

Riskihenkivakuutusten raukeamisasteen stressitestaus

SHV-työ (suppea)

Mari Leppänen

30.4.2020

Sisällysluettelo

Abstract	2
1 Johdanto	3
2 Oletukset ja menetelmät	5
2.1 Raukeamisintensiteetit	5
2.2 Vuosittainen vaihtelu	6
2.3 Brownin liike ja vakuutusten keston välinen korrelaatio	8
2.4 Raukeamisasteen simulointi	11
2.5 Korrelaatiotasot hajonnan avulla	13
2.6 Raukeamisasteen vakavaraisuusvaikutukset	13
3 Simuloinnin tulokset	15
3.1 Vakavaraisuusvaikutukset ja Solvenssi II:n standardikaavan sopivuus	15
3.2 Makromuuttujien hyödyntäminen	17
4 Johtopäätökset	20
Lähteet	21
Liite 1 Käänteisen Gaussin jakauman parametrien sovitus	22
Liite 2 Brownin liikkeen ja käänteisen Gaussin jakauman yhteys	23
Liite 3 Raukeamisasteen vaikutus omaan varallisuuteen	26

Abstract

This exercise focuses on stress testing of lapse risk in life insurance business. The main interest here is to introduce the method rather than analyse the results of the calculations.

Some assumptions of lapse levels need to be made for example when calculating technical provisions and solvency capital requirements based on Solvency II regulation. In this exercise we observe what happens to technical provisions in different kind of scenarios of lapse rates and compare those results to shock in Solvency II standard solvency capital requirement model (standard SCR-model).

Inverse Gaussian distribution is used as distribution of time for insurance policy to last. Average lapse rates of generic insurance portfolio are used for fixing parameters of Inverse Gaussian distribution. Correlations between lapses of different insurance policies' is set by using connection of Brownian motion and Inverse Gaussian distribution.

The stress test method introduced here seems suitable for valuating lapse risk in different risk levels, checking suitability of Solvency II standard SCR-model and for estimating how macroeconomic scenarios could impact on solvency situation via lapse rates.

1 Johdanto

Työssä tutkitaan riskihenkivakuutusten raukeamis- eli irtisanomisasteen vaikutusta Solvenssi II -kehikon mukaiseen vakavaraisuuteen. Vakavaraisuusvaikutuksina huomioidaan raukeamisten vaikutus vastuuelan kassavirtojen parhaaseen estimaattiin sekä vakuutustoiminnasta saatavaan katteeseen. Lähtökohtana ovat vastuuelan laskeminen parhaan estimaatin avulla ja positiivinen kateodotus. Kun oletamme sopimuksen olevan voitollinen, vakuutuksen irtisanominen kasvattaa vastuuelkaa ja pienentää omaa varallisuutta.

Solvenssi II -kehikon mukainen vastuuelka koostuu parhaasta estimaatista¹ ja riskimarginaalista. Paras estimaatti on vakuutus sopimuksista aiheutuvien velvoitteiden täyttämiseen liittyvien tulevaisuuden kassavirtojen odotettu nykyarvo. Riskimarginaali puolestaan on pääomakustannus, joka vastaa vakuutus sopimuksista niiden kesto aikana aiheutuvien velvoitteiden täyttämiseen vaadittavaa vakavaraisuuspääomavaatimusta. Yhdessä nämä kaksi erää muodostavat määrään, jonka maksamalla vakuutusyhtiö voisi välittömästi luovuttaa vakuutus sopimuksista aiheutuvan vastuunsa toiselle vakuutusyhtiölle. [1]

Riskihenkivakuutusten raukeamiset ovat siis vakuutus sopimusten irtisanomisia. Irtisanomisten myötä sopimuksen vakuutusmaksut jäävät saamatta. Lisäksi irtisanomisen koskiessa vakuutus kautta, josta maksu on jo saatu, palautetaan maksusta ylimääräinen osuus vakuutuksen ottajalle. Työssä raukeamisintensiteetti kuvaa vakuutuksen todennäköisyyttä raueta ja raukeamisaste tarkasteluperiodin aikana rauenneiden vakuutusten osuutta periodin alussa voimassa olleista vakuutuksista. Raukeamisintensiteetti ja raukeamisaste määritellään tässä työssä vakuutuksille niiden voimassaolon perusteella. Kokonaisraukeamisasteella tarkoitetaan tässä kaikkien tarkasteluperiodin aikana rauenneiden vakuutusten yhteismäärää suhteessa periodin alussa voimassa olleiden vakuutusten lukumäärään voimassaoloajoista riippumatta.

Harjoitustyössä esitetään tapa arvioida, kuinka paljon toteutunut raukeamisaste voisi erota oletetusta vuoden aikana ja mikä vaikutus poikkeamalla olisi vastuuelan parhaaseen estimaattiin, eli tulevaisuuden kassavirtojen odotettuun nykyarvoon, jos toteutunut raukeamisaste otettaisiin käyttöön vastuuelan parhaan estimaatin laskennassa raukeamisintensiteettinä. Toisin sanoen uusi havaittu raukeamisaste oletettaisiin pysyväksi muutokseksi, jolloin oma varallisuus muuttuisi vastuuelan parhaan estimaatin muutoksen verran.² Lisäksi raukeamisasteen muutos vaikuttaisi tarkasteluvuoden toteutuneeseen katteeseen. Työssä ei huomioida raukeamisintensiteettien vaikutusta riskimarginaaliin.

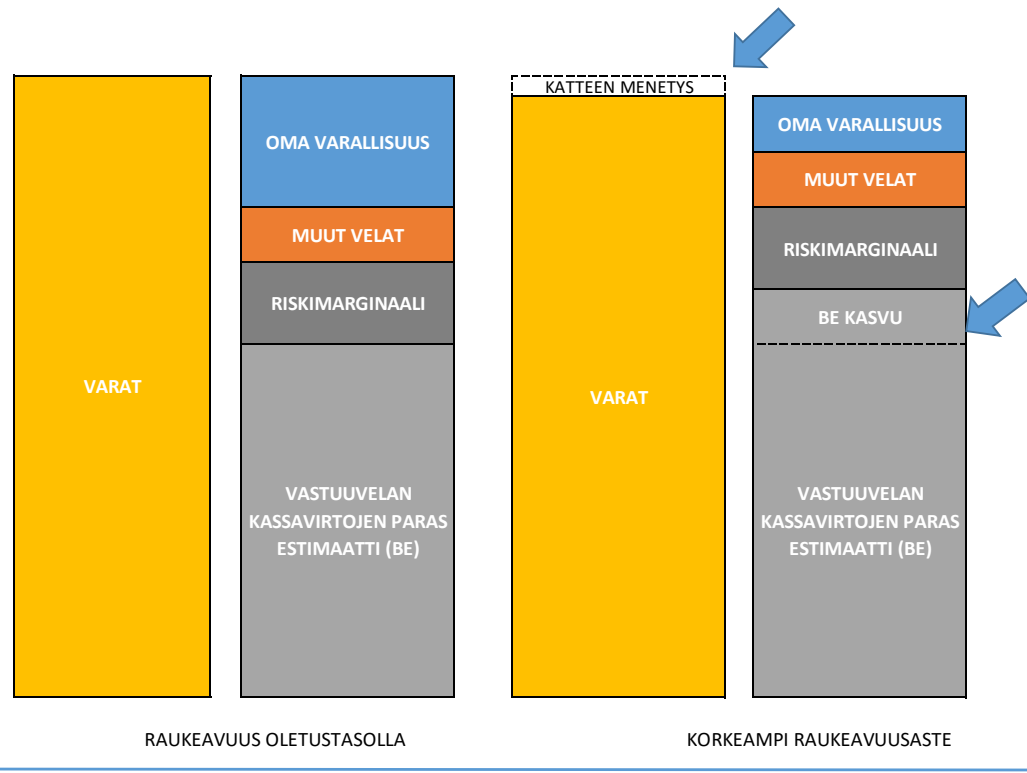
Seuraavalla sivulla on esitetty raukeamisasteen pysyvän kasvun yksinkertaistettu vaikutus omaan varallisuuteen. Kuvassa oletetaan, että kaikki muut tase-erät pysyvät muuttumattomina paitsi tutkittavien vakuutusten paras estimaatti tarkasteluvuoden lopussa sekä tarkasteluvuoden aikana irtisanomisten (raukeamisten) vuoksi tehdyt vakuutusmaksujen palautukset. Lisäksi kuvan havainnollisuuden vuoksi on oletettu, että yhtiöllä on runsaasti muuta, raukeamistarkastelun ulkopuolella olevaa, positiivisen³ parhaan

¹ Joissakin tapauksissa vastuuelka määritetään parhaan estimaatin ja riskimarginaalin sijaan rahoitusvälineiden markkina-arvojen perusteella, sillä vakuutusyhtiö laissa todetaan (VYL 521/2008 10:5): ”Jos on saatavilla luotettavia markkina-arvoja rahoitusvälineistä, joihin liittyvien kassavirtojen voidaan todeta luotettavasti vastaavan vakuutusyhtiön velvoitteisiin liittyviä kassavirtoja, vastuuelan arvo on tältä osin määritettävä rahoitusvälineiden markkina-arvojen perusteella.” [1]

² Hieman yksinkertaistettuna oma varallisuus on varojen arvo vähennettynä velkojen (sis. vastuuelan) arvolla.

³ Paras estimaatti on osa vastuuelkaa ja lähtökohtaisesti se siis pienentää omaa varallisuutta. Jos vakuutus kanta on kuitenkin hyvin kannattavaa eikä esimerkiksi jo sattuneista vahingoista ole muodostunut suurta, vielä maksamatta olevien vahinkojen muodostamaa korvausvastuuta, voisi vastuuelan kassavirtojen paras estimaatti olla myös negatiivinen. Negatiivinen paras estimaatti kasvattaisi omaa varallisuutta.

estimaatin omaavaa vakuutuskantaa, jolloin yhtiön paras estimaatti saadaan kuvassa positiiviseksi. Nuolet kuvaavat omaan varallisuuteen vaikuttavia muutoksia.



Kuvan tilanteessa vakuutusmaksut on maksettu tarkasteluvuoden alussa, jolloin niistä syntyvät oletetut korvaukset ja maksujen palautukset ovat sisällä parhaan estimaatin arvossa ja maksut ovat osa varoja. Raukeamisasteen epäsuotuisa kehitys, eli kasvu, purkautuisi oletettua heikompana katteena. Tässä tapauksessa katteen pieneneminen realisoituisi käytännössä oletettua suurempina määrinä maksujen palautuksia, mikä vähentäisi varoja.

Vastuuelan kassavirtojen parhaaseen estimaattiin toteutuneilla raukeamisasteilla ei ole automaattisesti muuta vaikutusta kuin hieman muuttunut vakuutuskanta.⁴ Tässä työssä lähtökohtana on kuitenkin edellä mainittu oletus raukeamisintensiteettien pysyvistä muutoksesta toteutuneita raukeamisasteita vastaaviksi, jolloin vastuuelan parhaan estimaatin laskentaparametreja on päivitettävä. Kannattavien vakuutusten osalta tämä tarkoittaa kuvasta nähtävää parhaan estimaatin kasvattamista, mikä vähentää oman varallisuuden määrää.

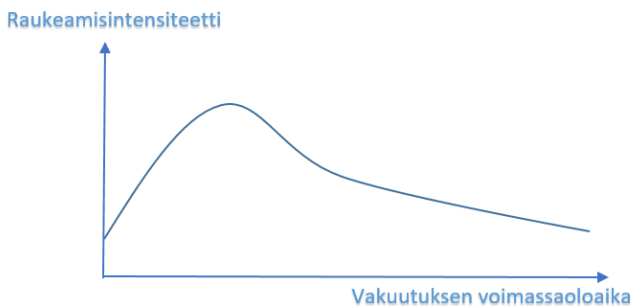
Työssä pääpaino on menetelmän esittelyssä stressitestin tulosten sijaan. Menetelmää kuitenkin havainnollistetaan myös kuvitteelliselle portfoliolle tehtyjen laskelmien avulla. Raukeamisasteen satunnaisvaihtelun vaikutusta arvioidaan jakauma- ja korrelaatio-oletusten avulla. Lisäksi tutkitaan makromuuttujien vaikutusta raukeamisasteeseen. Menetelmää toivotaan voitavan hyödyntää vakuutusyhtiöiden stressitestauksissa ja sitä kautta kokonaisvakavaraisuustarpeen arvioinnissa.

⁴ Vakuutuskanta elää jonkin verran jatkuvasti joko irtisanomisista tai vakuutustapahtumista johtuvien vakuutussopimusten päättymisten ja uusien vakuutusten voimaan tulon vuoksi.

2 Oletukset ja menetelmät

2.1 Raukeamisintensiteetit

Satunnaisvaihtelun suuruuden arvioimiseksi oletetaan, että yksittäisen vakuutuksen kesto on käänteistä Gaussin jakaumaa noudattava satunnaismuuttuja. Kyseisellä jakaumalla eri ajan voimassa olleiden vakuutusten raukeamisintensiteetit, eli todennäköisyydet tulla irtisanotuiksi seuraavan 12 kuukauden aikana, saadaan noudattamaan empiirisesti havaittua muotoa, jossa vakuutuksen voimassaoloajan kasvaessa raukeavuuden todennäköisyys ensin kasvaa ja alkaa sitten laskea [2]. Alla havainnollistetaan kyseistä muotoa.



Yllä kuvattua ilmiötä tukevat lähteeseen [3] koostetut useat tutkimustulokset siitä, että todennäköisyys irtisanoa vakuutus laskee vakuutus sopimuksen keston kasvaessa. Kaikkia tutkimustuloksia ei ole eritelty tuotteittain esimerkiksi riski- ja säästöhenkivakuutuksiin, mutta erään lähteessä mainitun tutkimuksen pohjana on japanilainen tapaturmavakuutusaineisto, jonka mukaan irtisanomistodennäköisyys kasvaisi ensin ja kääntyisi laskuun vasta kahden ensimmäisen voimassaolo vuoden jälkeen. Edellä mainittua raukeamisasteiden käyttäytymisiä tukee myös harjoitustyön yhteydessä suomalaisen henkivakuutusyhtiön empiirisestä aineistosta tehdyt havainnot riskihenkivakuutusten voimassaolokohtaisista raukeamisasteista.

Yhtenä selityksenä ensimmäisten voimassaolovuosien aikana tehtävien irtisanomisten suhteellisen suurelle osuudelle voivat olla jatkuvamaksuisten vakuutusten laskut, jotka asiakas saa voimaansaaton jälkeen vuosittain tai useammin. Ensimmäisten laskujen aikana asiakas harkitsee kannattaako vakuutus maksaa, mutta joidenkin vuosin päästä maksamisesta ja turvan ylläpidosta tulee rutiininomaisempaa. Tähän viittaisi myös lähteessä [3] mainittu tutkimus, jonka mukaan jatkuvamaksuisten riskihenkivakuutusten irtisanomistodennäköisyys olisi 90 %:a kertamaksuisia suurempi.

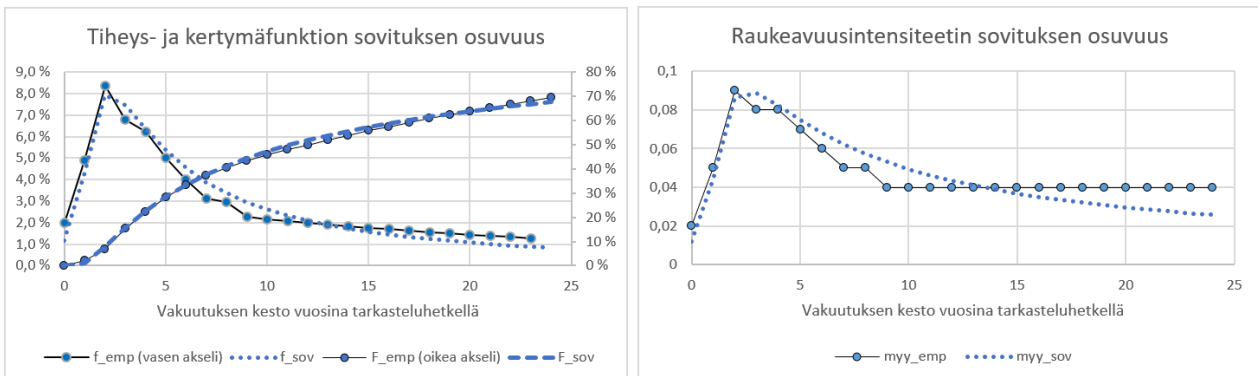
Tässä työssä raukeamisasteita tutkitaan hazardifunktion (hazard rate) avulla. Ajalla t suhteutettu todennäköisyys sille, että ajan x voimassa ollut sopimus päättyy viimeistään ajan t kuluttua, saadaan yhtälöistä

$$\frac{P(T < x + t \mid T > x)}{t} = \frac{P(x < T < x + t)}{t P(T > x)} = \frac{F(x + t) - F(x)}{t} \frac{1}{1 - F(x)} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{f(x)}{1 - F(x)} := \mu(x) \quad (1)$$

Yllä määritellyt vakuutuksen voimassaolon keston perustuvat raukeamisintensiteetit $\mu(x)$ sovitetaan käänteiseen Gaussin jakaumaan pienimmän neliösumman menetelmällä yhtälöllä:

$$\mu_{oletus}(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}, \quad (2)$$

missä x on vakuutuksen voimassaoloaika tarkasteluhetkellä, $\mu_{oletus}(x)$ on x -vuotta voimassa olleen vakuutuksen raukeamisintensiteetti, $f(x)$ on käänteisen Gaussin jakauman tiheysfunktio ja $F(x)$ on käänteisen Gaussin jakauman kertymäfunktio. Alla on esitetty luvun 3 esimerkin raukeamisintensiteeteille tehty jakaumasovitus (avattu tarkemmin liitteessä 1).



2.2 Vuosittainen vaihtelu

Wattson Wyatin vuoden 2014 henkivakuutusta tarjoavien yhtiöiden pääomavaateiden kalibrointia käsittelevässä julkaisussa [4] todetaan vuosittaisen raukeamisasteen suhteen edellisen vuoden vastaavaan noudattavan melko hyvin log-normaalia jakaumaa.

Olettamalla vuosittaisen suhteen odotusarvon yhdeksi ja yhdistämällä edellä mainitun jakaumaoletuksen Solvenssi II -kehikon mukaisesta vakavaraisuusvaatimuksen standardikaavasta saatavaan tietoon siitä, että todennäköisyydellä 99,5% vuosittainen raukeamisasteen muutos on 50% tai vähemmän⁵, saamme määritettyä vuosittaiselle heilunnalle hajonnan σ seuraavasti:

$$\left\{ \begin{array}{l} E\left(\frac{\mu_v}{\mu_{v-1}}\right) = e^{\mu+0,5\sigma^2} = 1 \rightarrow \mu = -0,5\sigma^2 \\ D^2\left(\frac{\mu_v}{\mu_{v-1}}\right) = (e^{\sigma^2} - 1)(e^{2\mu+\sigma^2}) \\ P\left(\frac{\mu_v}{\mu_{v-1}} < 1,5\right) = 99,5\% \end{array} \right\} \rightarrow$$

$$P\left(\frac{\ln\left(\frac{\mu_v}{\mu_{v-1}}\right)+0,5\sigma^2}{\sigma} < \frac{\ln(1,5)+0,5\sigma^2}{\sigma}\right) = 99,5\% \rightarrow$$

$$\frac{\ln(1,5) + 0,5\sigma^2}{\sigma} = N^{-1}(99,5\%) \rightarrow$$

$$\sigma = N^{-1}(99,5\%) \pm \sqrt{N^{-1}(99,5\%)^2 - 2 \ln(1,5)} \approx \begin{cases} 0,163 \\ 4,989 \end{cases}^6 \text{ ja } \mu = \begin{cases} -0,013 \\ -12,446 \end{cases} \quad (3)$$

⁵ Solvenssi II -kehikon vakavaraisuuspääomavaade on kalibroitu riskitasolle 99,5% ja standardikaavan mukainen pysyvä kasvu raukeamisasteissa on 50%. [5]

⁶ Mikäli tarkasteltavan jakauman parametreiksi valittaisiin vaihtoehto, jossa odotusarvo on noin -12 ja hajotan noin 5, saataisiin intuitiivisesti kummallisia tuloksia. Esim. 99%:n todennäköisyydellä vuoden raukeamisaste olisi alle 40% edellisen vuoden tasosta.

missä μ_v on vuoden v keskimääräinen raukeamisaste (kokonaisraukeamisaste) yli kaiken ikäisten vakuutusten, eli

$$\mu_v = \frac{\text{vuoden } v \text{ aikana rauenneet vakuutukset}}{\text{vuoden } v \text{ alussa voimassa olleet vakuutukset}} \quad (4)$$

ja $N(z)$ on standardoidun normaalijakauman kertymäfunktio.

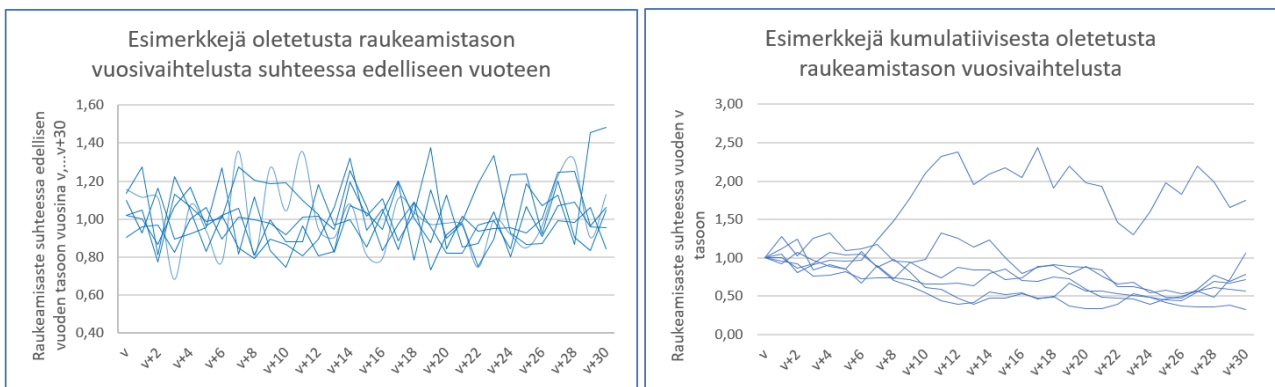
Nyt suureen

$$\frac{\mu_v}{\mu_{v-1}} \quad (5)$$

hajonta saadaan laskettua log-normaalijakauman määritelmän mukaan kaavalla

$$D\left(\frac{\mu_v}{\mu_{v-1}}\right) = \sqrt{(e^{\sigma^2} - 1)(e^{2\mu + \sigma^2})} \approx 0,16. \quad (6)$$

Seuraavassa kuvassa on havainnollistettu kokonaisraukeamisasteen (5) kehitystä 30:n vuoden aikana kuudella eri skenaariolla, jotka on muodostettu yllä mainitulla log-normaalilla jakaumaoletuksella ja kohdan (3) parametreilla. Vasemman puoleisessa kuvassa suure (5) saa edellä mainitun jakauman mukaisia arvoja, eli skenaariot kuvaavat kokonaisraukeamisasteen kehitystä suhteessa edelliseen vuoteen. Oikean puoleisessa kuvassa kokonaisraukeamisaste suhteutetaan edellisen vuoden sijaan ensimmäisen tarkasteluvuoden tasoon. Kuvissa havainnollistetaan siis kokonaisraukeamisasteen heilahtelua skenaarioissa, jotka on johdettu Solvenssi II -kehikon pääomavaateen kalibroinnin taustalla olevaa jakaumaoletusta sekä pääomavaateen riskitasosta johdettua hajontaparametria hyödyntäen.



Mikäli tarkasteltavan yhtiön omaa historia-aineistoa on saatavilla, on edelliseen vuoteen suhteutetun kokonaisuuden raukeamisasteen hajonta laskettavissa siitä.

Seuraavassa luvussa esitetään tapa asettaa vakuutusten keston välille korrelaatio sekä arvioida vakuutusten keston välisen korrelaation tasoa kaavan (6) hajonnan avulla. Tätä varten sovelletaan Brownin liikkeen ja käänteisen Gaussin jakauman yhteyttä.

2.3 Brownin liike ja vakuutusten keston välinen korrelaatio

Tässä työssä vakuutusten raukeamistapahtuma mallinnetaan hyödyntäen latenttia⁷ muuttujaa, joka noudattaa Brownin liikettä. Tällä mallinnustavalla saamme asetettua luontevasti korrelaation raukeamisten välille.

Määritellään aluksi standardi Brownin liike⁸. Jatkuva prosessi $B(t)$ on standardi Brownin liike, jos

- (i) $B(0) = 0$
- (ii) $B(t) - B(s) \sim N(0, t - s)$, missä $s < t$ ja N on normaalijakauma
- (iii) Lisäykset $B(t) - B(s)$ ovat riippumattomia lisäyksistä $B(v) - B(u)$, kun $u < v < s < t$

Yleistetty Brownin liike $Y(t)$ saadaan muodostettua edellä kuvatusta prosessista $B(t)$ seuraavasti

$$Y(t) = at + bB(t), \text{ missä } a \text{ ja } b \text{ ovat vakioita}$$

Nyt jatkuvalle prosessille $Y(t)$ pätee, että

- (i) $Y(0) = 0$
- (ii) $Y(t) - Y(s) \sim N(a(t - s), b^2(t - s))$, missä $s < t$ ja N on normaalijakauma
- (iii) Lisäykset $Y(t) - Y(s)$ ovat riippumattomia lisäyksistä $Y(v) - Y(u)$, kun $u < v < s < t$

Huomataan vielä, että

$$\begin{aligned} Y(t) - Y(s) &\sim N(a(t - s), b^2(t - s)) \rightarrow \\ Y(t) - Y(0) &\sim N(at, b^2t) \rightarrow \\ Y(t) &\sim N(at, b^2t) \sim at + btZ, \text{ missä } Z \sim N(0,1) \end{aligned}$$

Oletetaan nyt, että yksittäisen vakuutuksen raukeamista indikoiva latentti ominaisuus noudattaa Brownin liikettä, eli stokastista prosessia, jonka arvo ajan t kuluttua vakuutuksen alkamisesta on

$$X(t) = at + b\sqrt{t}Z, \tag{7}$$

missä Z noudattaa standardinormaalijakaumaa ja t on aika vuosina. Oletetaan lisäksi, että vakuutus raukeaa välittömästi, mikäli $X(t)$ saavuttaa arvon α jollakin hetkellä t .

Alla on esitetty prosessin $X(t)$ yhteys vakuutuksen raukeamiseen.



⁷ Latentin muuttujan eli piilomuuttujan taustalla on oletus, että tarkasteltavalla asialla on piilevä, ei havaittavissa oleva ominaisuus, josta seuraa havaittavia ilmiöitä. Tässä oletamme, että vakuutuksella on piilevä ominaisuus, jonka kehitys seuraa Brownin liikettä ja joka saadessaan arvon α aiheuttaa vakuutuksen raukeamisen.

⁸ Tarkemmin stokastisista prosesseista ja niiden soveltamisesta lähteessä [6].

Merkitään symbolilla T_α hetkeä t ($t > 0$), jolloin prosessi $X(t)$ on ensimmäisen kerran ylittänyt rajan α :

$$T_\alpha = \inf\{t > 0 \mid X(t) = \alpha\}. \quad (8)$$

Voidaan osoittaa⁹, että T_α noudattaa käänteistä Gaussin jakaumaa parametrein $\frac{\alpha}{a}$ ja $\left(\frac{\alpha}{b}\right)^2$ eli

$$T_\alpha \sim IG\left(\frac{\alpha}{a}, \frac{\alpha^2}{b^2}\right). \quad (9)$$

Olettamalla, että vakuutuksen kesto noudattaa kohdan (9) jakaumaa, saadaan vakuutuksen keston liittyvät todennäköisyydet esitettyä myös Brownin liikkeen kautta seuraavasti:

$$P(T_\alpha < t) = \int_0^t P(X(s) = \alpha) ds \quad (10)$$

Juuri alkaneiden vakuutusten raukeamisasteen määrittäminen:

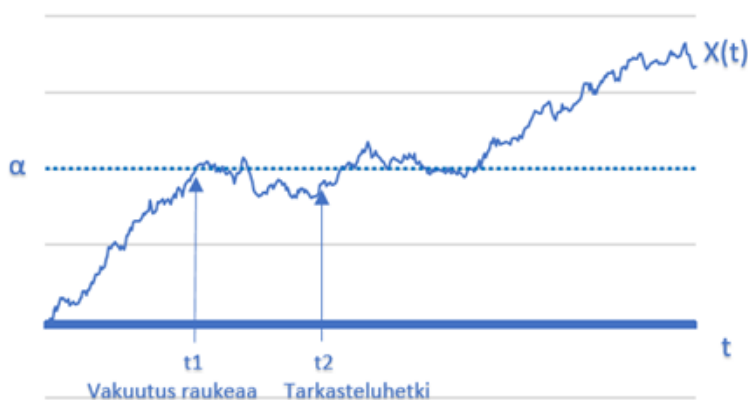
Yhteyttä Brownin liikkeeseen hyödynnetään simuloimalla portfolion juuri alkaneille vakuutuksille kohdan (7) prosessille X arvot aikavälillä $0 - 1$ vuotta ja määrittämällä simuloitukierroksen vuoden sisällä rauenneiden osuus sen perusteella, kuinka monen vakuutuksen prosessi ylittää rajan α jollakin hetkellä $0 < t \leq 1$.

Simulointia toteuttaessa oletamme prosessin X arvon hetkellä s olevan kumulatiivinen summa prosessin arvoista aikavälillä $0 - s$, kunhan tarkasteltava aika (tässä yksi vuosi) on jaettu riittävän moneen aikaperiodiin. Toisin sanoen

$$X(s) = \sum_{k=1}^{s \cdot \text{periodi}} X_k\left(\frac{1}{\text{periodi}}\right), \text{ missä} \quad (11)$$

$$X_k\left(\frac{1}{\text{periodi}}\right) \sim N\left(\frac{a}{\text{periodi}}, \frac{b^2}{\text{periodi}}\right) \text{ ja } \text{Cov}\left(X_k\left(\frac{1}{\text{periodi}}\right), X_l\left(\frac{1}{\text{periodi}}\right)\right) = 0, \text{ kun } k \neq l.$$

Luonnollisesti periodien lukumäärän kasvattaminen tarkentaa tuloksia, mutta hidastaa simulointia. Jos tarkasteltava aika jaetaan liian harvaan väliin eli periodiin, laskevat simuloitujen raukeamisten määrät. Tämä johtuu siitä, että välien kasvaessa yhä useamman prosessin arvo saattaa ylittää rajan α periodien välillä ja palata takaisin rajan α alle seuraavan periodin alkuun mennessä, jolloin raukeavuus jää mallintamatta. Alla olevassa esimerkissä vakuutus raukeaa hetkellä t_1 , mutta tätä ei havaita, mikäli tarkastellaan prosessin arvoja vain ennen hetkeä t_1 ja seuraavan kerran hetkellä t_2 .



⁹ Todistusta avattu liitteessä 2 sekä lähteessä [7].

Yhden vuoden voimassa olleiden vakuutusten raukeamisasteen määrittäminen:

Portfoliosta löytyville tarkasteluvuoden alussa vuoden ajan voimassa olleille vakuutuksille muodostetaan yllä kohdassa (11) kuvatulla tavalla alkuarvoiksi muuttujien $X(1)$ arvot. Alkuarvoiksi kuitenkin kelpaavat vain sellaisten prosessien arvot, jotka eivät ole ylittäneet raja-arvoa α millään tarkastellulla hetkellä $\frac{s}{\text{periodi}}$, missä $0 < s \leq \text{periodi}$. Tämän jälkeen prosessin arvon muodostusta jatketaan simuloimalla prosesseille arvot vielä yhdelle vuodelle:

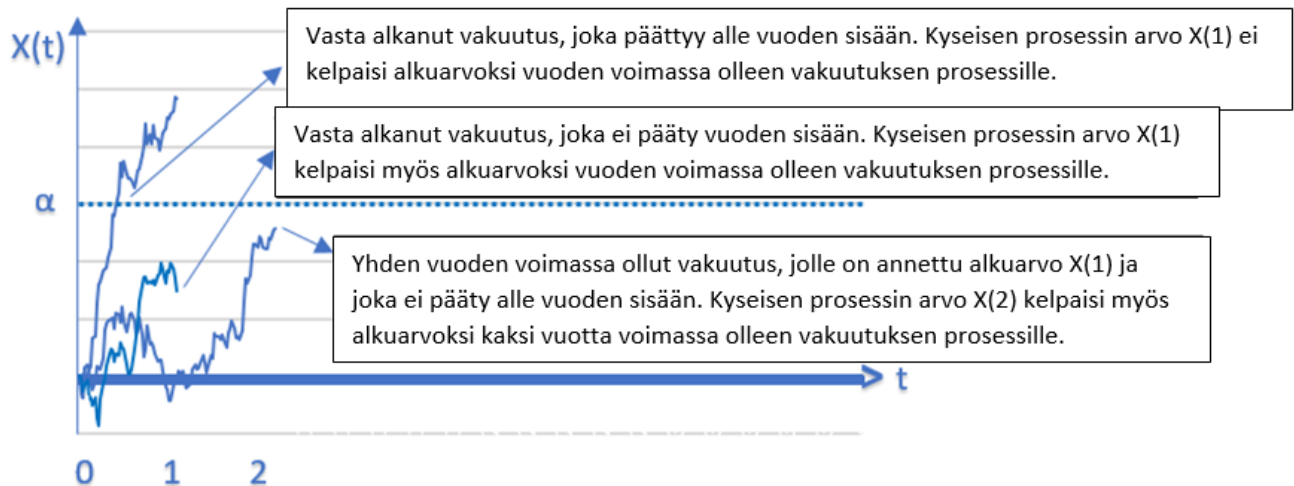
$$X_{\text{alkuarvo}}(1) = \sum_{k=1}^{1 \cdot \text{periodi}} X_k \left(\frac{1}{\text{periodi}} \right),$$

missä $X_{\text{alkuarvo}}(s) < \alpha$ kaikilla tarkastelluilla $s, 0 < s \leq 1$ ja

(12)

$$X(2) = X_{\text{alkuarvo}}(1) + \sum_{k=1}^{1 \cdot \text{periodi}} X_k \left(\frac{1}{\text{periodi}} \right).$$

Tarkasteluhetken alussa yhden vuoden voimassa olleiden vakuutusten joukosta seuraavan vuoden aikana rauenneet määritetään sen perusteella, kuinka monen vakuutuksen prosessi $X(s)$ on simulointikierröksellä ylittänyt rajan α jollakin hetkellä $s, 1 < s \leq 2$. Alkuarvojen asettamista ja raukeamisen toteamista kuvataan alla:



Useamman vuoden voimassa olleiden vakuutusten raukeamisasteen määrittäminen:

Portfoliosta löytyville tarkasteluvuoden alussa useamman vuoden ajan voimassa olleille vakuutuksille määritetään alkuarvot kuten yllä yhden vuoden voimassa olleille vakuutuksille. Tämän jälkeen prosesseja jatketaan simuloimalla prosesseille arvot vielä yhdelle vuodelle:

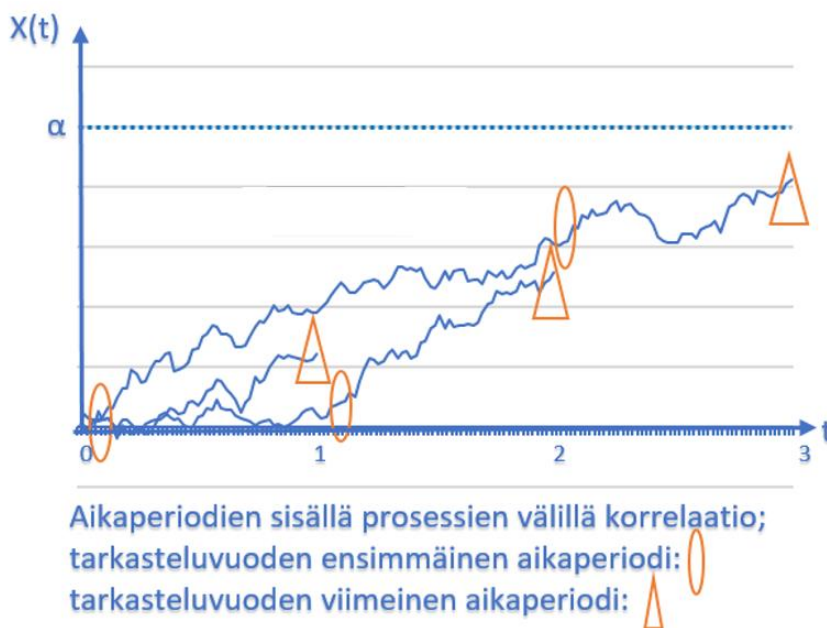
$$X_{\text{alkuarvo}}(n) = \sum_{k=1}^{n \cdot \text{periodi}} X_k \left(\frac{1}{\text{periodi}} \right), \text{ missä}$$

$X_{\text{alkuarvo}}(s) < \alpha$ kaikilla tarkastelluilla $s, 0 < s \leq n$ ja

$$X(n+1) = X_{\text{alkuarvo}}(n) + \sum_{k=1}^{1 \cdot \text{periodi}} X_k \left(\frac{1}{\text{periodi}} \right). \quad (13)$$

Tarkasteluhetken alussa n -vuotta voimassa olleiden vakuutusten joukosta seuraavan vuoden aikana rauenneet määritetään sen perusteella, kuinka monen vakuutuksen prosessi $X(s)$ on ylittänyt rajan α jollakin hetkellä s , $n < s \leq n+1$.

Simulointi toteutetaan pitämällä jokaisella simulointikierröksellä alkuarvot vakiona ja varioimalla vakuutusten prosessien X arvoa vain viimeisen tarkasteluvuoden osalta. Viimeiselle tarkasteluvuodelle voidaan asettaa kaikkien portfolion vakuutusten prosessien välille haluttu korrelaatio. Korrelaatio asetetaan yksittäisille aikaperiodeille jokaisen vakuutuksen prosessin välille. Eri aikaperiodien välille korrelaatiota sen sijaan ei aseteta johtuen Brownin liikkeen ominaisuudesta, jonka mukaan prosessien arvon lisäykset ovat riippumattomia prosessin aikaisemmasta arvon kehityksestä. Korrelaatorakennetta havainnollistetaan seuraavassa kuvassa juuri alkaneen vakuutuksen sekä yhden vuoden ja kaksi vuotta voimassa olleiden vakuutusten prosessien osalta kahdella aikaperiodilla.



Korrelaation ja kokonaisraukeavuuden hajonnan yhteys kuvataan luvussa 2.5.

2.4 Raukeamisasteen simulointi

Alla on tiivistettynä vielä Brownin liikkeen ja käänteisen Gaussin jakauman simuloinnissa hyödynnetty yhteys:

- Satunnaismuuttuja $T_{\alpha,i}$ = "Yksittäisen vakuutuksen i kesto"
 - $T_{\alpha,i}$ noudattaa käänteistä Gaussin jakaumaa parametrein c ja d , jotka on sovitettu luvun 2.1 mukaisesti tarkasteluvuoden oletettujen vakuutuksen keston mukaan määräytyvien raukeamisintensiteettien avulla
 - $X_i(t)$ = Yksittäisen vakuutuksen i raukeamista indikoivan prosessin arvo hetkellä t
- $$= \sum_{j=1}^{t * \text{periodi}} X_{i,j} \left(\frac{1}{\text{periodi}} \right) \text{ ja } X_{i,j} \sim N \left(\frac{\alpha}{c * \text{periodi}}, \frac{\alpha^2}{d * \text{periodi}} \right)$$

Raukeamisasteen vaihtelua tutkitaan simuloimalla $N(k)$ kappaletta alkuarvoja vuosille $1, \dots, m$ luvussa 2.3 kuvatulla tavalla, kun suurin mahdollinen vakuutuksen kesto vuosina on m ja muuttuja $N(k)$ kuvaa k vuotta voimassa olleiden vakuutusten lukumäärää portfoliossa tarkasteluhetkellä.¹⁰ Vasta-alkaneiden vakuutusten alkuarvoksi asetetaan nolla. Kuten edellisessä luvussa todettiin, alkuarvot pidetään vakiona jokaisella simulointikierröksellä ja ainoastaan viimeisen vuoden, eli tarkasteluvuoden prosessien arvoja varioidaan. Samalla viimeisen vuoden prosessien kehityksille asetetaan korrelaatiot aikaperiodeittain. Tässä työssä korrelaation H asettamisessa hyödynnetään multinormaalijakaumaa seuraavasti:

$$\begin{bmatrix} X_{1,j}(1/p) \\ \dots \\ X_{N,j}(1/p) \end{bmatrix} \sim N_N \left(\begin{bmatrix} v/p \\ \dots \\ v/p \end{bmatrix}, \Sigma_{XX} \right), \text{ missä } j = 1, \dots, p \text{ ja} \quad (14)$$

$$\Sigma_{XX} = \begin{bmatrix} \sigma/\sqrt{p} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma/\sqrt{p} \end{bmatrix}_{N \times N} \times \begin{bmatrix} 1 & \dots & H \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ H & \dots & 1 \end{bmatrix}_{N \times N} \times \begin{bmatrix} \sigma/\sqrt{p} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sigma/\sqrt{p} \end{bmatrix}_{N \times N}$$

*ja p = viimeisen vuoden aikaperiodien lukumäärä
ja N = portfolion vakuutusten lukumäärä*

Jokaisella simulointikierröksellä kohdan (14) multinormaalijakaumasta simuloidaan siis p kappaletta arvoja jokaiselle portfolion vakuutuksen prosessille X_i . Prosessien arvot summataan toisiinsa sekä kyseisen vakuutuksen i voimassaolon mukaan määritettyyn prosessin X alkuarvoon $X_{i,alkuarvo}$ (ks. kohdat (12) ja (13)) ja tarkastellaan, ylittyykö raja α jossakin kohtaa, eli saako alla oleva indikaattori arvon 1.

$$1_{\left\{ \max_{1 \leq l \leq p} \left\{ X_{i,alkuarvo} + \sum_{j=1}^l X_{i,j} \left(\frac{1}{p} \right) \right\} \geq \alpha \right\}} \left(X_{i,alkuarvo}, X_{i,1} \left(\frac{1}{p} \right), \dots, X_{i,p} \left(\frac{1}{p} \right) \right) \quad (15)$$

Vakuutukset ryhmitellään sen mukaan, kuinka monta vuotta ne ovat olleet voimassa tarkasteluvuoden alussa. Tämän jälkeen lasketaan ryhmittäin, kuinka moni vakuutus raukeaa, eli kuinka monen vakuutuksen alkuarvot ja kohdan (14) prosessit saavat kohdan (15) indikaattorille arvon 1. Suhteuttamalla rauenneiden vakuutusten lukumäärät tarkasteluvuoden alussa voimassa olleiden vakuutusten lukumääriin, saadaan vakuutuksen voimassaolon mukaan määritellyt raukeamisasteet.

Simulointikierröksen raukeamisasteelle lasketaan vakavaraisuusvaikutus ja simulointia toistetaan haluttu määrä. Näin saadaan estimoitua raukeamisasteen vakavaraisuusvaikutuksen jakauma ja laskettua siitä muun muassa VaR-lukuja. VaR(y) -luku kertoo jakauman pisteen, jota pienempiä arvoja satunnaismuuttuja saa todennäköisyydellä y %, eli

$$VaR(y) = V_y \rightarrow P(T < V_y) = y\% \quad (16)$$

Vakavaraisuusvaikutusta laskettaessa oletetaan, että simulointikierröksen raukeamisaste otetaan käyttöön parhaan estimaatin kassavirtojen laskennassa tarkasteluvuotta seuraavan vuoden alusta, mikä vaikuttaisi oman varallisuuden määrään. Lisäksi oman varallisuuden määrään vaikuttaa tarkasteluvuoden realisoitunut kate. Tarkemmin vakavaraisuusvaikutuksia avaan luvussa 2.6.

¹⁰ Simulointi toteutettiin r-kielillä [8].

2.5 Korrelaatiotasot hajonnan avulla

Korrelaatiotasoa voi haarukoida varioimalla kohdan (14) multinormaalijakauman korrelaatioparametrin H arvoa. Korrelaatiotasoa vaikutusta on tässä työssä arvioitu laskemalla kohdassa (5) määritellyn edellisvuoden tasoon suhteutetun kokonaisraukeamisasteen hajonta eri simulaatiokierrosten välillä. Hajonta on laskettu kaavalla

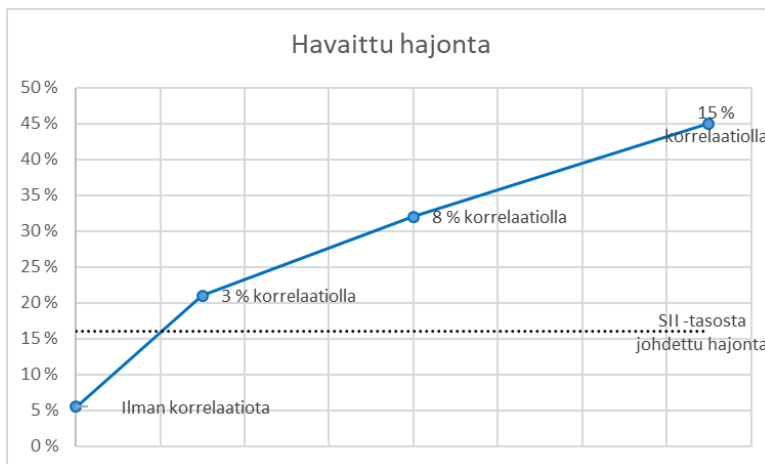
$$\sqrt{\frac{1}{sim_lkm - 1} \sum_{i=1}^{sim_lkm} \left(\frac{\mu_v(i)}{\mu_{v-1}} - \frac{1}{sim_lkm} \sum_{i=1}^{sim_lkm} \mu_v(i) \right)^2}, \text{ missä} \quad (17)$$

$\mu_v(i)$ = simulointikierron i kokonaisraukeavuus (ks. kohta (4)),

$\mu_{v-1} = \frac{1}{sim_lkm} \sum_{i=1}^{sim_lkm} \mu_v(i)$ ja sim_lkm = simulointikierrosten määrä.

Yllä siis oletetaan simulointikierron kokonaisraukeamisasteen kuvaavan seuraavan vuoden alussa havaittavaa tasoa. Tarkasteluvuoden alun tasoa määrittäessä voi käyttää muun muassa vakavaraisuuslaskennassa käytettäviä raukeamisintensiteettejä tai niihin sovitettuja raukeamisintensiteettejä (ks. luku 2.1 ja liite 1). Tässä työssä valittiin kuitenkin vertailutasoksi simulointikierrosten keskiarvo, jotta simulointivirheen vaikutus raukeamisasteisiin pienenesi.

Näin saatuja hajontoja voi verrata aitoon aineistosta laskettuun kohdan (5) suureen vuosittaiseen hajontaan ja asettaa sitä kautta sopiva korrelaatio prosessien välille (parametri H kohdan (14) jakaumassa). Korrelaation ja hajonnan yhteyttä luvun 3.1. vakuutusportfoliossa on kuvattu alla olevassa kuvassa.



2.6 Raukeamisasteen vakavaraisuusvaikutukset

Tarkasteluhetkellä, vuoden v alussa, oletetaan vuoden aikana raukeavan tietyn verran vakuutuksia. Tämä oletus vaikuttaa sekä arvioon tarkasteluvuoden aikana kertyvästä katteesta että vastuuvelan kassavirtojen parhaan estimaatin suuruuteen. Molemmilla on vaikutusta omaan varallisuuteen (ks. luvun 1 kuva). Tässä työssä oletetaan, että raukeamisintensiteetti pidetään vakiona kaikilla vastuuvelan parhaan estimaatin laskennassa mukana olevilla vuosilla. Lisäksi oletetaan, että vuoden v lopussa havaittu kuluneen vuoden aikana toteutunut raukeamisaste otetaan raukeamisintensiteetiksi vuoden $v+1$ alussa laskettaessa vastuuvelan parasta estimaattia. Näin ollen vuoden v toteutuneen raukeamisasteen erotuksella suhteessa vuoden alussa oletettuun on vaikutusta omaan varallisuuteen sekä kuluneen vuoden katteen poikkeamaan että vuoden $v+1$ alussa lasketun vastuuvelan parhaan estimaatin muutoksen kautta.

Vaikutuksia arvioitaessa on oletettu kaikkien vakuutusten hinnoittelun olevan riskiperusteinen. Lisäksi oletetaan, että vakuutukset maksetaan säännöllisesti, eivätkä ne ole kertamaksuisia. Yksittäisen vakuutuksen vuosittaisena kateodotuksena¹¹ onkin käytetty koko vakuutuskannan vuoden v kateodotusta jaettuna voimassa olevien vakuutusten lukumäärällä. Lisäksi yksinkertaistuksen vuoksi kassavirtoja ei diskontata vuoden $v+1$ alkuun ja jokaisen tulevan vuoden vakuutuskohtainen kateodotus pidetään samana.

Tuloksessa siis näkyy yhden vuoden katevaikutus, mutta vastuovelkaan ja vakavaraisuussuhteeseen vaikutus kertaantuu, kun laskennassa huomioidaan vakuutusten koko potentiaalinen elinkaari.

Alla on tiivistettynä simuloinnissa tehdyt oletukset ja merkinnät.

- Vakuutukset alkavat aina vuoden alussa ja ovat jatkuvamaksuisia
- m = suurin mahdollinen vakuutuksen kesto (vuosia)
- $N(x)$ = tarkasteluvuoden alussa x -vuotta voimassa olleiden vakuutusten lukumäärä, $x = 0, \dots, m$
- $N = N(0) + \dots + N(m)$, eli voimassa olevien vakuutusten lukumäärä yhteensä
- EN = vuoden $v+1$ alussa alkavat vakuutukset
- $\mu_s(x)$ = simulointikierroksen s raukeamisaste x -ikäiselle vakuutukselle
- $\mu_{oletus}(x)$ = vuoden v alussa käytetty raukeamisintensiteetti x -ikäiselle vakuutukselle
- q = yksittäisen vakuutustapahtuman todennäköisyys
- K = Keskimääräinen vakuutuskohtainen kate huomioiden raukeamisintensiteetti, eli
 - $$K = \frac{\text{vuoden kateoletus}}{\text{vakuutusten lukumäärä} \cdot (1 - 0,5\mu_p)}$$

Oletetaan siis, että vuoden v alussa on voimassa $N(x)$ kpl x -ikäisiä vakuutuksia ja käytössä raukeamisintensiteetit $\mu_{oletus}(x)$ sekä keskimääräinen vakuutuskohtainen kateodotus K .

Raukeamisintensiteettejä käytetään jakauman sovittamiseen (ks. luku 2.1). Olettamalla raukeamisen tapahtuvan keskimäärin keskellä vuotta yhteenlaskettu kate kyseisistä vakuutuksista vuoden v ajalta simulointikierroksella s on siis

$$K \sum_{x=0}^m N(x) * \left(1 - \frac{1}{2} \mu_s(x)\right). \quad (18)$$

Vuoden v katetta suurempi vaikutus vakavaraisuusasemaan on kuitenkin vastuvelan kassavirtojen parhaalla estimaatilla. Olettamalla, että simulointikierroksen raukeamisasteet otetaan käyttöön vuoden $v+1$ alussa parhaan estimaatin laskennassa, vastuvelan kassavirtojen parhaan estimaatin arvo simulointikierroksen s raukeavuudella on (ks. liite 3):

$$K \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{2} \mu_s(i)\right) \sum_{j=0}^{i-1} N(j) \prod_{k=j}^{i-1} (1 - \mu(k) - q) \quad (19)$$

Simulointikierroksen s raukeavuudella vuoden $v+1$ alussa alkavien vakuutusten (EN kpl) kassavirtojen kontribuutio parhaan estimaatin arvo on (ks. liite 3):

$$K * EN * \left(\left(1 - \frac{1}{2} \mu_s(0)\right) + \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{2} \mu_s(i)\right) \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \mu_s(j) - q) \right) \quad (20)$$

¹¹ Tässä vakuutuskohtaisella katteella tarkoitetaan yksittäisen vakuutuksen osuutta vuoden riski- ja kuormitusliikkeen tuloksesta. Toisin sanoen kyseessä on yksittäisen vakuutuksen vuoden vakuutusmaksu, josta on vähennetty vakuutusmaksuun suhteutettu keskimääräinen odotettu korvausmeno sekä yksittäisen vakuutuksen osuus liikekuluista. Keskimääräinen korvausmeno saadaan suhteuttamalla koko kannan tai sopivan osajoukon odotettu korvausmeno niistä kertyvään vakuutusmaksutuloon.

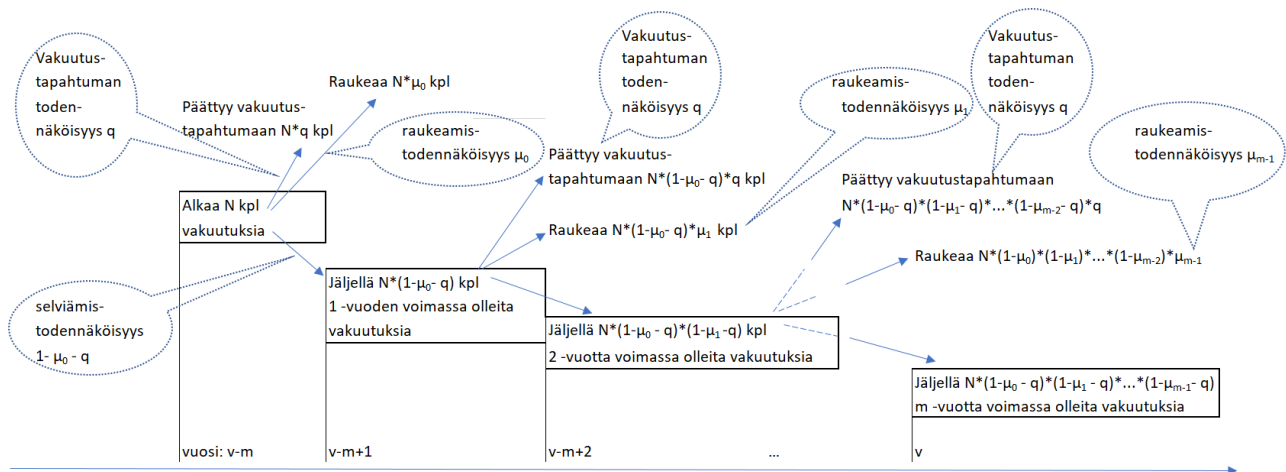
3 Simuloinnin tulokset

3.1 Vakavaraisuusvaikutukset ja Solvenssi II:n standardikaavan sopivuus

Simulointi toteutettiin edellisessä luvussa kuvatulla tavalla olettamalla, että vakuutuksia alkaa vuosittain 300 kpl ja suurin mahdollinen kesto vakuutukselle on 24 vuotta. Näin ollen tarkasteluhetkellä voimassa olevia juuri alkaneita vakuutuksia on 300 kpl ja 1-24 vuotta voimassa olleiden vakuutusten lukumäärä voidaan arvioida seuraavalla tavalla:

$$N(x) = 300 * \prod_{x=0}^{m-1} (1 - \mu_{oletus}(x) - q), \text{ missä } x = 1, \dots, 24 \quad (21)$$

Ajatus kaavan (24) taustalla kuvataan seuraavalla kaaviolla.



Vakuutus tapahtuman todennäköisyytenä käytettiin lukua 0,002¹² ja raukeamisintensiteetteinä alla esitettyjä kuvitteellisia tasoja, joiden perusteella saatiin seuraavat lukumäärät voimassa oleville vakuutuksille.

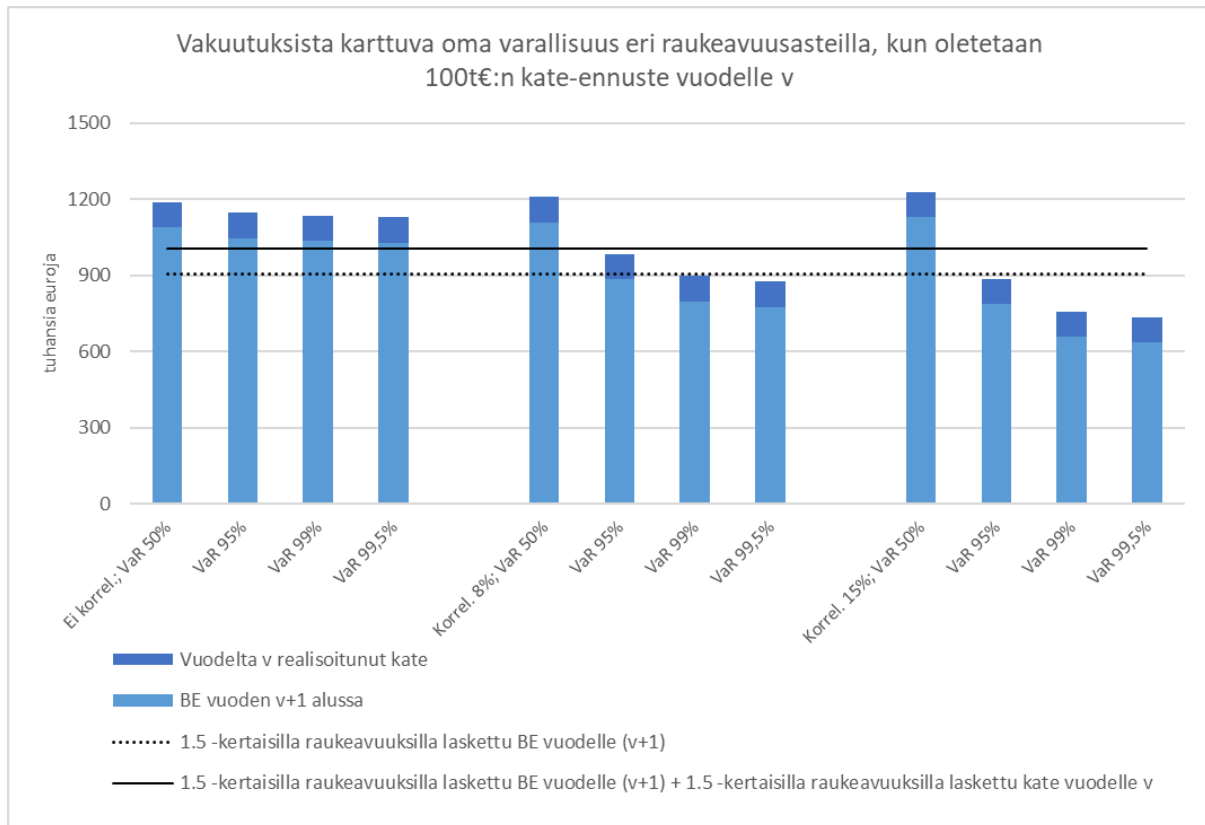
Vakuutuksen kesto (vuosia)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Raukeamisintensiteetti	2%	5%	9%	8%	8%	7%	6%	5%	5%	4%	4%	4%	4%
Vakuutuksia voimassa (kpl)	300	293	278	253	232	213	198	185	176	166	160	153	146
Vakuutuksen kesto (vuosia)	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	Yht
Raukeamisintensiteetti	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	4%	5%
Vakuutuksia voimassa (kpl)	140	134	129	123	118	113	108	104	99	95	91	87	4094

Tarkasteltavien vakuutusten vaikutus omaan varallisuuteen eri simulointikierrosten raukeamisasteilla arvioitiin summaamalla kaavat (18), (19) ja (20). Näin saaduista vaikutuksista laskettiin kohdassa (16) kuvattuja VaR-lukuja eri riskitasoilla. Simulointi toteutettiin myös vaihtelemalla kaavan (14) korrelaatiota H. Simulointikierrroksia oli 500. Alkuarvoja muodostettaessa jokainen vuosi jaettiin 1000 periodiin. Viimeinen vuosi, jonka yksittäisillä periodeilla asetettiin prosessien välille korrelaatio H, jaettiin 100 periodiin.

¹² Tässä työssä raukeavuus on keskiössä, joten selkeyden vuoksi vakuutus tapahtuman todennäköisyys on jokaisella vakuutuksella sama.

Solvensi II -shokki on laskettu kertomalla vuoden v raukeamisintensiteetit 1,5:lla ja laskemalla tarkasteltavien vakuutusten vaikutus omaan varallisuuteen kaavojen (18), (19) ja (20) summana. Shokin suunnan taustalla on oletus positiivisesta kateodotuksesta.

Alla on esitetty yllä kuvatun kuvitteellisen portfolion tulokset:



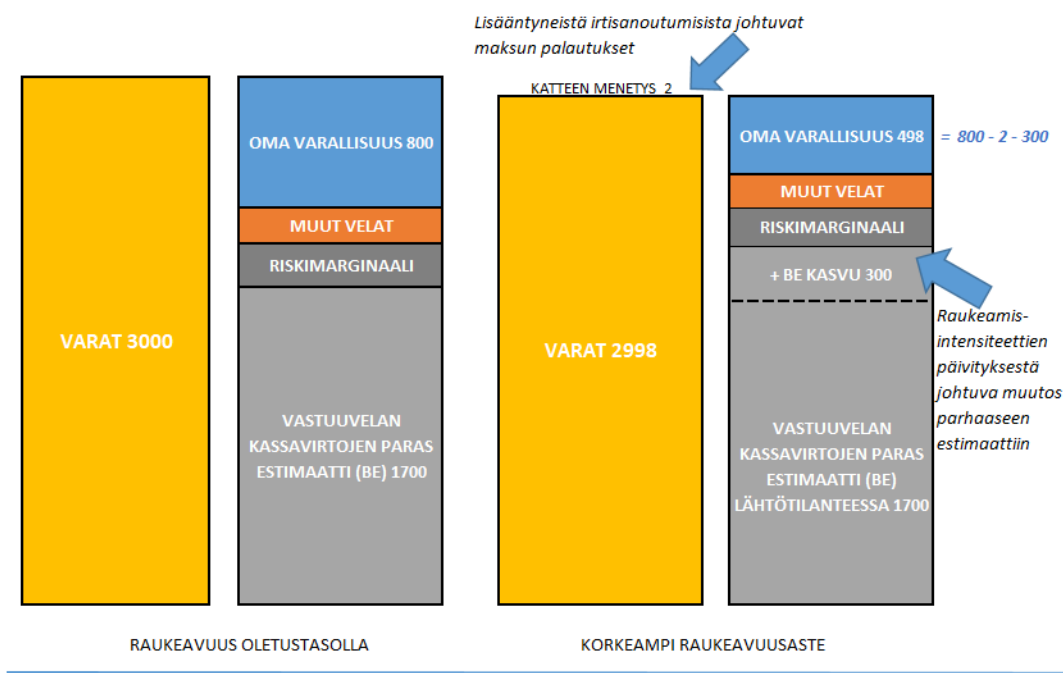
Tulosten perusteella nähdään muun muassa seuraavaa (luvut pyöristetty selkeyden vuoksi):

- Yleisesti:
 - Korrelaatio-oletuksilla ja riskitasoilla on vain pieni vaikutus vuoden v katteeseen, mutta sen sijaan em. erot näkyvät vastuuvelan parhaassa estimaatissa, jonne vaikutus kertaantuu usean vuoden osalta.
 - Korrelaatioilla ei ole juurikaan vaikutusta simulointikierrosten varallisuusvaikutusten mediaaniin, mutta niiden vaikutus tulee näkyväksi riskitasoa kasvatettaessa
 - Olettamalla, että raukeamisasteet kasvaisivat 1,5 -kertaisiksi, tehdyssä tarkastelussa vakuutuksista kertyvä varallisuus olisi noin miljoona euroa (=”SII-taso”). Mikäli oletetaan, että tämä kuvaa Solvenssi II:n mukaista SCR-shokkia riittävän hyvin, voidaan Solvenssi II:n standardikaavan sopivuutta tarkasteltavaan portfolioon arvioida vertaamalla em. tulosta VaR99,5% tunnuslukuihin.
- Korrelaatio-oletuksella 15%:
 - 95%:n todennäköisyydellä vakuutuksista karttuu omaa varallisuutta 900 tuhatta euroa tai enemmän
 - 99%:n todennäköisyydellä vakuutuksista karttuu omaa varallisuus 750 tuhatta euroa tai enemmän

- 99,5%:n todennäköisyydellä vakuutuksista karttuu omaa varallisuutta 700 tuhatta euroa tai enemmän, mikä on vähemmän kuin SII-taso (miljoona euroa), eli SII-shokki ei olisi riittävä kyseiselle portfoliolle tällä korrelaatio-oletuksella.
- Korrelaatio-oletuksella 8%:
 - 99,5%:n todennäköisyydellä vakuutuksista karttuu omaa varallisuutta 900 tuhatta euroa tai enemmän, mikä on vähemmän kuin SII-taso (miljoona euroa), eli SII-shokki ei olisi riittävä kyseiselle portfoliolle tällä korrelaatio-oletuksella.
- Ilman korrelaatiota:
 - Ilman korrelaatiota riskitasojen välinen ero jää pieneksi.
 - 99,5%:n todennäköisyydellä vakuutuksista karttuu omaa varallisuutta 1,2 miljoonaa euroa tai enemmän, mikä on enemmän kuin SII-taso (miljoona euroa), eli SII-shokki olisi liian suuri kyseiselle portfoliolle ilman korrelaatio-oletusta.

Tuloksia voidaan havainnollistaa myös kokonaisraukeamisasteen (4) avulla. Esimerkiksi 8 %:n korrelaatio-oletuksella VaR99,5% skenaariossa kokonaisraukeamisaste on kaksinkertainen verrattuna lähtötasoon. Ilman korrelaatio-oletusta vastaava suhde olisi 120%.

Alla on esitetty 8%:n korrelaatio-oletuksella ja riskitasolla 99,5% lasketun stressitestin vaikutus luvun 1 tasekuvaan kuvitteellisilla lähtötalanteen luvuilla (luvut miljoonina euroina):



3.2 Makromuuttujien hyödyntäminen

Raukeamisasteen stressitestiä voi tehostaa myös makromuuttujilla. Esimerkiksi työttömyysasteen on havaittu vaikuttavan raukeavuuden tasoon [3]. Useassa tutkimuksessa työttömyysasteen kasvaessa raukeamiset lisääntyivät. Yhdessä lähteessä [3] mainitussa tutkimuksessa raukeamiset kuitenkin vähentyivät työttömyysasteen kasvaessa. Tätä ajatusta tukee myös Ylen tuore uutinen, jonka mukaan ihmisten varautuminen pandemian aiheuttamaan epävarmuuteen näkyy lisääntyneinä henkivakuutusten ostoina [9].

Tässä työssä valittiin makromuuttujaksi *työllisyysaste* ja korrelaation suunnaksi se, että työllisyysasteen kasvaessa raukeamisten määrä kasvaa. Tehdään oletus

$$\frac{\mu_v}{\mu_{v-1}} = \text{Kerroin} \frac{\text{Työllisyysaste vuonna } v}{\text{Työllisyysaste vuonna } v-1} Y, \text{ missä} \quad (22)$$

$$Y \sim \log N(a, b^2) \text{ ja}$$

$$\text{Cov} \left(\frac{\text{Työllisyysaste vuonna } v}{\text{Työllisyysaste vuonna } v-1}, Y \right) = 0.$$

Kertoimen voi sovittaa vaikkapa samalla menetelmällä kuin parametrit luvussa 2.1. Merkitään suhteelle μ_v/μ_{v-1} käytettävää hajontaa symbolilla σ_μ ja odotusarvoa symbolilla E_μ sekä oletetaan edelleen vuosittain laskettavan suhteen jakauman olevan log-normaali (ks. luku 2.2). Merkitään työllisyysasteen suhteen logaritmilta historia-aineistosta estimoitua keskihajontaa symbolilla σ_{TA} ja keskiarvoa symbolilla E_{TA} . Hyödyntämällä edellä mainittuja merkintöjä sekä oletusta satunnaismuuttujan Y ja työllisyysasteen suhteen kovarianssista saamme määritettyä parametreille a ja b lausekkeet:

$$\begin{aligned} E \left(\log \left(\frac{\mu_v}{\mu_{v-1}} \right) \right) &= E(\log(\text{Kerroin})) + E \left(\log \left(\frac{\text{Työllisyysaste vuonna } v}{\text{Työllisyysaste vuonna } v-1} \right) \right) + E(\log(Y)) \rightarrow \\ a &= E(\log(Y)) = E \left(\log \left(\frac{\mu_v}{\mu_{v-1}} \right) \right) - (\log(\text{Kerroin})) - E \left(\log \left(\frac{\text{Työllisyysaste vuonna } v}{\text{Työllisyysaste vuonna } v-1} \right) \right) \rightarrow \\ a &= E_\mu - \log(\text{Kerroin}) - E_{TA} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} D^2 \left(\log \left(\frac{\mu_v}{\mu_{v-1}} \right) \right) &= D^2 \left(\log \left(\frac{\text{Työllisyysaste vuonna } v}{\text{Työllisyysaste vuonna } v-1} \right) \right) + D^2(\log(Y)) \rightarrow \\ b^2 &= D^2(\log(Y)) = D^2 \left(\log \left(\frac{\mu_v}{\mu_{v-1}} \right) \right) - D^2 \left(\log \left(\frac{\text{Työllisyysaste vuonna } v}{\text{Työllisyysaste vuonna } v-1} \right) \right) \rightarrow \\ b &= \sqrt{\sigma_\mu^2 - \sigma_{TA}^2} \end{aligned} \quad (24)$$

Olettamalla esimerkin omaisesti raukeamisasteen suhteen logaritmin odotusarvolle ja hajonnalle luvussa 2.2. mainitut tasot -0.01 ja 0.16 saadaan parametreille a ja b arvot:

$$\begin{aligned} a &= -0.01 - \log(\text{Kerroin}) - E_{TA} \\ b &= \sqrt{0.16^2 - \sigma_{TA}^2}. \end{aligned}$$

Nyt voimme hyödyntää eri työllisyysaste-ennusteita vuodelle v simuloimalla muuttujalle $\log(Y)$ arvoja normaalijakaumasta parametrein a ja b .

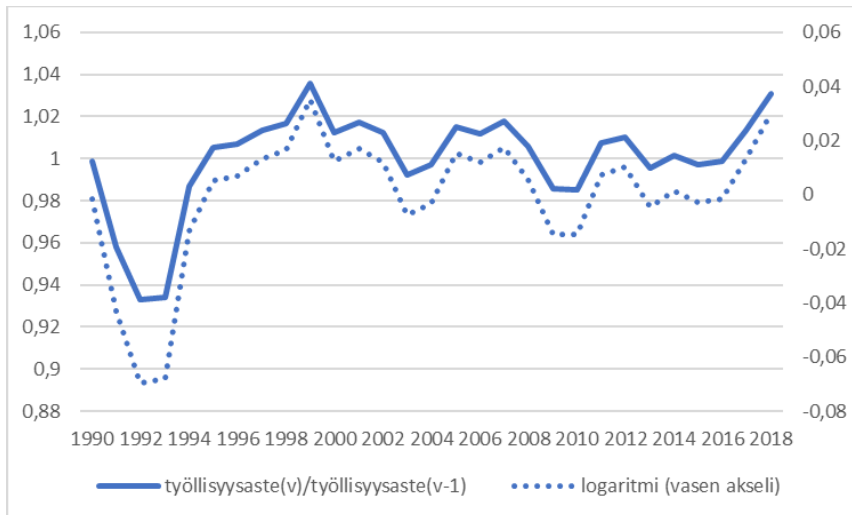
Kiinnittämällä työllisyysasteen odotetun kehityksen, saadaan simulointikierröksen raukeamisasteelle $\mu_v(s)$ arvo:

$$\begin{aligned} \mu_v(s) &= \mu_{v-1} \text{Kerroin} \frac{\text{Oletettu työllisyysaste vuonna } v}{\text{Työllisyysaste vuonna } v-1} Y(s), \text{ missä} \quad (25) \\ Y(s) &\sim \log N(a, b^2). \end{aligned}$$

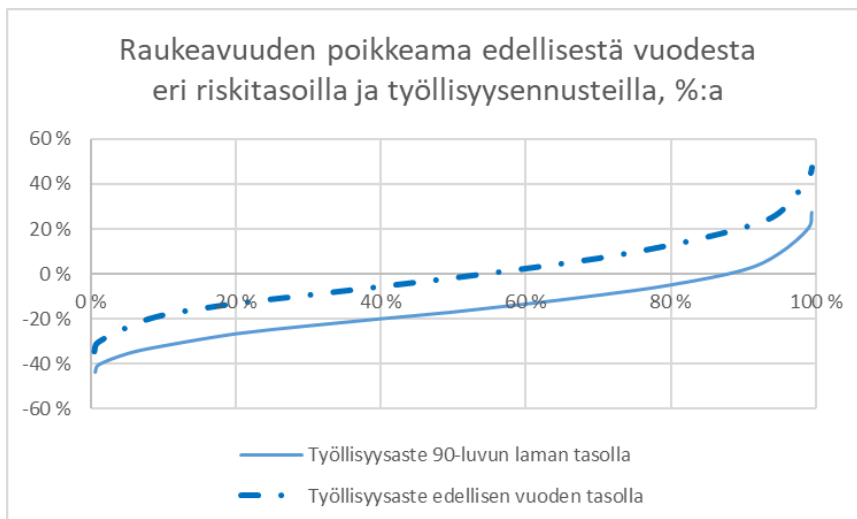
Kaavan (25) kaikki muut parametrit ovat tiedossa, paitsi työllisyysaste. Varioimalla työllisyysasteen ennustetta ja simuloimalla satunnaismuuttujan Y arvoa jakaumaoletuksen mukaisesti, saadaan

havainnollistettua työllisyysasteen tason vaikutusta raukeamisasteen tasoon vaikkapa kohdan (16) mukaisilla VaR-tunnusluvuilla. Aihe on erityisen ajankohtainen juuri nyt keväällä 2020 koronaviruspandemian jyllätessä ja vaikuttaessa mahdollisesti merkittävästikin työllisyystasoihin.

Alla esitetään työllisyysasteen kehitystä suhteessa edelliseen vuoteen noin 30 vuoden ajan [luvut lähteestä 10]:



Yllä kuvatusta aikasarjasta laskettu kohdan (23) mukainen E_{TA} on -0,04% ja kohdan (24) mukainen σ_{TA}^2 on 2,42%. Olettamalla kerroin noin yhden suuruiseksi, saadaan kohdan (23) ja (24) parametreille arvot $a = -1,04\%$ ja $b = 15,82\%$. Simuloimalla satunnaismuuttujalle Y 1000 arvoa ja asettamalla vuoden $v - 1$ työllisyysasteelle tason 0,71 (vuoden 2018 taso) ja vuoden v ennusteella kaksi vaihtoehtoista tasoa 0,71 ja 0,6 (90-luvun laman taso) saadaan laskettua vuoden v raukeamisasteelle seuraavat VaR-luvut kaavan (25) avulla:



Esimerkiksi kuvaan merkitystä kohdasta nähdään, että olettamalla työllisyysasteen pysyvän edellisen vuoden tasolla, raukeamisaste kasvaa alle 20%:a 90%:n todennäköisyydellä. Sen sijaan olettamalla työllisyysasteen putoavan 90-luvun laman tasolle, raukeamisaste ei kasva edellisvuodesta lainkaan 90%:n todennäköisyydellä (voi kyllä pienentyä).

4 Johtopäätökset

Työssä vakuutusten keston havaittiin noudattavan käänteistä Gaussin jakaumaa. Jakaumaoletus sopii hyvin sekä harjoituksen aikana empiirisestä aineistosta tehtyihin havaintoihin että aihetta käsittelevien tutkimusten havaintoihin raukeamisasteiden käyttäytymisestä vakuutusten voimassaolon kasvaessa. Käänteisen Gaussin jakauman ja Brownin liikkeen yhteyden havaittiin tarjoavan luontevan tavan mallintaa vakuutusten raukeavuuksien välisiä korrelaatioita valitun tarkasteluperiodin aikana. Korrelaatiot saatiin asetettua kaikkien portfolion vakuutusten välille tarkasteluhetken mukaisista voimassaoloajoista riippumatta.

Korrelaation tasolla osoittautui olevan merkittävä vaikutus stressitestin tuloksiin. Sopivan korrelaation asettamisessa huomattiin voitavan hyödyntää kokonaisraukeamisasteen tason vuosittaista hajontaa, joka voidaan laskea tarkasteltavan kannan omasta historia-aineistosta tai esimerkiksi hyödyntäen Solvenssi II -laskennan oletuksista johdettua hajontatasoa.

Esitellyllä menetelmällä voidaan tehdä raukeamisriskille stressitestejä hyvin vähäisin lähtötiedoin. Relevantteja tuloksia saadaan jo vakuutuksen keston mukaisia raukeamisintensiteettejä sekä hyvin tavanomaisia, muita laskelmia varten tiedossa olevia vakuutuskannan tunnuslukuja hyödyntämällä. Ottamalla mukaan makromuuttujia luvussa 3.2. kuvatulla tavalla, saadaan raukeavuus huomioitua makromuuttujapohjaisissa skenaarioanalyysissä yhtenä komponenttina.

Riskitasoa 99,5% voidaan käyttää lisäksi Solvenssi II -standardikaavan sopivuuden tarkasteluun. Esimerkiksi luvussa 3.1 havaittiin, että tarkastellulla kuvitteellisella portfoliolla tietyn suuruisen korrelaatio-oletuksen täyttyessä VaR99,5 tasolla raukeamisriski aiheuttaa omaan varallisuuteen Solvenssi II -kehikon vakavaraisuushokkia suuremman heikennyksen. Ilman korrelaatiota stressitestin vaikutus taas on huomattavasti Solvenssi II -kehikon shokkia lievempi. Kyseisellä kuvitteellisella portfoliolla Solvenssi II -kehikosta johdettua hajontatasoa vastaava hajonta kokonaisraukeavuusasteelle simulointikierrosten välille saataisiin positiivisella, mutta kolmea prosenttia pienemmällä korrelaatio-oletuksella.

Raukeamisriskillä on luonnollisesti sitä suurempi merkitys, mitä enemmän tarkasteltavista vakuutuksista saatavan katteen odotetaan poikkeavan nollassa. Kaiken kaikkiaan raukeamisriskillä on merkittävä¹⁴ vaikutus vakuutusyhtiöiden vakavaraisuuteen ja esitetty stressitestausta tarjoaa helposti sovellettavan ja toimivan menetelmän arvioida raukeamisriskin suuruutta. Stressitesti on herkkä tehdyille oletuksille ja mallivirhe on huomioitava tuloksia hyödynnettäessä, kuten aina mallien kanssa työskennellessä. Tehdyillä oletuksilla on suuri vaikutus arvioiden lopputulokseen. Valintoja ja oletuksia, joiden vaikutuksia on hyvä tarkastella, ovat muun muassa vakuutusten välinen korrelaatio, valittu simulointimenetelmä ja simulointimäärä, vuosivaihtelun jakauma ja hajonta, makromuuttujien yhteys raukeamisasteiden tasoon sekä jakaumien sovitusten menetelmä ja parametrien luottamusvälit.

¹⁴ Mandatum Life kertoo vuoden 2018 Vakavaraisuutta ja taloudellista tilaa koskevassa kertomuksessaan taseen markkinariskien sekä vakuutusriskeihin lukeutuvien pitkäikäisyys- ja raukeamisriskien muodostavan yhtiön merkittävimmät riskit pääomavaateiden kautta tarkasteltuna [11].

Nordea Henkivakuutus Suomi Oy toteaa omassa vastaavassa kertomuksessaan Solvenssi II vastuuvielan määrään vaikuttavan olennaisesti mallinnuksessa käytettävät oletukset vakuutusten raukeamisesta, vakuutuksenottajien kuolevuudesta ja vakuutusten hoidosta aiheutuvista kustannuksista [12].

Lähteet

[1] Vakuutusyhtiölaki 521/2008.

<https://www.finlex.fi/fi/laki/ajantasa/2008/20080521>

[2] Emilio Gómez-Déniz, Jorge V. Pérez-Rodríguez, "Non-exponential mixtures, non-monotonic financial hazard functions and the autoregressive conditional duration model". Department of Quantitative Methods, University of Las Palmas de Gran Canaria, Spain.

https://dea.uib.es/digitalAssets/254/254084_perez.pdf

[3] Jukka Johansson, "Takaisinostot säästövakuutuksissa". SHV-työ.

https://www.actuary.fi/julkaisut/shv-tyot/takaisinostot-saastovakuutuksissa/2016_SHV_Jukka_Johansson.pdf

[4] Watson Wyatt LLP, "Calibration of the Enhanced Capital Requirement for with-profit life insurers".

[5] Asetus (EU) 2015/35. Euroopan komission asetus vakuutus- ja jälleenvakuutustoiminnan aloittamisesta ja harjoittamisesta annetun Euroopan parlamentin ja neuvoston direktiivin 2009/138/EU täydentämisestä. Euroopan unionin virallinen lehti. 17.1.2015.

<https://eur-lex.europa.eu/legal-content/FI/TXT/PDF/?uri=OJ:L:2015:012:FULL&from=EN>

[6] John C. Hull, "Options, Futures and other Derivatives (7th edition)."

[7] Peter W. Jones, Peter Smith, "Stochastic processes An introduction" (3rd edition).

[8] <https://www.r-project.org>

[9] <https://yle.fi/uutiset/3-11282114>

[10] Suomen virallinen tilasto (SVT): Työvoimatutkimus [verkojulkaisu]. ISSN=1798-7830. Työllisyys ja työttömyys 1959-2018 2018. Helsinki: Tilastokeskus [viitattu: 5.4.2020]. Saantitapa:

http://www.stat.fi/til/tyti/2018/16/tyti_2018_16_2019-12-03_tie_001_fi.html

[11] Mandatum lifen Vakavaraisuutta ja taloudellista tilaa koskeva kertomus

https://www.mandatumlife.fi/4977f8/globalassets/yhtio/tietoa-yhtiosta/ml_vakavaraisuus_fi_110419.pdf

[12] Nordea Henkivakuutus Suomi Oy:n Vakavaraisuutta ja taloudellista tilaa koskeva kertomus

<https://www.nordea.fi/Images/146-311829/vakavaraisuusraportti-nordea-henkivakuutus-2018.pdf>

Liite 1 Käänteisen Gaussin jakauman parametrien sovitus

Merkitään käänteisen Gaussin jakauman tiheysfunktioita ja kertymäfunktioita arvolla x merkinnöin $f(x)$ ja $F(x)$ sekä sovituksessa käytettyjä raukeamisintensiteettejä x -vuotta voimassa olleille vakuutuksille symbolilla $\mu(x)$. Oletetaan, että tarkasteltavien vakuutusten suurin mahdollinen kesto on M vuotta ja että raukeamisintensiteetit ovat tiedossa vuositasolla eli $0, 1, \dots, M$ -vuotta voimassa olleille vakuutuksille.

Käänteinen Gaussin jakauma sovitettiin tekemällä seuraavat oletukset:

$$\begin{aligned}\mu_{sov}(0) &= F(1) \\ \mu_{sov}(x) &= \frac{f(x)}{1 - F(x)}, \text{ kun } x = 1, \dots, M\end{aligned}$$

Jakauman parametrit sovitetaan minimoimalla seuraava summa:

$$\sum_{i=0}^M (\mu_{sov}(x) - \mu(x))^2.$$

Parametrien sopivuutta voidaan arvioida vertailemalla raukeamisintensiteettien lisäksi tiheys- ja kertymäfunktioita, joiden arvot voidaan estimoida raukeamisintensiteettien avulla seuraavasti:

$$\mu(x) = P(T < x + 1 \mid T > x)$$

$$F(0) = P(T \leq 0) = P(T < 0) = 0$$

$$F(1) = P(T \leq 1) = P(T < 1) = P(\text{"T päättyy 0 - vuotiaana"}) = \mu(0)$$

$$F(2) = P(T \leq 2) = P(T < 2) = P(T < 2 \text{ ja } (T \leq 1 \text{ tai } T > 1)) =$$

$$P((T < 2 \text{ ja } T \leq 1) \text{ tai } (T < 2 \text{ ja } T > 1)) = P(T < 2 \text{ ja } T \leq 1) + P(T < 2 \text{ ja } T > 1) =$$

$$P(T \leq 1) + P(T > 1) * \frac{P(T < 2 \text{ ja } T > 1)}{P(T > 1)} = F(1) + P(T > 1) * P(T < 2 \mid T > 1) =$$

$$F(1) + (1 - F(1))\mu(1)$$

...

$$F(M) = P(T \leq M) = P(T < M) = P(T < M \text{ ja } (T \leq M - 1 \text{ tai } T > M - 1)) =$$

$$P((T < M \text{ ja } T \leq M - 1) \text{ tai } (T < M \text{ ja } T > M - 1)) =$$

$$P(T < M \text{ ja } T \leq M - 1) + P(T < M \text{ ja } T > M - 1) =$$

$$P(T \leq M - 1) + P(T > M - 1) * \frac{P(T < M \text{ ja } T > M - 1)}{P(T > M - 1)} =$$

$$F(M - 1) + P(T > M - 1) * P(T < M \mid T > M - 1) =$$

$$F(M - 1) + (1 - F(M - 1))\mu(M - 1)$$

$$f(0) = \mu(0)$$

$$f(y) = F(y + 1) - F(y), \text{ kun } y = 1, \dots, M - 1$$

Liite 2 Brownin liikkeen ja käänteisen Gaussin jakauman yhteys

Merkitään $T = \inf\{s \leq t: X(s) = \alpha\}$

Oletetaan $X(t) - X(u) \sim v(t-u) + \sigma\sqrt{t-u}Z$, missä $Z \sim N(0,1)$ ja $X(0) = 0 \rightarrow X(t) \sim vt + \sigma\sqrt{t}Z$,

Oletetaan $Y(t) - Y(u) \sim -v(t-u) + \sigma\sqrt{t-u}Z$ ja $Y(0) = 2\alpha \rightarrow Y(t) \sim 2\alpha - vt + \sigma\sqrt{t}Z$,

Merkitään P ("prosessi Y , jonka arvo hetkellä t_1 on x_1 , on siirtynyt pisteeseen x_2 hetkellä t_2 ")

$= p_Y((t_1, t_2); (x_1, x_2))$

Nyt $p_Y((t_1, t_2); (x_1, x_2)) = P(Y(t_2 - t_1) = x_2 - x_1)$

$$\int_0^t P(Y(s) = \alpha)P(Y(t-s) - \alpha = x) = P(Y(t) = x), \text{ sillä} \quad (L1)$$

$$\begin{aligned} P(Y(t) < \alpha) &= \int_{-\infty}^{\alpha} P(Y(t) = x)dx = \int_{-\infty}^{\alpha} \int_0^t p_Y((0, s); (2\alpha, \alpha)) * p_Y((s, t); (\alpha, x)) dsdx \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha} \int_0^t P(Y(s) = \alpha)P(Y(t) - Y(s) = x - \alpha) dsdx \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha} \int_0^t P(Y(s) = \alpha)P(-v(t-s) + \sigma\sqrt{t-s}Z = x - \alpha) dsdx \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha} \int_0^t P(Y(s) = \alpha)P(2\alpha - v(t-s) + \sigma\sqrt{t-s}Z = x + \alpha) dsdx \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha} \int_0^t P(Y(s) = \alpha)P(Y(t-s) = x + \alpha) dsdx \\ &= \int_{-\infty}^{\alpha} \int_0^t P(Y(s) = \alpha)P(Y(t-s) - \alpha = x) dsdx \end{aligned}$$

Lisäksi $\frac{P(X(t-s)+\alpha=x)}{P(Y(t-s)-\alpha=x)} = e^{\frac{2v(x-\alpha)}{\sigma^2}}$, sillä (L2)

$$\frac{P(X(t-s)+\alpha=x)}{P(Y(t-s)-\alpha=x)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} e^{-\frac{(x-\alpha-v(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)}}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}} e^{-\frac{(x-\alpha+v(t-s))^2}{2\sigma^2(t-s)}}} = e^{\frac{4(x-\alpha)v(t-s)}{2\sigma^2(t-s)}} = e^{\frac{2v(x-\alpha)}{\sigma^2}}$$

Ja $P(X(t) = \alpha) = P(Y(t) = \alpha)$ sillä, (L3)

$$P(X(t) = \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(\alpha-vt)^2}{2\sigma^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(\alpha-(2\alpha-vt))^2}{2\sigma^2 t}} = P(Y(t) = \alpha)$$

$$\text{Ja } P(T < t \text{ ja } X(t) < \alpha) = e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} F_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right), \text{ sillä} \quad (\text{L4})$$

$$\begin{aligned} P(T < t \text{ ja } X(t) < \alpha) &= \\ P((X(s) = \alpha \text{ jollakin } s < t) \text{ ja } X(t) < \alpha) &= \\ = P(X(s) = \alpha \text{ jollakin } s < t \text{ ja } X(t) - X(s) < 0) &= \\ = \int_{s=0}^t P(X(s) = \alpha \text{ ja } (X(t-s) < 0)) ds = \int_{s=0}^t P(X(s) = \alpha \text{ ja } (X(t-s) + \alpha < \alpha)) ds &= \\ = \int_{-\infty}^{\alpha} \int_0^t P(X(s) = \alpha) P(X(t-s) + \alpha = x) ds dx &= \\ = \int_{-\infty}^{\alpha} \int_0^t P(X(s) = \alpha) P(Y(t-s) - \alpha = x) \frac{P(X(t-s) + \alpha = x)}{P(Y(t-s) - \alpha = x)} ds dx &= \\ = \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2v(x-\alpha)}{\sigma^2}} \int_0^t P(X(s) = \alpha) P(Y(t-s) - \alpha = x) ds dx \quad | \text{ ks. kohta (L2)} &= \\ = \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2v(x-\alpha)}{\sigma^2}} \int_0^t P(Y(s) = \alpha) P(Y(t-s) - \alpha = x) ds dx \quad | \text{ ks. kohta (L3)} &= \\ = \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2vx-4v\alpha}{\sigma^2}} e^{\frac{2\alpha v}{\sigma^2}} P(Y(t) = x) dx \quad | \text{ ks. kohta (L1)} &= \\ = e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\alpha} e^{\frac{2vx-4v\alpha}{\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-2\alpha+vt)^2}{2\sigma^2 t}} dx = e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-2\alpha+vt)^2-4vtx+8vt\alpha}{2\sigma^2 t}} dx &= \\ = e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} e^{-\frac{(x-(2\alpha+vt))^2}{2\sigma^2 t}} dx = e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} \int_{-\infty}^{\alpha} f_N\left(\frac{x-2\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) dx &= \\ = e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} F_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) - \lim_{H \rightarrow -\infty} e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} F_N\left(\frac{H-2\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) = e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} F_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) - 0 = e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} F_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

$$F(t) = P(T < t) = e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} F_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) + F_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right), \text{ sillä} \quad (\text{L5})$$

$$\begin{aligned} P(T < t) &= P(T < t \text{ ja } (X(t) < \alpha \text{ tai } X(t) \geq \alpha)) \\ &= P((T < t \text{ ja } X(t) < \alpha) \text{ tai } (T < t \text{ ja } X(t) \geq \alpha)) \\ &= P(T < t \text{ ja } X(t) < \alpha) + P(T < t \text{ ja } X(t) \geq \alpha) \\ &= P(T < t \text{ ja } X(t) < \alpha) + \frac{P(T < t \text{ ja } X(t) \geq \alpha)}{P(X(t) \geq \alpha)} P(X(t) \geq \alpha) \\ &= P(T < t \text{ ja } X(t) < \alpha) + P(T < t | X(t) \geq \alpha) P(X(t) \geq \alpha) \\ &= P(T < t \text{ ja } X(t) < \alpha) + 1 * P(X(t) \geq \alpha) \\ &= P(T < t \text{ ja } X(t) < \alpha) + 1 - P(X(t) < \alpha) \\ &= P(T < t \text{ ja } X(t) < \alpha) + 1 - F_N\left(\frac{\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \quad | \text{ ks. kohta (L4)} \\ &= e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} F_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) + F_N\left(\frac{-\alpha+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

Ja $e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} f_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) = f_N\left(\frac{-\alpha+vt}{2\sigma t\sqrt{t}}\right)$, sillä (L6)

$$e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} f_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) = e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-\alpha-vt)^2 - 4tva}{2\sigma^2 t}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-\alpha+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2}$$

Kohdan (L5) mukaan siis

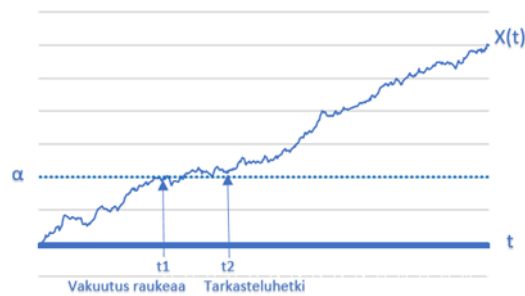
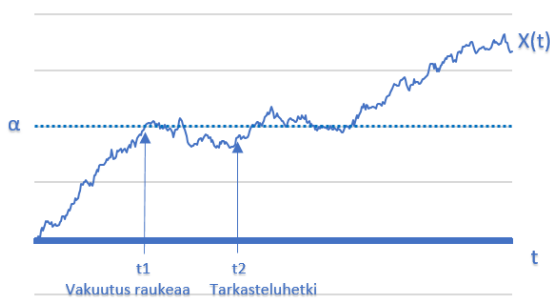
$$F(t) = P(T < t) = e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} F_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) + F_N\left(\frac{-\alpha+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)$$

Derivoimalla yllä olevan kertymäfunktion $F(t)$ saamme tiheysfunktion $f(t)$ seuraavasti:

$$\begin{aligned} f(t) &= dF(t) = e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} f_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) d\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) + f_N\left(\frac{-\alpha+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) d\left(\frac{-\alpha+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \\ &= e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} f_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \left(\frac{\alpha-vt}{2\sigma t\sqrt{t}}\right) + f_N\left(\frac{-\alpha+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \left(\frac{\alpha+vt}{2\sigma t\sqrt{t}}\right) \\ &= e^{\frac{2v\alpha}{\sigma^2}} f_N\left(\frac{-\alpha-vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \left(\frac{\alpha-vt}{2\sigma t\sqrt{t}}\right) + f_N\left(\frac{-\alpha+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \left(\frac{\alpha+vt}{2\sigma t\sqrt{t}}\right) \mid \text{ks. kohta (L6)} \\ &= f_N\left(\frac{-\alpha+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \left(\frac{\alpha-vt}{2\sigma t\sqrt{t}}\right) + f_N\left(\frac{-\alpha+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \left(\frac{\alpha+vt}{2\sigma t\sqrt{t}}\right) \\ &= f_N\left(\frac{-\alpha+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \left(\frac{\alpha-vt+\alpha+vt}{2\sigma t\sqrt{t}}\right) = f_N\left(\frac{-\alpha+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right) \left(\frac{\alpha}{\sigma t\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{-\alpha+vt}{\sigma\sqrt{t}}\right)^2} \frac{\alpha}{\sigma t\sqrt{t}} = \\ &= \sqrt{\frac{\alpha^2}{2\pi t^3}} e^{-\frac{\frac{\alpha^2}{\sigma^2}(\alpha-vt)^2}{2\alpha^2 t}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2\pi t^3}} e^{-\frac{\left(\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right)(\alpha-vt)^2 \left(\frac{1}{v}\right)^2}{2\left(\frac{\alpha}{v}\right)^2 t}} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{2\pi t^3}} e^{-\frac{\left(\frac{\alpha^2}{\sigma^2}\right)\left(t-\frac{\alpha}{v}\right)^2}{2\left(\frac{\alpha}{v}\right)^2 t}}, \end{aligned}$$

mikä on käänteisen Gaussin jakauman tiheysfunktio parametrein $\frac{\alpha}{v}$ ja $\frac{\alpha^2}{\sigma^2}$.

Alla on esitetty kuvina tilanteet, joissa $X(t)$ on rajan α ala- sekä yläpuolella ja vakuutus on rauennut hetkellä $s < t$, eli $X(s) = \alpha$ jollakin hetkellä $s < t$.



Liite 3 Raukeamisasteen vaikutus omaan varallisuuteen

Raukeamisasteen vaikutus stressitestissä tarkasteluvuoden realisoituneeseen katteeseen sekä tarkasteluvuotta seuraavan vuoden vastuuvelan parhaaseen estimaattiin kuvataan alla. Toteutuneita raukeamisasteita käytetään raukeamisintensiteetteinä, eli sen arvioimiseen, kuinka paljon vakuutuksia selviää kustakin vuodesta. Mikäli vakuutus raukeaa, oletetaan sen tapahtuvan keskellä vuotta, jolloin oletetusta katteesta saadaan kuitenkin puolet.

Raukeamisen lisäksi vakuutuksia poistuu kannasta vakuutustapahtumien kautta. Jokaisella vakuutuksella vakuutustapahtuman todennäköisyys on tässä yksinkertaistuksen vuoksi sama. Todennäköisyys, että yksittäisestä vakuutuksesta realisoituu vakuutustapahtuma seuraavan 12 kuukauden aikana on q , missä $0 < q < 1 - \max_x \{\mu(x)\}$.

Vuoden v alussa olevan kannan oletettu kehitys

Katetarkastelu	Juuri alkaneita voimassa, kpl	1 vuoden voimassa olleita, kpl	2 vuotta voimassa olleita, kpl	...	m vuotta voimassa olleita, kpl
Vuoden v alussa	$N(0)$	$N(1)$	$N(2)$...	$N(m)$
Raukeavuudesta johtuva katteen menetys vuonna v	$K * N(0) * \frac{1}{2} \mu(0)$	$K * N(1) * \frac{1}{2} \mu(1)$	$K * N(2) * \frac{1}{2} \mu(2)$...	$K * N(m) * \frac{1}{2} \mu(m)$
BE-tarkastelu	Juuri alkaneita voimassa, kpl	1 vuoden voimassa olleita, kpl	2 vuotta voimassa olleita, kpl	...	m vuotta voimassa olleita, kpl
Vuoden v+1 alussa	0	$N(0)(1 - \mu(0) - q)$	$N(1)(1 - \mu(1) - q)$...	$N(m-1)(1 - \mu(m-1) - q)$
Vuoden v+2 alussa	0	0	$N(0)(1 - \mu(0) - q)(1 - \mu(1) - q)$...	$N(m-2)(1 - \mu(m-2) - q)(1 - \mu(m-1) - q)$
Vuoden v+3 alussa	0	0	0
...
Vuoden v+m alussa	0	0	0	...	$N(0)(1 - \mu(0) - q) * \dots * (1 - \mu(m-1) - q)$
Vuoden v+m+1 alussa	0	0	0	...	0
Yhteensä voimassa olevia vakuutuksia vuoden v+1 BE-laskelmassa ilman uusia sopimuksia vuoden v+1 alussa	0	$\sum_{i=0}^{1-1} N(i) \prod_{j=i}^{1-1} (1 - \mu(j) - q)$	$N(0)(1 - \mu(0) - q)(1 - \mu(1) - q) + N(1)(1 - \mu(1) - q)$ $= \sum_{i=0}^{2-1} N(i) \prod_{j=i}^{2-1} (1 - \mu(j) - q)$...	$\sum_{i=0}^{m-1} N(i) \prod_{j=i}^{m-1} (1 - \mu(j) - q)$
Raukeavuudesta johtuva katteen menetys BE:ssä vuonna v+1	0	$\frac{1}{2} \mu(1) K \sum_{i=0}^{1-1} N(i) \prod_{j=i}^{1-1} (1 - \mu(j) - q)$	$\frac{1}{2} \mu(2) K \sum_{i=0}^{2-1} N(i) \prod_{j=i}^{2-1} (1 - \mu(j) - q)$...	$\frac{1}{2} \mu(m) K \sum_{i=0}^{m-1} N(i) \prod_{j=i}^{m-1} (1 - \mu(j) - q)$

Vuoden v+1 alussa alkaneiden sopimusten oletettu kehitys

	Juuri alkaneita voimassa, kpl	1 vuoden voimassa olleita, kpl	2 vuotta voimassa olleita, kpl	...	m vuotta voimassa olleita, kpl
Vuoden v+1 alussa	EN	0	0	...	0
Vuoden v+2 alussa	0	$EN(1 - \mu(0) - q) = EN \prod_{i=0}^{1-1} (1 - \mu(i) - q)$	0	...	0
Vuoden v+3 alussa	0	0	$EN(1 - \mu(0) - q)(1 - \mu(1) - q) = EN \prod_{i=0}^{2-1} (1 - \mu(i) - q)$...	0
...	0
Vuoden v+m alussa	0	0	0	...	0
Vuoden v+m+1 alussa	0	0	0	...	$EN \prod_{i=0}^{m-1} (1 - \mu(i) - q)$
Raukeavuudesta johtuva katteen menetys BE:ssä vuonna v+1	$\frac{1}{2} \mu(0) * K * EN$	$\frac{1}{2} \mu(1) * K * EN \prod_{i=0}^{1-1} (1 - \mu(i) - q)$	$\frac{1}{2} \mu(2) * K * EN \prod_{i=0}^{2-1} (1 - \mu(i) - q)$...	$\frac{1}{2} \mu(m) * K * EN \prod_{i=0}^{m-1} (1 - \mu(i) - q)$

Oletetuista raukeamisista johtuva katteen menetys vuoden v osalta saadaan siis yllä olevan taulukon kolmannelta riviltä summalla:

$$K * N(0) * \left(\frac{1}{2}\mu(0)\right) + \dots + K * N(m) * \left(\frac{1}{2}\mu(m)\right) = K \sum_{i=0}^m N(i) \left(\frac{1}{2}\mu(i)\right)$$

Ja raukeamisintensiteettien mukainen kate summalla:

$$K * N(0) * \left(1 - \frac{1}{2}\mu(0)\right) + \dots + K * N(m) * \left(1 - \frac{1}{2}\mu(m)\right) = K \sum_{i=0}^m N(i) \left(1 - \frac{1}{2}\mu(i)\right)$$

Oletetuista raukeamisista johtuva katteen menetys parhaaseen estimaattiin vuoden $v+1$ alussa alkavien vakuutusten osalta saadaan jälkimmäisen taulukon avulla summalla:

$$\frac{1}{2}K * EN * \left(\mu(0) + \sum_{i=1}^m \mu(i) \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \mu(j) - q) \right)$$

Ja raukeamisintensiteettien mukainen kate parhaassa estimaatissa saadaan sijoittamalla raukeamisten takia menetetyin kateosuuden ($0,5$ *raukeamisintensiteetti) tilalle sen vastaluku ($1 - 0,5$ *raukeamisintensiteetti), eli

$$K * EN * \left(\left(1 - \frac{1}{2}\mu(0)\right) + \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{2}\mu(i)\right) \prod_{j=0}^{i-1} (1 - \mu(j) - q) \right)$$

Muiden vakuutusten osalta parhaassa estimaatissa huomioitava katteen menetys saadaan summalla:

$$\frac{1}{2}K \sum_{i=1}^m \mu(i) \sum_{j=0}^{i-1} N(j) \prod_{k=j}^{i-1} (1 - \mu(k) - q)$$

Ja raukeamisintensiteetti mukainen kate parhaassa estimaatissa vastaluvun avulla summalla:

$$K \sum_{i=1}^m \left(1 - \frac{1}{2}\mu(i)\right) \sum_{j=0}^{i-1} N(j) \prod_{k=j}^{i-1} (1 - \mu(k) - q)$$