RISKIMAKSUJEN TASOITUKSESSA KÄYTETYISTÄ MENETELMISTÄ JA ERÄÄN YHDISTETYN MALLIN SOVELLUTUKSESTA KUORMA-AUTOJEN TARIFFIIN LIIKENNEVAKUUTUKSESSA

1. Yleistä

Kirjoituksessa käsitellään menetelmiä, joita on käytetty tasoitettaessa riskimaksuja maksutariffia varten. Tariffirakenteen ratkaisemiseksi on määrättävä muuttujat $x_1, \ldots, x_n$, joiden oletetaan vaikuttavan vahinkomenoon. Nämä muuttujat voivat olla luonteeltaan kvalitatiivisia tai kvantitatiivisia.

Yksinkertaisuuden vuoksi kuvatkoon esimerkkinä tariffia kaksinkertainen luokitus. Riskit jaetaan tällöin kahteen luokkaan U ja V. Näistä on U:ssa p-tasoa ($i = 1, \ldots, p$) ja V:ssä k-tasoa ($j = 1, \ldots, k$). Yhtiön kokemusta muuttujista luonnehtivat vahinko- ja vakuutuskantatilastoista saadut suureet; vahinkoliikettä kuvaava mitta r_{ij} ja vakuutuskannan mitta n_{ij}. Yleisesti käytetään mallia, jossa r_{ij} on stokastisen muuttujan havaintoarvo, jonka odotusarvo on $f_{ij} = f(\alpha_i, \beta_j)$. Termit α_i ovat parametrejä, jotka kuvaavat luokan U eri tasojen vaikutusta ja termit β_j kuvaavat luokan V eri tasojen vaikutusta.

Riskimaksuja tasoitettaessa on eräänä probleemana löytää realistinen funktio $f(\alpha_i, \beta_j)$ ja ratkaista estimaatit a_i ja b_j termeille α_i ja β_j. Teoriaa ovat kehittäneet maksutariffin määritykseen useat henkilöt Bertil Almerin (1) julkaistua oman tutkielmansa. Robert Bailey ja LeRoy Simon (2) koettivat teorian soveltuvuutta liikennevakuutukseen Kanadan olosuhteissa. He valitsivat funktioksi $f(\alpha_i, \beta_j)$ sekä additiivisen että multiplikatiivisen mallin ja muodostivat erään yksinkertaisen yhdistetyn mallin. Jan Jung (3) ja Björn Ajne (4) käsittelivät Ruotsissa liikennevakuutuksen tietoja multiplikatiiviseen malliin nojautuen. Pitkänen (5) puolestaan esitti omassa työssään sekä additiivisen että multiplikatiivisen tariffimallin ominaisuuksia. Hän mainitsi lisäksi lyhyesti näiden mallien yhdistämismahdollisuudesta.

2. Tariffimalli

Jos tasoitettavat suureet koostuvat useammasta kuin kaksinkertaisesta luokituksesta, voidaan funktio $f(\alpha_i, \beta_j)$ laajentaa myös yleiseen tapaukseen.
Määritetään tariffirakenteen malli noudattaen Pitkäsen (5) käyttämiä merkintöjä. Tällöin $f(\alpha_i, \beta_j, \gamma_k, \ldots) = P(X)$

2.1 Additiivinen malli

Riskimaksu $P(X)$ voidaan esittää muodossa

$$P(X) = K \cdot \sum_{i=1}^{k} f_i(x_i) \,,$$

missä K = vakio – esim. keskivahinko tai vakuutusmäärä – ja funktiot $f_i(x_i)$ kuvaavat kunkin tariffitekijän vaikutusta. Tässä mallissa oletetaan muutoksen yhdessä muuttujassa aiheuttavan tietyn absoluuttisen maksunmuutoksen riippumatta muista muuttujista, eli

$$EY = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ij_i} \,,$$

missä α_{ij_i} kuvaa sitä vaikutusta, jonka aiheuttaa tekijän i luokka j_i. Mallissa edellytetään, ettei kaksi tai useampaa tekijää ole vuorovaikutuksessa keskenään vaikuttaessaan kokonaismaksuun.

2.2 Multiplikatiivinen malli

Riskimaksu $P(X)$ voidaan esittää muodossa

$$P(X) = K \cdot \prod_{i=1}^{k} f_i(x_i)$$

Tässä mallissa muutos yhdessä muuttujassa aiheuttaa vastaavan verrannollisen muutoksen kokonaismaksuun riippumatta muiden tekijöiden arvosta, eli

$$EY = \prod_{i=1}^{k} \alpha_{ij_i}$$

2.3 Yhdistetty malli $P(X) = \sum_{i=1}^{k} f_{1i}(x_i) + \sum_{i \neq j} f_{2i}(x_i)\, f_{2j}(x_j) + \ldots + \prod_{i=1}^{k} f_{ki}(x_i)$

missä funktiot f_{ji} merkitsevät tekijän i vaikutusta.

Yleisen osan (1) lopussa mainituissa tutkimuksissa on keskitytty joko additiiviseen tai multiplikatiiviseen malliin ja yhdistämisen mahdollisuus on sivuutettu mainitsemalla tämä mahdollisuus. Pelkkään additiiviseen tai multiplikatiiviseen rakenteeseen turvautuminen yksinkertaistaa kyllä käytännön työtä suuresti, mutta jättää huomioimatta tariffitekijöiden väliset vuorovaikutukset, jos sellaisia on. Tässä työssä on tarkoituksena rakentaa yhdistetyn mallin mukainen tasoitusmenetelmä lähtien liikkeelle additiivisesta mallista. Ideana on ratkaista ensin muuttujat additiivisessa tapauksessa ja sallia sen jälkeen vuorovaikutus näiden muuttujien välillä ja korjata mallia tällä vuorovaikutuksella.

3. Tariffimallin ratkaiseminen

Tasoitusmallia varten kerättiin kuorma- ja pakettiautojen osalta tiedot vakuutuskannasta, vahinkotiheydestä ja omaisuusriskimaksuista liikennevakuutuksen maksututkimuksesta vuosilta 1970–1974. Vahinkotiheydet valittiin mukaan aineistoon, jotta mallien väliseen vertailuun saatiin enemmän havaintoja kuin pelkän riskimaksun avulla. Pakettiautot otettiin mukaan, koska haluttiin koettaa, voitaisiinko yhdistetyn mallin avulla tasoittaa ko. suureet kuorma- ja pakettiautoille yhdessä. Materiaalina käytettiin näiltä viideltä vuodelta laskettuja keskiarvoja, jotka on taulukoitu liitteessä 1. Kaavojen käsittelyä varten otetaan käyttöön merkinnät

$y(i_1, \ldots, i_k)$ = vahinkoliikkeen mitta, ts. havaittu vahinkotapausten määrä tai havaittu omaisuuskorvausmeno luokassa $(i_1, \ldots, i_k)$

$n(i_1, \ldots, i_k)$ = vakuutuskannan mitta, ts. havaittu vakuutusvuosien lukumäärä luokassa $(i_1, \ldots, i_k)$

$P(i_1, \ldots, i_k)$ = riskimaksu luokassa $(i_1, \ldots, i_k)$

$r(i_1, \ldots, i_k)$ = havaittu keskimääräinen suure, ts. joko vahinkotiheys tai keskivahinko luokassa $(i_1, \ldots, i_k)$

$$r(i_1, \ldots, i_k) = \frac{y(i_1, \ldots, i_k)}{n(i_1, \ldots, i_k)}$$

Numeeriseen ratkaisuun on Pitkäsen mukaan käytettävissä ainakin seuraavat mahdollisuudet 3.1 – 3.4 .

3.1 pienimmän neliösumman menetelmä.
Funktiot $f_i(x_i)$ ratkaistaan yhtälöstä

$$\sum_{i_1, \ldots, i_k} n(i_1, \ldots, i_k) \left[r(i_1, \ldots, i_k) - P(i_1, \ldots, i_k) \right]^2 =$$

$= \min$

3.2 χ^2 – minimimenetelmä
Funktiot $f_1(k_i)$ määrätään siten, että maksut noudattavat havaintoja mahdollisimman hyvin χ^2-testin mukaan.
Kriteerioksi tulee

$$\chi^2 = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \frac{n(i_1, \ldots, i_k) \left[r(i_1, \ldots, i_k) - P(i_1, \ldots, i_k) \right]^2}{P(i_1, \ldots, i_k)} =$$

$= \min$

3.3 modifioitu χ^2 – minimimenetelmä
Ratkaisu kuten edellä, mutta nimittäjä korjattuna

$$R = \sum_{i_1, \ldots, i_k} \frac{n(i_1, \ldots, i_k) \left[r(i_1, \ldots, i_k) - P(i_1, \ldots, i_k) \right]^2}{r(i_1, \ldots, i_k)} =$$

min

3.4 momenttimenetelmä
Jos merkitään havaittua suuretta tietylle luokalle

$$y_j^i = \sum_{\neq i} y/i_1, \ldots, i_{j-1}, i, i_{j+1}, \ldots, i_k)$$

voidaan vaatimus esittää kaavalla

$$u_j^i = \frac{\sum_{\neq i} n(i_1, \ldots, i_{j-1}, i, i_{j+1}, \ldots, i_k)P(i_1, \ldots, i_{j-1}, i, i_{j+1}, \ldots, i_k)}{y_j^i} = 1$$

Kaikkien esitettyjen menetelmien ratkaisu perustuu iteroinnin hyväksi käyttöön.

3.5 maksimointiperiaate

Tässä haluttiin valita ratkaisu em. mahdollisuuksien ulkopuolelta ja päädyttiin maksimointiperiaatteeseen. Teoria on seuraava: Oletetaan lähtökohtana otos $x_1, \ldots, x_n$, ja että X_i:t ovat identtisesti jakautuneita riippumattomia satunnaismuuttujia.

Diskreetissä tapauksessa

$$P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i = x_i) = L$$

$$L = P(X_1 = x_i \mid Q_1, \ldots, Q_k) \cdot \ldots \cdot P(X_n = x_n \mid Q_1, \ldots, Q_k)$$

Parametrit $Q_1, \ldots, Q_k$ määrittelevät X_i:den todennäköisyysjakautuman. Etsitään sitten ne arvot $Q_1, \ldots, Q_k$, jotka ovat suurimmalla todennäköisyydellä generoineet otoksen. Valitaan ja hyväksytään parametrien $Q_1, \ldots, Q_k$ estimaateiksi arvot $\hat{Q}_1, \ldots, \hat{Q}_k$, jotka antavat lausekkeelle L mahdollisimman suuren arvon.
Jatkuvan jakautuman tapauksessa on vastaavasti

$$L = f(x_1) \cdot f(x_2) \ldots, f(x_n)$$

Koottu tilastomateriaali koostuu aineistosta, jossa tariffitekijöitä on kaksi: alue ja painoluokka. Merkitään näiden vaikutusta α_i ja β_j. Tämän lisäksi tulevat puhtaasti satunnaiset efektit ξ_{ij}, jotka oletetaan riippumattomiksi ja normaaleiksi, keskiarvona 0 ja hajontana $\sigma/\sqrt{n_{ij}}$

Kun rajoitetaan teoria kahteen tariffitekijään, voidaan hypoteese ilmaista yhtälöllä

$$x_{ij} = \alpha_i + \beta_j + \xi_{ij} \qquad (i = 1,\ldots, k; \quad j = 1,\ldots, l)$$

$$\xi_{ij} = N(0, \sigma/\sqrt{n_{ij}})$$

Yksikäsitteisen ratkaisun saamiseksi suoritetaan normeeraus esim.

$$\sum_{i=1}^{k} n_{ij}\alpha_i = 0$$

Käsittely suoritetaan analogisesti myös useamman tariffitekijän tapauksessa. Kirjoitetaan normeerauksen vuoksi vakiotekijä A valmiiksi mukaan

$$x_{ij} = A + \alpha_i + \beta_j + \xi_{ij}$$

jolloin saadaan

$$P(x_{ij} \leq x) = P(A + \alpha_i + \beta_j + \xi_{ij} \leq x) = P(\xi_{ij} \leq x - A - \alpha_i - \beta_j)$$

$$F_{x_{ij}}(x) = F_{\xi_{ij}}(x - A - \alpha_i - \beta_j) = \frac{\sqrt{n_{ij}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n_{ij}}{2\sigma^2}\xi^2_{ij}}$$

$$= \frac{\sqrt{n_{ij}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{n_{ij}}{2\sigma^2}(x_{ij} - A - \alpha_i - \beta_j)^2}$$

Otoksen $x_{ij}(i = 1,\ldots, l, \quad j = 1,\ldots, k)$ ML-funktio on

$$L = f(x_{11}) \cdot f(x_{12}) \cdot \ldots \cdot f(x_{1l}) \cdot \ldots \cdot f(x_{kl}).$$

Voidaan siten kirjoittaa

$$L = \left(\frac{\sqrt{n_{ij}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}\right)^{kl} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum n_{ij} (x_{ij} - A - \alpha_i - \beta_j)^2\right)$$

Koska ln L saavuttaa maksiminsa samassa pisteessä kuin L, saadaan ML-estimaatit ratkaistuksi yhtälöryhmästä

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha_i} = 0 \qquad i = 1,\ldots, k$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta_j} = 0 \qquad j = 1,\ldots, l$$

Jos vielä aikaisemmin käytetyistä merkinnöistä johtuen kirjoitetaan $x_{ij} = r_{ij}$, saadaan yhtälöryhmä

$$\sum_{j=1}^{l} n_{ij} (r_{ij} - A - \alpha_i - \beta_j) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_{ij} (r_{ij} - A - \alpha_i - \beta_j) = 0$$

$$\sum_{i=1}^{k} n_{ij} \alpha_i = 0$$

Yhtälöryhmästä on ratkaistu A:n, α_i:n ja β_j:n arvot iteroimalla ATK:ta käyttäen. Samalla laskettiin myös luokille (α_i, β_j) additiivisen mallin antamat arvot μ_{ij} sekä havaintoarvojen ja mallin arvojen erotukset $(r_{ij} - \mu_{ij})$, joiden tulokset on taulukoitu liitteessä 2. Kun pakettiautoja on käsitelty yhdessä kuorma-autojen kanssa, on ne merkitty 1. painoluokaksi ja kuorma-autot 2. - 5. painoluokiksi.

4. Yhdistetyn mallin muodostaminen

Seuraavana vaiheena on muodostaa yhdistetty malli käyttäen hyväksi additiivisen mallin antamia arvoja α_i:lle ja β_j:lle. Tämä on tehty sallimalla vuorovaikutus saatujen tekijöiden välillä, jolloin hypoteesi voidaan esittää yhtälöllä

$$x_{ij} = A + C_1(\alpha_i + \beta_j) + C_2 \alpha_i \beta_j + \eta_{ij} ,$$

missä η_{ij} kuvaa satunnaisefektiä. Oletetaan, että $\eta_{ij} \propto \epsilon_{ij}$,

eli $\quad \eta_{ij} = N(0, \sigma h(\alpha_i \beta_j)/\sqrt{n_{ij}})$

Asetetaan vaatimus, että C_1 ja C_2 on ratkaistava siten, että $\sum_{i,j} \eta_{ij}^2 = \min$

Käytetään probleeman ratkaisuun kahden riippumattoman muuttujan lineaarista regressioanalyysia. Merkitään riippumattomia muuttujia u_{ij} ja v_{ij} ja niistä riippuvaa muuttujaa r:llä

$$u_{ij} = A + \alpha_i + \beta_j$$

$$v_{ij} = \alpha_i \beta_j$$

$$\bar{u} = \frac{\sum n_{ij}(A + \alpha_i + \beta_j)}{\sum n_{ij}}$$

$$\bar{v} = \frac{\sum n_{ij} \alpha_i \beta_j}{\sum n_{ij}}$$

Tehdään seuraavat olettamukset

- jokaiselle arvolle (u_{ij}, v_{ij}) on r normaalisti jakautunut
- r:n keskiarvo on u_{ij}:n ja v_{ij}:n lineaarifunktio, joka voidaan kirjoittaa

$$M\{r \mid u_{ij}, v_{ij}\} = \bar{u} + C_1(u_{ij} - \bar{u}) + C_2(v_{ij} - \bar{v})$$

- r:n varianssi on verrannollinen u_{ij}:n ja v_{ij}:n funktioon, eli

$$V\{r \mid u_{ij}, v_{ij}\} = \sigma^2 h^2(u_{ij}, v_{ij})$$

- havainnot ovat stokastisesti riippumattomia.

Parametrien C_1 ja C_2 estimaatit ratkaistaan pienimmän neliösummien menetelmällä. Sitä varten tehdään samalla yksinkertaistus $h(u_{ij}, v_{ij})$ = vakio $(\neq 0)$, jolloin ehdoksi saadaan

$$\frac{1}{h^2} \sum_{i,j} n_{ij} \left[r_{ij} - \bar{u} - C_1(u_{ij} - \bar{u}) - C_2(v_{ij} - \bar{v}) \right]^2 = \text{min.}$$

Laittamalla C_1:n ja C_2:n suhteen otetut derivaatat nollaksi saadaan yhtälöt

$$-\frac{2}{h^2} \sum_{ij} n_{ij} \left[r_{ij} - \bar{u} - C_1(u_{ij} - \bar{u}) - C_2(v_{ij} - \bar{v}) \right] (u_{ij} - \bar{u}) = 0$$

$$-\frac{2}{h^2} \sum_{ij} n_{ij} \left[r_{ij} - \bar{u} - C_1(u_{ij} - \bar{u}) - C_2(v_{ij} - \bar{v}) \right] (v_{ij} - \bar{v}) = 0$$

Yhtälöt voidaan vielä kirjoittaa muotoon

$$C_1 \sum n_{ij}(u_{ij} - \bar{u})^2 + C_2 \sum n_{ij}(u_{ij} - \bar{u})(v_{ij} - \bar{v}) =$$

$$= \sum n_{ij}(y_{ij} - \bar{u})(u_{ij} - \bar{u})$$

$$C_1 \sum n_{ij}(u_{ij} - \bar{u})(v_{ij} - \bar{v}) + C_2 \sum n_{ij}(v_{ij} - \bar{v})^2 =$$

$$= \sum n_{ij}(y_{ij} - \bar{u})(v_{ij} - \bar{v})$$

joista C_1 ja C_2 lasketaan. Ratkaisu sekä yhdistetyn mallin antamat arvot y_{ij} samoin kuin erotukset $(r_{ij} - y_{ij})$ saatiin ATK:ta käyttäen. Tulokset on taulukoitu liitteessä 3.

5. Yhteenveto

5.1 Mallien vertailu

Additiivisen ja yhdistetyn mallin antamien tulosten vertailu on suoritettu yksinkertaisesti siten, että laskettiin jäännöstermien $r_{ij} - u_{ij}$ neliöiden summat N ja itseisarvojen summat I eri sarjoille. Tulokset ovat:

5.1.1 Yksityiset kuorma-autot; vahinkotiheys

addit. malli	$N_a^1 = 435{,}22$	$I_a^1 = 52{,}10$
yhd. malli	$N_y^1 = 434{,}70$	$I_y^1 = 50{,}64$

5.1.2 Yksityiset kuorma-autot; omaisuusriskimaksu

addit. malli	$N_a^2 = 13.689{,}05$	$I_a^2 = 303{,}51$
yhd. malli	$N_y^2 = 9.169{,}04$	$I_y^2 = 232{,}05$

5.1.3 Ammattimaiset kuorma-autot; vahinkotiheys

addit. malli	$N_a^3 = 2.859{,}53$	$I_a^3 = 243{,}87$
yhd. malli	$N_y^3 = 2.679{,}75$	$I_y^3 = 140{,}31$

5.1.4 Ammattimaiset kuorma-autot; omaisuusriskimaksu

addit. malli	$N_a^4 = 16.624{,}84$	$I_a^4 = 331{,}85$
yhd. malli	$N_y^4 = 15.834{,}88$	$I_y^4 = 306{,}55$

5.1.5 Yksityiset paketti- ja kuorma-autot; vahinkotiheys

addit. malli	$N_a^5 = 7.187{,}36$	$I_a^5 = 258{,}46$
yhd. malli	$N_y^5 = 1.087{,}17$	$I_y^5 = 101{,}86$

5.1.6 Yksityiset paketti- ja kuorma-autot; omaisuusriskimaksu

addit. malli	$N_a^6 = 29.455,26$	$I_a^6 = 462,07$
yhd. malli	$N_y^6 = 11.532,92$	$I_y^6 = 254,26$

5.1.7 Ammattimaiset paketti- ja kuorma-autot; vahinkotiheys

addit. malli	$N_a^7 = 4.443,63$	$I_a^7 = 189,37$
yhd. malli	$N_y^7 = 4.101,61$	$I_y^7 = 188,63$

5.1.8 Ammattimaiset paketti- ja kuorma-autot; omaisuusriskimaksu

addit. malli	$N_a^8 = 18.169,94$	$I_a^8 = 386,45$
yhd. malli	$N_y^8 = 19.035,88$	$I_y^8 = 400,11$

Lukusarjoista 5.1.1 - 5.1.8 voi vetää seuraavia johtopäätöksiä, kun muistaa samalla, että havaintoaineisto on niukka varmojen päätelmien tekemiseksi.

- yleensä yhdistetty malli antaa paremman yhteensopivuuden havaintoarvojen kanssa kuin additiivinen malli. Esimerkkinä kohdat 5.1.1 - 5.1.7.

- jos additiivinen malli noudattaa suhteellisen hyvin havaintoarvoja, ei yhdistetty malli muuta oleellisesti tilannetta, mutta tällöinkin yhdistetyn mallin arvot N_y ja I_y ovat pienemmät kuin vastaavat luvut additiivisella mallilla. Esimerkkinä 5.1.1 ja ehkä 5.1.3 sekä 5.1.7 voidaan lukea tähän ryhmään.

- jos additiivisen mallin yhteensopivuus havaintojen kanssa ei ole kovin hyvä, antaa yhdistetty malli selvästi paremmat tulokset kuin additiivinen malli. Esimerkkinä ovat 5.1.2 ja 5.1.4 - 5.1.6.

- täysin poikkeavan käyttäytymisen osoitti 5.1.8, jossa additiivisen mallin yhteensopivuus havaintojen kanssa ei ollut mitenkään erinomainen, mutta yhdistetty malli ei tuonut parannusta asiaan, vaan antoi jopa hieman huonommat arvot N ja I kuin additiivinen malli. Tämän yhden tapauksen perusteella ei kuitenkaan löytynyt syytä muista eroavaan tulokseen.

Loppupäätelmäksi jäi, että kyseisen mallin mukaisesti muodostettua yhdistettyä mallia voidaan käyttää tasoitusmenetelmänä, jos additiivisen mallin antamat tulokset eivät noudata kyllin hyvin havaintoja. Koska kuitenkin esiintyi poikkeava tulos 5.1.8 ei yhdistetyn mallin käyttäminen ole täysin hyväksyttävissä, jollei samalla suoriteta vertailua kummankin mallin tulosten välillä.

5.2 Pakettiautojen ja kuorma-autojen käsittely yhdessä

5.2.1 Yksityiset ajoneuvot

Kun verrataan liitteessä 2 olevia additiivisen mallin antamia vahinkotiheyden ja omaisuusriskimaksun tuloksia (kohdat 1 ja 2 sekä 5 ja 6), huomataan, että pelkille kuorma-autoille saadut arvot muuttuvat selvästi, kun pakettiautot liitetään mukaan ja mallin yhteensopivuus huononee, kuten tulokset kohdissa 5.1.1, 5.1.2, 5.1.5 ja 5.1.6 osoittavat. Kun käytetään yhdistettyä mallia additiivisen asemesta, yhteensopivuus paranee huomattavasti kohtien 5.1.5 ja 5.1.6 mukaan. Yksityisissä ajoneuvoissa on pakettiautojen paino nykyisin moninkertainen kuorma-autoihin verrattuna, joten tulos on ymmärrettävissä. Todennäköisesti ns. "piilofarmareiden" osuuden pienentyessä tilanne muuttuu siihen suuntaan, että pakettiautoja voitaisiin käsitellä yhdessä kuorma-autojen kanssa.

5.2.2 Ammattimaiset ajoneuvot

Tässä ryhmässä pakettiautojen paino on samaa luokkaa kevyiden kuorma-autojen kanssa. Tulos on täysin toinen kuin yksityisten ajoneuvojen tapauksessa. Pakettiautot voitaisiin rinnastaa kuorma-autoihin ilman, että pelkille kuorma-autoille saadut tulokset muuttuisivat merkittävästi. Tämä pätee sekä additiiviselle mallille, että yhdistetylle mallille, joskin jo mainittu kohdan 5.1.8 poikkeuksellinen tulos osuu tähän ryhmään.

6. Jäännöstermien normaalisuudesta

Sekä additiivisen että yhdistetyn mallin avulla käsiteltäessä havaintoaineistoa käytettiin normaalisuusoletusta hyväksi. Tutkitaan vielä lopuksi, ovatko jäännöstermit $N(0, \sigma^{i}_{R})$-jakautumasta ($i = 1, \ldots, 8$; $R = a, y$).
Koska odotusarvolla on hypoteettinen arvo 0, on σ^2:n harhaton estimaattori

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum \sigma_i^2 \qquad (i = 1, \ldots, 8)$$

Kun lasketaan jokaiselle havaintosarjalle σ^2, saadaan käyttämällä samaa numerointia kuin kohdassa 5.1

6.1.1	$\sigma_a^2 = 36{,}27$	$\sigma_a = 6{,}02$
	$\sigma_y^2 = 36{,}23$	$\sigma_y = 6{,}02$
6.1.2	$\sigma_a^2 = 1.140{,}75$	$\sigma_a = 33{,}78$
	$\sigma_y^2 = 764{,}09$	$\sigma_y = 27{,}64$
6.1.3	$\sigma_a^2 = 238{,}29$	$\sigma_a = 15{,}44$
	$\sigma_y^2 = 223{,}31$	$\sigma_y = 14{,}94$

6.1.4	$\sigma_a^2 = 1.385,40$	$\sigma_a = 37,22$
	$\sigma_y^2 = 1.319,57$	$\sigma_y = 36,33$
6.1.5	$\sigma_a^2 = 479,16$	$\sigma_a = 21,89$
	$\sigma_y^2 = 72,48$	$\sigma_y = 8,51$
6.1.6	$\sigma_a^2 = 1.963,68$	$\sigma_a = 44,31$
	$\sigma_y^2 = 768,86$	$\sigma_y = 27,73$
6.1.7	$\sigma_a^2 = 296,24$	$\sigma_a = 17,21$
	$\sigma_y^2 = 273,44$	$\sigma_y = 16,54$
6.1.8	$\sigma_a^2 = 1.211,33$	$\sigma_a = 34,80$
	$\sigma_y^2 = 1.269,06$	$\sigma_y = 35,62$

Jaetaan nyt jokaisessa havaintosarjassa $r_{ij} - u_{ij}$ varianssinsa estimaatin neliöjuurella. Saadaan uudet havaintosarjat, jotka on esitetty liitteessä 4.

Jos normaalisuusolettamus pitää paikkansa, ovat liitteen 4 havaintosarjat N(0, 1) -jakautumasta. Testataan tämä χ^2-testillä seuraavasti. Jaetaan N(0, 1)-jakautuman todennäköisyysmassa neljään yhtäsuureen osaan siten, että jokaisen osan todennäköisyys on 0,25. Jakopisteet ovat tällöin − 0,67, 0, + 0,67. Olkoon V_i luokkaan i kuuluvien havaintojen lukumäärä, N kaikkien havaintojen lukumäärä ja p_i luokan i todennäköisyys (= 0,25).
Jos normaalisuusolettamus pitää paikkansa, on muuttuja

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{4} \frac{(V_i - Np_i)^2}{Np_i}$$

ψ^2-jakautunut vapausasteluvulla 2. Liitteen 4 luvuista saadaan seuraavat arvot V_i:lle, N_{p_i}:lle ja ψ^2:lle

V_i		1	2	3	4	Yht.	N_{p_i}	ψ^2
5.1.1	add.	3	4	2	3	12	3	0,67
	yhd.	2	4	4	2	12	3	1,33
5.1.2	add.	1	6	1	4	12	3	6,00
	yhd.	2	5	3	2	12	3	2,00
5.1.3	add.	2	6	2	2	12	3	4,00
	yhd.	2	5	3	2	12	3	2,00
5.1.4	add.	2	5	3	2	12	3	2,00
	yhd.	2	5	3	2	12	3	2,00
5.1.5	add.	2	6	3	4	15	3,75	2,33
	yhd.	3	5	4	3	15	3,75	0,73
5.1.6	add.	2	5	5	3	15	3,75	1,80
	yhd.	2	7	5	1	15	3,75	6,07
5.1.7	add.	2	7	3	3	15	3,75	3,93
	yhd.	2	7	3	3	15	3,75	3,93
5.1.8	add.	3	5	4	3	15	3,75	0,73
	yhd.	3	5	4	3	15	3,75	0,73

Kriittinen piste 5 % tasolla on 5,99, joten kahdessa tapauksessa normaaliolettamus hylättäisiin. Havaintoaineisto on kylläkin liian pieni varmojen johtopäätösten tekemiselle. Odotusarvo jokaisessa luokassa pitäisi olla vähintään 10. (Tässä vain 3 ja 3,75).

KIRJALLISUUSVIITTEET

(1) Almer: Risk Analysis in theory and practical Statistics. Transactions XV:th International Congress of Actuaries, Vol. II s. 314-353. New York 1957.

(2) Bailey-Simon: Two Studies in Automobile Insurance Ratemaking, The ASTIN Bulletin, Vol. I, Part IV, 1960, s. 192-217.

(3) Jung: On Automobile Insurance Ratemaking, The ASTIN Bulletin, Vol. V, Part I, 1968, s. 41-47.

(4) B. Ajne: A note on the multiplicative ratemaking model, The ASTIN Bulletin, Vol. VIII, Part 2, s. 144-151.

(5) Paavo Pitkänen: Tariff Theory, The ASTIN Bulletin, Vol. VIII, Part 2, s. 204-228.

LIITE 1

HAVAINTOARVOT VUOSIEN 1970–1974 KESKIARVOINA LASKETTUNA

1 Ammattimaiset kuorma-autot

1.1 Vakuutuskanta n_{ij} (i = alue j = painoluokka)

i \ j	1	2	3	4	
1	194	337	566	215	1.312
2	318	755	2.487	1.841	5.401
3	338	602	2.369	1.989	5.298
	850	1.694	5.422	4.045	12.011

1.2 Vahinkokappaleet

i \ j	1	2	3	4
1	99,6	153,8	245,6	98,4
2	123,8	199,2	735,6	551,8
3	102,4	136,0	609,2	558,4

Vahinkotiheys r_{ij}

i \ j	1	2	3	4	
1	512	457	434	459	1.862
2	390	264	296	300	1.250
3	303	226	257	281	1.067
	1.205	947	987	1.040	4.179

1.3 Omaisuuskorvaus

i \ j	1	2	3	4
1	141.706	267.364	409.629	235.750
2	159.980	367.970	1.571.230	1.610.764
3	134.139	248.357	1.180.223	1.593.036

Riskimaksu r_{ij}

i \ j	1	2	3	4	
1	729	794	723	1.099	3.345
2	503	487	632	875	2.497
3	397	412	498	801	2.108
	1.629	1.693	1.853	2.775	7.950

2 Ammattimaiset pakettiautot

2.1 Vakuutuskanta n_i

1	167
2	317
3	325

2.2 Vahinkokappaleet

1	55,0
2	73,0
3	59,4

Vahinkotiheys r_i

1	330
2	230
3	182

2.3 Omaisuuskorvaus			Riskimaksu r_i		
	1	68.069		1	408
	2	82.988		2	261
	3	52.768		3	162

3 Yksityiset kuorma-autot

3.1 Vakuutuskanta n_{ij}

i \ j	1	2	3	4	
1	1.252	710	563	294	2.819
2	2.531	1.876	1.673	665	6.745
3	1.857	1.342	1.137	564	4.900
	5.640	3.928	3.373	1.523	14.464

3.2 Vahinkokappaleet

i \ j	1	2	3	4
1	510,8	276,6	255,4	131,0
2	580,6	408,8	476,6	189,8
3	389,4	278,6	300,8	135,4

Vahinkotiheys r_{ij}

i \ j	1	2	3	4	
1	408	390	453	446	1.697
2	229	218	285	285	1.017
3	210	208	265	240	923
	847	816	1.003	971	3.637

3.3 Omaisuuskorvaus

i \ j	1	2	3	4
1	588.539	375.789	406.261	271.034
2	725.138	651.399	829.238	503.118
3	472.300	438.823	491.495	317.697

Riskimaksu r_{ij}

i \ j	1	2	3	4	
1	470	530	721	922	2.643
2	286	347	496	756	1.885
3	254	327	432	563	1.576
	1.010	1.204	1.649	2.241	6.104

4 Yksityiset pakettiautot

4.1 Vakuutuskanta n_i		
	1	7.329
	2	17.512
	3	13.500

4.2 Vahinkokappaleet	1	1.830	Vahinkotiheys	r_i	1	250
	2	2.439			2	139
	3	1.722			3	128
4.3 Omaisuuskorvaus	1	2.166.463	Riskimaksu	r_i	1	296
	2	2.920.604			2	167
	3	1.948.766			3	144

LIITE 2

ADDITIIVISEEN MALLIIN LIITTYVÄT SUUREET

Merkinnät $\mu_{ij} = A + \alpha_i + \beta_j$

r_{ij} = havaintoarvo

1 YKSITYISET KUORMA-AUTOT; VAHINKOTIHEYS

μ_{ij}			
403.64	394.22	457.15	446.40
230.49	221.06	284.00	273.24
210.91	201.49	264.42	253.66

$r_{ij} - \mu_{ij}$			
+ 4.36	- 4.22	- 4.15	- 0.40
- 1.49	- 3.06	+ 1.00	+11.76
- 0.91	+ 6.51	+ 0.58	-13.66

2 YKSITYISET KUORMA-AUTOT; OMAISUUSRISKIMAKSU

μ_{ij}			
482.09	547.54	688.67	890.07
291.73	357.18	498.30	699.70
238.04	303.49	444.62	646.02

$r_{ij} - \mu_{ij}$			
-12.09	-17.54	+32.33	+31.93
- 5.73	-10.18	- 2.30	+56.30
+15.96	+23.51	-12.62	-83.02

3 AMMATTIMAISET KUORMA-AUTOT; VAHINKOTIHEYS

μ_{ij}			
517.59	426.35	448.41	464.05
361.28	270.04	292.11	307.75
326.82	235.58	257.64	273.28

$r_{ij} - \mu_{ij}$			
- 5.59	+30.65	-14.41	- 5.05
+28.72	- 6.04	+ 3.89	- 7.75
-23.82	- 9.58	- 0.65	+ 7.72

4 AMMATTIMAISET KUORMA-AUTOT; OMAISUUSRISKIMAKSU

μ_{ij}			
696.74	706.82	794.31	1077.04
511.00	521.08	608.57	891.30
407.99	418.07	505.56	788.29

$r_{ij} - \mu_{ij}$			
+32.26	+87.18	-71.31	+21.96
- 8.00	-34.08	+23.43	-16.30
-10.99	- 6.07	- 7.56	+12.71

5 YKSITYISET PAKETTI- JA KUORMA-AUTOT; VAHINKOTIHEYS

μ_{ij}					$r_{ij}-\mu_{ij}$				
264.70	366.58	355.22	417.57	407.77	-14.70	+41.42	+34.78	+35.43	+38.23
136.48	238.36	227.00	289.34	279.54	+ 2.52	- 9.36	- 9.00	- 4.34	+ 5.46
123.29	225.17	213.82	276.16	266.36	+ 4.71	-15.17	- 5.82	-11.16	-26.36

6 YKSITYISET PAKETTI- JA KUORMA-AUTOT; OMAISUUSRISKIMAKSU

μ_{ij}					$r_{ij}-\mu_{ij}$				
312.62	440.16	503.50	644.12	845.93	-16.62	+29.84	+26.50	+76.88	+76.07
166.62	294.16	357.50	498.12	699.93	+ 0.38	- 8.16	-10.50	- 2.12	+56.07
135.46	263.00	326.34	466.96	668.77	+ 8.54	- 9.00	+ 0.66	-34.96	+105.77

7 AMMATTIMAISET PAKETTI- JA KUORMA-AUTOT; VAHINKOTIHEYS

μ_{ij}					$r_{ij}-\mu_{ij}$				
365.14	513.60	422.17	443.77	459.16	-35.14	- 1.60	+34.83	- 9.77	- 0.16
214.37	362.83	271.40	293.00	308.40	+15.63	+27.17	- 7.40	+ 3.00	- 8.40
179.19	327.64	236.22	257.81	273.21	+ 2.81	-24.64	-10.22	- 0.81	+ 7.79

8 AMMATTIMAISET PAKETTI- JA KUORMA-AUTOT; OMAISUUSRISKIMAKSU

μ_{ij}					$r_{ij}-\mu_{ij}$				
436.95	693.43	703.40	790.48	1072.98	-28.95	+35.57	+90.60	-67.48	+26.02
255.96	511.84	521.81	608.89	891.39	+ 5.64	- 8.84	-34.81	+23.11	-16.39
152.62	409.10	419.06	506.14	788.64	+ 9.38	-12.10	- 7.06	- 8.14	+12.36

LIITE 3

YHDISTETTYYN MALLIIN LIITTYVÄT SUUREET

Merkinnät $y_{ij} = A + C_1(\alpha_i + \beta_j) + C_2 \alpha_i \beta_i$

r_{ij} = havaintoarvo

1 YKSITYISET KUORMA-AUTOT; VAHINKOTIHEYS

$C_1 = 0.99988729$ $C_2 = -2.13677566 \cdot 10^{-4}$

y_{ij}			
404.05	394.92	455.88	445.46
230.41	220.93	284.23	273.41
210.78	201.27	264.82	253.96

$r_{ij} - y_{ij}$			
+ 3.95	- 4.92	- 2.88	+ 0.54
- 1.41	- 2.93	+ 0.77	+11.59
- 0.78	+ 6.73	+ 0.18	-13.96

2 YKSITYISET KUORMA-AUTOT; OMAISUUSRISKIMAKSU

$C_1 = 1.00216820$ $C_2 = 1.24801354 \cdot 10^{-3}$

y_{ij}			
459.14	538.74	710.37	955.30
294.00	358.05	496.15	693.23
247.43	307.09	435.74	619.33

$r_{ij} - y_{ij}$			
+10.86	- 8.74	+10.63	-33.30
- 8.00	-11.05	- 0.15	+62.77
+ 6.57	+19.91	- 3.74	-56.33

3 AMMATTIMAISET KUORMA-AUTOT; VAHINKOTIHEYS

$C_1 = 1.00472629$ $C_2 = -1.54580611 \cdot 10^{-3}$

y_{ij}			
503.55	433.66	450.56	462.54
361.75	269.82	292.05	307.81
330.49	233.70	257.10	273.70

$r_{ij} - y_{ij}$			
+ 8.45	+23.34	-16.56	- 3.54
+28.25	- 5.82	+ 3.95	- 7.81
-27.49	- 7.70	- 0.10	+ 7.30

4 AMMATTIMAISET KUORMA-AUTOT; OMAISUUSRISKIMAKSU

$C_1 = 0.992181908$ $C_2 = -5.92641100 \cdot 10^{-4}$

y_{ij}			
718.00	726.74	802.62	1047.80
514.72	524.57	610.08	886.38
401.99	412.45	503.30	796.86

$r_{ij} - y_{ij}$			
+11.00	+67.26	-79.62	+51.20
-11.72	-37.57	+21.92	-11.38
- 4.99	- 0.45	- 5.30	+ 4.14

5 YKSITYISET PAKETTI- JA KUORMA-AUTOT; VAHINKOTIHEYS

$C_1 = 0.999011916$ $C_2 = 4.04547503 \cdot 10^{-3}$

y_{ij}					$r_{ij} - y_{ij}$				
251.27	397.64	381.32	470.88	456.81	- 1.27	+10.36	+ 8.68	-17.88	-10.81
139.00	232.52	222.09	279.32	270.32	0.00	- 3.52	- 4.09	+ 5.68	+14.68
127.46	215.54	205.72	259.62	251.15	+ 0.54	- 5.54	+ 2.28	+ 5.38	-11.15

6 YKSITYISET PAKETTI- JA KUORMA-AUTOT; OMAISUUSRISKIMAKSU

$C_1 = 1.00202410$ $C_2 = 1.97395503 \cdot 10^{-3}$

y_{ij}					$r_{ij} - y_{ij}$				
296.64	456.86	536.43	713.09	966.61	- 0.64	+13.14	- 6.43	+ 7.91	-44.61
168.61	292.08	353.39	489.52	684.89	- 1.61	- 6.08	- 6.39	+ 6.48	+71.11
141.29	256.91	314.33	441.81	624.76	+ 2.71	- 2.91	+12.67	- 9.81	-61.76

7 AMMATTIMAISET PAKETTI- JA KUORMA-AUTOT; VAHINKOTIHEYS

$C_1 = 0.998984834$ $C_2 = 6.97019095 \cdot 10^{-4}$

y_{ij}					$r_{ij} - y_{ij}$				
356.84	520.55	419.73	443.55	460.52	-26.84	- 8.55	+37.27	- 9.55	- 1.52
214.56	362.67	271.46	293.01	308.36	+15.43	+27.33	- 7.46	+ 2.99	- 8.36
181.36	325.82	236.85	257.87	272.85	+ 0.64	-22.82	-10.85	- 0.87	+ 8.15

8 AMMATTIMAISET PAKETTI- JA KUORMA-AUTOT; OMAISUUSRISKIMAKSU

$C_1 = 0.998015501$ $C_2 = 2.10950607 \cdot 10^{-4}$

y_{ij}					$r_{ij} - y_{ij}$				
454.76	699.60	709.11	792.24	1061.92	-46.76	+29.40	+84.89	-69.24	+37.08
258.16	512.82	522.72	609.18	889.68	+ 2.84	- 9.82	-35.72	+22.82	-14.68
146.91	407.14	417.25	505.60	792.22	+15.09	-10.14	- 5.25	- 7.60	+ 8.78

LIITE 4

Suureet $(r_{ij}-u_{ij}):\sigma_R^i$. Otsikkonumerointi vastaa kohdan 5.1 numerointia.

	Additiivinen $(r_{ij}-u_{ij}):\sigma_a^i$					Yhdistetty $(r_{ij}-y_{ij}):\sigma_y^i$				
5.1.1	+0.72	-0.70	-0.69	-0.07		+0.66	-0.82	-0.48	+0.09	
	-0.25	-0.51	+0.17	+1.95		-0.23	-0.49	+0.13	+1.93	
	-0.15	+1.08	+0.10	-2.27		-0.13	+1.12	+0.03	-2.32	
5.1.2	-0.36	-0.52	+0.96	+0.95		+0.39	-0.32	+0.38	-1.20	
	-0.17	-0.30	-0.07	+1.67		-0.29	-0.40	-0.01	+2.27	
	+0.47	+0.70	-0.37	-2.46		+0.24	+0.72	-0.14	-2.04	
5.1.3	-0.36	+1.99	-0.93	-0.33		+0.57	+1.56	-1.11	-0.24	
	+1.86	-0.39	+0.25	-0.50		+1.89	-0.39	+0.26	-0.52	
	-1.54	-0.62	-0.04	+0.50		-1.84	-0.52	-0.01	+0.49	
5.1.4	+0.87	+2.34	-1.92	+0.59		+0.30	+1.85	-2.19	+1.41	
	-0.21	-0.92	+0.63	-0.44		-0.32	-1.03	+0.60	-0.31	
	-0.30	-0.16	-0.20	+0.34		-0.14	-0.01	-0.15	+0.11	
5.1.5	-0.67	+1.89	+1.59	+1.62	+1.75	-0.15	+1.22	+1.02	-2.10	-1.27
	+0.12	-0.43	-0.41	-0.20	+0.25	-0.00	-0.41	-0.48	+0.67	+1.73
	+0.22	-0.69	-0.27	-0.51	-1.20	+0.06	-0.65	+0.27	+0.63	-1.31
5.1.6	-0.38	+0.67	+0.60	+1.74	+1.72	-0.02	+0.47	-0.23	+0.29	-1.61
	+0.01	-0.18	-0.24	-0.05	+1.27	-0.06	-0.22	-0.23	+0.23	+2.56
	+0.19	-0.20	+0.01	-0.79	-2.39	+0.10	-0.10	+0.46	-0.35	-2.23
5.1.7	-2.04	-0.09	+2.02	-0.57	-0.01	-1.62	-0.52	+2.25	-0.58	-0.09
	+0.91	+1.58	-0.43	+0.17	-0.49	+0.93	+1.65	-0.45	+0.18	-0.51
	+0.16	-1.43	-0.59	-0.05	+0.45	+0.04	-1.38	-0.66	-0.05	+0.49
5.1.8	-0.83	+1.02	+2.60	-1.94	+0.75	-1.31	+0.83	+2.38	-1.94	+1.04
	+0.16	-0.25	-1.00	+0.66	-0.47	+0.98	-0.28	-1.00	+0.64	-0.41
	+0.27	-0.35	-0.20	-0.23	+0.36	+0.42	-0.28	-0.15	-0.21	+0.25