot \left(e^{-\delta(w-x)} w-xP_x - \delta w-x \left(\frac{\delta}{\delta^2} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\delta^2} \int_{w-x}^\infty e^{-2\delta z} zP_x - \frac{1}{\delta^2} \int_{w-x}^\infty 2\delta e^{-2\delta z} zP_x dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{e^{-2\delta(w-x)}}{\delta^2} w-x P_x + \frac{2e^{-\delta(w-x)}}{\delta} w-x \frac{(\delta)}{\bar{a}_x} \\
&\quad + \frac{e^{-2\delta(w-x)}}{\delta^2} w-x P_x - \frac{2}{\delta} w-x \frac{(2\delta)}{\bar{a}_x} \\
&= \frac{2e^{-\delta(w-x)}}{\delta} w-x \frac{(\delta)}{\bar{a}_x} - \frac{2}{\delta} w-x \frac{(2\delta)}{\bar{a}_x}
\end{aligned}$$

Odotusarvon ES neliö on

$$(E\underline{\zeta})^2 = \left(w-x \frac{(\delta)}{\bar{a}_x} \right)^2$$

joten varianssi

$$(1.4) \quad D^2 \underline{\zeta} = \left(\frac{2e^{-\delta(w-x)}}{\delta} - w-x \frac{(\delta)}{\bar{a}_x} \right) w-x \frac{(\delta)}{\bar{a}_x} - \frac{2}{\delta} w-x \frac{(2\delta)}{\bar{a}_x}$$

Jatkossa käytetään merkintöjä:

$$\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_x^x \quad (x\text{-ikäinen henkilö } i)$$

$$(1.5) \quad E\underline{\zeta} = \bar{\zeta}_x$$

$$D^2 \underline{\zeta} = \delta_x^2$$

Esimerkkejä

Valitaan korkoutuvuus δ siten, että

$$\delta = \ln 1.05 = 0.04879016$$

jolloin

$$2\delta = 2 \ln 1.05 = \ln 1.1025.$$

Tällöin ovat vastaavat 100i:t 5 % ja 10.25 % ja näitä vastaavat lykätty yksikköeläkkeiden pääoma-arvot, varianssit ja hajonnat ilmenevät seuraavalla sivulla olevasta taulukosta 2.1:

T A U L U K K O 1.1

ikä x	(2δ) $w-x \bar{a}_x$	(δ) $w-x \bar{a}_x = \bar{s}_x$	b_x^2	b_x
20	0.0663	0.8185	0.3465	0.5886
25	0.1083	1.0469	0.5604	0.7486
30	0.1770	1.3407	0.9103	0.9541
35	0.2899	1.7206	1.4752	1.2146
40	0.4764	2.2156	2.3825	1.5435
45	0.7872	2.8684	3.8186	1.9541
50	1.3120	3.7461	6.0502	2.4597
55	2.2180	4.9613	9.3189	3.0527
60	3.8338	6.7201	13.5232	3.6774
65	6.8734	9.4375	16.0409	4.0051

Eläkeikä $W = 65$ vuottaKorkoutuvuus $\delta = \ln 1.05 = 0.04879016$

II.2 Ikäryhmän vastainen vanhuuseläkevastuu satunnaismuuttujana

Olkoon eläkekassaan kuuluvien x -ikäisten henkilöiden lukumäärä n_x ja ikäryhmään x kuuluvan henkilön i

$$\text{rahastoitu eläke} = E_{x,i}.$$

Merkitään koko ikäryhmän rahastoitujen eläkkeiden summaa E_x :llä:

$$(2.1) \quad E_x = \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}.$$

Olkoon satunnaismuuttuja S_i^x ikäryhmään x kuuluvan henkilön yksikön suuruista i ästä w alkavaa vanhuuseläkettä vastaava pääoma-arvo (= edellisen luvun satunnaismuuttuja S). Tällöin on ikäryhmään x kuuluvien kassan jäsenten vastaisten vanhuuseläkkeiden pääoma-arvojen summa satunnaismuuttuja ja

$$(2.2) \quad S^x = \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i} S_i^x$$

Tarkastellaan näin määritellyn satunnaismuuttujan odotusarvoa, varianssia ja konfidenssivälejiä.

Odotusarvo (merkintöjen 2.3 nojalla)

$$(2.3) \quad E S^x = E \left(\sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i} S_i^x \right) = \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i} \bar{S}_x = E_x \bar{S}_x$$

Koska satunnaismuuttujat S_i^x , S_j^x ovat toisistaan riippumattomia kun $i \neq j$, on satunnaismuuttujan S^x varianssi

$$(2.4) \quad D^2 S^x = \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2 D^2 S_i^x = \delta_x^2 \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2.$$

Odotusarvon lausekkeesta on nähtävissä, että odotusarvo riippuu vain ikäryhmän x rahastoitujen eläkkeiden summasta, varianssi sen sijaan riippuu kunkin yksittäisistä rahastoiduista eläkkeistä. Kuten tunnettua saavuttaa neliösumma

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2$$

pienimmän arvonsa ehdolla

$$\sum_{i=1}^n z_i = Z \quad (= \text{vakio})$$

silloin, kun

$$z_i = \frac{Z}{n} \quad \text{jokaisella } i = 1, 2, \dots, n.$$

ja

$$\min \sum_{i=1}^n z_i^2 = n \cdot \frac{Z^2}{n^2} = \frac{Z^2}{n}.$$

Valitsemalla

$$z_i = E_{x,i} \quad i = 1, \dots, n_x$$

todetaan, että

$$(2.5) \quad D^2 \underline{S}^x = \sigma_x^2 \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2 \geq \frac{\sigma_x^2 E_x^2}{n_x}$$

$$\text{kun } \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i} = E_x.$$

Satunnaismuuttujan $\underline{S}^x$ varianssi saavuttaa minimiarvonsa ehdolla

$$\sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i} = E_x \quad (= \text{vakio}),$$

kun kaikkien x-ikäisten henkilöiden rahastoidut eläkkeet ovat yhtä suuret:

$$E_{x,i} = \frac{E_x}{n_x} \quad \text{kun } i = 1, 2, \dots, n_x.$$

ja kyseinen varianssi

$$(2.6) \quad D^2 \underline{S}^x = \frac{\sigma_x^2 E_x^2}{n_x}$$

Todennäköisyyslaskennan keskeisen raja-arvo-väittämän perusteella on satunnaismuuttuja $\underline{S}^x$ asympotoottisesti normaalin parametrein

$$(\underline{E}\underline{S}^x, D^2\underline{S}^x).$$

Edellämainitun perusteella saadaan satunnaismuuttujalle $\underline{S}^x$ konfidenssiväli

$$\underline{P} \left\{ \left| \frac{\underline{S}^x - \underline{E}\underline{S}^x}{D \underline{S}^x} \right| < a_\varepsilon \right\} = 1 - \varepsilon.$$

Kun

a_ε otetaan normaalijakautuman, jonka parametrit $(0,1)$, taulukosta saadaan konfidenssiväliksi:

$$\underline{E}\underline{S}^x - a_\varepsilon D \underline{S}^x < \underline{S}^x < \underline{E}\underline{S}^x + a_\varepsilon D \underline{S}^x$$

Sijoitetaan tähän yhtälöiden (2.1) ja (2.4) odotusarvot ja hajonnat saadaan

$$(2.7) \quad \underline{E}_x \bar{S}_x - a_\varepsilon \delta_x \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2} < \underline{S}^x < \underline{E}_x \bar{S}_x + a_\varepsilon \delta_x \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2}$$

Jos ikäryhmässä x kaikki rahastoidut eläkkeet ovat keskenään yhtä suuret on:

$$(2.8) \quad \underline{E}_x \bar{S}_x - \frac{a_\varepsilon \delta_x \underline{E}_x}{\sqrt{n_x}} < \underline{S}^x < \underline{E}_x \bar{S}_x + \frac{a_\varepsilon \delta_x \underline{E}_x}{\sqrt{n_x}}$$

Epäyhtälön (2.5) perusteella aina tiedetään että (2.8) mukainen konfidenssiväli on "kapeampi" kuin (2.7) mukainen konfidenssiväli.



E s i m e r k i t

Korkoutuvuudella $\delta = \ln 1.05$ on laskuperustemalli -1962 mukaiset merkitsevyystasoa $1 - \varepsilon = 0.95$ vastaavat konfidenssivälit nähtävissä oheisista taulukoista. Rahastoidut eläkkeet kussakin ikäryhmässä keskenään yhtäsuuret; $E_x/n_x = 1000/v$ kummassakin taulukossa.

T A U L U K K O 3.1

$-n_x = 10$ henkeä kaikissa ikäryhmissä
($E_x = 10.000$ mk)

X	ES^x (3.2)	DS^x (3.4)	Konfidenssiväli kaava (3.6)	
20	8 185	1 861	4 537	11 833
25	10 469	2 367	5 830	15 108
30	13 407	3 017	7 494	19 320
35	17 206	3 841	9 678	24 732
40	22 156	4 881	12 589	31 723
45	28 684	6 180	16 571	40 797
50	37 461	7 778	22 216	52 706
55	49 613	9 654	30 691	68 535
60	67 201	11 630	44 406	89 996
65	94 375	12 666	69 550	119 200

T A U L U K K O 3.2

$-n_x = 100$ henkeä kaikissa ikäryhmissä
($E_x = 100.000$ mk)

X	ES^x	DS^x	Konfidenssiväli	
20	81 850	5 886	70 313	93 387
25	104 690	7 486	90 017	119 363
30	134 070	9 541	115 370	152 770
35	172 060	12 146	148 254	195 866
40	221 560	15 435	191 307	251 813
45	286 840	19 541	248 540	325 140
50	374 610	24 597	326 400	422 820
55	496 130	30 527	436 297	555 963
60	672 610	36 774	599 933	744 087
65	943 750	40 051	865 250	1022 250

II.3 Koko kassan vastainen vanhuuseläkevastuu satunnaismuuttujana

Siirrytään tämän jälkeen tarkastelemaan koko kassan osalta odotusarvoa, hajontaa ja konfidenssiväliä.

Määritellään satunnaismuuttuja $\underline{S}$:

$$(3.1) \quad \underline{S} = \sum_x \underline{S}^x = \sum_x \sum_i E_{x,i} \underline{S}_i^x$$

Kyseisen satunnaismuuttujan odotusarvo

$$(3.2) \quad E \underline{S} = \sum_x E \underline{S}^x = \sum_x E_x \bar{S}_x$$

Satunnaismuuttujien $\underline{S}_i^x, \underline{S}_j^y$ (kun joko $x \neq y$ tai $i \neq j$) riippumattomuuden perusteella on varianssi:

$$(3.3) \quad D^2 \underline{S} = \sum_x \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2 b_x^2 = \sum_x b_x^2 \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2$$

Epäyhtälön (2.5) perusteella on voimassa epäyhtälö

$$(3.4) \quad D^2 \underline{S} \geq \sum_x \frac{b_x^2 E_x^2}{n_x}$$

ja varianssi saavuttaa minimiarvonsa, kun jokaisessa ikäryhmässä x ovat ko. ikäryhmän sisällä rahastoidut eläkkeet yhtäsuuria.

(Ikäryhmien x ja y , kun $x \neq y$, henkilöiden rahastoidut eläkkeet voivat kyllä olla erisuuria).

Koska myös satunnaismuuttuja $\underline{S}$ on keskeisen raja-arvoväittämän mukaan asympotoottisesti normaalin parametrein $(\underline{ES}, D^2 \underline{S})$ saadaan satunnaismuuttujan $\underline{S}$ konfidenssiväli lausekkeesta

$$P \left\{ \left| \frac{\underline{S} - \underline{ES}}{D \underline{S}} \right| < a_\varepsilon \right\} = 1 - \varepsilon$$

ja

$$(3.5) \quad \underline{ES} - a_\varepsilon \sqrt{\sum_x b_x^2 \sum_i E_{x,i}^2} < \underline{S} < \underline{ES} + a_\varepsilon \sqrt{\sum_x b_x^2 \sum_i E_{x,i}^2}$$

Jos ikäryhmien sisällä rahastoidut eläkkeet ovat keskenään yhtäsuuria saa konfidenssiväli muodon:

$$(3.6) \quad \underline{ES} - a_\varepsilon \sqrt{\sum_x \frac{b_x^2 E_x^2}{n_x}} < \underline{S} < \underline{ES} + a_\varepsilon \sqrt{\sum_x \frac{b_x^2 E_x^2}{n_x}}$$

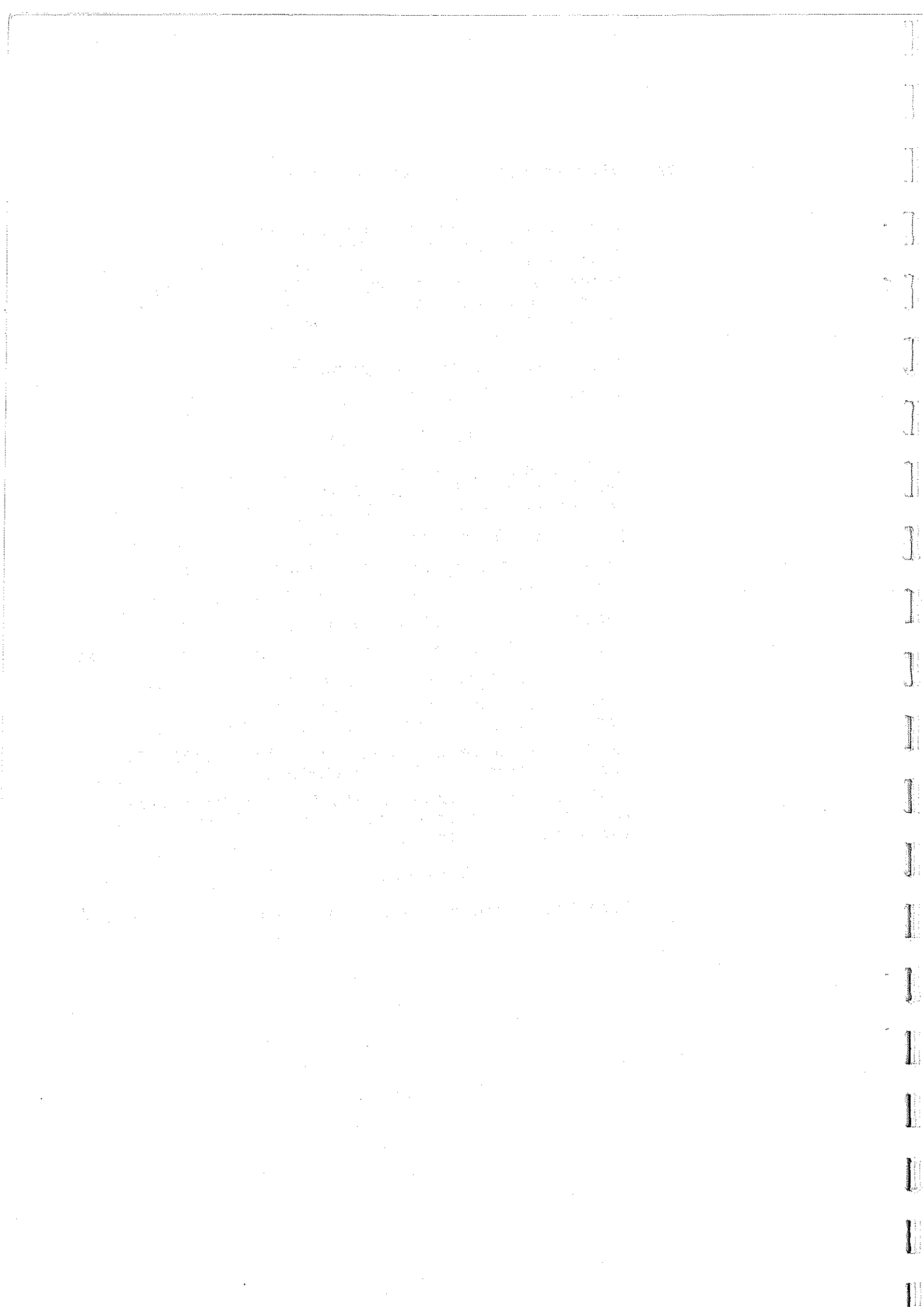
Lausekkeen (3.6) konfidenssiväli on aina "suppeampi" kuin (3.5) määrittämä konfidenssiväli.

E s i m e r k k i

Seuraavalla sivulla olevaan taulukkoon 3.1 on laskettu sellaisen eläkekassan, jossa vain 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 ja 65 vuotiaita henkilöitä, vastaisten vanhuuseläkkeiden pääoma-arvo, sen hajonta ja merkitsevyystasoa $1 - \varepsilon = 0,95$ vastaavat konfidenssivälit. Konfidenssivälit ovat (2.8):n ja (3.6):n mukaiset "kapeammat" konfidenssivälit. Taulukkoon on merkitty kussakin ikäryhmässä henkilöiden lukumäärä (n_x), ikäryhmän pääoma-arvo hajontineen ja konfidenssiväleineen. Korkoutuvuutena on $\delta = \ln 1.05$ ja kuolleisuuksina laskuperustemalli -1962 kuolleisuudet. Eläkeikä $w = 65$ v. (Seuraavan sivun taulukon ikäryhmä 65 tulee käsittää ryhmäksi, joka lähiaikana täyttää 65 vuotta ja siirtyy eläkkeelle).

T A U L U K K O 3.1

X	n_x	E_x	$ES_x^x = E_x \bar{S}_x$	$D^2 S_x^x$	DS_x^x	Konfidenssiväli
30	220	3 000	4 022	37 240	193.0	3 644 - 4 400
35	210	25 000	43 015	4 390 476	2 095	38 909 - 47 121
40	150	100 000	221 560	158 833 333	12 603	196 858 - 246 262
45	150	350 000	1 003 940	3 118 523 333	55 844	894 486 - 1 113 394
50	110	550 000	2 060 355	16 638 050 000	128 989	1 807 537 - 2 313 173
55	60	550 000	2 728 715	46 982 787 500	216 755	2 303 876 - 3 153 554
60	50	500 000	3 360 050	67 616 000 000	260 030	2 850 392 - 3 869 708
65	6	30 000	283 125	2 406 135 000	49 052	186 983 - 379 267
Koko kassa	956	2 108 000	9 704 782	136 924 756 882	370 033	8 979 518 - 1 043 046



III.2 Uudet jäsenet

Kun rajoituksesta (a) on edelläkuvatuilla tavalla luovuttu, siirrytään tarkastelemaan rajoitusta (b).

Tarkastellaan tilannetta per 31.12. v_t+1 . Olkoon ikäryhmään I (joiden syntymävuosi $v(s)$) vuonna v_t+1 palvelukseen tulleiden yhteenlaskettu tavoite-eläke

$$E_{u_1}^T(v_t+1)$$

Näistä johtuva rahastoitu eli ansaittu eläke (oletetaan, että kaikki ovat tulleet kassan jäseneksi 1.1. v_t+1) on

$$(2.1) \quad E_{u_1}^R(v_t+1) = \frac{1}{v(s)+w-v_t} E_{u_1}^T(v_t+1).$$

Ikäryhmän I (uudet jäsenet mukaanluettuna) tarkkaan laskettu rahastoitu eläke

$$(2.2) \quad E^R(v_t+1) = E_v^R(v_t+1) + E_{u_1}^R(v_t+1).$$

Jos uusien (joulukuun) palkkasumma on $100h_1$ % vanhojen palkkasummasta vuonna v_t+1 , on

$$(2.3) \quad E_{u_1}^T(v_t+1) \leq h_1 \times E_v^T(v_t+1) = h_1(1+k_1)E_v^T(v_t)$$

Kyseinen epäyhtälö seuraa siitä, että mitä korkeammassa iässä kassan jäsenyys alkaa sitä pienemmäksi tavoite eläkkeen osuus jää kassan sääntöjen mukaisesta täydestä eläkkeestä. Edellisestä epäyhtälöstä seuraa

$$(2.4) \quad E_{u_1}^R(v_t+1) \leq \frac{1}{v(s)+w-v_t} h_1(1+k_1)E_v^T(v_t)$$

Osoitetaan, että

$$\frac{1}{v(s)+w-v_t} \leq \frac{v_t+1-v(j,v_t)}{v(s)+w-v(j,v_t)}$$

missä $v(j, v_t)$ on luvun I.1 kaavan (1.8) ikäryhmä I koskeva keskimääräinen jäseneksituloikä, joten $v_t > v(j, v_t)$.

Merkitään $v_t - v(j, v_t) = a > 0$. Tällöin

$$\frac{v_t + 1 - v(j, v_t)}{v(s) + w - v(j, v_t)} = \frac{1 + a}{v(s) + w - v_t + a} \geq \frac{1}{v(s) + w - v_t}$$

aina kun $v(s) + w - v_t > 1$.

Sijoittamalla tulos epäyhtälöön (2.4) saadaan

$$E_{u_1}^R(v_{t+1}) \leq \frac{v_t + 1 - v(j, v_t)}{v(s) + w - v(j, v_t)} h_1(1 + k_1) E_v^T(v_t),$$

mistä luvun I.1 epäyhtälön (1.8) perusteella seuraa ($k=1$)

$$(2.5) \quad E_{u_1}^R(v_{t+1}) \leq h_1 E_v^R(v_t + k)$$

Ylläolevan epäyhtälön ja yhtälön (2.2) perusteella pätee:

$$(2.6) \quad E_v^R(v_{t+1}) \leq E^R(v_{t+1}) \leq (1 + h_1) E_v^R(v_{t+1})$$

Jos $v_t + 1 - v(s) = x$ on ikäryhmän I vanhuuseläkevastuun odotusarvo (luvun II.2 merkintöjä käyttäen)

$$(2.7) \quad E^R(v_{t+1}) \bar{S}_x$$

Jos ikäryhmän henkilöiden (uudet mukaanluettuna) lukumäärä on n_x on luvun II konfidenssiväli (2.8).

$$(2.8) \quad E^R(v_{t+1}) \bar{S}_x - \frac{a_{\varepsilon} \sigma_x E^R(v_{t+1})}{\sqrt{n_x}}, \quad E^R(v_{t+1}) \bar{S}_x + \frac{a_{\varepsilon} \sigma_x E^R(v_{t+1})}{\sqrt{n_x}}.$$

Osamäärä

$$100 \frac{\frac{a_{\varepsilon} \delta_x E^R(v_t+1)}{\sqrt{n_x}}}{E^R(v_t+1) \bar{S}_x} = 100 \frac{a_{\varepsilon} \delta_x}{\bar{S}_x \sqrt{n_x}}$$

ilmoittaa prosentteina virheen, joka rahastoidun eläkkeen ennusteessa voi olla, jotta ennuste vielä sisältyisi ko. konfidenssiväliin. Määritellään ikäryhmän I rahastoidun eläkkeen ennusteeksi

$$(2.9) \quad E^R(v_t+1) = (1 + \frac{1}{2}h_1)E_v^R(v_t+1)$$

Epäyhtälön (2.6) perusteella ko. ennuste poikkeaa korkeintaan $50h_1$ %:ia tarkasti lasketusta rahastoidusta eläkkeestä. Näin määritelty ennuste on konfidenssivälin (2.8) sisällä, jos

$$(2.10) \quad 100h_1 \leq \frac{200 a_{\varepsilon} \delta_x}{\bar{S}_x \sqrt{n_x}} \quad (\text{ehto: } 50h_1 \leq 100 \frac{a_{\varepsilon} \delta_x}{\bar{S}_x \sqrt{n_x}})$$

Jos h_1 täyttää yllämainitun ehdon, ennuste (2.9) sisältyy luvun II.2 konfidenssiväliin (2.7), joka on ikäryhmän I vanhuuseläkevastuun konfidenssiväli.

Seuraavan sivun esimerkeissä on laskettu ko. ehtoepäyhtälön oikean puolen arvoja.

E s i m e r k i t

Korkoutuvuudella $\delta = \ln 1.05$ on laskuperustemalli-1962 mukaiset merkitsevyystasoa $1-\varepsilon = 0.95$ vastaavat epäyhtälön (210) oikean puolen arvot laskettu oheiseen taulukkoon ikäryhmittäin (ks. luvun II.1 taulukko 1.1).

T A U L U K K O

x	$\frac{200a_{\varepsilon}\delta_x}{\bar{S}_x \sqrt{n_x}}$	
	$n_x=10; x=20, \dots, 65$	$n_x=100; x=20, \dots, 65$
20	89.1 %	28.2 %
25	88.6 %	28.0 %
30	88.2 %	27.9 %
35	87.5 %	27.7 %
40	86.4 %	27.3 %
45	84.4 %	26.7 %
50	81.4 %	25.7 %
55	76.3 %	24.1 %
60	67.8 %	21.5 %
65	52.6 %	16.6 %

$$a_{\varepsilon}=1.96; \quad 200a_{\varepsilon}=392; \quad \sqrt{10}=3.16227$$

Siirrytään tämän jälkeen tarkastelemaan tilannetta koko kassan vastaisen vanhuuseläkeen suhteen.

Jos edellä johdettu ehtoepäyhtälö (2.10) on voimassa, sisältyy ikäryhmän I vastaisen vanhuuseläkevastuun kaavan (2.9) mukainen ennuste kyseisen ikäryhmän vanhuuseläkevastuun konfidenssiväliin. Vaikka kaikkien ikäryhmien ennusteet sisältyisivät ao. konfidenssiväliin ei vielä tiedetä sisältyykö ennusteiden summa koko kassan vanhuuseläkevastuun konfidenssiväliin.

Jakson II konfidenssivälille (3.5) johdettiin "suppeampi" konfidenssiväli (3.6). Johdetaan aluksi konfidenssiväliä (3.6) vieläkin suppeampi konfidenssiväli. Etsitään lausekkeen

$$\sum_x \frac{\delta_x^2 E_x^2}{n_x}$$

minimiarvo ehdolla

$$\sum_x E_x = E.$$

Merkitään

$$\frac{\delta_x^2}{n_x} = a_i; E_x = z_i; \quad E = Z$$

jolloin etsitään lausekkeen

$$\sum_i a_i z_i^2$$

minimiä ehdolla

$$\sum_i z_i = Z,$$

joka saadaan, kun ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2a_1 z_1 - \lambda = 0 \\ 2a_n z_n - \lambda = 0 \\ z_1 + z_2 + \dots + z_n = Z \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{\lambda}{2a_1} \\ \dots \\ z_n = \frac{\lambda}{2a_n} \end{array} \right.$$

$$Z = \sum_i z_i = \frac{\lambda}{2} \sum_i \frac{1}{a_i} \quad \text{josta } \lambda = \frac{2Z}{\sum_i \frac{1}{a_i}}$$

Tällöin

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{Z}{a_1 \sum_i \frac{1}{a_i}} \\ \dots \\ z_n = \frac{Z}{a_n \sum_i \frac{1}{a_i}} \end{array} \right.$$

ja haettu minimiarvo

$$\begin{aligned} \min \sum_i a_i z_i^2 &= \frac{a_1 Z^2}{a_1^2 \left(\sum_i \frac{1}{a_i} \right)^2} + \dots + \frac{a_n Z^2}{a_n^2 \left(\sum_i \frac{1}{a_i} \right)^2} \\ &= \frac{Z^2}{\left(\sum_i \frac{1}{a_i} \right)^2} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \frac{Z^2}{\sum_i \frac{1}{a_i}}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$(2.11) \quad \min_x \sum_x \frac{\delta_x^2 E_x^2}{n_x} = \frac{E^2}{\sum_x \frac{n_x}{\delta_x^2}} \geq \frac{E^2}{\frac{1}{\delta^2} \sum_x n_x} = \frac{\delta^2 E^2}{n}$$

$$\text{missä } \delta^2 = \min_x \delta_x^2.$$

Luvun II (3.6) mukaisista konfidenssiväleistä "suppein" on väli

$$(2.12) \quad ES - a_\epsilon \frac{\sum E_x}{\sqrt{\sum_x \frac{n_x}{\delta_x^2}}}, \quad ES + a_\epsilon \frac{\sum E_x}{\sqrt{\sum_x \frac{n_x}{\delta_x^2}}}$$

Epäyhtälön (2.11) perusteella tiedetään, että jos koko kassan vastaisen vanhuuseläkkeen vastuun ennuste on välissä

$$(2.13) \quad ES - a_\epsilon \frac{\delta \sum E_x}{\sqrt{n}}, \quad ES + a_\epsilon \frac{\delta \sum E_x}{\sqrt{n}}$$

sisältyy ko. ennuste tällöin myös väliin (2.12).

Esimerkki Valitaan esimerkiksi luvun II taulukon 3.1 eläkekassa.

$$\sum_x E_x = 2\,108\,000$$

$$\sqrt{n} = \sqrt{956} = 30.92$$

$$a_{\xi} = 1.96$$

$$\delta = \min \delta_x = \delta_{30} = 0.9541$$

$$241.68 + 142.35 + 62.96 + 39.88 + 18.18 + 6.44 + 3.70 + 0.37 = 514.96$$

$$\sqrt{\sum_x \frac{n_x}{\delta_x^2}} = \sqrt{514.96} = 22.7$$

Kaavan (2.12) mukainen väli on
(9 522 770, 9 886 794)

ja kaavan (2.13) mukainen väli on
(9 577 290, 9 832 270).

Merkitään ikäryhmän I, johon ikäryhmään kuuluvat olkoot vuonna v_t+1 x -ikäisiä, kaavan (2.9) mukaista rahastoidun eläkkeen ennustetta

$$E_x^R(v_t+1) = \text{kaavan (2.9) } E_x^{R'}(v_t+1)$$

Tällöin on koko kassan vastaisen vanhuuseläkkeen vakuutusmaksuvastuun ennuste

$$(2.14) \quad \sum_x E_x^{R'}(v_t+1) \bar{S}_x$$

Merkitään ikäryhmän I kaavan (2.7) mukaista vanhuuseläkevastuun odotusarvoa

$$(2.15) \quad E_x^R(v_t+1) \bar{S}_x = \text{kaavan (2.7) } E_x^R(v_t+1)$$

Tällöin koko kassan vastaisen vanhuuseläkevastuun odotusarvo on

$$(2.16) \quad ES = \sum_x E_x^R(v_t+1) \bar{S}_x$$

Tarkastellaan vastaisen vanhuuseläkevastuun odotusarvon ja ennusteen erotuksen itseisarvoa siinä erikoistapauksessa, että jokaisessa ikäryhmässä uusien palkkasumma on $100h_1$ % vanhojen palkkasummasta.

$$(2.17) \quad \Delta = \left| \sum_x E_x^R(v_t+1) \bar{S}_x - \sum_x E_x^{R'}(v_t+1) \bar{S}_x \right|$$

Tällöin

$$(2.18) \quad \Delta \leq \sum_x \bar{S}_x \left| E_x^R(v_t+1) - E_x^{R'}(v_t+1) \right|$$

Epäyhtälön (2.6) perusteella tiedetään että

$$\sum_x \bar{S}_x \left| E_x^R(v_t+1) - E_x^{R'}(v_t+1) \right| \leq \sum_x \bar{S}_x \frac{1}{2} h_1 E_x^R(v_t+1)$$

Ylläolevan ja epäyhtälön (2.18) perusteella pätee

$$(2.19) \quad \Delta \leq \frac{1}{2}h_1 \sum_x E_x^R(v_t+1) \bar{S}_x.$$

Ennuste (2.14) poikkeaa yhtälön (2.16) mukaisesta odotusarvosta korkeintaan $50h_1$ %:ia.

Pyritään selvittämään sisältyykö ennuste (2.14) konfidenssiväleihin (2.12) tai (2.13).

Suhde

$$(2.20) \quad 100 \frac{a_\varepsilon \delta \sum_x E_x}{ES\sqrt{n}} = 100 \frac{a_\varepsilon \delta \sum_x E_x^R(v_t+1)}{\sum_x E_x^R(v_t+1) \bar{S}_x \sqrt{n}}$$

ilmoittaa montako % ennuste voi korkeintaan poiketa odotusarvosta, jotta se vielä sisältyisi konfidenssiväliin (2.13). Johdettaessa ikäryhmittäisille konfidenssivälille vastaavaa lauseketta rahastoidut eläkkeet (nämähän eivät ole tiedossa) supistuivat. Ylläolevasta lausekkeesta ne eivät supistu. Johdetaan epäyhtälö ylläolevalle lausekkeelle. Yhtälön (2.8) ja epäyhtälön (2.6) perusteella

$$100 \frac{a_\varepsilon \delta \sum_x E_x^R(v_t+1)}{\sum_x E_x^R(v_t+1) \bar{S}_x \sqrt{n}} \geq 100 \frac{a_\varepsilon \delta (1-\frac{1}{2}h_1) \sum_x E_x^{R'}(v_t+1)}{(1+\frac{1}{2}h_1) \sum_x E_x^{R'}(v_t+1) \bar{S}_x \sqrt{n}}$$

Jos epäyhtälö

$$(2.21) \quad 100h_1 \leq \frac{200a_\varepsilon \delta (1-\frac{1}{2}h_1) \sum_x E_x^{R'}(v_t+1)}{(1+\frac{1}{2}h_1) \sum_x E_x^{R'}(v_t+1) \bar{S}_x \sqrt{n}}$$

pätee on ennuste konfidenssivälin (2.13) sisällä. Vastaava lauseke voitaisi johtaa myös konfidenssivälille (2.12).

Yhteenveto

Tässä luvussa olevan esimerkin perusteella lausekkeen (2.20) suhde on suuruusluokkaa

$$100 \frac{127\,491}{9\,704\,782} = 1.3\% \quad \begin{array}{l} \text{(ohjeisessa } E_v^R(v_{t+1}) \\ \text{on korvattu} \\ E_x^R(v_t)\text{:llä)} \end{array}$$

Tällöin on epäyhtälön (2.21) oikea puoli "suuruusluokkaa: pienempi kuin 2.6 %". Saman esimerkin perusteella kaavan (2.13) mukaisesta konfidenssivälistä voidaan laskea vastaava suhde

$$100 \frac{9\,704\,782 - 9\,522\,770}{9\,704\,782} = 1.9\%$$

Jos konfidenssivälistä (2.13) lähtien johdetaisiin epäyhtälön (2.21) vastaava lauseke, olisi sen oikea puoli "suuruusluokkaa: pienempi kuin 3.8 %".

Kun epäyhtälö (2.21) johdettiin tehtiin oletamus, että kaikissa ikäryhmissä uusien palkkasumma oli $100h_1$ % vanhojen palkkasummasta.

Epäyhtälön (2.21) asettama rajoitus saattaa edelläsanotun perusteella olla käytännössä suhteellisen "kova" rajoitus. Lasketaan vielä luvun II.3 esimerkissä olevasta konfidenssivälistä suhde

$$100 \frac{9\,704\,782 - 8\,979\,518}{9\,704\,782} = 7.5\%.$$

Koska (2.14) mukainen ennuste poikkeaa odotusarvosta korkeintaan $50h_1$ %:lla, voisi $100h_1$ % olla ko. esimerkin valossa 15 % suuruusluokkaa.

Ikäryhmäkohtainen tarkastin (2.10) tuntuu mielekkäältä, kunhan vain a_ε valitaan tarpeeksi pieneksi, jotta koko kassan vanhuuseläkevastuun ennuste (2.14) sisältyisi "riittävällä varmuudella" sen odotusarvon konfidenssiväliin (luvun II.3

väliin (3.6) tai (3.5)) merkitsevyystasolla ϵ' . Tällöin ϵ ja ϵ' :n keskinäinen suhde tulisi saada selville. Joka tapauksessa ϵ ja ϵ' tulee valita siten, että $1 - \epsilon < 1 - \epsilon'$. Jos jossain ikäryhmässä ehto (2.10) ei olisi voimassa tulee ikäryhmän rahastoidut eläkkeet laskea henkilö henkilöltä.

Käytännön vakuutusmatemaattisia laskelmia ajatellen tulisi tarkastimen olla (2.21)-tyyppinen yksinkertaisuutensa vuoksi. Palkkojen nousun erittely palkankorotuksiin ja uusien henkilöiden palkkasummaan ja vielä ikäryhmittäin ei käytännössä ehkä ole mahdollista (ainakaan kaikissa yrityksissä).

JOHDANTO

Työn sisältö

Oheisessa tutkielmassa tarkastellaan avustuskassalain alaisen eläkekassan vastaisen vanhuuseläkkeen vakuutusmaksurahaston ennustamista.

Ensimmäisessä luvussa (I.1) määritellään ns. rahastoidun eli ansaitun eläkkeen ennusteet n :lle vuodelle eläkekassassa jossa rahastoitu eläke karttuu lineaarisesti palveluvuosien mukaan alkaen nolasta (henkilön tullessa eläkekassan jäseneksi) ja päättyen tavoite-eläkkeen suuruiseksi (henkilön saavuttaessa eläkeiän).

Toisessa luvussa (I.2) tarkastellaan hieman yleisempää rahastoidun eläkkeen karttumissääntöä. Esimerkiksi on valittu Yhdyspankin eläkekassan rahastoidun eläkkeen karttumissääntö.

Rahastoidun eläkkeen ennusteista on luvussa I.1 osoitettu, että ne antavat tiettyjen rajoitusten vallitessa (sivu 4 rajoitukset (1.6)) rahastoiduille eläkkeille ikäryhmittäin täysin tarkat arvot. Yhdyspankin eläkekassan rahastoidun eläkkeen ennusteesta on luvussa I.2 osoitettu, että se yhtyy tarkkaan laskettuun rahastoituun eläkkeeseen vain tiettyjen lisärajoitusten vallitessa (sivun 21 tulokset 1 - 3). Teoreettisesti ko. lisärajoitukset voidaan sivuuttaa siirtymällä sivuilla 21 - 23 (tulos 4) määriteltyyn ennusteeseen. Käytännössä ko. ennusteeseen tuskin kannattaa siirtyä koska virhetermi (kaavat (2.13) ja (2.14) sivuilla 20 - 21) on sivujen 24 - 25 epäyhtälöiden ja sivulla 25 olevan esimerkin valossa erittäin pieni.

Koska rajoitukset (sivun 4 rajoitukset (1.6)), joiden vallitessa edellämainitut ennusteet yhtyvät tarkkoihin rahastoituihin eläkkeisiin ovat suhteellisen "kovia" rajoituksia, on jaksossa III määritelty jaksos I ennusteiden avulla uudet ennusteet, joita laskettaessa voidaan huomioida työsuhteesta poistuneet/poistuvat ja uudet työntekijät.

Jaksossa III määriteltyjen ennusteiden "hyvyyden" mittaamiseksi on jaksossa II tarkasteltu vastaisten vanhuuseläkkeiden vastuuta satunnaismuuttujana.

Ko. satunnaismuuttujalle on johdettu ikäryhmittäin ja koko kassan osalta odotusarvo (= vastaisen vanhuuseläkkeen vakuutusmaksurahasto), hajonta ja niiden perusteella konfidenssivälit, jotka muodostavat jaksossa III käytetyn "mitan".

Tulosten mahdolliset käyttöalueet

Työssä johdettuja ennusteita voidaan käyttää

- arvioitaessa ("yrityksen sisällä") vuosittain tilinpäätöstä varten koko kassan vakuutusteknistä vastuuvulkaa
- arvioitaessa vakuutusteknisen vastuuvulan kehitystä (suuruusluokkaa) pidemmällä tähtäimellä.

Edellämainittujen arvioiden tekemisessä eräs keskeisimpiä vaikeuksia avustuskassalain alaisessa kassassa on juuri vastaisen vanhuuseläkkeen ja perhe-eläkkeen rahastoidun eli ansaitun eläkkeen karttuminen, koska se riippuu kassan toimintapiiriin kuuluvien henkilöiden iän lisäksi myöskin kunkin henkilön kassassa jäsenenäoloajasta (TEL:n alaisessa eläkelaitoksessa tilanne on tässä suhteessa huomattavasti yksinkertaisempi). Rahastoidun eläkkeen ennusteita johdettaessa on tässä työssä määritelty ikäryhmäkohtainen ns. "keskimääräinen jäseneksitulovuosi". Kyseisen "jäseneksitulovuoden" ja palkan-korotusprosentin/palkkasumman nousun avulla voidaan ikäryhmittäin laskea rahastoitujen eläkkeiden ennusteet.

Koska avustuskassalain alaisessa eläkekassassa vakuutustekninen tutkimus on tehtävä kerran viidessä vuodessa ja välivuosina tutkimus on mahdollista korvata arviolla, (arviointiperusteisiin on saatava ministeriön lupa) voitaneen työssä johdettuja tuloksia osittain käyttää hyväksi arviointiperusteiden laatimisessa, jos kassassa ei joka vuosi haluta tehdä tarkkaa vakuutusteknistä tutkimusta.

I ENNUSTEET RAJOITUSTEN VALLITESSA

Johdanto

Tässä jaksossa määritellään vastaisen vanhuus-eläkkeen ns. rahastoiduille eli ansaituille eläkkeille ennusteet vuosille

$$v_t+1, \dots, v_t+n$$

kun vuodelta v_t on tehty vakuutustekninen tutkimus, jolloin rahastoidut eläkkeet tunnetaan per 31.12.v_t. Ennusteet määritellään siten, että henkilö henkilöltä suoritettavasta laskennasta luovutaan ja siirrytään "keskimääräisen jäseneksi-tulovuoden" avulla ikäryhmäkohtaiseen laskentaan. Rahastoitujen eläkkeiden ennusteista saadaan vastai-
sten yksikköeläkkeiden pääoma-arvojen avulla vakuutus-
maksurahaston ennusteet.

Luvussa I.1 tarkastellaan sellaista eläkekassaa jossa rahastoitu eläke karttuu koko ajan saman säännön mukaisesti. Tiettyjen rajoitusten valli-
tessa (ks. (1.6)) ennusteista voidaan osoittaa, että ne ovat täysin tarkkoja.

Luvussa II.1 tarkastellaan hieman yleisempää tapausta, jossa rahastoitu eläke on karttunut "kaksivaiheisesti". Kyseistä tapausta tarkastellaan esimerkin valossa. Esimerkiksi on valittu Yhdyspankin eläkekassan rahastoidun eläkkeen karttumissääntö.

Jaksossa III tarkastellaan tilannetta kun rajoituk-
sista (1.6) luovutaan.

I.1

Ennusteet rahastoiduista eläkkeistä

Rahastoidun eläkkeen karttuminen

Tarkastellaan eläkekassaa, jossa vastaisten vanhuus-eläkkeiden rahastoitu eläke kasvaa lineaarisesti palvelusvuosien mukaan:

$$(1.1) \quad E_i^R(v_t) = \frac{1}{v_i(s) + w - v_i(j)} (v_t - v_i(j)) E_i^T(v_t)$$

missä

w = eläkeikä

$v_i(s)$ = henkilön i syntymävuosi (desimaalimuodossa^{*})

$v_i(j)$ = henkilön i jäseneksitulovuosi (desimaalimuodossa)

v_t = tilivuosi

$E_i^R(v_t)$ = henkilön i rahastoitu eläke per 31.12. v_t

$E_i^T(v_t)$ = henkilön i tavoite-eläke per 31.12. v_t

Keskimääräinen jäseneksitulovuosi

Siirrytään tarkastelemaan henkilöryhmää I

$I = \{ i/i = 1, \dots, n_I \}$, missä kaikki henkilöt ovat syntyneet samana vuonna $v_i(s) = v(s)$.

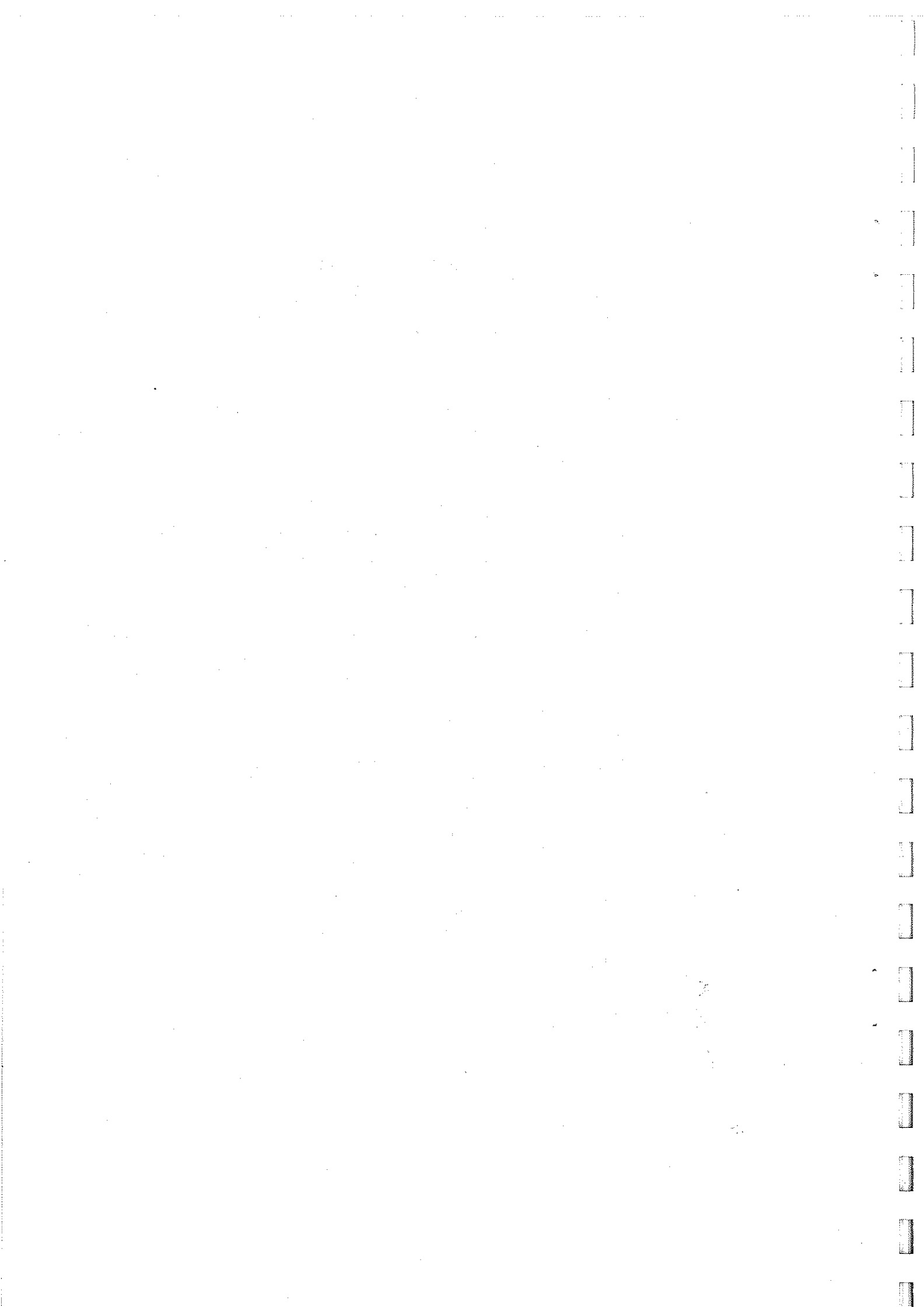
Lasketaan ikäryhmän I osalta rahastoidut ja tavoite-eläkkeet yhteen ja otetaan käyttöön merkinnät:

$$\sum_{i=1}^{n_I} E_i^R(v_t) = E^R(v_t) = E^R$$

(1.2)

$$\sum_{i=1}^{n_I} E_i^T(v_t) = E^T(v_t) = E^T$$

* 31.12.67 desimaalimuodossa = 67.0



Määritellään ikäryhmän I vuonna v_t laskettu keskimääräinen jäseneksitulovuosi $v(j, v_t)^t$ yhtälöllä

$$(1.3) \quad v(j, v_t) = \frac{v_t E^T(v_t) - (v(s) + w) E^R(v_t)}{E^T(v_t) - E^R(v_t)}$$

Näin määritelty keskimääräinen jäseneksitulovuosi voidaan kirjoittaa muotoon

$$(1.4) \quad v(j, v_t) = \frac{\sum [E_i^T(v_t) - E_i^R(v_t)] v_i(j)}{E^T(v_t) - E^R(v_t)}$$

sillä (1.1):n perusteella

$$[v_i(s) + w - v_i(j)] E_i^R(v_t) = (v_t - v_i(j)) E_i^T(v_t)$$

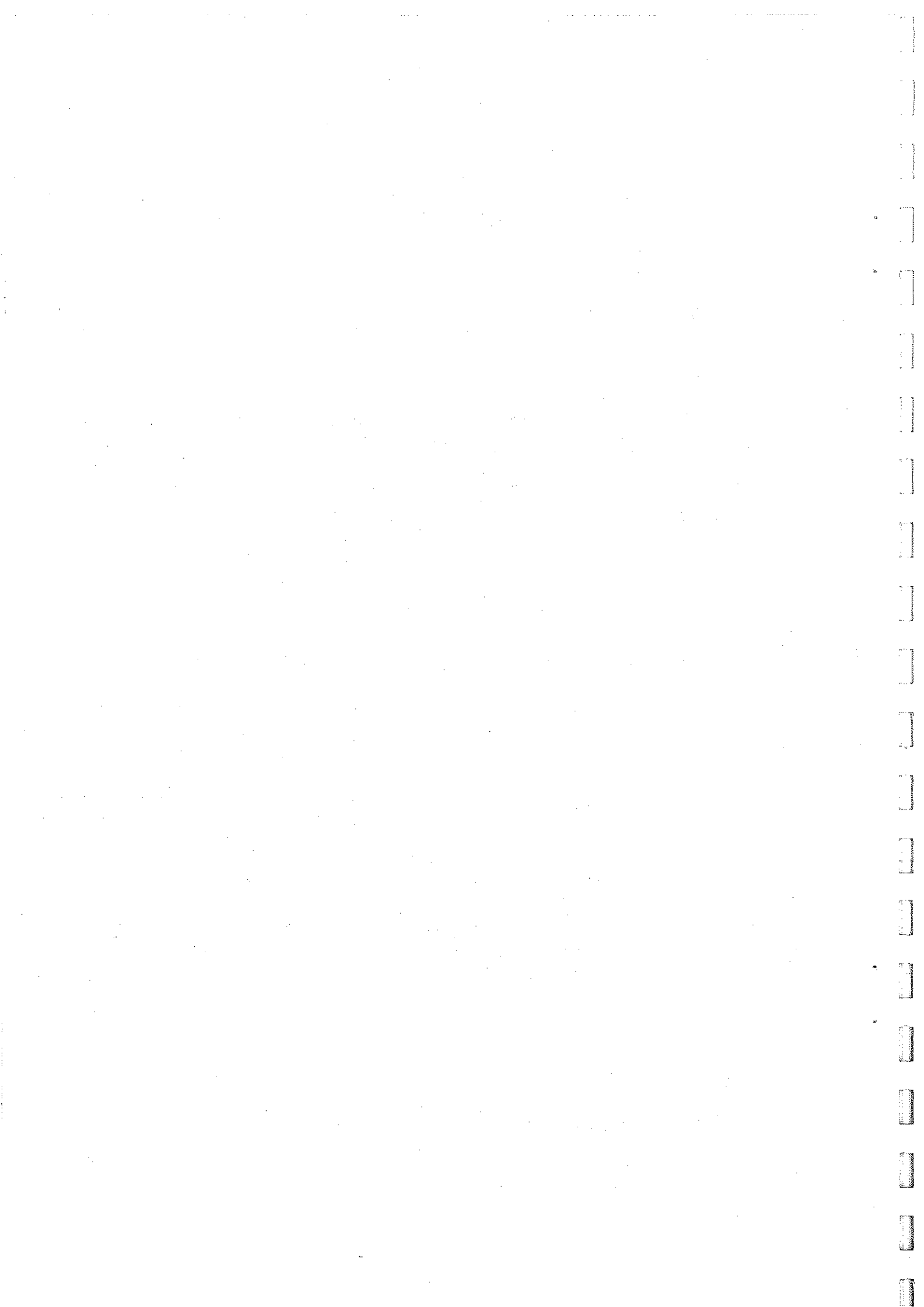
joka yhtälö summattuna ikäryhmän I osalta (tällöin $v_i(s) = v(s)$ kuin $i=1, \dots, n_I$) johtaa yhtälöön

$$\sum [E_i^T(v_t) - E_i^R(v_t)] v_i(j) = v_t E^T(v_t) - (v(s) + w) E^R(v_t).$$

Edelläolevan yhtälön oikea puoli ratkaistaan yhtälöstä (1.3). Tällöin päädytään yhtälöön (1.4). Yhtälö (1.4) merkitsee sitä, että keskimääräinen jäseneksitulovuosi on ikäryhmään kuuluvien henkilöiden todellisten jäseneksitulovuosien painotettu keskiarvo, kun painoina ovat tavoite-eläkkeiden ja rahastoitujen eläkkeiden erotukset.

Johdetaan keskimääräiselle jäseneksitulovuodelle vielä kolmas esitysmuoto

$$(1.5) \quad v(j, v_t) = \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)} v_i(j)}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)}}$$



johon esitykseen päästään, kun ratkaistaan yhtälön (1.4) erotus

$$E_i^T(v_t) - E_i^R(v_t)$$

yhtälöstä (1.1):

$$\begin{aligned} E_i^T(v_t) - E_i^R(v_t) &= E_i^T(v_t) - \frac{1}{v_i(s) + w - v_i(j)} (v_t - v_i(j)) E_i^T(v_t) \\ &= \frac{v_i(s) + w - v_i(j) - v_t + v_i(j)}{v_i(s) + w - v_i(j)} E_i^T(v_t) \\ &= \frac{v_i(s) + w - v_t}{v_i(s) + w - v_i(j)} E_i^T(v_t). \\ &= (v(s) + w - v_t) \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)} \end{aligned}$$

Tällöin

$$E^T(v_t) - E_i^R(v_t) = (v(s) + w - v_t) \sum_i \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)}$$

Kun ylläolevat yhtälöt sijoitetaan yhtälöön (1.4) päädytään yhtälöön (1.5).

Rahastoitujen eläkkeiden ennusteet

Edellä määriteltä keskimääräistä jäseneksitulo-vuotta hyväksi käyttäen ennustetaan rahastoitujen eläkkeiden määriä ikäryhmittäin vuosille $v_t, v_t+1, \dots, v_t+n$, missä v_t+n on ikäryhmän I eläkkeel-lesiirtymisajankohta ($v_t+n=v(s)+w$). Rahastoitujen eläkkeiden ennusteet perustuvat olettamuksiin:

- (1.6)
- (a) kukaan eläkekassan ajankohtana 31.12. v_t jäsenenä oleva henkilö ei kuole, ei siirry työkyvyttömyyseläkkeelle eikä eroa ennen eläkkeelle siirtymistä
 - (b) eläkekassaan ei oteta uusia jäseniä
 - (c) ikäryhmän I henkilöt saavat kaikki samansuuruuisena (prosentteina laskettuna samansuuruuisen) palkankorotuksen vuosina $v_t+f, f=1, \dots, n$. (Eri vuosien prosenttikorotukset voivat olla erisuuria, myöskin kahden eri ikäryhmän I ja J palkankorotukset voivat olla erisuuruisia).

Jaksossa III tullaan tarkastelemaan tilannetta, jossa edelläolevat olettamukset eivät pidä paikkansa.

Määritellään ikäryhmän I rahastoidulle eläkkeelle ennusteet vuosille $v_t, v_{t+1}, \dots, v_{t+n}$. Merkitään ikäryhmän I palkankorotusprosenttia vuonna $v_t + f$ k_f :llä. Kun ikäryhmän I henkilöt saavat edellämainitut palkankorotukset, kasvavat heidän tavoite-eläkkeensä samassa suhteessa:

$$(1.7) \quad E_i^T(v_t+k) = \prod_{f=1}^k (1+k_f) E_i^T(v_t)$$

$$k=0,1,\dots,n$$

Ikäryhmän i rahastoidun eläkkeen ennuste vuonna v_t+k , $k=0,1,\dots,n$ määritellään yhtälöllä

$$(1.8) \quad E^{R'}(v_t+k) = \frac{v_t+k-v(j, v_t)}{v(s)+w-v(j, v_t)} \prod_{f=1}^k (1+k_f) E^T(v_t)$$

Henkilön $i \in I$ tarkkaan laskettu rahastoitu eläke vuonna v_t+k , $k=0,1,\dots,n$, on (1.1):n perusteella

$$(1.9) \quad E_i^R(v_t+k) = \frac{v_t+k-v_i(j)}{v_i(s)+w-v_i(j)} \prod_{f=1}^k (1+k_f) E_i^T(v_t)$$

ja koko ikäryhmän osalta

$$(1.10) \quad E^R(v_t+k) = \sum_{i=1}^{n_I} E_i^R(v_t+k).$$

$$= \sum_{i=1}^{n_I} \frac{v_t+k-v_i(j)}{v_i(s)+w-v_i(j)} \prod_{f=1}^k (1+k_f) E_i^T(v_t)$$

Ennusteen tarkkuus

Olettamusten (1.6) vallitessa voidaan itse asiassa osoittaa, että yhtälön (1.8) ennuste yhtyy yhtälön (1.10) mukaiseen tarkkaan laskettuun rahastoituun eläkkeeseen jokaisena ennustevuonna v_t+k , $k=0,1,\dots,n$ (kun v_{t+n} on ikäryhmän I eläkkeellesiirtymisajankoh-
ta: $v_{t+n}=v(s)+w$).

Lasketaan aluksi yhtälön (1.8) jakajana oleva lauseke käyttämällä keskimääräisen jäseneksitulovuoden esitysmuotoa (1.5):

$$v(s)+w-v(j, v_t) = v(s)+w - \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s)+w-v_i(j)} v_i(j)}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s)+w-v_i(j)}}$$

$$\begin{aligned} & \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s)+w-v_i(j)} (v(s)+w-v_i(j))}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s)+w-v_i(j)}} \\ &= \frac{E^T(v_t)}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s)+w-v_i(j)}} \end{aligned}$$

Osoittajassa oleva lauseke

$$v_t+k-v(j, v_t) = v_t+k - \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s)+w-v_i(j)} v_i(j)}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s)+w-v_i(j)}}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{v_t+k-v_i(j)}{v(s)+w-v_i(j)} E_i^T(v_t)}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s)+w-v_i(j)}}$$

Sijoittamalla edelläsaadut tulokset yhtälöön (1.8) saadaan:

$$E^{R'}(v_t+k) = \frac{\sum \frac{v_t+k-v_i(j)}{v(s)+w-v_i(j)} E_i^T(v_t)}{E^T(v_t)} \prod_{f=1}^k (1+k_f) E^T(v_t)$$

$$= \sum_{i=1}^{n_I} \frac{v_t+k-v_i(j)}{v(s)+w-v_i(j)} \prod_{f=1}^k (1+k_f) E_i^T(v_t)$$

joten

$$(1.11) \quad E^{R'}(v_t+k) = E^R(v_t+k).$$

Yhteenveto

Sovellettaessa edellämainittua menetelmää käytäntöön lasketaan $v(j, v_t)$ vuoden v_t vakuutus-teknisestä tutkimuksesta kaavan (1.3) avulla. Vuodeksi v_t tulee luonnollisesti valita viimeisin vuosi, josta tarkka vakuustekninen tutkimus on suoritettu.

Edelläjohdettu tulos ennusteen tarkkuudesta pätee olettamusten (1.6) vallitessa eläkekassassa, jossa rahastoitu eläke on karttunut koko ajan saman periaatteen mukaisesti (kaava (1.1)). Siirrytään tämän jälkeen tarkastelemaan yleisempää karttumistapaa, jossa rahastoidun eläkkeen karttumistapa on kaksivaiheinen. Vuoteen v_0 mennessä rahastoidut eläkkeet ovat karttuneet tietyllä säännöllä, jota ei millään tavoin rajoiteta, tunnetaan vain että ko. säännön mukaisesti lasketut kassan jäsenten rahastoidut eläkkeet per 31.12.v₀:

$$E_i^0 = \text{henkilön } i \text{ rahastoitu eläke per 31.12.v}_0.$$

Vuoden v_0 jälkeen rahastoidut eläkkeet ovat karttuneet lineaarisesti säännöllä

$$(1.12) \quad E_i^R(v_t) = \frac{1}{v_i(s)+w-v_i(j)} ((v_t-v_i(j))E_i^T(v_t) + (v_i(s)+w-v_t)E_i^0)$$

missä $v_i(j)$ ei olekaan todellinen jäseneksitulovuosi vaan

$$v_i(j) = \max \{v_0, \text{todellinen jäseneksitulovuosi}\}$$

Niiden henkilöiden osalta, jotka ovat tulleet kassan jäseniksi vuoden v_0 jälkeen on $E_0^T = 0$ ja $v_i(j)$ yhtyy todelliseen jäseneksitulovuoteen. Tällöin kaava (1.12) palautuu kaavaksi (1.1). Kaavan (1.1) määrittelemä yksivaiheinen karttumistapa on erikoistapaus kaavan (1.12) määrittelemästä kaksivaiheisesta karttumistavasta. Edellä kuvattua kaksivaiheista karttumista tarkastellaan esimerkin valossa. Esimerkiksi on valittu Yhdyspankin eläkekassa. Ennen kaksivaiheiseen karttumiseen siirtymistä tarkastellaan edellä johdettuja tuloksia esimerkin valossa.

Esimerkki Tarkastellaan kolmen henkilön muodostamaa ikäryhmää, kun henkilöiden syntymävuosi $v(s) = 30$ (31.12.1930). Taulukkoon 1.1 on merkitty heidän palvelukseentulovuotensa (31.12. ko. vuonna) ja tavoite(kuukausi)eläkkeensä 31.12.75. Kyseisten tietojen perusteella on taulukkoon laskettu rahastoidut eläkkeet 31.12.75 ja näiden perusteella laskettu ikäryhmän keskimääräinen palvelukseentulovuosi $v(j,75)$. Jos kaikkien kolmen henkilön palkat nosevat vuosina 76-90 10 %:lla vuosittain, nousevat myös heidän tavoite(kuukausi)eläkkeensä 10 %:lla. Tämän ja edellä johdettujen tulosten perusteella on taulukkoon 1.2 lasketut tavoite- ja rahastoidut eläkkeet vuosille 76, 80, 85, 90 ja 95.

TAULUKKO 1.1

i	$v_i(j)$	$E_i^T(75)$	$v_k - v_i(j)$	$E_i^R(75)$
1	64	2000	11	709.677
2	68	1400	7	362.963
3	72	1000	3	130.435
yht.	$E^T(75) =$	4400	$E^R(75)$	$= 1\ 203.075$

$$E^T(75) - E^R(75) = 3\ 196.925$$

$$V_k E^T(75) = 330.000$$

$$(V(s) + W) E^R(75) = 114.294$$

$$V(j,75) = 67.473$$

$$E^{R'}(76) = \frac{1}{95 - 67,473} \times (76 - 67,473) \cdot 4840 = 1499$$

TAULUKKO 1.2

k	$v_A + k$	$E^T(v_A + k)$	$E^R(v_A + k) = E^{R'}(v_A + k)$
0	75	4400	1203
1	76	4840	1499
5	80	7087	3225
10	85	11412	7266
15	90	18379	15041
20	95	29600	29600

I.2

Ennusteet rahastoiduista eläkkeistä Yhdyspankin eläkekassassa

Rahastoidun eläkkeen karttuminen

Yhdyspankin eläkekassan laskuperusteiden mukainen rahastoitu vanhuuseläke per 31.12. tilivuonna v_t henkilöstä i on:

$$(2.1) \quad E_i^R(v_t) = \frac{1}{w - x_i - t_i} ((u_i - t_i) E_i^T(v_t) + (w - x_i - u_i) E_i^O)$$

missä

w = eläkeikä

x_i = henkilön i jäseneksituloikä

t_i = henkilön i jäsenenäoloaika 31.12.63 mennessä

u_i = henkilön i jäsenenäoloaika 31.12. v_t mennessä

$E_i^R(v_t)$ = henkilön i rahastoitu eläke per 31.12. v_t

$E_i^T(v_t)$ = henkilön i tavoite-eläke per 31.12. v_t

E_i^O = henkilön i rahastoitu eläke per 31.12.63

Jos henkilö i on tullut eläkekassan jäseneksi vuoden 1963 jälkeen ovat

$$t_i = E_i^O = 0$$

ja kaava (1.1) saa muodon

$$(2.2) \quad E_i^R(v_t) = \frac{1}{w - x_i} u_i E_i^T(v_t)$$

Kaavassa (2.1) ilmoittaa $x_i + t_i$ henkilön i todellisen jäseneksituloiän, jos henkilö i on tullut jäseneksi vuoden 63 jälkeen, muulloin $x_i + t_i$ ilmoittaa henkilön i iän hetkellä 31.12.63.

Määritellään henkilön i "jäseneksitulovuosi" (kaavan 1.1 mielessä):

$$v_i(j) = \max \{63, \text{todellinen jäseneksitulovuosi}\}$$

(käytetään desimaaliesitystä: esim: "31.12.61" = 61.0 ja "30.6.71" = 70.5).

Jos henkilön i syntymäaika (desimaaliesityksenä) on $v_i(s)$, on

$$x_i + t_i = v_i(j) - v_i(s)$$

olkoonpa todellinen jäseneksitulovuosi ennen tai jälkeen vuotta 63.

Kaavassa (2.1) $u_i - t_i$ ilmoittaa henkilön i todellisen jäsenenäoloajan, jos henkilö i on tullut jäseneksi vuoden 63 jälkeen, muulloin $u_i - t_i$ ilmoittaa 31.12.63 jälkeisen jäsenenäoloajan (ennen 31.12.63 palveltu aika on vaikuttanut termiä E_i^0 laskettaessa). Alla oleva yhtälö pätee

$$u_i - t_i = v_k - v_i(j)$$

olkoonpa todellinen jäseneksitulovuosi ennen tai jälkeen vuotta 63. Kaavassa (2.1) $x_i + u_i$ ilmoittaa henkilön i iän 31.12. v_t ja

$$x_i + u_i = v_k - v_i(s)$$

Merkintöjä $v_i(s)$ ja $v_i(j)$ käyttäen saa kaava (2.1) muodon (vrt. 1.12)

$$(2.3) \quad E_i^R(v_k) = \frac{1}{v_i(s) + w - v_i(j)} \left((v_k - v_i(j)) E_i^T(v_k) + (v_i(s) + w - v_k) E_i^0 \right)$$

Ajankohtana 31.12.63 palveluksessa olleen henkilön rahastoitu eläke per 31.12.63 saadaan ylläolevasta kaavasta sijoittamalla

$$v_k = 63; \quad v_i(j) = 63 \quad \text{ja} \quad E_i^R(63) = E_i^0$$

ja rahastoitu eläke eläkkeellejäämisajankohta sijoittamalla

$$v_k = v_i(s) + w; \quad \text{ja} \quad E_i^R(v_i(s) + w) = E_i^T(v_i(s) + w).$$

joten rahastoitu eläke karttuu E_i^0 :sta tavoite-eläkkeen suuruiseksi.

Jos tilivuodelta v_t tunnetaan henkilön i , jonka syntymävuosi on $v_i(s)$, rahastoitunut eläke ja tavoite-eläke voidaan "jäseneksitulovuosi" $v_i(j)$ ratkaista kaavasta (2.3) ja

$$(2.4) \quad v_i(j) = \frac{v_t E_i^T(v_t) - (v_i(s) + w) E_i^R(v_t) + (v_i(s) + w - v_t) E_i^0}{E_i^T(v_t) - E_i^R(v_t)}$$

Siirrytään tarkastelemaan henkilöryhmää $I = \{i | i = 1, \dots, n_I\}$ jotka kaikki ovat syntyneet vuonna $v_i(s) = v(s)$. Lasketaan ikäryhmän I osalta yhteen vuonna v_t rahastoidut ja tavoite-eläkkeet ja otetaan käyttöön merkinnät:

$$\sum_{i=1}^{n_I} E_i^R(v_t) = E^R(v_t) = E^R$$

$$(2.5) \quad \sum_{i=1}^{n_I} E_i^T(v_t) = E^T(v_t) = E^T$$

$$\sum_{i=1}^{n_I} E_i^0 = E^0$$

Keskimääräinen jäseneksitulovuosi

Määritellään ikäryhmän I vuonna v_t laskettu keskimääräinen jäseneksitulovuosi $v(j, v_t)$ yhtälöllä

$$(2.6) \quad v(j, v_t) = \frac{v_t E^T(v_t) - (v(s) + w) E^R(v_t) + (v(s) + w - v_t) E^0}{E^T(v_t) - E^R(v_t)}$$

Jos vuoden v_t esiintuominen ei ole tarpeen
käytetään merkintätapaa:

$$v(j) = v(j, v_t).$$

Yhtälön (2.4) perusteella pätee

$$\begin{aligned} [E_i^T(v_t) - E_i^R(v_t)] v_i(j) &= v_t E_i^T(v_t) - (v_i(s) + w) E_i^R(v_t) \\ &+ (v_i(s) + w - v_t) E_i^0. \end{aligned}$$

Koska ikäryhmässä I on $v_i(s) = v(s)$, $i = 1, \dots, n_I$
pätee

$$\begin{aligned} \sum [E_i^T(v_t) - E_i^R(v_t)] v_i(j) &= v_t E^T(v_t) - (v(s) + w) E^R(v_t) \\ &+ (v(s) + w - v_t) E^0. \end{aligned}$$

Ylläolevan ja yhtälön (2.6) perusteella pätee

$$(2.7) \quad v(j, v_t) = \frac{\sum [E_i^T(v_t) - E_i^R(v_t)] v_i(j)}{E^T(v_t) - E^R(v_t)}$$

toisin sanoen ikäryhmän I keskimääräinen jäseneksi-
tulovuosi $v(j, v_t)$ on ko. ikäryhmään kuuluvien
henkilöiden "jäseneksitulovuosien" $v_i(j)$ painotettu
keskiarvo, kun painoina on käytetty tavoite-eläk-
keiden ja rahastoitujen eläkkeiden erotuksia.

Johdetaan keskimääräiselle jäseneksitulovuodelle edellisen luvun esitysmuotoa (1.5) vastaava yhtälö, joka nyt saa muodon:

$$(2.8) \quad v(j, v_*) = \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_*) - E_i^0}{v(s) + w - v_i(j)} v_i(j)}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_*) - E_i^0}{v(s) + w - v_i(j)}}$$

Tulos saadaan samaan tapaan kuin tulos (1.5).
Yhtälön (2.3) perusteella

$$\begin{aligned} E_i^T(v_*) - E_i^R(v_*) &= E_i^T(v_*) - \frac{1}{v_i(s) + w - v_i(j)} (v_* - v_i(j)) E_i^T(v_*) + \\ &\quad - \frac{1}{v_i(s) + w - v_i(j)} (v_i(s) + w - v_*) E_i^0 \\ &= \frac{v_i(s) + w - v_*}{v_i(s) + w - v_i(j)} (E_i^T(v_*) - E_i^0) \\ &= (v(s) + w - v_*) \frac{E_i^T(v_*) - E_i^0}{v(s) + w - v_i(j)} \end{aligned}$$

Tällöin

$$E^T(v_t) - E^R(v_t) = (v(s) + w - v_t) \sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t) - E_i^0}{v(s) + w - v_i(j)}$$

Tulos (2.8) saadaan, kun edellä olevat yhtälöt sijoitetaan yhtälöön (2.7).

Jos $E_i^0 \neq 0$, on $v_i(j) = 63$. Tämän perusteella voidaan (2.8) kirjoittaa muotoon

$$(2.9) \quad v(j, v_t) = \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)} v_i(j) - \frac{63 E^0}{v(s) + w - 63}}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)} - \frac{E^0}{v(s) + w - 63}}$$

Rahastoitujen eläkkeiden ennusteet

Keskimääräisen jäseneksitulovuoden $v(j, v_t)$ avulla ennustetaan ikäryhmän I rahastoitujen eläkkeiden kehittymistä vuosina $v_t, v_t + 1, \dots, v_t + n$. Ennusteet perustuvat edellisen luvun olettamuksiin (1.6).

Ennuste vuodelle v_t+k määritellään:

$$(2.10) \quad E^{R'}(v_t+k) = \frac{1}{v(s)+w-v(j,v_t)} \left[(v_t+k-v(j,v_t)) \prod_{f=1}^k (1+k_f) E^T(v_t) + (v(s)+w-v_t-k) E^0 \right]$$

missä k_f on palkkojen nousu vuonna $v_t + f$,
 $f = 0, 1, \dots, n$

Asettamalla $k = 0$, todetaan (2.6):n perusteella, että

$$E^{R'}(v_t) = E^R(v_t);$$

Kaavan (2.10) mukainen rahastoitu eläke yhtyy ikäryhmän I osalta vuonna v_t ikäryhmän todelliseen rahastoituun eläkkeeseen.

Jos ikäryhmän kaikki henkilöt saavat k_f suuruisen (%:ina) palkankorotuksen vuonna $f = 1, \dots, n$, ja olettamukset (1.6) ovat voimassa on henkilön $i \in I$ rahastoitu eläke vuonna v_t+k :

$$(2.11) \quad E_i^R(v_t+k) = \frac{1}{v_i(s)+w-v_i(j)} \left[(v_t+k-v_i(j)) \prod_{f=1}^k (1+k_f) E_i^T(v_t) + (v_i(s)+w-v_t-k) E_i^0 \right].$$

Koko ikäryhmän osalta rahastoitu eläke

$$(2.12) \quad E^R(v_t+k) = \sum_{i=1}^{n_I} E_i^R(v_t+k).$$

Eläkkeellisiirtymisajankohtana, jolloin $v_t+k = v(s)+w$, pätee yhtälö

$$E^R(v(s)+w) = E^{R'}(v(s)+w) = \prod_{f=1}^n (1+k_f) E^T(v_t).$$

Ennusteiden tarkkuus

Johdetaan yhtälön (2.10) mukaisen ennusteen ja yhtälön (2.12) mukaisen tarkkaan lasketun rahaston erotukselle lauseke.

Lasketaan aluksi yhtälön (2.10) jakajana oleva lauseke käyttämällä keskimääräisen jäseneksitulovuoden esitysmuotoa (2.9):

$$v(s) + w - v(j, v_t) =$$

$$= v(s) + w - \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)} v_i(j)}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)}} - \frac{63 E^0}{v(s) + w - 63}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)} (v(s) + w - v_i(j)) - \frac{v(s) + w - 63}{v(s) + w - 63} E^0}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)} - \frac{E^0}{v(s) + w - 63}}$$

$$= \frac{E^T(v_t) - E^0}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)} - \frac{E^0}{v(s) + w - 63}}$$

Yhtälön (2.10) kertoimena oleva lauseke

$$\begin{aligned}
 v_{t+k} - v(j, v_t) &= v_t + k - \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)} v_i(j) - \frac{63 E^0}{v(s) + w - 63}}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)} - \frac{E^0}{v(s) + w - 63}} \\
 &= \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{v_t + k - v_i(j)}{v(s) + w - v_i(j)} E_i^T(v_t) - \frac{v_t + k - 63}{v(s) + w - 63} E^0}{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{E_i^T(v_t)}{v(s) + w - v_i(j)} - \frac{E^0}{v(s) + w - 63}}
 \end{aligned}$$

Tällöin on

$$\frac{v_t + k - v(j, v_t)}{v(s) + w - v(j, v_t)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{v_t + k - v_i(j)}{v(s) + w - v_i(j)} E_i^T(v_t) - \frac{v_t + k - 63}{v(s) + w - 63} E^0}{E^T(v_t) - E^0}$$

Sijoitetaan edellä saadut tulokset yhtälöön (2.10):

$$E^R(v_{t+k}) = \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{v_t + k - v_i(j)}{v(s) + w - v_i(j)} E_i^T(v_t) - \frac{v_t + k - 63}{v(s) + w - 63} E^0}{E^T(v_t) - E^0} \prod_{f=1}^k (1 + \frac{E^T(v_{t+f})}{E^0})$$

+ (kaava jatkuu seur. sivulla)

$$+ \frac{\sum_{i=1}^{n_I} \frac{v(s)+w-v_t-k}{v(s)+w-v_i(j)} E_i^T(v_t) - \frac{v(s)+w-v_t-k}{v(s)+w-63} E^0}{E^T(v_t) - E^0} E^0$$

Jos $E_i^0 \neq 0$, on $v_i(j) = 63$. Kun tämä huomioidaan yhtälössä (2.11) saadaan (2.12) nojalla

$$E^R(v_t+k) = \sum_{i=1}^{n_I} \frac{v_t+k-v_i(j)}{v_i(s)+w-v_i(j)} \frac{k}{\prod_{f=1}^k (1+k_f)} E_i^T(v_t) + \frac{v(s)+w-v_t-k}{v(s)+w-63} E^0$$

Kun ylläolevasta yhtälöstä ratkaistaan molemmat oikealla puolella olevat lausekkeet ja sijoitetaan rahastoidun eläkkeen ennusteen lausekkeeseen ja käytetään merkintää

$$K^k = \frac{k}{\prod_{f=1}^k (1+k_f)}$$

saadaan

$$E^{R'}(v_t+k) = \frac{E^R(v_t+k) - \frac{v(s)+w-v_t-k + K^k(v_t+k-63)}{v(s)+w-63} E^0}{E^T(v_t) - E^0} E^T(v_t) + \sum_{i=1}^{n_I} \frac{v(s)+w-v_t-k + K^k(v_t+k-v_i(j))}{v(s)+w-v_i(j)} E_i^T(v_t) - E^R(v_t+k) E^0$$



11

12

13

14

Kirjoitetaan

$$\begin{aligned} v(s) + w - v_t - k + k^k (v_t + k - 63) &= \\ &= v(s) + w - 63 + (k^k - 1)(v_t + k - 63) \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} v(s) + w - v_t - k + k^k (v_t + k - v_i(j)) &= \\ &= v(s) + w - v_i(j) + (k^k - 1)(v_t + k - v_i(j)) \end{aligned}$$

Tällöin

$$\begin{aligned} E^R(v_t + k) &= \frac{E^R(v_t + k) - E^0 - \frac{(k^k - 1)(v_t + k - 63)}{v(s) + w - 63} E^0}{E^T(v_t) - E^0} E^T(v_t) \\ &+ \frac{E^T(v_t) - E^R(v_t + k) + \sum_i \frac{(k^k - 1)(v_t + k - v_i(j))}{v(s) + w - v_i(j)} E_i^T(v_t)}{E^T(v_t) - E^0} E_i^T(v_t) \end{aligned}$$

$$(2.13) \quad E^R(v_t + k) = E^R(v_t + k) + \Delta$$

missä

$$(2.14) \quad A = \frac{(K^k - 1) E^0}{E^T(v_t) - E^0} \left\{ \sum_{i=1}^{n_I} \frac{v_t + k - v_i(j)}{v(s) + w - v_i(j)} E_i^T(v_t) - \frac{v_t + k - 63}{v(s) + w - 63} E^T(v_t) \right\}$$

Jos $K^k=1$, on $K^k-1=0$ ja $\Delta=0 \Rightarrow$

Tulos 1 Rahastoidun eläkkeen ennuste yhtyy tarkkaan laskettuun rahastoituun eläkkeeseen edellyttäen, ettei palkankorotuksia tapahdu ($k_F=0$ jolloin $K^k=1$).

Jos kaavassa (2.14) $v_i(j)=63$ kaikille $i=1, \dots, n_I$, on $\Delta=0 \Rightarrow$

Tulos 2 Rahastoidun eläkkeen ennuste yhtyy tarkkaan laskettuun rahastoituun eläkkeeseen, jos kaikki ikäryhmän I henkilöt ovat tulleet kassan jäseniksi vuonna 63 tai sitä ennen

Jos $E^0=0$, on $\Delta=0 \Rightarrow$

Tulos 3 Rahastoidun eläkkeen ennuste yhtyy tarkkaan laskettuun rahastoituun eläkkeeseen, jos kaikki ikäryhmän I henkilöt ovat tulleet kassan jäseneksi vuoden 63 jälkeen.

Tulosten 2 ja 3 perusteella voidaan suorittaa seuraava johtopäätös:

Sen sijaan, että kullekin ikäryhmälle lasketaan keskimääräinen jäseneksitulovuosi, tulee ikäryhmä I jakaa kahteen osaan I_1 ja I_2 . Ryhmään I_1 kuuluvat ne henkilöt, jotka ovat tulleet jäseneksi vuoden 63 jälkeen ja ryhmään I_2 kuuluvat loput ikäryhmän I henkilöt. Lasketaan kummallekin ikäryhmälle

$$E_1^T(v_t) = \sum_{i \in I_1} E_i^T(v_t)$$

$$E_2^T(v_t) = \sum_{i \in I_2} E_i^T(v_t)$$

$$E_1^0 = 0$$

$$E_2^0 = \sum_{i \in I_1} E_i^0 = \sum_{i \in I} E_i^0$$

$$E_1^R(v_t) = \sum_{i \in I_1} E_i^R(v_t)$$

$$E_2^R(v_t) = \sum_{i \in I_2} E_i^R(v_t)$$

Lasketaan kummallekin ikäryhmälle oma keskimääräinen jäseneksitulovuosi $v_1(j, v_t)$ ja $v_2(j, v_t)$ kaavalla (2.3). Tällöin saadaan kummallekin ryhmälle omat rahastoitujen eläkkeiden ennusteet

$$E_1^R(v_t + k) \quad \text{ja} \quad E_2^R(v_t + k)$$

Kaavasta (2.10), jotka molemmat erikseen yhtyvät vastaaviin tarkasti laskettuihin rahastoituihin eläkkeisiin ("kaksivaiheisen" kassan ongelma on palautettu luvun I.1 kassaan).

Koska

$$\frac{v(s)+w-v_t-k}{v(s)+w-63} \cdot \frac{v_t-63}{v(s)+w-v_t} \leq \frac{v_t-63}{v(s)+w-63} \leq 1$$

pätee:

$$(2.17) \quad - \frac{(k-1) E^0 E_1^T(v_t)}{E^T(v_t) - E^0} \leq \Delta \leq 0$$

Esimerkki Olkoon ikäryhmässä 35-syntyneet:

$$E^0 = 157 \text{ (mk/kk)}$$

$$E_1^T(75) = 718 \text{ (mk/kk)}$$

$$E^T(75) = 3764 \text{ (mk/kk)}$$

$$E^R(75) = 1081 \text{ (mk/kk)}$$

Jos vuoden 76 palkankorotukset ovat 10 % (jolloin $k-1=0.1$), poikkeaa vuoden 76 rahastoidun eläkkeen ennuste epäyhtälön (2.17) perusteella tarkasta rahastoidusta eläkkeestä vähemmän kuin 3 mk 13 p, koska

$$- \frac{0.1 \times 157 \times 718}{3764 - 157} = \frac{11272}{3607} = -3.13 \leq \Delta \leq 0.$$

Epäyhtälön (2.16) perusteella:

$$- \frac{3.13 \times (35+65-75-1) \times (75-63)}{(35+65-63) \times (35+65-75)} = - \frac{3.13 \times 24 \times 12}{37 \times 25} = -0.97 \leq \Delta \leq 0$$

joten vuoden 76 rahastoidun eläkkeen ennuste poikkeaa vähemmän kuin 97 penniä tarkasta vuoden 76 rahastoidusta eläkkeestä. Koska vuoden 75 rahastoitu eläke vuonna 75 oli 1081 mk (vuoden 76 rahastoitu eläke on tätä suurempi) tiedetään, että 97 pennin ero on alle 0.1 % vuoden 76 rahastoidusta eläkkeestä ko. ikäryhmässä.

III KONFIDENSIVÄLIT

Johdanto

Laskuperustemalli-62 mukaisen yksikön suuruisen vastaisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvo on "todellisuudessa" erään satunnaismuuttujan odotusarvo. Kyseistä satunnaismuuttujaa, sen odotusarvoa (= vakuutusmatematiikan pääoma-arvoa) ja hajontaa tarkastellaan tämän jakson ensimmäisessä luvussa.

Toisessa luvussa tarkastellaan tietyn ikäryhmän vastaisten vanhuuseläkkeiden "pääoma-arvoa" satunnaismuuttujana. Luvussa määritellylle satunnaismuuttujalle johdetaan odotusarvon (= vakuutusmatematiikan pääoma-arvo) ja hajonnan lausekkeet. Näiden perusteella johdetaan ko. satunnaismuuttujalle konfidenssiväli.

Tämän jakson kolmannessa luvussa tarkastellaan koko eläkekassan vastaisen vanhuuseläkkeen "pääoma-arvon" odotusarvoa, hajontaa ja konfidenssivälejä. Näin johdettua konfidenssiväliä käytetään "mittana" tarkasteltaessa jaksossa III määriteltyjen ennusteiden "hyvyyttä".

II.1 Vastaisen yksikköeläkkeen vastuu satunnaismuuttujana

Olkoon satunnaismuuttuja $\underline{Z}$ x-ikäisen henkilön jäljelläoleva elinaika. Tällöin on x-ikäisen henkilön i iästä w ($> x$) alkavan yksikön suuruisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvo jäljelläolevasta elinajasta riippuva satunnaismuuttuja ja

$$(1.1) \quad \underline{S} = S(\underline{Z}) = \begin{cases} 0 & \text{kun } \underline{Z} \leq w - x \\ \int_{w-x}^{\underline{Z}} e^{-\delta u} du & \text{kun } \underline{Z} > w - x \end{cases}$$

Integraali

$$\int_{w-x}^{\underline{Z}} e^{-\delta u} du = \left[-\frac{e^{-\delta u}}{\delta} \right]_{w-x}^{\underline{Z}} = \frac{e^{-\delta(w-x)} - e^{-\delta \underline{Z}}}{\delta}$$

Johdetaan satunnaismuuttujan $\underline{S}$ odotusarvo ja varianssi.

Odotusarvo on

$$E \underline{S} = \int_0^{\infty} S(\underline{Z}) dF(\underline{Z})$$

kun

$$F(\underline{Z}) = P\{\underline{Z} \leq \underline{Z}\} = {}_Z q_x = 1 - {}_Z p_x,$$

missä ${}_Z q_x$ ja ${}_Z p_x$ ovat vakuutusmatematiikassa tavanomaiset kuolemis- ja elämistodennäköisyydet.

Tällöin

$$\begin{aligned}
 ES &= \int_0^{w-x} 0 \cdot d(-zP_x) + \int_{w-x}^{\infty} \frac{\bar{e}^{\delta(w-x)} e^{-\delta z}}{\delta} d(-zP_x) \\
 &= \frac{\bar{e}^{\delta(w-x)}}{\delta} \Big|_{w-x}^{\infty} - zP_x - \frac{1}{\delta} \int_{w-x}^{\infty} \bar{e}^{\delta z} d(-zP_x) \\
 &= \frac{e^{-\delta(w-x)}}{\delta} w-xP_x - \frac{1}{\delta} \int_{w-x}^{\infty} \bar{e}^{\delta z} d(-zP_x) .
 \end{aligned}$$

Tarkastellaan integraalia

$$\begin{aligned}
 \int_{w-x}^{\infty} e^{-\delta z} d(-zP_x) &= \int_{w-x}^{\infty} -e^{-\delta z} zP_x - \delta \int_{w-x}^{\infty} \bar{e}^{\delta z} zP_x dz \\
 &= e^{-\delta(w-x)} w-xP_x - \delta \int_{w-x}^{\infty} \bar{e}^{\delta z} zP_x dz .
 \end{aligned}$$

Odotusarvo ES voidaan sieventää muotoon:

$$(1.2) \quad ES = \frac{\bar{e}^{\delta(w-x)}}{\delta} x$$

missä $\frac{\bar{e}^{\delta(w-x)}}{\delta} x$ on lykätty elinkorko korkoutuvuudella δ .

Satunnaismuuttujan S varianssi lasketaan kaavasta

$$D^2 S = ES^2 - (ES)^2 .$$

Satunnaismuuttujan $\underline{S}$ neliö on:

$$(1.3) \quad \underline{S}^2 = \begin{cases} 0 & \text{kun } Z \leq w-x \text{ ja muulloin} \\ \frac{e^{-2\delta(w-x)} - 2e^{-\delta(w-x)} \frac{\delta(w-x) - \delta Z}{e} - 2\delta Z}{\delta^2} \end{cases}$$

Tällöin on neliön $\underline{S}^2$ odotusarvo:

$$\begin{aligned} ES^2 &= \int_0^\infty S^2(z) dF(z) \\ &= \frac{e^{-2\delta(w-x)}}{\delta^2} \int_{w-x}^\infty d(-zP_x) + \\ &\quad - \frac{2e^{-\delta(w-x)}}{\delta^2} \int_{w-x}^\infty e^{-\delta z} d(-zP_x) + \\ &\quad \frac{1}{\delta^2} \int_{w-x}^\infty e^{-2\delta z} d(-zP_x) \\ &= \frac{e^{-2\delta(w-x)}}{\delta^2} w-xP_x + \\ &\quad - \frac{2e^{-\delta(w-x)}}{\delta^2} \cdot \left(e^{-\delta(w-x)} w-xP_x - \delta w-x \left(\frac{\delta}{\delta^2} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{1}{\delta^2} \int_{w-x}^\infty e^{-2\delta z} zP_x - \frac{1}{\delta^2} \int_{w-x}^\infty 2\delta e^{-2\delta z} zP_x dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{e^{-2\delta(w-x)}}{\delta^2} w-x P_x + \frac{2e^{-\delta(w-x)}}{\delta} w-x \frac{(\delta)}{\bar{a}_x} \\
&\quad + \frac{e^{-2\delta(w-x)}}{\delta^2} w-x P_x - \frac{2}{\delta} w-x \frac{(2\delta)}{\bar{a}_x} \\
&= \frac{2e^{-\delta(w-x)}}{\delta} w-x \frac{(\delta)}{\bar{a}_x} - \frac{2}{\delta} w-x \frac{(2\delta)}{\bar{a}_x}
\end{aligned}$$

Odotusarvon ES neliö on

$$(E\underline{\zeta})^2 = \left(w-x \frac{(\delta)}{\bar{a}_x} \right)^2$$

joten varianssi

$$(1.4) \quad D^2 \underline{\zeta} = \left(\frac{2e^{-\delta(w-x)}}{\delta} - w-x \frac{(\delta)}{\bar{a}_x} \right) w-x \frac{(\delta)}{\bar{a}_x} - \frac{2}{\delta} w-x \frac{(2\delta)}{\bar{a}_x}$$

Jatkossa käytetään merkintöjä:

$$\underline{\zeta} = \underline{\zeta}_x^x \quad (x\text{-ikäinen henkilö } i)$$

$$(1.5) \quad E\underline{\zeta} = \bar{\zeta}_x$$

$$D^2 \underline{\zeta} = \delta_x^2$$

Esimerkkejä

Valitaan korkoutuvuus δ siten, että

$$\delta = \ln 1.05 = 0.04879016$$

jolloin

$$2\delta = 2 \ln 1.05 = \ln 1.1025.$$

Tällöin ovat vastaavat 100i:t 5 % ja 10.25 % ja näitä vastaavat lykätyt yksikköeläkkeiden pääoma-arvot, varianssit ja hajonnat ilmenevät seuraavalla sivulla olevasta taulukosta 2.1:

T A U L U K K O 1.1

ikä x	(2δ) $w-x \bar{a}_x$	(δ) $w-x \bar{a}_x = \bar{s}_x$	b_x^2	b_x
20	0.0663	0.8185	0.3465	0.5886
25	0.1083	1.0469	0.5604	0.7486
30	0.1770	1.3407	0.9103	0.9541
35	0.2899	1.7206	1.4752	1.2146
40	0.4764	2.2156	2.3825	1.5435
45	0.7872	2.8684	3.8186	1.9541
50	1.3120	3.7461	6.0502	2.4597
55	2.2180	4.9613	9.3189	3.0527
60	3.8338	6.7201	13.5232	3.6774
65	6.8734	9.4375	16.0409	4.0051

Eläkeikä $W = 65$ vuottaKorkoutuvuus $\delta = \ln 1.05 = 0.04879016$

II.2 Ikäryhmän vastainen vanhuuseläkevastuu satunnaismuuttujana

Olkoon eläkekassaan kuuluvien x -ikäisten henkilöiden lukumäärä n_x ja ikäryhmään x kuuluvan henkilön i

$$\text{rahastoitu eläke} = E_{x,i}.$$

Merkitään koko ikäryhmän rahastoitujen eläkkeiden summaa E_x :llä:

$$(2.1) \quad E_x = \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}.$$

Olkoon satunnaismuuttuja S_i^x ikäryhmään x kuuluvan henkilön yksikön suuruista i ästä w alkavaa vanhuuseläkettä vastaava pääoma-arvo (= edellisen luvun satunnaismuuttuja S). Tällöin on ikäryhmään x kuuluvien kassan jäsenten vastaisten vanhuuseläkkeiden pääoma-arvojen summa satunnaismuuttuja ja

$$(2.2) \quad S^x = \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i} S_i^x$$

Tarkastellaan näin määritellyn satunnaismuuttujan odotusarvoa, varianssia ja konfidenssivälejiä.

Odotusarvo (merkintöjen 2.3 nojalla)

$$(2.3) \quad E S^x = E \left(\sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i} S_i^x \right) = \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i} \bar{S}_x = E_x \bar{S}_x$$

Koska satunnaismuuttujat S_i^x , S_j^x ovat toisistaan riippumattomia kun $i \neq j$, on satunnaismuuttujan S^x varianssi

$$(2.4) \quad D^2 S^x = \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2 D^2 S_i^x = \delta_x^2 \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2.$$

Odotusarvon lausekkeesta on nähtävissä, että odotusarvo riippuu vain ikäryhmän x rahastoitujen eläkkeiden summasta, varianssi sen sijaan riippuu kunkin yksittäisistä rahastoiduista eläkkeistä. Kuten tunnettua saavuttaa neliösumma

$$\sum_{i=1}^n Z_i^2$$

pienimmän arvonsa ehdolla

$$\sum_{i=1}^n z_i = Z \quad (= \text{vakio})$$

silloin, kun

$$z_i = \frac{Z}{n} \quad \text{jokaisella } i = 1, 2, \dots, n.$$

ja

$$\min \sum_{i=1}^n z_i^2 = n \cdot \frac{Z^2}{n^2} = \frac{Z^2}{n}.$$

Valitsemalla

$$z_i = E_{x,i} \quad i = 1, \dots, n_x$$

todetaan, että

$$(2.5) \quad D^2 \underline{S}^x = \sigma_x^2 \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2 \geq \frac{\sigma_x^2 E_x^2}{n_x}$$

$$\text{kun } \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i} = E_x.$$

Satunnaismuuttujan $\underline{S}^x$ varianssi saavuttaa minimiarvonsa ehdolla

$$\sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i} = E_x \quad (= \text{vakio}),$$

kun kaikkien x-ikäisten henkilöiden rahastoidut eläkkeet ovat yhtä suuret:

$$E_{x,i} = \frac{E_x}{n_x} \quad \text{kun } i = 1, 2, \dots, n_x.$$

ja kyseinen varianssi

$$(2.6) \quad D^2 \underline{S}^x = \frac{\sigma_x^2 E_x^2}{n_x}$$

Todennäköisyyslaskennan keskeisen raja-arvo-väittämän perusteella on satunnaismuuttuja $\underline{S}^x$ asympotoottisesti normaalin parametrein

$$(\underline{E}\underline{S}^x, D^2\underline{S}^x).$$

Edellämainitun perusteella saadaan satunnaismuuttujalle $\underline{S}^x$ konfidenssiväli

$$\underline{P} \left\{ \left| \frac{\underline{S}^x - \underline{E}\underline{S}^x}{D \underline{S}^x} \right| < a_\varepsilon \right\} = 1 - \varepsilon.$$

Kun

a_ε otetaan normaalijakautuman, jonka parametrit $(0,1)$, taulukosta saadaan konfidenssiväliksi:

$$\underline{E}\underline{S}^x - a_\varepsilon D \underline{S}^x < \underline{S}^x < \underline{E}\underline{S}^x + a_\varepsilon D \underline{S}^x$$

Sijoitetaan tähän yhtälöiden (2.1) ja (2.4) odotusarvot ja hajonnat saadaan

$$(2.7) \quad \underline{E}_x \bar{S}_x - a_\varepsilon \delta_x \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2} < \underline{S}^x < \underline{E}_x \bar{S}_x + a_\varepsilon \delta_x \sqrt{\sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2}$$

Jos ikäryhmässä x kaikki rahastoidut eläkkeet ovat keskenään yhtä suuret on:

$$(2.8) \quad \underline{E}_x \bar{S}_x - \frac{a_\varepsilon \delta_x \underline{E}_x}{\sqrt{n_x}} < \underline{S}^x < \underline{E}_x \bar{S}_x + \frac{a_\varepsilon \delta_x \underline{E}_x}{\sqrt{n_x}}$$

Epäyhtälön (2.5) perusteella aina tiedetään että (2.8) mukainen konfidenssiväli on "kapeampi" kuin (2.7) mukainen konfidenssiväli.

E s i m e r k i t

Korkoutuvuudella $\delta = \ln 1.05$ on laskuperustemalli -1962 mukaiset merkitsevyystasoa $1 - \varepsilon = 0.95$ vastaavat konfidenssivälit nähtävissä oheisista taulukoista. Rahastoidut eläkkeet kussakin ikäryhmässä keskenään yhtäsuuret; $E_x/n_x = 1000/v$ kummassakin taulukossa.

T A U L U K K O 3.1

$-n_x = 10$ henkeä kaikissa ikäryhmissä
($E_x = 10.000$ mk)

X	ES^x (3.2)	DS^x (3.4)	Konfidenssiväli kaava (3.6)	
20	8 185	1 861	4 537	11 833
25	10 469	2 367	5 830	15 108
30	13 407	3 017	7 494	19 320
35	17 206	3 841	9 678	24 732
40	22 156	4 881	12 589	31 723
45	28 684	6 180	16 571	40 797
50	37 461	7 778	22 216	52 706
55	49 613	9 654	30 691	68 535
60	67 201	11 630	44 406	89 996
65	94 375	12 666	69 550	119 200

T A U L U K K O 3.2

$-n_x = 100$ henkeä kaikissa ikäryhmissä
($E_x = 100.000$ mk)

X	ES^x	DS^x	Konfidenssiväli	
20	81 850	5 886	70 313	93 387
25	104 690	7 486	90 017	119 363
30	134 070	9 541	115 370	152 770
35	172 060	12 146	148 254	195 866
40	221 560	15 435	191 307	251 813
45	286 840	19 541	248 540	325 140
50	374 610	24 597	326 400	422 820
55	496 130	30 527	436 297	555 963
60	672 610	36 774	599 933	744 087
65	943 750	40 051	865 250	1022 250

II.3 Koko kassan vastainen vanhuuseläkevastuu satunnaismuuttujana

Siirrytään tämän jälkeen tarkastelemaan koko kassan osalta odotusarvoa, hajontaa ja konfidenssiväliä.

Määritellään satunnaismuuttuja $\underline{S}$:

$$(3.1) \quad \underline{S} = \sum_x \underline{S}^x = \sum_x \sum_i E_{x,i} \underline{S}_i^x$$

Kyseisen satunnaismuuttujan odotusarvo

$$(3.2) \quad E \underline{S} = \sum_x E \underline{S}^x = \sum_x E_x \bar{S}_x$$

Satunnaismuuttujien $\underline{S}_i^x, \underline{S}_j^y$ (kun joko $x \neq y$ tai $i \neq j$) riippumattomuuden perusteella on varianssi:

$$(3.3) \quad D^2 \underline{S} = \sum_x \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2 b_x^2 = \sum_x b_x^2 \sum_{i=1}^{n_x} E_{x,i}^2$$

Epäyhtälön (2.5) perusteella on voimassa epäyhtälö

$$(3.4) \quad D^2 \underline{S} \geq \sum_x \frac{b_x^2 E_x^2}{n_x}$$

ja varianssi saavuttaa minimiarvonsa, kun jokaisessa ikäryhmässä x ovat ko. ikäryhmän sisällä rahastoidut eläkkeet yhtäsuuria.

(Ikäryhmien x ja y , kun $x \neq y$, henkilöiden rahastoidut eläkkeet voivat kyllä olla erisuuria).

Koska myös satunnaismuuttuja $\underline{S}$ on keskeisen raja-arvoväittämän mukaan asympotoottisesti normaalin parametrein (ES, D^2S) saadaan satunnaismuuttujan $\underline{S}$ konfidenssiväli lausekkeesta

$$P \left\{ \left| \frac{\underline{S} - ES}{D \underline{S}} \right| < a_\varepsilon \right\} = 1 - \varepsilon$$

ja

$$(3.5) \quad ES - a_\varepsilon \sqrt{\sum_x b_x^2 \sum_i E_{x,i}^2} < \underline{S} < ES + a_\varepsilon \sqrt{\sum_x b_x^2 \sum_i E_{x,i}^2}$$

Jos ikäryhmien sisällä rahastoidut eläkkeet ovat keskenään yhtäsuuria saa konfidenssiväli muodon:

$$(3.6) \quad ES - a_\varepsilon \sqrt{\sum_x \frac{b_x^2 E_x^2}{n_x}} < \underline{S} < ES + a_\varepsilon \sqrt{\sum_x \frac{b_x^2 E_x^2}{n_x}}$$

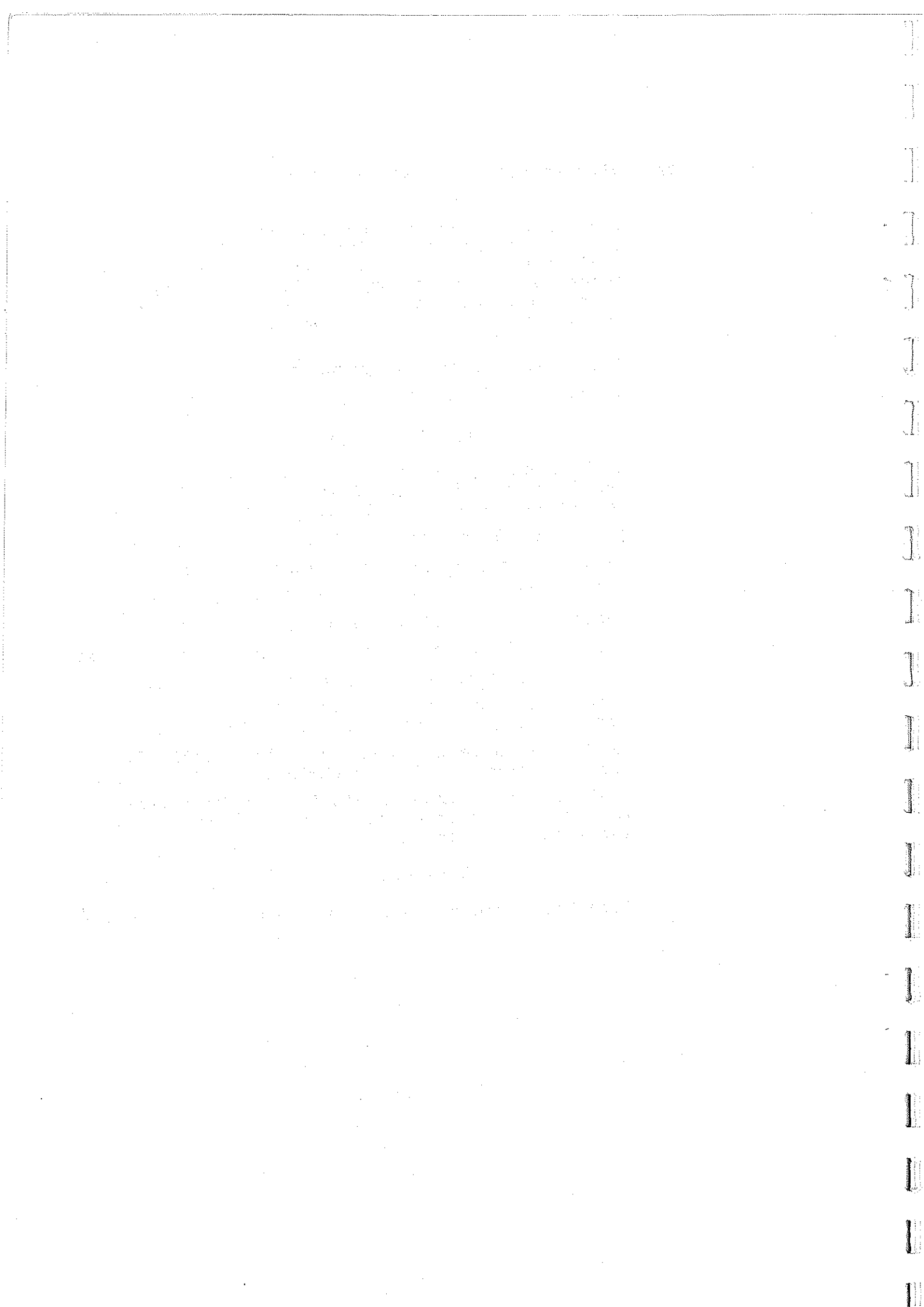
Lausekkeen (3.6) konfidenssiväli on aina "suppeampi" kuin (3.5) määrittämä konfidenssiväli.

E s i m e r k k i

Seuraavalla sivulla olevaan taulukkoon 3.1 on laskettu sellaisen eläkekassan, jossa vain 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60 ja 65 vuotiaita henkilöitä, vastaisten vanhuuseläkkeiden pääoma-arvo, sen hajonta ja merkitsevyystasoa $1 - \varepsilon = 0,95$ vastaavat konfidenssivälit. Konfidenssivälit ovat (2.8):n ja (3.6):n mukaiset "kapeammat" konfidenssivälit. Taulukkoon on merkitty kussakin ikäryhmässä henkilöiden lukumäärä (n_x), ikäryhmän pääoma-arvo hajontineen ja konfidenssiväleineen. Korkoutuvuutena on $\delta = \ln 1.05$ ja kuolleisuuksina laskuperustemalli -1962 kuolleisuudet. Eläkeikä $w = 65$ v. (Seuraavan sivun taulukon ikäryhmä 65 tulee käsittää ryhmäksi, joka lähiaikana täyttää 65 vuotta ja siirtyy eläkkeelle).

T A U L U K K O 3.1

X	n_x	E_x	$ES_x^x = E_x \bar{S}_x$	$D^2 S_x^x$	DS_x^x	Konfidenssiväli
30	220	3 000	4 022	37 240	193.0	3 644 - 4 400
35	210	25 000	43 015	4 390 476	2 095	38 909 - 47 121
40	150	100 000	221 560	158 833 333	12 603	196 858 - 246 262
45	150	350 000	1 003 940	3 118 523 333	55 844	894 486 - 1 113 394
50	110	550 000	2 060 355	16 638 050 000	128 989	1 807 537 - 2 313 173
55	60	550 000	2 728 715	46 982 787 500	216 755	2 303 876 - 3 153 554
60	50	500 000	3 360 050	67 616 000 000	260 030	2 850 392 - 3 869 708
65	6	30 000	283 125	2 406 135 000	49 052	186 983 - 379 267
Koko kassa	956	2 108 000	9 704 782	136 924 756 882	370 033	8 979 518 - 1 043 046



III.2 Uudet jäsenet

Kun rajoituksesta (a) on edelläkuvatuilla tavalla luovuttu, siirrytään tarkastelemaan rajoitusta (b).

Tarkastellaan tilannetta per 31.12. v_t+1 . Olkoon ikäryhmään I (joiden syntymävuosi $v(s)$) vuonna v_t+1 palvelukseen tulleiden yhteenlaskettu tavoite-eläke

$$E_{u_1}^T(v_t+1)$$

Näistä johtuva rahastoitu eli ansaittu eläke (oletetaan, että kaikki ovat tulleet kassan jäseneksi 1.1. v_t+1) on

$$(2.1) \quad E_{u_1}^R(v_t+1) = \frac{1}{v(s)+w-v_t} E_{u_1}^T(v_t+1).$$

Ikäryhmän I (uudet jäsenet mukaanluettuna) tarkkaan laskettu rahastoitu eläke

$$(2.2) \quad E^R(v_t+1) = E_v^R(v_t+1) + E_{u_1}^R(v_t+1).$$

Jos uusien (joulukuun) palkkasumma on $100h_1$ % vanhojen palkkasummasta vuonna v_t+1 , on

$$(2.3) \quad E_{u_1}^T(v_t+1) \leq h_1 \times E_v^T(v_t+1) = h_1(1+k_1)E_v^T(v_t)$$

Kyseinen epäyhtälö seuraa siitä, että mitä korkeammassa iässä kassan jäsenyys alkaa sitä pienemmäksi tavoite eläkkeen osuus jää kassan sääntöjen mukaisesta täydestä eläkkeestä. Edellisestä epäyhtälöstä seuraa

$$(2.4) \quad E_{u_1}^R(v_t+1) \leq \frac{1}{v(s)+w-v_t} h_1(1+k_1)E_v^T(v_t)$$

Osoitetaan, että

$$\frac{1}{v(s)+w-v_t} \leq \frac{v_t+1-v(j,v_t)}{v(s)+w-v(j,v_t)}$$

missä $v(j, v_t)$ on luvun I.1 kaavan (1.8) ikäryhmä I koskeva keskimääräinen jäseneksituloikä, joten $v_t > v(j, v_t)$.

Merkitään $v_t - v(j, v_t) = a > 0$. Tällöin

$$\frac{v_t + 1 - v(j, v_t)}{v(s) + w - v(j, v_t)} = \frac{1 + a}{v(s) + w - v_t + a} \geq \frac{1}{v(s) + w - v_t}$$

aina kun $v(s) + w - v_t > 1$.

Sijoittamalla tulos epäyhtälöön (2.4) saadaan

$$E_{u_1}^R(v_{t+1}) \leq \frac{v_t + 1 - v(j, v_t)}{v(s) + w - v(j, v_t)} h_1(1 + k_1) E_v^T(v_t),$$

mistä luvun I.1 epäyhtälön (1.8) perusteella seuraa ($k=1$)

$$(2.5) \quad E_{u_1}^R(v_{t+1}) \leq h_1 E_v^R(v_t + k)$$

Ylläolevan epäyhtälön ja yhtälön (2.2) perusteella pätee:

$$(2.6) \quad E_v^R(v_{t+1}) \leq E^R(v_{t+1}) \leq (1 + h_1) E_v^R(v_{t+1})$$

Jos $v_t + 1 - v(s) = x$ on ikäryhmän I vanhuuseläkevastuun odotusarvo (luvun II.2 merkintöjä käyttäen)

$$(2.7) \quad E^R(v_{t+1}) \bar{S}_x$$

Jos ikäryhmän henkilöiden (uudet mukaanluettuna) lukumäärä on n_x on luvun II konfidenssiväli (2.8).

$$(2.8) \quad E^R(v_{t+1}) \bar{S}_x - \frac{a_{\varepsilon} \sigma_x E^R(v_{t+1})}{\sqrt{n_x}}, \quad E^R(v_{t+1}) \bar{S}_x + \frac{a_{\varepsilon} \sigma_x E^R(v_{t+1})}{\sqrt{n_x}}.$$

Osamäärä

$$100 \frac{\frac{a_{\varepsilon} \delta_x E^R(v_t+1)}{\sqrt{n_x}}}{E^R(v_t+1) \bar{S}_x} = 100 \frac{a_{\varepsilon} \delta_x}{\bar{S}_x \sqrt{n_x}}$$

ilmoittaa prosentteina virheen, joka rahastoidun eläkkeen ennusteessa voi olla, jotta ennuste vielä sisältyisi ko. konfidenssiväliin. Määritellään ikäryhmän I rahastoidun eläkkeen ennusteeksi

$$(2.9) \quad E^R(v_t+1) = (1 + \frac{1}{2}h_1)E_v^R(v_t+1)$$

Epäyhtälön (2.6) perusteella ko. ennuste poikkeaa korkeintaan $50h_1$ %:ia tarkasti lasketusta rahastoidusta eläkkeestä. Näin määritelty ennuste on konfidenssivälin (2.8) sisällä, jos

$$(2.10) \quad 100h_1 \leq \frac{200 a_{\varepsilon} \delta_x}{\bar{S}_x \sqrt{n_x}} \quad (\text{ehto: } 50h_1 \leq 100 \frac{a_{\varepsilon} \delta_x}{\bar{S}_x \sqrt{n_x}})$$

Jos h_1 täyttää yllämainitun ehdon, ennuste (2.9) sisältyy luvun II.2 konfidenssiväliin (2.7), joka on ikäryhmän I vanhuuseläkevastuun konfidenssiväli.

Seuraavan sivun esimerkeissä on laskettu ko. ehtoepäyhtälön oikean puolen arvoja.

E s i m e r k i t

Korkoutuvuudella $\delta = \ln 1.05$ on laskuperustemaal-
li-1962 mukaiset merkitsevyystasoa $1-\varepsilon = 0.95$
vastaavat epäyhtälön (210) oikean puolen arvot
laskettu oheiseen taulukkoon ikäryhmittäin
(ks. luvun II.1 taulukko 1.1).

T A U L U K K O

x	$\frac{200a_{\varepsilon}\delta_x}{\bar{S}_x \sqrt{n_x}}$	
	$n_x=10; x=20, \dots, 65$	$n_x=100; x=20, \dots, 65$
20	89.1 %	28.2 %
25	88.6 %	28.0 %
30	88.2 %	27.9 %
35	87.5 %	27.7 %
40	86.4 %	27.3 %
45	84.4 %	26.7 %
50	81.4 %	25.7 %
55	76.3 %	24.1 %
60	67.8 %	21.5 %
65	52.6 %	16.6 %

$$a_{\varepsilon}=1.96; \quad 200a_{\varepsilon}=392; \quad \sqrt{10}=3.16227$$

Siirrytään tämän jälkeen tarkastelemaan tilannetta koko kassan vastaisen vanhuuseläkeen suhteen.

Jos edellä johdettu ehtoepäyhtälö (2.10) on voimassa, sisältyy ikäryhmän I vastaisen vanhuuseläkevastuun kaavan (2.9) mukainen ennuste kyseisen ikäryhmän vanhuuseläkevastuun konfidenssiväliin. Vaikka kaikkien ikäryhmien ennusteet sisältyisivät ao. konfidenssiväliin ei vielä tiedetä sisältyykö ennusteiden summa koko kassan vanhuuseläkevastuun konfidenssiväliin.

Jakson II konfidenssivälille (3.5) johdettiin "suppeampi" konfidenssiväli (3.6). Johdetaan aluksi konfidenssiväliä (3.6) vieläkin suppeampi konfidenssiväli. Etsitään lausekkeen

$$\sum_x \frac{\delta_x^2 E_x^2}{n_x}$$

minimiarvo ehdolla

$$\sum_x E_x = E.$$

Merkitään

$$\frac{\delta_x^2}{n_x} = a_i; E_x = z_i; \quad E = Z$$

jolloin etsitään lausekkeen

$$\sum_i a_i z_i^2$$

minimiä ehdolla

$$\sum_i z_i = Z,$$

joka saadaan, kun ratkaistaan yhtälöryhmä

$$\begin{cases} 2a_1 z_1 - \lambda = 0 \\ 2a_n z_n - \lambda = 0 \\ z_1 + z_2 + \dots + z_n = Z \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{\lambda}{2a_1} \\ \dots \\ z_n = \frac{\lambda}{2a_n} \end{array} \right.$$

$$Z = \sum_i z_i = \frac{\lambda}{2} \sum_i \frac{1}{a_i} \quad \text{josta } \lambda = \frac{2Z}{\sum_i \frac{1}{a_i}}$$

Tällöin

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = \frac{Z}{a_1 \sum_i \frac{1}{a_i}} \\ \dots \\ z_n = \frac{Z}{a_n \sum_i \frac{1}{a_i}} \end{array} \right.$$

ja haettu minimiarvo

$$\begin{aligned} \min \sum_i a_i z_i^2 &= \frac{a_1 Z^2}{a_1^2 \left(\sum_i \frac{1}{a_i} \right)^2} + \dots + \frac{a_n Z^2}{a_n^2 \left(\sum_i \frac{1}{a_i} \right)^2} \\ &= \frac{Z^2}{\left(\sum_i \frac{1}{a_i} \right)^2} \left(\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n} \right) \\ &= \frac{Z^2}{\sum_i \frac{1}{a_i}}. \end{aligned}$$

Tällöin

$$(2.11) \quad \min_x \sum_x \frac{\delta_x^2 E_x^2}{n_x} = \frac{E^2}{\sum_x \frac{n_x}{\delta_x^2}} \geq \frac{E^2}{\frac{1}{\delta^2} \sum_x n_x} = \frac{\delta^2 E^2}{n}$$

$$\text{missä } \delta^2 = \min_x \delta_x^2.$$

Luvun II (3.6) mukaisista konfidenssiväleistä "suppein" on väli

$$(2.12) \quad ES - a_\epsilon \frac{\sum E_x}{\sqrt{\sum_x \frac{n_x}{\delta_x^2}}}, \quad ES + a_\epsilon \frac{\sum E_x}{\sqrt{\sum_x \frac{n_x}{\delta_x^2}}}$$

Epäyhtälön (2.11) perusteella tiedetään, että jos koko kassan vastaisen vanhuuseläkkeen vastuun ennuste on välissä

$$(2.13) \quad ES - a_\epsilon \frac{\delta \sum E_x}{\sqrt{n}}, \quad ES + a_\epsilon \frac{\delta \sum E_x}{\sqrt{n}}$$

sisältyy ko. ennuste tällöin myös väliin (2.12).

Esimerkki Valitaan esimerkiksi luvun II taulukon 3.1 eläkekassa.

$$\sum_x E_x = 2\,108\,000$$

$$\sqrt{n} = \sqrt{956} = 30.92$$

$$a_{\xi} = 1.96$$

$$\delta = \min \delta_x = \delta_{30} = 0.9541$$

$$241.68 + 142.35 + 62.96 + 39.88 + 18.18 + 6.44 + 3.70 + 0.37 = 514.96$$

$$\sqrt{\sum_x \frac{n_x}{\delta_x^2}} = \sqrt{514.96} = 22.7$$

Kaavan (2.12) mukainen väli on
(9 522 770, 9 886 794)

ja kaavan (2.13) mukainen väli on
(9 577 290, 9 832 270).

Merkitään ikäryhmän I, johon ikäryhmään kuuluvat olkoot vuonna v_t+1 x -ikäisiä, kaavan (2.9) mukaista rahastoidun eläkkeen ennustetta

$$E_x^R(v_t+1) = \text{kaavan (2.9) } E_x^{R'}(v_t+1)$$

Tällöin on koko kassan vastaisen vanhuuseläkkeen vakuutusmaksuvastuun ennuste

$$(2.14) \quad \sum_x E_x^{R'}(v_t+1) \bar{S}_x$$

Merkitään ikäryhmän I kaavan (2.7) mukaista vanhuuseläkevastuun odotusarvoa

$$(2.15) \quad E_x^R(v_t+1) \bar{S}_x = \text{kaavan (2.7) } E_x^R(v_t+1)$$

Tällöin koko kassan vastaisen vanhuuseläkevastuun odotusarvo on

$$(2.16) \quad ES = \sum_x E_x^R(v_t+1) \bar{S}_x$$

Tarkastellaan vastaisen vanhuuseläkevastuun odotusarvon ja ennusteen erotuksen itseisarvoa siinä erikoistapauksessa, että jokaisessa ikäryhmässä uusien palkkasumma on $100h_1$ % vanhojen palkkasummasta.

$$(2.17) \quad \Delta = \left| \sum_x E_x^R(v_t+1) \bar{S}_x - \sum_x E_x^{R'}(v_t+1) \bar{S}_x \right|$$

Tällöin

$$(2.18) \quad \Delta \leq \sum_x \bar{S}_x \left| E_x^R(v_t+1) - E_x^{R'}(v_t+1) \right|$$

Epäyhtälön (2.6) perusteella tiedetään että

$$\sum_x \bar{S}_x \left| E_x^R(v_t+1) - E_x^{R'}(v_t+1) \right| \leq \sum_x \bar{S}_x \frac{1}{2} h_1 E_x^R(v_t+1)$$

Ylläolevan ja epäyhtälön (2.18) perusteella pätee

$$(2.19) \quad \Delta \leq \frac{1}{2}h_1 \sum_x E_x^R(v_t+1) \bar{S}_x.$$

Ennuste (2.14) poikkeaa yhtälön (2.16) mukaisesta odotusarvosta korkeintaan $50h_1$ %:ia.

Pyritään selvittämään sisältyykö ennuste (2.14) konfidenssiväleihin (2.12) tai (2.13).

Suhde

$$(2.20) \quad 100 \frac{a_\varepsilon \delta \sum_x E_x}{ES\sqrt{n}} = 100 \frac{a_\varepsilon \delta \sum_x E_x^R(v_t+1)}{\sum_x E_x^R(v_t+1) \bar{S}_x \sqrt{n}}$$

ilmoittaa montako % ennuste voi korkeintaan poiketa odotusarvosta, jotta se vielä sisältyisi konfidenssiväliin (2.13). Johdettaessa ikäryhmittäisille konfidenssivälille vastaavaa lauseketta rahastoidut eläkkeet (nämähän eivät ole tiedossa) supistuivat. Ylläolevasta lausekkeesta ne eivät supistu. Johdetaan epäyhtälö ylläolevalle lausekkeelle. Yhtälön (2.8) ja epäyhtälön (2.6) perusteella

$$100 \frac{a_\varepsilon \delta \sum_x E_x^R(v_t+1)}{\sum_x E_x^R(v_t+1) \bar{S}_x \sqrt{n}} \geq 100 \frac{a_\varepsilon \delta (1-\frac{1}{2}h_1) \sum_x E_x^{R'}(v_t+1)}{(1+\frac{1}{2}h_1) \sum_x E_x^{R'}(v_t+1) \bar{S}_x \sqrt{n}}$$

Jos epäyhtälö

$$(2.21) \quad 100h_1 \leq \frac{200a_\varepsilon \delta (1-\frac{1}{2}h_1) \sum_x E_x^{R'}(v_t+1)}{(1+\frac{1}{2}h_1) \sum_x E_x^{R'}(v_t+1) \bar{S}_x \sqrt{n}}$$

pätee on ennuste konfidenssivälin (2.13) sisällä. Vastaava lauseke voitaisi johtaa myös konfidenssivälille (2.12).

Yhteenveto

Tässä luvussa olevan esimerkin perusteella lausekkeen (2.20) suhde on suuruusluokkaa

$$100 \frac{127\,491}{9\,704\,782} = 1.3\% \quad \begin{array}{l} \text{(ohjeisessa } E_v^R(v_{t+1}) \\ \text{on korvattu} \\ E_x^R(v_t)\text{:llä)} \end{array}$$

Tällöin on epäyhtälön (2.21) oikea puoli "suuruusluokkaa: pienempi kuin 2.6 %". Saman esimerkin perusteella kaavan (2.13) mukaisesta konfidenssivälistä voidaan laskea vastaava suhde

$$100 \frac{9\,704\,782 - 9\,522\,770}{9\,704\,782} = 1.9\%$$

Jos konfidenssivälistä (2.13) lähtien johdetaisiin epäyhtälön (2.21) vastaava lauseke, olisi sen oikea puoli "suuruusluokkaa: pienempi kuin 3.8 %".

Kun epäyhtälö (2.21) johdettiin tehtiin olettaus, että kaikissa ikäryhmissä uusien palkkasumma oli $100h_1$ % vanhojen palkkasummasta.

Epäyhtälön (2.21) asettama rajoitus saattaa edelläsanotun perusteella olla käytännössä suhteellisen "kova" rajoitus. Lasketaan vielä luvun II.3 esimerkissä olevasta konfidenssivälistä suhde

$$100 \frac{9\,704\,782 - 8\,979\,518}{9\,704\,782} = 7.5\%.$$

Koska (2.14) mukainen ennuste poikkeaa odotusarvosta korkeintaan $50h_1$ %:lla, voisi $100h_1$ % olla ko. esimerkin valossa 15 % suuruusluokkaa.

Ikäryhmäkohtainen tarkastin (2.10) tuntuu mielekkäältä, kunhan vain a_ε valitaan tarpeeksi pieneksi, jotta koko kassan vanhuuseläkevastuun ennuste (2.14) sisältyisi "riittävällä varmuudella" sen odotusarvon konfidenssiväliin (luvun II.3

väliin (3.6) tai (3.5)) merkitsevyystasolla ϵ' . Tällöin ϵ ja ϵ' :n keskinäinen suhde tulisi saada selville. Joka tapauksessa ϵ ja ϵ' tulee valita siten, että $1 - \epsilon < 1 - \epsilon'$. Jos jossain ikäryhmässä ehto (2.10) ei olisi voimassa tulee ikäryhmän rahastoidut eläkkeet laskea henkilö henkilöltä.

Käytännön vakuutusmatemaattisia laskelmia ajatellen tulisi tarkastimen olla (2.21)-tyyppinen yksinkertaisuutensa vuoksi. Palkkojen nousun erittely palkankorotuksiin ja uusien henkilöiden palkkasummaan ja vielä ikäryhmittäin ei käytännössä ehkä ole mahdollista (ainakaan kaikissa yrityksissä).

