SATUNNAISMUUTTUJAN VINOUS JA HUIPUKKUUS;
ADDITIIVISUUS JA MIKSATUT JAKAUMAT

SHV-harjoitustyö
Marika Vilska

I VINOUS JA HUIPUKKUUS

I.1 Kumulantit

Kumulantit määräävät todennäköisyysjakauman yksikäsitteisesti, mikäli kumulanttigeneroiva funktio on olemassa. Jakaumia approksimoitaessa voidaan joskus, jos parempaa tietoa ei ole saatavissa, tyytyä siihen, että tunnetaan kaksi ensimmäistä kumulanttia. Näiden avulla voidaan laskea jakauman keskiarvo ja varianssi. Usein kuitenkin tarvitaan vielä tieto jakauman vinoudesta, joka lasketaan kolmannen kumulantin avulla.

Olkoon X satunnaismuuttuja, jolla on momenttigeneroiva funktio $M(s)=E(e^{sX})$. Tällöin X:n kumulanttigeneroiva funktio on

$$\Psi(s) = \ln M(s).$$

Kumulantit $\varkappa_j$, $j = 1,2,3,\ldots$, määritellään funktion Ψ j. derivaatan avulla seuraavasti:

$$\varkappa_j = \Psi^{(j)}(0).$$

Derivoidaan kaavaa $\Psi(s) = \ln M(s)$ kahdesti. Saadaan

$$\Psi^{(1)}(s) = \frac{M^{(1)}(s)}{M(s)}$$

ja

$$\Psi^{(2)}(s) = \frac{M^{(2)}(s)M(s) - [M^{(1)}(s)]^2}{[M(s)]^2}$$

Sijoitetaan yllä oleviin kaavoihin s=0 ja käytetään lisäksi tietoa, että $M(0) = 1$, jolloin saadaan

$$\varkappa_1 = M^{(1)}(0) = EX$$

ja

$$\varkappa_2 = M^{(2)}(0) - [M^{(1)}(0)]^2 = EX^2 - (EX)^2 = VarX.$$

Olkoot $X_1, X_2, \ldots, X_k$ toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia, joita vastaavat momenttigeneroivat funktiot ovat $M_1, M_2, \ldots, M_k$. Tällöin summan $\sum_{i=1}^{k} X_i$ momenttigeneroiva funktio on $M = \prod_{i=1}^{k} M_i$. Niinpä, kun satunnaismuuttujan X_i, $(i = 1, 2, \ldots, k)$, kumulanttigeneroiva funktio on Ψ_i, $\Psi_i = \ln M_i$, summan $\sum_{i=1}^{k} X_i$ kumulanttigeneroiva funktio on

$$\Psi = \ln (\prod_{i=1} M_i) = \sum_{i=1} \ln M_i = \sum_{i=1} \Psi_i .$$

Toisistaan riippumattomien satunnaismuuttujien kumulanttigeneroivien funktioiden additiivisuudesta seuraa, että niitä vastaavat kumulantitkin ovat additiivisia:

$$\varkappa_j (\sum_{i=1}^{k} X_i) = \Psi^{(j)}(0) = (\sum_{i=1}^{k} \Psi_i)^{(j)}(0) = (\sum_{i=1}^{k} \Psi_i^{(j)})(0)$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \Psi_i^{(j)}(0) = \sum_{i=1}^{k} \varkappa_j(X_i).$$

I.2 Vinous ja huipukkuus

Satunnaismuuttujan X vinous γ ja huipukkuus γ_2 voidaan määritellä kumulanttien avulla:

$$\gamma = \frac{\varkappa_3}{\varkappa_2^{3/2}} \quad \text{ja} \quad \gamma_2 = \frac{\varkappa_4}{\varkappa_2^2} .$$

Tarkastellaan esimerkiksi normaalijakauman vinoutta ja huipukkuutta. Koska normaalisti jakautuneen satunnaismuuttujan tiheysfunktio

$f(x)$ on $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$, sen momenttigeneroiva funktio $M(s)$ on

$$M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= e^{\frac{s^2 \cdot \sigma^2}{2}+\mu s} \int_{\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2(\mu+s\sigma^2)x + (\mu+s\sigma^2)^2)} dx$$

$$= e^{\frac{s^2 \cdot \sigma^2}{2}+\mu s}$$

ja kumulanttigeneroiva funktio $\Psi(s)$ on

$$\Psi(s) = \frac{s^2 \cdot \sigma^2}{2}+\mu s.$$

Edellä olevasta kaavasta nähdään, että normaalijakauman kumulantit ovat kolmannesta kumulantista alkaen nollia. Tästä seuraa, että normaalijakauman vinous ja huipukkuus ovat nollia.

I.3 Satunnaismuuttujan lineaarimuunnoksen vinous ja huipukkuus

Olkoon X satunnaismuuttuja, jonka vinous on γ ja huipukkuus on γ_2. Tutkitaan satunnaismuuttujan X lineaarimuunnoksen aX + b vinoutta ja huipukkuutta, kun a on positiivinen vakio.

Lineaarimuunnoksen momenttigeneroiva funktio on

$$M_{aX+b}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{asx} e^{bs} dF(x) = e^{bs} M_X(as).$$

Niinpä lineaarimuunnoksen kumulanttigeneroiva funktio on

$$\Psi_{aX+b}(s) = \ln M_{aX+b}(s) = bs + \Psi_X(as)$$

ja sen kumulantit ovat

$$\varkappa_j(aX+b) = a^j \varkappa_j(X), \qquad j = 2,3,4,\ldots \quad .$$

Lasketaan lineaarimuunnoksen vinous ja huipukkuus näin saatujen kumulanttien avulla.

$$\gamma(aX+b) = \frac{\varkappa_3(aX+b)}{\varkappa_2(aX+b)^{3/2}} = \frac{a^3\cdot\varkappa_3(X)}{a^3\cdot\varkappa_2(X)^{3/2}} = \gamma(X)$$

ja

$$\gamma_2(aX+b) = \frac{\varkappa_4(aX+b)}{\varkappa_2(aX+b)^2} = \frac{a^4\cdot\varkappa_4(X)}{a^4\cdot\varkappa_2(X)^2} = \gamma_2(X).$$

Edellä olevista kaavoista nähdään, että negatiivisilla vakion a arvoilla lineaarimuunnoksen vinous on $-\gamma(X)$, mutta huipukkuus on edelleen $\gamma_2(X)$.

I.4 Riippumattomien satunnaismuuttujien summan vinous ja huipukkuus

Olkoot satunnaismuuttujat X_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, keskenään riippumattomia ja olkoon satunnaismuuttujan X_i vinous $\gamma(X_i)$ ja huipukkuus $\gamma_2(X_i)$. Olkoon $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$. Lasketaan nyt, mikä on satunnaismuuttujan X vinous ja huipukkuus.

Riippumattomien satunnaismuuttujien kumulanttien additiivisuudesta seuraa, että

$$\varkappa_3(X) = \sum_{i=1}^{k}\varkappa_3(X_i) \quad \text{ja} \quad \varkappa_4(X) = \sum_{i=1}^{k}\varkappa_4(X_i).$$

Lisäksi, koska $\sigma_X^2 = \varkappa_2(X)$, saadaan

$$\gamma(X) = \frac{\varkappa_3(X)}{\sigma_X^3} = \frac{\sum \varkappa_3(X_i)}{\sigma_X^3} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sigma^3(X_i) \cdot \frac{\varkappa_3(X_i)}{\sigma^3(X_i)}}{\sigma_X^3} = \frac{\sum \sigma^3(X_i)\gamma(X_i)}{\sigma_X^3}$$

ja

$$\gamma_2(X) = \frac{\varkappa_4(X)}{\sigma_X^4} = \frac{\sum \varkappa_4(X_i)}{\sigma_X^4} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \sigma^4(X_i) \cdot \frac{\varkappa_4(X_i)}{\sigma^4(X_i)}}{\sigma_X^4} = \frac{\sum \sigma^4(X_i)\gamma_2(X_i)}{\sigma_X^4} .$$

Olkoot nyt keskenään riippumattomat satunnaismuuttujat X_i, $i = 1,2, \ldots ,k$, samoin jakautuneita. Olkoon yhteisen jakauman j. kumulantti $\varkappa_j$, vinous γ ja huipukkuus γ_2. Summan $X = \sum_{i=1}^{k} X_i$ vinoudelle ja huipukkuudelle saadaan suoralla laskulla yhtälöt

$$\gamma(X) = \frac{k\varkappa_3}{(k\varkappa_2)^{3/2}} = k^{-1/2}\gamma$$

ja

$$\gamma_2(X) = \frac{k\varkappa_4}{(k\varkappa_2)^2} = \frac{1}{k}\gamma_2.$$

Sekä $\gamma(X)$ että $\gamma_2(X)$ lähestyvät nollaa, kun k kasvaa rajatta.

I.5 Satunnaissumman vinous ja huipukkuus

Olkoot muuttujat k ja Z_i, $i = 1,2,\ldots,$ satunnaismuuttujia. Satunnaissumma eli yhdistetty satunnaismuuttuja X on

$$X = \sum_{i=1}^{k} Z_i .$$

Olkoon X yhdistetty satunnaismuuttuja. Jos k=k ja satunnaismuuttujat Z_i, i=1,2,...k, ovat keskenään riippumattomia ja samoin jakautuneita muuttujan X ehdollinen momenttigeneroiva funktio on

$$M(s|k=k) = M_{Z_1+Z_2+...+Z_k}(s) = M_Z(s)^k ,$$

missä M_{Z_i}, i= 1,2,...,k, on satunnaismuuttujan Z_i momenttigeneroiva funktio. Satunnaismuuttujan X momenttigeneroiva funktio $M_X(s)$ saadaan vastaavien ehdollisten momenttigeneroivien funktioiden painotettuna keskiarvona:

$$M_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot M(s|k=k) = \sum_{k=1}^{\infty} p_k \cdot M_Z(s)^k ,$$

missä p_k on $P(k=k)$. Tämä voidaan kirjoittaa muotoon

$$M_X(s) = E[M(s|k)] \quad = \quad E[M_Z(s)^k] = E[e^{k\cdot \ln M_Z(s)}]$$

$$= M_k[\ln M_Z(s)] = M_k[\Psi_Z(s)].$$

Ottamalla puolittain logaritmit yllä olevasta yhtälöstä saadaan yhdistetyn muuttujan kumulanttigeneroiva funktio $\Psi_X(s)$:

$$\Psi_X(s) = \ln M_X(s) = \ln M_k[\Psi_Z(s)] = \Psi_k[\Psi_Z(s)].$$

Oletetaan, että satunnaismuuttuja k on Poisson(n) -jakautunut, jolloin $\Psi_k(s) = n\cdot(e^s-1)$. Sijoitetaan tämä edellä olevaan yhtälöön.

$$\Psi_X(s) = n\cdot(e^{\Psi_Z(s)} - 1) = n\cdot M_Z(s) - n.$$

Tässä tapauksessa satunnaismuuttujan X kumulantit toteuttavat yhtälön

$$\varkappa_j(X) = \Psi_X^{(j)}(0) = n\cdot M_Z^{(j)}(0) = n\cdot a_j.$$

Vinouden ja huipukkuuden lausekkeiksi saadaan siis

$$\gamma(X) = \frac{\varkappa_3(X)}{(\varkappa_2(X))^{3/2}} = \frac{n\cdot a_3}{(n\cdot a_2)^{3/2}} = n^{-1/2}\cdot\frac{a_3}{a_2^{3/2}}$$

$$\gamma_2(X) = \frac{\varkappa_4(X)}{(\varkappa_2(X))^2} = \frac{n\cdot a_4}{(n\cdot a_2)^2} = \frac{a_4}{n\cdot a_2^2}\ .$$

Oletetaan sitten, että satunnaismuuttujan k jakauma on miksattu Poisson-jakauma. Miksatulla Poisson -jakaumalla tarkoitetaan Poisson(nq)-jakaumaa, missä satunnaismuuttuja $q > 1$ on ns. struktuurimuuttuja, jonka odotusarvo $Eq = 1$. Tällöin muuttujan k momenttigeneroiva funktio on

$$\begin{aligned} M(s) &= E[M(s\,|\,q)] = E[e^{nq(e^s-1)}] = E[e^{q(n(e^s-1))}] \\ &= M_q[n(e^s-1)] \end{aligned}$$

ja sen kumulanttigeneroiva funktio on $\Psi_q[n(e^s-1)]$. Tällöin satunnaissumman X kumulanttigeneroiva funktio on

$$\Psi_X(s) = \Psi_q[nM_Z(s) - n].$$

Derivoimalla edellä olevaa lauseketta saadaan

$$\Psi_X^{(1)}(s) = nM_Z^{(1)}(s)\Psi_q^{(1)}[nM_Z(s)-n]$$

$$\Psi_X^{(2)}(s) = nM_Z^{(2)}(s)\Psi_q^{(1)}[nM_Z(s)-n] + [nM_Z^{(1)}(s)]^2\Psi_q^{(2)}[nM_Z(s)-n]$$

$$\begin{aligned} \Psi_X^{(3)}(s) &= nM_Z^{(3)}(s)\Psi_q^{(1)}[nM_Z(s)-n] \\ &+ 3n^2M_Z^{(1)}(s)M_Z^{(2)}(s)\Psi_q^{(2)}[nM_Z(s)-n] \\ &+ n^3[M_Z^{(1)}(s)]^3\Psi_q^{(3)}[nM_Z(s)-n] \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \Psi_X^{(4)}(s) &= nM_Z^{(4)}(s)\Psi_q^{(1)}[nM_Z(s)-n] \\ &+ n^2(4M_Z^{(1)}(s)M_Z^{(3)}(s)+3[M_Z^{(2)}(s)]^2)\Psi_q^{(2)}[nM_Z(s)-n] \\ &+ 6n^3[M_Z^{(1)}(s)]^2M_Z^{(2)}(s)\Psi_q^{(3)}[nM_Z(s)-n] \\ &+ n^4[M_Z^{(1)}(s)]^4\Psi_q^{(4)}[nM_Z(s)-n]. \end{aligned}$$

Tehdään yllä oleviin derivaattoihin sijoitus $s = 0$:

$$\sigma_X^2 = \varkappa_2(X) = na_2 + n^2m^2\varkappa_2(q) = na_2 + n^2m^2\sigma_q^2$$

$$\varkappa_3(X) = na_3 + 3n^2ma_2\sigma_q^2 + n^3m^3\varkappa_3(q)$$ ja

$$\varkappa_4(X) = na_4 + n^2(4ma_3 + 3a_2^2)\sigma_q^2 + 6n^3m^2a_2\varkappa_3(q) + n^4m^4\varkappa_4(q)$$

Yhdistetyn miksatun Poisson-jakautuneen satunnaismuuttujan X vinous ja huipukkuus ovat

$$\gamma_X = \frac{na_3 + 3n^2ma_2\sigma_q^2 + n^3m^3\gamma_q\sigma_q^3}{\sigma_X^3}$$

$$\gamma_2(X) = \frac{na_4 + n^2(4ma_3+3a_2^2)\sigma_q^2 + 6n^3m^2a_2\gamma_q\sigma_q^3 + n^4m^4\gamma_2(q)\sigma_q^4}{\sigma_X^4}.$$

II MIKSATUISTA JAKAUMISTA

Määritelmä: Olkoon satunnaismuuttujilla X_i kertymäfunktiot F_i. Kertymäfunktiota F sanotaan miksatuksi kertymäfunktioksi, jos

$$F = \sum a_i F_i \ ,$$

missä painot a_i ovat positiivisia ja toteuttavat yhtälön $\sum a_i = 1$. Vastaavaa todennäköisyysjakaumaa kutsutaan miksatuksi jakaumaksi.

Jos miksatun jakauman momenttigeneroiva funktio ja origomomentit ovat olemassa, ne voidaan lausua kertymäfunktioiden F_i momenttigeneroivien funktioiden M_i ja jakaumien i j. origomomenttien α_{ji} avulla:

$$\begin{aligned} M(s) &= Ee^{sX} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} d(\sum a_i F_i(x)) \\ &= \sum a_i \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF_i(x) = \sum a_i M_i(s) \end{aligned}$$

ja

$$\alpha_j = M^{(j)}(0) = \sum a_i M_i^{(j)}(0) = \sum a_i \alpha_{ji} \ .$$

Oletetaan nyt, että jokaisella kertymäfunktiolla F_i on sama odotusarvo μ. Tällöin myös miksatun jakauman keskusmomentit μ_k voidaan lausua kertymäfunktioiden F_i keskusmomenttien μ_{ki} avulla, olettaen, että ne ovat olemassa.

$$\begin{aligned} \mu_k &= E(X-EX)^k = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k dF(x) = \sum a_i \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^k \, dF_i(x) \\ &= \sum a_i \, \mu_{ki} \end{aligned}$$

Jos kertymäfunktioiden F_i odotusarvot eivät ole yhtä suuria, keskusmomenttien laskeminen hankaloituu. Lasketaan esimerkiksi miksatun jakauman toinen keskusmomentti aivan yleisessä muodossa:

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \sum a_i \alpha_{2i} - [\sum a_i \alpha_{1i}]^2$$

$$= \sum a_i \alpha_{2i} - \sum a_i^2 \alpha_{1i}^2 - 2 \sum_{j<i} a_i a_j \alpha_{1i} \alpha_{1j} .$$

Oletetaan sitten, että jokaisella kertymäfunktiolla F_i on sama odotusarvo ja hajonta. Tällöin kertymäfunktion F vinous ja huipukkuus ovat kertymäfunktioiden F_i vinouksien γ_i ja huipukkuuksien γ_{2i} yhdistelmiä.

Merkitään kertymäfunktioiden odotusarvoa suureella α_{11} ja varianssia suureella σ_1^2. Koska jokaisella kertymäfunktiolla F_i on sama varianssi ja odotusarvo, myös toinen origomomentti on sama. Merkitään sitä α_{21}:llä.

Todistetaan väite ensin vinoudelle γ:

Lasketaan aluksi kolmas kumulantti.

$$\begin{aligned}
\varkappa_3 &= \alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3 \\
&= \sum a_i \alpha_{3i} - 3 \sum a_i \alpha_{1i} \sum a_j \alpha_{2j} + 2 (\sum a_i \alpha_{1i})^3 \\
&= \sum a_i \alpha_{3i} - 3 \alpha_{11} \alpha_{21} \sum a_i \sum a_j + 2 \alpha_{11}^3 (\sum a_i)^3 \\
&= \sum a_i \alpha_{3i} - 3 \alpha_{11} \alpha_{21} + 2 \alpha_{11}^3 \\
&= \sum a_i (\alpha_{3i} - 3\alpha_{11}\alpha_{21} + 2 \alpha_{11}^3) \\
&= \sum a_i \varkappa_{3i}
\end{aligned}$$

Koska miksatun jakauman varianssi σ^2 saadaan muotoon

$$\sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \alpha_{21} - \alpha_{11}^2 = \sigma_1^2,$$

sen vinous on

$$\gamma = \frac{\varkappa_3}{\sigma^3} = \frac{\sum a_i \varkappa_{3i}}{\sigma_1^3} = \sum \frac{a_i \varkappa_{3i}}{\sigma_i^3} = \sum a_i \gamma_i .$$

Samalla lailla lasketaan huipukkuus γ_2:

$$
\begin{aligned}
\varkappa_4 &= \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2^2 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1^4 \\
&= \sum a_i\alpha_{4i} - 4\sum a_i\alpha_{1i}\sum a_i\alpha_{3i} - 3(\sum a_i\alpha_{2i})^2 \\
&\quad + 12(\sum a_i\alpha_{1i})^2\sum a_i\alpha_{2i} - 6(\sum a_i\alpha_{1i})^4 \\
&= \sum a_i\alpha_{4i} - 4\,\alpha_{11}\sum a_i\alpha_{3i} - 3\alpha_{21}^2 + 12\alpha_{11}^2\alpha_{21} - 6\alpha_{11}^4 \\
&= \sum a_i\,(\alpha_{4i} - 4\,\alpha_{11}\alpha_{3i} - 3\alpha_{21}^2 + 12\alpha_{11}^2\alpha_{21} - 6\alpha_{11}^4) \\
&= \sum a_i\varkappa_{4i}
\end{aligned}
$$

Tästä seuraa, että

$$\gamma_2 = \frac{\varkappa_4}{\sigma^4} = \frac{\sum a_i\varkappa_{4i}}{\sigma_1^4} = \sum \frac{a_i\varkappa_{4i}}{\sigma_i^4} = \sum a_i\gamma_{2i}.$$

Esimerkki: Olkoot $F_1 = F_X$ ja $F_2 = F_{-X}$ satunnaismuuttujien X ja -X kertymäfunktiot. Olkoon miksattu kertymäfunktio muotoa

$$F = \frac{1}{2}(F_1 + F_2).$$

Lasketaan nyt kertymäfunktion F määrittelemän jakauman odotusarvo, varianssi, vinous ja huipukkuus.

Lausutaan ensin kertymäfunktio F_{-X} kertymäfunktion F_X avulla:

$$F_{-X}(t) = P(-X \le t) = P(X \ge -t) = 1 - P(X < -t) = 1 - F_X(-t),$$

joten kertymäfunktion F määrittelemä jakauma on symmetrinen.

Lasketaan sitten kummankin kertymäfunktion momenttigeneroivat funktiot ja origomomentit:

$$M_X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF_X(x)$$

ja

$$M_{-X}(s) = E[\, e^{s(-X)} \,] = E[\, e^{-sX} \,] = M_X(-s) .$$

Saadaan

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} [M_X^{(1)}(0) + M_{-X}^{(1)}(0)] = \frac{1}{2} [M_X^{(1)}(0) - M_X^{(1)}(0)] = 0$$

ja

$$\alpha_2 = \frac{1}{2} [M_X^{(2)}(0) + M_{-X}^{(2)}(0)] = \frac{1}{2} [M_X^{(2)}(0) + M_X^{(2)}(0)]$$

$$= M_X^{(2)}(0) = \alpha_2(X).$$

Vastaavalla tavalla laskemalla saadaan, että $\alpha_3 = 0$ ja $\alpha_4 = M_X^{(4)}(0) = \alpha_4(X)$.

Niinpä:

Odotusarvo: $\alpha_1 = 0$

Varianssi : $\alpha_2 - \alpha_1^2 = \alpha_2 = M_X^{(2)}(0) = EX^2$

Vinous: $$\frac{\alpha_3 - 3\alpha_1\alpha_2 + 2\alpha_1^3}{\alpha_2} = 0,$$

Huipukkuus: $$\frac{\alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 - 3\alpha_2^2 + 12\alpha_1^2\alpha_2 - 6\alpha_1^4}{\alpha_2^2} = \frac{\alpha_4 - 3\alpha_2^2}{\alpha_2^2}$$

$$= \frac{EX^4}{(EX^2)^2} - 3 = \gamma_2(X) .$$

Koska tämä miksatun kertymäfunktion F määrittelemä jakauma on symmetrinen, onkin selvää, että odotusarvo ja vinous ovat kumpikin nollia. Lisäksi, vaikka jakaumien F_1 ja F_2 odotusarvot eivät olekaan samat, jakauman F huipukkuudeksi saatiin sivun 11 alussa olevan kaavan mukainen jakaumien F_1 ja F_2 huipukkuuksien γ_{2i},

$(i = 1,2)$, yhdistelmä: $\gamma_2(X) = \frac{1}{2}[\gamma_2(X) + \gamma_2(X)] = \frac{1}{2}[\gamma_{21} + \gamma_{22}]$.

Olkoot F_1 ja F_2 kahden normaalijakauman kertymäfunktiot ja olkoon F_3 niiden avulla muodostettu miksattu kertymäfunktio. Osoitetaan nyt, että F_3 on normaalijakauman kertymäfunktio, jos ja vain jos F_1 ja F_2 ovat identtiset.

Jos kertymäfunktiot F_1 ja F_2 ovat identtiset, miksatun kertymäfunktion momenttigeneroivaksi funktioksi saadaan

$$M_3 = a\,M_1 + (1-a)M_2 = a\,M_1 + (1-a)M_1 = M_1.$$

Olkoot kertymäfunktioiden F_1 ja F_2 momenttigeneroivat funktiot $M_1(s) = e^{\frac{1}{2}\cdot(\sigma_1^2 s^2 + \mu_1 s)}$ ja $M_2(s) = e^{\frac{1}{2}\cdot(\sigma_2^2 s^2 + \mu_2 s)}$, jolloin miksatun kertymäfunktion F_3 momenttigeneroiva funktio on $M_3(s) = a\cdot M_1(s) + (1-a)\cdot M_2(s)$.

Oletetaan nyt, että kertymäfunktiot F_1 ja F_2 eivät ole identtiset, jolloin joko $\mu_1 \neq \mu_2$ tai $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ja osoitetaan, ettei funktiota M_3 tällöin voida millään vakioiden α ja β arvoilla esittää normaalijakauman momenttigeneroivan funktion muotoa olevana funktiona $e^{\frac{1}{2}\alpha s^2 + \beta s}$.

Merkitään

$$L(s) = \frac{aM_1(s) + (1-a)M_2(s)}{e^{\frac{1}{2}\alpha s^2 + \beta s}}$$

$$= a\cdot e^{\frac{1}{2}(\sigma_1^2 - \alpha)s^2 + (\mu_1 - \beta)s} + (1-a)\cdot e^{\frac{1}{2}(\sigma_2^2 - \alpha)s^2 + (\mu_2 - \beta)s}.$$

Osoitetaan, että L ei ole identtisesti yksi millään vakioiden α ja β arvoilla.

Merkitään

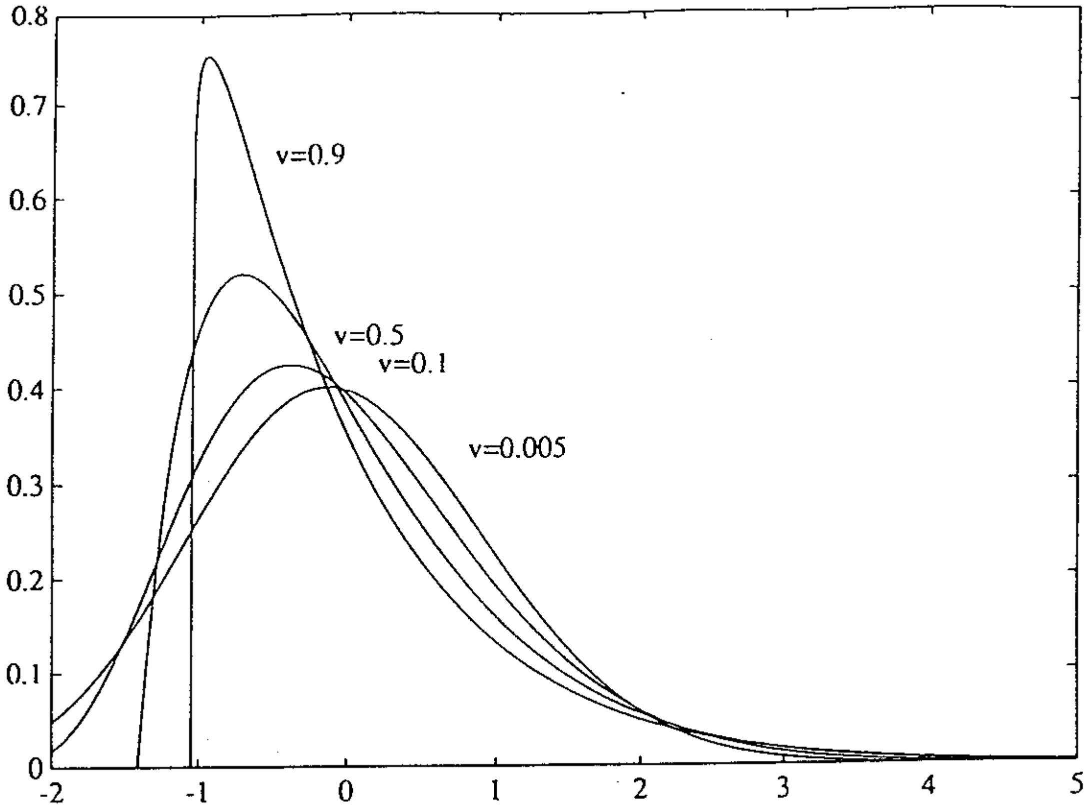
$$f_1(s) = \frac{1}{2}(\sigma_1^2-\alpha)s^2 + (\mu_1-\beta)s$$

ja

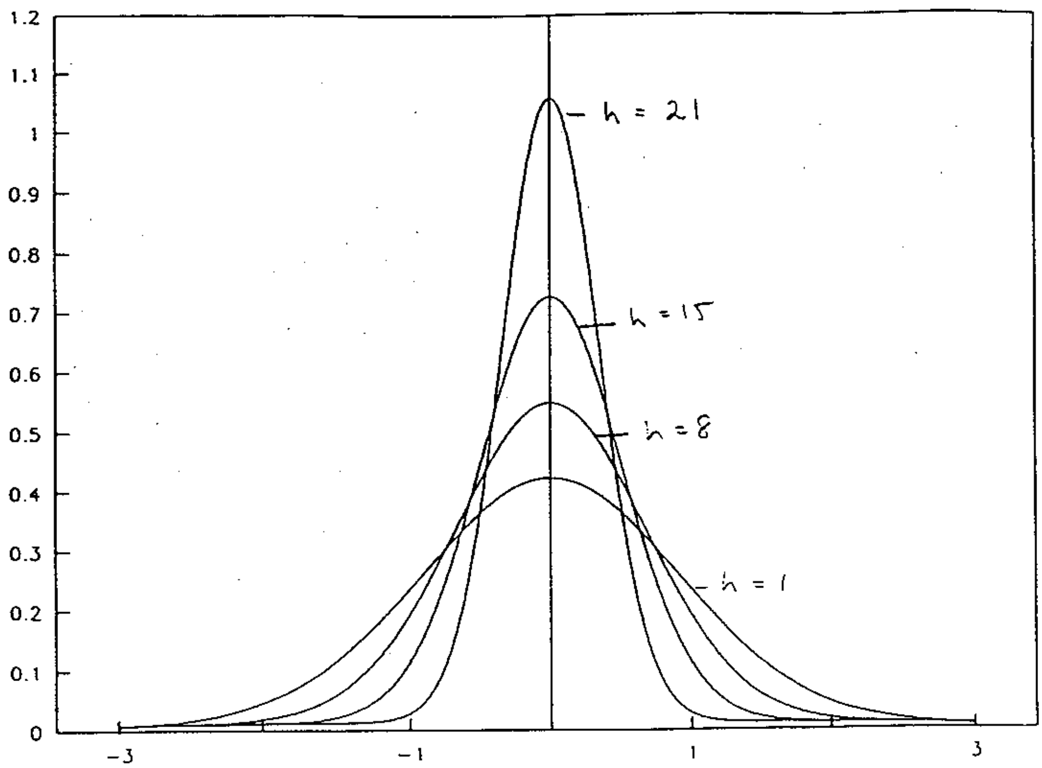
$$f_2(s) = \frac{1}{2}(\sigma_2^2-\alpha)s^2 + (\mu_2-\beta)s \ .$$

Jos $\alpha = \sigma_1^2$ ja $\beta = \mu_1$, niin $\lim_{s\to\infty} f_2(s) \in \{-\infty,\infty\}$ ja $\lim_{s\to\infty} L(s) \in \{a,\infty\}$.
Jos $\alpha \neq \sigma_1^2$ tai $\beta \neq \mu_1$, niin $\lim_{s\to\infty} f_1(s) \in \{-\infty,\infty\}$ ja
$\lim_{s\to\infty} f_2(s) \in \{-\infty,0,\infty\}$, jolloin $\lim_{s\to\infty} L(s) \in \{0,1-a,\infty\}$.

Siis $L \not\equiv 1$, josta seuraa, että M_s ei ole normaalijakauman momenttigeneroiva funktio.



Normeeratun gammajakauman tiheysfunktio vinouden v eri arvoilla



Miksatun normaalijakauman tiheysfunktio huipukkuuden h eri arvoilla

HARJOITUSTEHTÄVIEN RATKAISUT

hyväksytty 16.11.1994

Marika Vilska

1. Varianssi saadaan kaavasta $Var(Z_M) = \sigma^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2$.

Esimerkissä 1.4.(b) on jo laskettu α_1: $\alpha_1 = 1/a\ (1 - e^{-aM})$

$$\alpha_2 = E(Z_M^2) = \int_0^M Z^2\, ae^{-aZ} dZ + M^2\, ae^{-aM}.$$

Osittaisintegroimalla saadaan $\alpha = 2/a^2 - 2M/a\ e^{-aM} - 2/a^2\ e^{-aM}$.

Niinpä $Var(Z_M) = 1/a^2 - 2M/a\ e^{-aM} - 1/a^2\ e^{-2aM}$.

3.
$$M(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} dF(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{sx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= e^{\frac{s^2\sigma^2}{2}+\mu s} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x^2 - 2(\mu+s\sigma^2)x + (\mu+s\sigma^2)^2)} dx$$

$$= e^{\frac{s^2\sigma^2}{2} + \mu s}$$

$$\Psi(s) = \frac{s^2\sigma^2}{2} + \mu s$$

7. Aloitetaan todistus yhtälön oikealta puolelta.

$$\text{Cov}\,[E(X|Z), E(Y|Z)] = E\,[E(X|Z)\,E(Y|Z)] - E(E(X|Z))\,E(E(Y|Z))$$
$$= E\,[E(X|Z)\,E(Y|Z)] - E(X)\,E(Y)$$

$$E[\text{Cov}(X,Y|Z)] = E\,[E(XY|Z) - E(X|Z)E(Y|Z)]$$
$$= E(XY) - E[E(X|Z)E(Y|Z)]$$

Kun edellä saadut lausekkeet lasketaan yhteen, termi $E\,[E(X|Z)E(Y|Z)]$ häviää. Jäljelle jää yhtälö

$$E[\text{Cov}(E(X|Z), E(Y|Z))] + E[\text{Cov}(X,Y|Z)] = E(XY) - E(X)E(Y) = \text{Cov}(X,Y).$$

9. Merkitään $Y = aX + b$, $a > 0$. Tällöin $M_Y(s) = e^{bs} \cdot M_X(as)$ ja $\Psi_Y(s) = bs + \Psi_X(as)$. Derivoimalla kumulanttigeneroivaa funktiota huomataan, että

$$\Psi_Y^{(j)}(s) = a^j \cdot \Psi_X^{(j)}(as) \text{ ja } \Psi_Y^{(j)}(0) = a^j \cdot \Psi_X^{(j)}(0), \qquad j = 2, 3, \ldots$$

Koska $\sigma^2 = \kappa_2$, em. kaavoista saadaan $\sigma_Y^2 = a^2\sigma_X^2$. Niinpä

$$\gamma_Y = \frac{\kappa_3(Y)}{\sigma_Y^3} = \frac{a^3\kappa_3(X)}{a^3\sigma_X^3} = \frac{\kappa_3(X)}{\sigma_X^3} = \gamma_X .$$

Jos a on negatiivinen, $\gamma(Y) = -\gamma(X)$.

11. Olkoot X ja Y toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia. Tällöin $\kappa_j(X+Y) = \kappa_j(X) + \kappa_j(Y)$, $j = 1, 2, \ldots$ Koska $\sigma^2 = \kappa_2$, on $\sigma_{X+Y}^2 = \kappa_2(X+Y) = \kappa_2(X) + \kappa_2(Y) = \sigma_X^2 + \sigma_Y^2$. Sijoitetaan nämä kaavat vinouden ja huipukkuuden lausekkeisiin.

$$\gamma(X + Y) = \frac{\kappa_3(X + Y)}{\sigma_{X+Y}^3} = \frac{\sigma_X^3\gamma_X + \sigma_Y^3\gamma_Y^3}{\sigma_{X+Y}^3}$$

$$\gamma_2(X + Y) = \frac{\kappa_4(X + Y)}{\sigma_{X+Y}^4} = \frac{\sigma_X^4\gamma_2(X) + \sigma_X^4\gamma_2(Y)}{(\sigma_X^2 + \sigma_Y^2)^2}$$

13. Lasketaan ensin neljäs keskusmomentti μ_4:

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{\infty} (X - EX)^4 \, dF(X) = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4$$

Todistetaan nyt, että $\beta_4 = \gamma_2 + 3$. Sijoittamalla β_4:n paikalle μ_4/σ^4 ja kertomalla lausekkeet puolittain σ^4:llä, saadaan yhtälö:

$$\mu_4 = \sigma^4 (\gamma_2 + 3) = \kappa_4 + 3\sigma^4 = \kappa_4 + 3\kappa_2^2$$

Käytetään kumulanttien sijasta origomomentteja (kaavat 1.4.22) ja saadaan

$$\sigma^4 (\gamma_2 + 3) = \alpha_4 - 4\alpha_1\alpha_3 + 6\alpha_1^2\alpha_2 - 3\alpha_1^4 = \mu_4 .$$

15. Olkoon k Poisson (n) -jakautunut satunnaismuuttuja.

$$M(s) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk}\, p_k = \sum_{k=0}^{\infty} e^{sk} \frac{n^k}{k!} e^{-n} = e^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ne^s)^k}{k!}$$

$$= e^{-n} e^{ne^s} = e^{n(e^s-1)}$$

$$\Psi(s) = \ln M(s) = n\cdot(e^s-1)$$

17. Olkoon **k** Poisson(n) -jakautunut satunnaismuuttuja. Tällöin

$$p_k = \frac{n^k}{k!}\cdot e^{-n} = \frac{n\, n^{k-1}}{k(k-1)!}\cdot e^{-n} = \frac{n}{k}\, p_{k-1} .$$

19. $$E\,[\mathbf{k}(\mathbf{k}-1)\ \ldots\ (\mathbf{k}-i)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\ \ldots\ (k-i)\ \frac{n^k}{k!}\, e^{-n}$$

$$= e^{-n}\cdot \sum_{k=i+1}^{\infty} \frac{n^{(k-i-1)}}{(k-i-1)!}\, n^{i+1}$$

$$= e^{-n}\cdot e^{n}\cdot n^{i+1} = n^{i+1}\ , \quad i = 0,1,2,\ldots$$

Näiden kaavojen avulla saadaan seuraavat tulokset:

$$E(\mathbf{k}) = n,\quad E(\mathbf{k}^2) = n^2 + n,\quad E(\mathbf{k}^3) = n^3 + 3n^2 + n$$

$$\mu_3 = \sum (\mathbf{k} - n)^3 \frac{n^k}{k!}\, e^{-n} = E(\mathbf{k}^3) - 3n\, E(\mathbf{k}^2) + 3n^2 E(\mathbf{k}) - n^3 = n$$

$$\sigma^2 = \kappa_2 = E(\mathbf{k}^2) - E(\mathbf{k})^2 = n,\quad \gamma = \frac{\kappa_3}{\sigma^3} = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = n^{-1/2}$$

21. Käytetään kaavaryhmässä (2.4.11) olevaa varianssin kaavaa. $\sigma^2 = n + n^2\, \sigma_q^2$, joten siis $\sigma_q^2 = \frac{1}{n^2}(\ \sigma^2 - n\ )$. Sijoittamalla tähän $n = 10\ 000$ ja $\sigma = 1\ 000$, saadaan $\sigma_q = 0.099$.

23. Derivoidaan yhtälöä $\Psi(s) = \Psi_q[\varphi(s)]$, missä $\varphi(s) = n\,(e^s-1)$.
Saadaan

$$\Psi^{(1)}(s) = \varphi^{(1)}(s)\cdot\Psi_q^{(1)}[\varphi(s)],$$

$$\Psi^{(2)}(s) = [\varphi^{(1)}(s)]^2\cdot\Psi_q^{(2)}[\varphi(s)] + \varphi^{(2)}(s)\cdot\Psi_q^{(1)}[\varphi(s)] \quad \text{ja}$$

$$\Psi^{(3)}(s) = [\varphi^{(1)}(s)]^3\cdot\Psi_q^{(3)}[\varphi(s)] + 3\varphi^{(1)}(s)\cdot\varphi^{(2)}(s)\cdot\Psi_q^{(2)}[\varphi(s)] + \varphi^{(3)}(s)\cdot\Psi_q^{(1)}[\varphi(s)].$$

Sijoitetaan edellä oleviin kaavoihin $s = 0$, jolloin saadaan

$$\kappa_1(\mathbf{k}) = n\cdot\kappa_1(\mathbf{q}) = n$$

$$\kappa_2(\mathbf{k}) = n\cdot\kappa_1(\mathbf{q}) + n^2\cdot\kappa_2(\mathbf{q}) = n + n^2\cdot\kappa_2(\mathbf{q}) \quad \text{ja}$$

$$\kappa_3(\mathbf{k}) = n\cdot\kappa_1(\mathbf{q}) + 3n^2\cdot\kappa_2(\mathbf{q}) + n^3\cdot\kappa_3(\mathbf{q}) = n + 3n^2\cdot\kappa_2(\mathbf{q}) + n^3\cdot\kappa_3(\mathbf{q}).$$

25. Derivoidaan neljä kertaa yhtälö $\Psi(s) = \Psi_q([\varphi(s)]$, missä $\varphi(s) = n(e^s-1)$. Kolme ensimmäistä derivointia on tehty jo tehtävän 23 ratkaisun yhteydessä.

$$\Psi^{(4)}(s) = [\ \varphi^{(1)}(s)\ ]^4\cdot\Psi_q^{(4)} + 6\,[\varphi^{(1)}(s)]^2\cdot\varphi^{(2)}(s)\cdot\Psi_q^{(3)}[\varphi(s)] + 3[\varphi^{(2)}(s)]^2\cdot\Psi_q^{(2)}[\varphi(s)] + 4\varphi^{(1)}(s)\cdot\varphi^{(3)}(s)\cdot\Psi_q^{(2)}[\varphi(s)] + \varphi^{(4)}(s)\cdot\Psi_q^{(4)}[\varphi(s)].$$

Sijoitetaan $s = 0$ ja käytetään hyväksi tietoa, että $\kappa_1(\mathbf{q}) = 1$ ja $\kappa_2(\mathbf{q}) = \sigma_q^2$. Tällöin yhtälöstä $\gamma_2(\mathbf{k}) = \dfrac{\kappa_4}{\sigma_k^4}$ saadaan

$$\gamma_2 = \frac{n + 7n^2\sigma_q^2 + 6n^3\kappa_3(\mathbf{q}) + n^4\kappa_4(\mathbf{q})}{\sigma_k^4}$$

27. Lasketaan satunnaismuuttujan X momenttigeneroiva funktio $M(s)$.

$$M(s) = \frac{1}{\Gamma(h)} \int_0^\infty e^{sx}e^{-x}x^{h-1}dx = \frac{1}{\Gamma(h)} \int_0^\infty e^{-x(1-s)}x^{h-1}dx$$

Tehdään sijoitus $z=x(1-s)$, jolloin momenttigeneroivaksi funktioksi saadaan $M(s) = (1-s)^{-h}$. Derivoimalla funktiota $M(s)$ havaitaan, että sen derivaatat toteuttavat seuraavan kaavan

$$M^{(i)}(s) = \frac{(h+i-1)!}{(h-1)!} (1-s)^{-h-i} = \frac{\Gamma(h+i)}{\Gamma(h)} (1-s)^{-h-i} .$$

Kun sijoitetaan $s = 0$, saadaan haluttu tulos.

31. Suoritetaan todistus induktiolla

1. $k=0$: $\quad \Gamma(n,1) = \int_0^n \frac{1}{\Gamma(1)} e^{-x}x^0dx = 1 - e^n = 1 - F_n(0)$

2. Oletetaan väite todeksi arvolla $k \in \mathbb{N}$

3. Käytetään induktio-oletusta osoittamaan väite todeksi myös arvolla $k+1$

$$\begin{aligned} 1 - F_n(k+1) &= 1 - F_n(k) - \frac{n^{k+1}}{(k+1)!}\cdot e^{-n} \\ &= \Gamma(n,k+1) - \frac{n^{k+1}}{(k+1)!}\cdot e^{-n} \\ &= \int_0^n \frac{1}{k!}x^k e^{-x}dx - \frac{n^{k+1}}{(k+1)!}\cdot e^{-n} . \end{aligned}$$

Osittaisintegroimalla saadaan

$$1-F_n(k+1)=\Gamma(n,k+2).$$

33. Käytetään lauseita 3.2.5 ja 2.4.9:

$$\Psi_x(s) = \Psi_k[\ \Psi_z(s)\ ] = \Psi_q[\ n(e^{\Psi_z(s)} - 1)\ ] = \Psi_q\ [n\ M_z(s) - n\ ]$$

35

a) Derivoidaan kaavaa 3.2.7:

$$\Psi_x^{(2)}(s) = n\, M_z^{(2)}(s)\Psi_q^{(1)}(nM_z(s)-n) + [n\, M_z^{(1)}(s)]^2\Psi_q^{(2)}(nM_z(s)-n)$$

$$\begin{aligned}\Psi_x^{(3)}(s) &= nM_z^{(3)}(s)\Psi_q^{(1)}(nM_z(s) - n)\\ &+ 3n^2M_z^{(1)}(s)M_z^{(2)}(s)\Psi_q^{(2)}(nM_z(s) - n)\\ &+ n^3\, [M_z^{(1)}(s)]^3\, \Psi_q^{(3)}(nM_z(s) - n)\end{aligned}$$

Sijoitetaan s = 0. Saadaan

$$\sigma_x^2 = na_2 + n^2m^2\sigma_q^2$$

$$\gamma_x = \frac{\kappa_3(X)}{\sigma_x^3} = \frac{na_3 + 3n^2ma_2\sigma_q^2 + n^3m^3\gamma_q\sigma_q^3}{\sigma_x^3}.$$

b) $\sigma_x^2 = nm^2r_2+n^2m^2\sigma_q^2=n^2m^2(r_2/n+\sigma_q^2)$, $\Rightarrow \sigma_x=nm\ (r_2/n+\sigma_q^2)^{1/2}$.

$$\gamma_x = \frac{nm^3r_3 + 3n^2m^3r_2\sigma_q^2 + n^3m^3\gamma_q\sigma_q^3}{n^3m^3\ (r_2/n + \sigma_q^2)^{3/2}} = \frac{\dfrac{r_3}{n^2} + 3r_2\dfrac{\sigma_q^2}{n} + \gamma_q\sigma_q^3}{(r_2/n + \sigma_q^2)^{3/2}}$$

37. $$\begin{aligned}\sigma_x^2 &= Var\ [E(X|\mathbf{k})] + E\ [Var(X|\mathbf{k})\\ &= Var[E(Z_1)+ E(Z_2)+ \dots +E(Z_{\mathbf{k}})]\\ &+ E[Var(Z_1)+ Var(Z_2)+ \dots + Var(Z_{\mathbf{k}})]\\ &= Var[\mathbf{k}\ E(Z)] + E[\mathbf{k}\cdot Var(Z)] = m^2\sigma_k^2 + n\ \sigma_z^2\end{aligned}$$

39. Todistetaan ensin yhtälön vasen puoli:

$0 \le Var(Z) = E(Z^2)-E(Z)^2 \Rightarrow E(Z^2) \ge E(Z)^2$

$\Rightarrow E(Z^2)^2 \ge E(Z)^4 \Rightarrow \dfrac{E(Z^2)^2}{E(Z)^4} \ge 1.$

Yhtälön oikea puoli:

$a_2^2 = E(Z^2)^2 = E[(Z^{1/2}\ Z^{3/2})]^2$

Käytetään nyt Schwarzin epäyhtälöä: $E[(Z^{1/2} \cdot Z^{3/2})]^2 \le E(Z)\ E(Z^3)$ $= ma_3$.

Siis on saatu $a_2^2 \le ma_3$. Jakamalla yhtälö puolittain termillä m^4 saadaan väite todistetuksi.

41. Funktion φ pisteeseen ($m, \varphi(m)$) piirretyn tangenttisuoran yhtälö on $y = \varphi'(m) \cdot (x-m) + \varphi(m)$. Koska φ on konkaavi, se on jokaisen tangenttinsa alapuolella eli $\varphi(Y) \le \varphi'(m) \cdot (Y-m) + \varphi(m)$. Tehdään sijoitus $m = EY$ ja otetaan odotusarvot yhtälön molemmilta puolilta, jolloin päädytään väitteeseen.

43. Koska $\gamma_X = \dfrac{a_3}{a_2^{3/2}}\, n^{-1/2}$ ja $\gamma_k = n^{-1/2}$, riittää todistaa,

että $a_3 > a_2^{3/2}$.

Funktion $\varphi(y) = y^{3/2}$ toinen derivaatta on positiivinen, joten φ on aidosti konveksi. Käyttämällä Jensenin epäyhtälöä saadaan

$$a_3 = E(Z^3) = E[(Z^2)^{3/2}] > E(Z^2)^{3/2} = a_2^{3/2}.$$

45. $Var(X|q = 1$ ja $Z_i = m$ kaikilla i:n arvoilla) $= Var(km) = m^2 Var(k)$

$= m^2\ n$

$Var(X|k = n) = Var(Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n) = n\ Var(Z)$

$Var(X|k = nq$ ja $Z_i = m$ kaikilla i:n arvoilla) $= Var(nq \cdot m)$

$= n^2 m^2\ Var(q)$

$$47.\quad E(X_1X_2) = E\ [E\ (\sum_{i=1}^{k_1} Z_i)\cdot E\ (\sum_{j=1}^{k_2} Z_j) \mid k_1=k_1,\ k_2=k_2\ ]$$

$$= m_1m_2E(k_1k_2) \quad = \quad m_1m_2\ E(n_1q_1n_2q_2 \mid q_1=q_1,\ q_2=q_2)$$

$$= m_1m_2n_1n_2E(q_1q_2)$$

$$Cov(X_1,X_2) \quad = \quad m_1m_2n_1n_2\ [E(q_1q_2)-1)$$

$$= m_1m_2n_1n_2\sigma_{q1}\sigma_{q2}\rho \quad = \quad 250\ \rho$$

$$\sigma_X^2 = Var(X_1+X_2) = \sigma_{X1}^2 + \sigma_{X2}^2 + 2Cov(X_1,X_2) = 6025 + 250\rho$$

$$\Rightarrow \sigma_X = \sqrt{6025 + 250\rho}$$

$\rho=-1$: $Cov(X_1,X_2) = -250$, $\sigma_X \cong 75.99$

$\rho=\ 0$: $Cov(X_1,X_2) \cong 0$, $\sigma_X \cong 77.62$

$\rho=\ 1$: $Cov(X_1,X_2) = 250$, $\sigma_X \cong 79.21$

$$49.\quad p_k = \binom{N}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{N-k} = \frac{N!}{k!(N-k)!}\cdot\frac{p}{1-p}\ p^{k-1}\cdot(1-p)^{N-k+1}$$

$$= \frac{N!(N-k+1)}{k(k-1)!(N-k+1)!}\cdot\frac{p}{1-p}\cdot p^{k-1}\cdot(1-p)^{N-k+1}$$

$$= \frac{N-k+1}{k}\cdot\frac{p}{1-p}\cdot\binom{N}{k-1}\cdot p^{k-1}\cdot(1-p)^{N-k+1} = (-\frac{p}{1-p} +$$

$$\frac{N+1}{k}\cdot\frac{p}{1-p})\cdot p_{k-1}.$$

Siis $a = -\dfrac{p}{1-p}$ ja $b = (N+1)\cdot\dfrac{p}{1-p} = -a\cdot(N+1)$.

51.

a) $$P\{k_i=1|k=1\} = \frac{P\{k_i=1,k=1\}}{P\{k=1\}} = \frac{n_i\Pi e^{-n_j}}{(\Pi e^{-n_j})\sum n_i} = \frac{n_i}{\sum n_i}$$

b) Olkoon vahinkoja yhteensä N kpl (N_1, N_2, ... , N_N). Merkitään satunnaismuuttujalla **N** satunnaisesti valittua vahinkoa. Tällöin

$$P\{\text{"}\mathbf{N}\text{ on tyyppiä } i\text{"}\} = \sum P\{\text{"}N_j \text{ on tyyppiä } i\text{"}|\mathbf{N}=N_j\}P\{\mathbf{N}=N_j\}$$

$$= \frac{1}{N}\sum P\{k_i=1|k=1\} = \frac{n_i}{\sum n_i}$$

53. Satunnaismuuttujan Z arvojoukko on diskreetti.
$\mathcal{A}(Z) = \{a_0, a_1, \ldots, a_n\}$.
Olkoon nyt $a_{i_0} \le M < a_{i_0+1}$. Tällöin

$$L(M) = E\,[\min(Z,M)] = \sum_{j=0}^{i_0} a_j * P\{Z = a_j\} + M\,P\{Z \ge M\}.$$

$L(M)$ on siis lineaarinen M:n funktio kullakin välillä $[a_i, a_{i+1})$.

55. $$L_{aZ+b}(M) = E\,[\min(aZ + b, M)] = E\,[\min(aZ, M - b) + b]$$
$$= E\,[a \min(Z, \frac{M-b}{a})] + b = a\cdot E\,[\min(Z, \frac{M-b}{a})] + b$$
$$= a\cdot L_Z(\frac{M-b}{a}) + b$$

57. Olkoon λ vakio, $0 \le \lambda \le 1$.

$$\lambda L(x) + (1-\lambda)L(y) = E[\min(\lambda Z,\lambda x) + \min((1-\lambda)Z,(1-\lambda)y)]$$
$$\le E[\min(Z,\lambda x+(1-\lambda)y)] = L[\lambda x+(1-\lambda)y],$$

koska $\min(\lambda Z,\lambda x) + \min[(1-\lambda)Z,(1-\lambda)y] \le \min[Z,\lambda x+(1-\lambda)y]$.

59.

a) $L(M+h) - L(M) = \int_{M-}^{(M+h)-} z dS(z) - M[S(M+h)-S(M)] + h[1-S(M+h)]$.

Lausekkeen kahden ensimmäisen termin erotus lähestyy nollaa, kun $h \to 0^+$. Niinpä $L'(M+)=1-S(M)$ eli $S(M)=1-L'(M+)$.

b) Merkitään: $A_1=\{ Z < x \}$, $A_2=\{ x \le Z < y \}$, $A_3=\{ y \ge Z \}$

$$L(x) - L(y) = E[\min(x,Z) - \min(y,Z)]$$
$$= \sum_{i=1}^{3} E[\min(x,Z) - \min(y,Z) \mid Z \in A_i]P\{ Z \in A_i\} \ge (x-y).$$

61. $$L_T(M) = \int_{T+}^{M-} z\, dS_T(z) + M[1-S(M-)]$$
$$= \int_{T+}^{M-} z\, d\left(\frac{S(z)-S(T)}{1-S(T)}\right) + M\,\frac{1-S(M-)}{1-S(T)}$$
$$= \frac{1}{1-S(T)}\left[\int_{-\infty}^{M-} zd(S(z)) - \int_{-\infty}^{T} zd(S(z)) + M[1-S(M-)]\right]$$
$$= \frac{1}{1-S(T)}\left[L(M) - L(T) + T[1-S(T)]\right] = \frac{L(M)-L(T)}{1-S(T)} + T$$

63. $$S(Z) = \Gamma\left(\frac{Z}{\sigma};1\right) = \int_0^{Z/\sigma} e^{-u}\, du = 1 - e^{-Z/\sigma},\quad Z/\sigma \ge 0$$

65.

a) $a_k = E(Z^k) = E(e^{kY}) = M_Y(k) = e^{k\mu} e^{\frac{1}{2}k^2 s^2}$

b) $m = E(Z) = E(a + e^Y) = a + e^{\mu} e^{\frac{1}{2}s^2}$ (1)

$\sigma_Z^2 = Var(Z) = Var(Z-a) = Var(e^Y) = a_2 - a_1^2 = e^{2\mu} e^{s^2}(e^{s^2} - 1)$ (2)

$\kappa_3(Z) = E\,[(Z - E(Z)]^3 = E[(Z-a) - E(Z-a)\,]^3 = \mu_3(e^Y)$

$= \kappa_3(e^Y)$

$= a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3 = e^{3\mu}\, e^{(3/2)s^2}\,(e^{3s^2} - 3e^{s^2} + 2)$

$= e^{3\mu} e^{(3/2)s^2}(e^{s^2} + 2)(e^{s^2} - 1)^2$

$\gamma_Z = (e^{s^2} + 2)\cdot(\,e^{s^2} - 1)^{1/2}$ (3)

c) Kirjoitetaan kaava (3) muotoon

$$(e^{s^2} - 1)\;(e^{s^2} - 1)^{1/2} + 3(e^{s^2} - 1)^{1/2} - \gamma_Z = 0,$$

ja merkitään $\eta = (e^{s^2} - 1)^{1/2}$, jolloin $s^2 = \ln\,(1+\eta^2)$.

Kaavasta (1) saadaan $e^{\mu+\frac{1}{2}s^2} = m-a \Rightarrow \mu = \ln\,(m-a) - \frac{1}{2}s^2$

ja $a = m - e^{\mu}\cdot e^{1/2\,s^2} \overset{(2)}{=} m - \frac{\sigma_Z}{\eta}$

67. $\mu_X = £\ 10^7$, $\sigma_X^2 = £^2\ 2\ 10^{12}$, $\gamma_X = 0.06364$, $\mathbf{x} = (X-\mu_X)/\sigma_X$

a) $P(X > 14*10^6\,) = 1 - N\,[2.83] \cong 0.0023$

b) $c_1 \cong -9.3220$, $c_2 \cong 6.4366$, $c_3 \cong 3.1427$

$P(\mathbf{x} > 2.2828) \cong 1-N\,[c_1 + c_2(\mathbf{x}+c_3)^{1/3}\,] \cong 1 - N[\,2.36\,] = 0.0091$

69. $P(Z-D \le z) = P(Z \le z+D) = 1 - \left(\frac{D+\beta}{z+D+\beta} \right)^{\alpha}, \quad z \ge 0$

$$= 1 - \left(\frac{\beta'}{z+\beta'} \right)^{\alpha}, \quad z \ge 0$$

missä $\beta' = \beta + D$.

Niinpä muuttujan $(Z - D)$ jakauma on Pareto $(\alpha, \beta+D, 0)$.

71. Merkitään satunnaismuuttujalla Y vakuutusyhtiön maksaman korvauksen määrää ehdolla, että vahinko sattuu. Tällöin

$$Y = \begin{cases} 0, & Z < 2 \\ Z-2, & Z \ge 2 \end{cases} \quad \text{ja} \quad F_Y(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 1-2(z+2)^{-3} & 0 \le z < 8 \\ 1 & z \ge 8 \end{cases}$$

Riskimaksu on $0.01 \left[\int_0^8 6y\,(y+2)^{-4} dy + 8 \cdot 2 \cdot 10^{-3} \right] = 0.0024$

Vakuutusyhtiön vahinkomenon keskihajonta on

$$0.01 \sqrt{Var(Y)} = 0.01 \sqrt{E(Y^2) - E(Y)^2} = 0.01 \sqrt{0.82 - 0.24^2}$$

$$= 0.0087.$$

Bruttomaksu: $1.2 \cdot 0.0024 + 0.1 \cdot 0.0087 = 3.75 \cdot 10^{-3}$

73.

a) Todistetaan induktiolla, että yhtälö (I) on sama kuin yhtälö $p(t) = p(0) - (1-a)u(t-1)$.

b) Tarkastellaan ensin kaavaa (1):

$$E[p(t)] = a \cdot E[p(t-1)] + (1-a) \cdot p_X \Rightarrow \lim_{t\to\infty} E[p(t)] = p_X$$

Koska $p(t-1)$ on riippumaton vahinkopromillesta $x(t-1)$, saadaan

$$Var\,[p(t)] = a^2\, Var[p(t-1)] + (1-a)^2 \sigma_X^2 \Rightarrow \lim_{t\to\infty} Var[p(t)] = \frac{1-a}{1+a}\, \sigma_X^2.$$

Kaavasta (2) saadaan suoralla laskulla:

$$\lim_{t\to\infty} E[p(t)] = p_X + \lambda_2 \quad \text{ja} \quad \lim_{t\to\infty} Var[p(t)] = \frac{1}{5}\, \sigma_X^2 .$$

75. Poistettu

77. Koska $E(Y)=E(X)$, riittää todistaa, että $E(Y^2)\geq E(X^2)$.
Merkitään
$\nu = \dfrac{m+M}{2}$. Tällöin $|(X-\nu)| \leq |(Y-\nu)| \Rightarrow (X-\nu)^2 \leq (Y-\nu)^2$
$\Rightarrow E(X-\nu)^2 \leq E(Y-\nu)^2 \Rightarrow E(X^2) \leq E(Y^2)$.

79. Jaetaan väli $[a,b]$, jossa alkuperäinen jakauma F_X on määritelty, n yhtä suureen osaan $(a = x_0<x_1<x_2<...<x_n=b)$.
Merkitään harhattomalla odotusarvomenetelmällä saatua jakaumaa F_Y:llä.
Koska $E(Y) = E(X)$, riittää todistaa, että $E(X^2)\geq E(Y^2)$.

$$E(Y^2) = \int_{[a,b]} y^2 dF_Y = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{]x_i,x_{i+1}]} y^2 dF_Y + a^2 P\{Y=a\}$$

$$\leq \sum_{i=0}^{n-1} (r_i x_i^2 + l_{i+1} x_{i+1}^2) = \sum s_i x_i^2 = E(X^2).$$

81. $L(M) = \int_{-\infty}^{M-} z dS(z) + M\,[1 - S(M-)]$

1. $M \leq T$: $L(M) = \int_{-\infty}^{M-} z dS_1(z) + M\,[1 - S_1(M-)] = L_1(M)$

2. $M > T$:
$$\begin{aligned} L(M) &= \int_{-\infty}^{T-} z dS_1(z) + T\,[S_2(T) - S_1(T-)] + \int_{T}^{M-} z dS_2(z) \\ &\quad + M\,[1- S_2(M-)] \\ &= L_1(T) - T\,[1-S_1(T-)] + T\,[S_2(T) - S_1(T-)] \\ &\quad + \int_{-\infty}^{M-} z dS_2(z) - \int_{-\infty}^{T} z dS_2(z) + M\,[1-S_2(M-)] \\ &= L_1(T) + L_2(M) - \int_{-\infty}^{T} z dS_2(z) - T\,[1-S_2(T)] \\ &= L_1(T) + L_2(M) - L_2(T). \end{aligned}$$

83. $$\begin{aligned} L_C(M) &= \int_{-\infty}^{M-} z\,dS_C(z) + M\,[1-S_C(M-)] \\ &= \frac{1}{S(C)}\left\{ \int_{-\infty}^{M-} z\,dS(z) + M\,[S(C) - S(M-)] \right\} \\ &= \frac{1}{S(C)}\left\{ \int_{-\infty}^{M-} z\,dS(z) + M\,[1-S(M-)] - M\,[1-S(C)] \right\} \\ &= \frac{L(M) - M\,[1-S(C)]}{S(C)} \end{aligned}$$