WORKING PAPERS ISSN 0781-4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

1

Markku Paakkanen

RAUNIOTODENNÄKÖISYYDEN APROKSIMOINTI YHDEN PALVELIJAN JONON AVULLA (1980)

RAUNIOTODENNÄKÖISYYDEN APPROKSIMOINTI YHDEN PALVELIJAN JONON AVULLA

JOHDANTO

Tässä työssä määritellään yleistetyn Poisson-riskiprosessin kanssa analoginen yhden palvelijan jonoprosessi ja osoitetaan, että riskiprosessissa vararikon välttämistodennäköisyys alkupääomaan ollessa U on yhtäsuuri kuin analogisessa jonoprosessissa todennäköisyys, että jonotusaika on korkeintaan $\frac{a}{b(1+\lambda)}$ U , missä a on vahinkojen sattumisväliaikojen odotusarvo, b on yksittäisen vahingon suuruuden odotusarvo ja λ on varmuuslisä. Tämä tulos osoitetaan ensin eksponentiaalisen vahinkojakauman tapauksessa suoraan laskemalla ja yleistetään sen jälkeen kattamaan myös yleisen vahinkojakauman tapaus.

Tämän jälkeen osoitetaan jonoteorian keinoin, että vararikkotodennäköisyys äärettömän pitkän ajan kuluessa = 1 (<1), jos varmuuslisä $\lambda = 0$ (>0).

Lopuksi esitetään jonoanalogiaan perustuva rauniotodennäköisyyden simulointialgoritmi sekä joitakin simulointituloksia.

RAUNIOTODENNÄKÖISYYDEN APPROKSIMOINTI YHDEN PALVELIJAN JONON AVULLA

Beard-Pentikäinen-Pesonen osoittavat kirjassaan Risk Theory (harjoitus 12.2.1, s. 146, 2. painos), että lauseke

$$(1) \qquad 1 - \frac{1}{1+\lambda} e^{-\frac{\lambda\mu}{1+\lambda} U}$$

ilmaisee vararikon välttämistodennäköisyyden äärettömän pitkän ajan kuluessa riskiprosessissa, jossa vahingot sattuvat Poisson-prosessin mukaisesti, varmuuslisä on λ, vahinkojen suuruus jakautuu eksponentiaalisesti parametrinaan μ ja alkupääoma on U. Nimitämme tällaista prosessia seuraavassa (λ,μ,U)-riskiprosessiksi.

Otetaan käyttöön merkintä $M_\varepsilon/M_\mu/1$. Tämä merkintä tarkoittaa yhden palvelijan jonoa, johon asiakkaat saapuvat ε-parametrisen Poisson-prosessin mukaisesti ja jossa palveluaika jakautuu eksponentiaalisesti parametrinaan μ. Palvelujärjestys on saapumisjärjestys.

<u>Lause 1</u>. Todennäköisyys, ettei äärettömän pitkän ajan kuluessa (λ,μ,U)-riskiprosessissa tapahdu vararikkoa on sama kuin todennäköisyys, että stationaarisessa $M_{\frac{\mu}{1+\lambda}}/M_\mu/1$ -jonossa jonotusaika on pienempi tai yhtä suuri kuin U.

Todistus: Otetaan käyttöön seuraavat merkinnät:

$X(t)$ = jonossa tai palvelussa olevien lukumäärä hetkellä t

$H(x) = 1 - e^{-\mu x}$, $x \geq 0$, palveluajan kertymäfunktio

$\rho \;=\; \frac{1}{\mu} : \frac{1}{\frac{\mu}{1+\lambda}} = \frac{1}{1+\lambda}$ jonon $M_{\frac{\mu}{1+\lambda}} / M_{\mu} / 1$

liikenneintensiteetti, so. palveluajan ja saapumisväliajan odotusarvojen suhde (stationaarisuusoletuksen vuoksi $\rho < 1$, ts. keskimäärin palvelu on nopeampaa kuin asiakkaiden saapuminen)

$\Pi(k) \;=\; (1-\rho)\rho^k$, $k \geq 0$; tunnetusti tämä geometrinen jakauma on tarkasteltavan jonomallin tasapainojakauma, so. $P\{X(t) = k\} = \Pi(k)$ kaikilla $t \geq 0$, $k \geq 0$ (kts. esim. Takacs: Introduction to the Theory of Queues, s. 26)

$W(t,x)$ = todennäköisyys, että jonoon hetkellä t saapuva asiakas joutuu odottamaan palveltavaksi pääsyä korkeintaan ajan x

Stationaarisuudesta ja eksponenttijakauman unohtuvaisuusominaisuudesta johtuen

(2) $$W(t,x) = \sum_{k=0}^{\infty} P\{X(t) = k\}\, d_x H_k(x) ,$$

missä $H_k(x)$ on $H(x)$:n k-kertainen konvoluutio itsensä kanssa. Stationaarisuusoletuksen perusteella todennäköisyys $P\{X(t) = k\}$ ei riipu ajasta t, joten ei myöskään $W(t,x)$ riipu t:stä. Näin ollen voimme merkitä $W(t,x) = W(x)$. Esitetyillä merkinnöillä on siis

$$W(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pi(k)\, d_x H_k(x)$$

$$= 1 - \rho + (1-\rho)\mu\rho \int_0^x \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\mu\rho t)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu t}\, dt$$

$$= 1 - \rho + (1-\rho)\mu\rho\int_0^x e^{-\mu(1-\rho)t}\,dt$$

$$= 1 - \rho + \rho(1 - e^{-\mu(1-\rho)x})$$

$$= 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)x}$$

$$= 1 - \frac{1}{1+\lambda} e^{-\frac{\lambda\mu}{1+\lambda}x}$$

Näin ollen

$$W(U) = 1 - \frac{1}{1+\lambda} e^{-\frac{\lambda\mu}{1+\lambda}U}$$

eli väite on osoitettu.

Yleistämme seuraavassa lausetta 1 siten, että tarkastelemme rauniotodennäköisyyttä äärellisen ajan kuluessa, luovumme stationaarisuusoletuksesta ja sallimme vahinkojen suuruuden kertymäfunktion $H(.)$ olevan yleistä muotoa.

Tarkastelemme yhden palvelijan jonoa $M/G/1$, missä saapumisprosessi on Poisson-prosessi ja vahinkojen suuruuden jakauma on yleinen. Otetaan käyttöön indikaattorimuuttuja $Q(.)$, joka määritellään seuraavasti:

$$(3) \qquad Q(u) = \begin{cases} 0, & \text{jos palvelija palvelee hetkellä } u \\ 1, & \text{jos palvelija on vapaa hetkellä } u \end{cases}$$

Olkoon $p_n(t) = \frac{(\frac{t}{a})^n}{n!} e^{-\frac{t}{a}}$, ts. $p_n(t)$ on

todennäköisyys, että aikavälillä $(0,t]$ jonoon saapuu n asiakasta. Oletamme,

että hetkellä $t = 0$ jono on tyhjä. Olkoon

$$(4) \qquad P\left\{S(t) \leq x\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\, H_n\,(x)$$

ts. $S(t)$ voidaan tulkita kokonaistyömääräksi, jonka palvelija on vastaanottanut aikavälillä $(0,t]$ (välttämättä kaikkia asiakkaita ei ole vielä palveltu hetkeen t mennessä). Merkitään vielä $N(t)$:llä aikaa, jonka hetkellä t jonoon saapuva asiakas joutuu odottamaan ennen palveltavaksi pääsemistään.

Tarvitsemme seuraavan apulauseen (Benes, 1963, Gen. Stoch. Proc. in the Theory of Queues, lemma 1.1)

Apulause 2.

$$N(t) = \sup_{\tau < t} \left[S(t) - S(\tau) - t + \tau\right]$$

Todistus: Esitetyin merkinnöin voidaan kirjoittaa

$$(5) \qquad N(t\ ) = S(t) - t + \int_o^t Q(u)du\ .$$

Lausekkeen (5) voi tulkita seuraavasti: kun hetkeen t mennessä vastaanotetusta kokonaispalvelumäärästä $S(t)$ vähennetään aikavälillä $[o,t]$ jo palveltu määrä $t - \int_o^t Q(u)du$, jää jäljelle vielä palvelematta oleva aikamäärä eli jonotusaika $N(t)$.

Olkoon $\tau < t$. Lauseke (5) pätee myös ajankohdalle τ. Näin ollen

$$(6) \qquad N(\tau) = S(\tau) - \tau + \int_o^{\tau} Q(u)du.$$

Vähentämällä (6) (5):stä saadaan

(7) $$N(t) = N(\tau) + S(t) - S(\tau) - t + \tau + \int_{\tau}^{t} Q(u)du,$$

joten

(8) $$N(t) \geq S(t) - S(\tau) - t + \tau ,$$

sillä $N(\tau)$ ja $\int_{\tau}^{t} Q(u)du$ ovat ei-negatiivisia suureita.

Olkoon δ viimeinen hetki ennen hetkeä t, jolloin palvelija on vapaa. Tällöin sijoittamalla lausekkeeseen (7) $\tau = \delta$, saadaan

(9) $$N(t) = S(t) - S(\delta) - t + \delta ,$$

sillä $N(\delta) = \int_{\delta}^{t} Q(u)du = 0$ ajankohdan δ valinnan perusteella. Toisaalta suprenumin määritelmän perusteella on

(10) $$N(t) \leq \sup_{\tau < t} [S(t) - S(\tau) - t + \tau],$$

sillä $\delta < t$.

Yhdistämällä (8) ja (10) saadaan väite.

<u>Määritelmä</u> Riski- ja jonoprosessi ovat analogisia, mikäli seuraavat ehdot ovat voimassa:

1) asiakkaiden saapumisväliajat jonoprosessissa jakautuvat kuten vahinkojen sattumisväliajat riskiprosessissa

2) jos riskiprosessissa vahinkojakauman kertymäfunktio pisteessä x on H(x), on jonoprosessissa palveluajan jakauman kertymäfunktio vastaavassa pisteessä $H(\frac{b(1+\lambda)x}{a})$, missä λ on varmuuslisä, a on vahinkojen sattumisväliaikojen odotusarvo ja b yksittäisen vahingon suuruuden odotusarvo.

Tarkastellaan yleistettyä Poisson-riskiprosessia, jossa varmuuslisä on λ, vahingot sattuvat $\frac{1}{a}$ - parametrisen Poisson-prosessin mukaisesti ja vahinkojen suuruuden jakauma H on yleinen odotusarvonaan b.

Lause 3. Yleistetyssä Poisson-riskiprosessissa selviytymistodennäköisyys välillä (o,t], kun alkupääoma on U, on sama kuin todennäköisyys, että ko. riskiprosessin kanssa analogisessa yhden palvelijan jonossa hetkellä t jonoon saapuvan asiakkaan jonotusaika N(t) on korkeintaan $\frac{a}{b(1+\lambda)}$ U.

Todistus:

Merkitään R(t):llä yleistetyssä Poisson-riskiprosessissa hetkellä t jäljellä olevia varoja. Tällöin, kun alkupääoma = U,

$$R(t) = U + (1+\lambda)\frac{b\,t}{a} - S(t). \tag{11}$$

Todennäköisyys V(U,t), että riskiprosessissa ei tapahdu vararikkoa aikavälillä (o,t], voidaan lausua R(t):n avulla seuraavasti:

$$V(U,t) = P\left\{\inf_{\tau<t} R(\tau) \geq 0\right\} \tag{12}$$

$$= P\left\{U + \inf_{\tau<t}\left[(1+\lambda)\frac{b}{a}\tau - S(\tau)\right] \geq 0\right\}$$

$$= P\left\{\sup_{\tau<t} [S(\tau) - (1+\lambda)\ \tfrac{b}{a}\tau] \leq U\right\}.$$

Siirrytään tarkastelemaan riskiprosessin kanssa analogista jonoprosessia, jossa palveluajan kertymäfunktio pisteessä x saa määritelmän mukaan arvon $H(\frac{b(1+\lambda)}{a}\ x)$. Olkoon

$$P\left\{S'(t) \leq x\right\} = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(t)\ H_n\ (\frac{b(1+\lambda)}{a}\ x).$$

Apulauseen 2 perusteella yhden palvelijan jonolle pätee tulos

$$N(t) = \sup_{\tau<t} [S'(t) - S'(\tau) - t + \tau].$$

Yleisesti stokastiselle prosessille ei ole voimassa yhtälö $S'(t) - S'(\tau) = S'(t-\tau)$, mutta koska prosessin $S'(t)$ diskreetit lisäykset ovat toisistaan riippumattomia ja keskenään samoin jakautuvia, on yllä mainittu yhtälö todennäköisyyden mielessä voimassa. Näin ollen

(13) $$P\left\{N(t) \leq U\right\} = P\left\{\sup_{\tau<t} [S'(\tau) - \tau] \leq U\right\}.$$

Koska $P\left\{S(t) \leq x\right\} = P\left\{S'(t) \leq \frac{ax}{b(1+\lambda)}\right\}$, saadaan kaavan (12) perusteella

$$V(U,t) = P\left\{S(\tau) \leq U + \frac{b(1+\lambda)}{a}\tau\ ,\ 0 \leq \tau < t\right\}$$

$$= P\left\{S'(\tau) \leq \tau + \frac{aU}{b(1+\lambda)}\ ,\ 0 \leq \tau < t\right\}$$

$$= P\left\{\sup_{\tau<t} [S'(\tau) - \tau] \leq \frac{a}{b(1+\lambda)}\ U\right\}.$$

Vertaamalla tätä tulokseen (13) nähdään, että $V(U,t) = P\left\{N(t) \leq \frac{a}{b(1+\lambda)}\ U\right\}$, mikä pitikin osoittaa.

Huomautus: Lauseen 3 todistuksessa suoritettu siirtyminen $H(x)$:stä $H(\frac{b(1+\lambda)}{a}x)$:ään vaikuttaa sen, että analogiajonossa palveluajanjakauman todennäköisyysmassa painottuu lyhyiden palveluaikojen puoleen sitä voimakkaammin, mitä suurempi on varmuuslisä λ. Tällöin keskimääräinen jonotusaika jonossa (rauniotodennäköisyys riskiprosessissa) on sitä pienempi mitä suurempi on luku λ.

Lauseen 3 jonoprosessissa on palveluajan odotusarvo $= \frac{a}{1+\lambda}$, joten keskimääräisen palveluajan suhde keskimääräiseen saapumisväliaikaan eli ko. jonon liikenneintensiteetti ρ on $\frac{1}{1+\lambda}$. Jonoteorian menetelmiin nojautuen voidaan osoittaa, että yleistetyssä Poisson-riskiprosessissa vararikko äärettömän pitkän ajan kuluessa on varma, jos varmuuslisä $\lambda = 0$ ($\rho = 1$), kun taas positiivisen varmuuslisän tapauksessa ($\lambda > 0$, $\rho < 1$) vararikon todennäköisyys on < 1. Tämän tuloksen osoittamiseksi tarvitsemme joitakin aputuloksia, joista ensimmäinen on ns. Blackwellin teoreema.

Olkoon $X(t)$ jonossa tai palvelussa olevien lukumäärä hetkellä t. Blackwellin teoreema soveltuu seuraavanlaiseen tilanteeseen: sattukoon aikavälillä $(0,\infty)$ satunnaistapahtumia ajankohtina $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots$, missä aikavälit $\tau_n - \tau_{n-1}, n = 1,2,\ldots$; $\tau_o = 0$ ovat toisistaan riippumattomia positiivisia satunnaismuuttujia kertymäfunktionaan

$$P\left\{\tau_1 \leq x\right\} = \hat{F}(x) \quad \text{ja}$$

$$P\left\{\tau_n - \tau_{n-1} \leq x\right\} = F(x), \quad n = 2,3\ldots \ .$$

Olkoon $v(t)$ aikavälillä $(0,t]$ sattuvien tapahtumien lukumäärä. Tällöin $v(0) = 0$. Merkitään $m(t) = E(v(t))$, ja lausutaan Blackwellin teoreema ilman todistusta. (Todistus; esimerkiksi N.U. Prabhnu: Stochastic Processes, The Macmillan Company, New York, 1965, sivu 160).

Blackwellin teoreema: Jos F ei ole muotoa

$$(14) \qquad F(x) = \sum_{k=o}^{\infty} b_k\, U(x - k\tau),$$

missä τ on positiivinen vakio, ja $\sum_{k=o}^{\infty} b_k = 1$, $b_k \geq 0$, $k = 1,2,\ldots$, $b_o = 0$ sekä s.y.t. $\{k/b_k > 0\} = 1$, niin kaikilla $h > 0$ on voimassa

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(t + h) - m(t)}{h} = \lim_{t\to\infty} \frac{m(t)}{t} = \frac{1}{\mu},$$

missä $\mu = \int_o^{\infty} x dF(x)$. Raja-arvo on nolla, jos $\mu = \infty$.

Blackwellin teoreeman avulla todistetaan seuraava apulause.

Apulause 4. Jos g on välillä $[0,\infty)$ rajoitetusti heilahteleva reaaliarvoinen funktio ja jos F ei ole muotoa (14), on voimassa kaava

$$\lim_{t\to\infty} \int_o^t g(t - u)dm(u) = \frac{1}{\mu}\int_o^{\infty} g(u)du$$

edellyttäen, että $\int_o^{\infty} g(u)du < \infty$. Jos $\mu = \int_o^{\infty} x dF(x) = \infty$, niin raja-arvo on nolla.

Todistus: Jokainen rajoitetusti heilahteleva funktio voidaan esittää kahden ei-kasvavan ja ei-negatiivisen funktion erotuksena. Näin ollen voidaan rajoittua tapaukseen, jossa g on ei-negatiivinen ja ei-kasvava. Oletetaan ensin, että $\mu < \infty$. Kirjoitetaan

$$\int_o^t g(t - u)dm(u) = T_1(t) + T_2(t),$$

missä

$$T_1(t) = \int_o^{\frac{t}{2}} g(t-u)dm(u), \quad T_2(t) = \int_{\frac{t}{2}}^{t} g(t-u)dm(u).$$

Koska g on ei-kasvava ja ei-negatiivinen, on voimassa

$$T_1(t) \leq g(\tfrac{t}{2}) \int_o^{\frac{t}{2}} dm(u) = g(\tfrac{t}{2})\, m\,(\tfrac{t}{2}) = \frac{t}{2}\, g\,(\tfrac{t}{2}) \cdot \frac{m(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}} .$$

Olkoon $\varepsilon > 0$. Koska $\int_o^{\infty} g(u)du < \infty$, on olemassa t_ε siten, että

$$\varepsilon > \int_{\frac{t}{4}}^{\frac{t}{2}} g(u)du \geq \frac{t}{4}\, g\,(\tfrac{t}{2}) \geq 0, \text{ kun } t \geq t_\varepsilon .$$

Siis $\lim_{t\to\infty} \frac{t}{2}\, g\,(\frac{t}{2}) = 2 \cdot \lim_{t\to\infty} \frac{t}{4}\, g\,(\frac{t}{2}) = 0$. Koska lisäksi Blackwellin teoreeman nojalla

$$\lim_{t\to\infty} \frac{m(\frac{t}{2})}{\frac{t}{2}} = \frac{1}{\mu}, \text{ on}$$

$$\lim_{t\to\infty} T_1(t) = 0.$$

Näytetään, että $\lim_{t\to\infty} T_2(t) = \frac{1}{\mu} Q$, missä $Q = \int_o^{\infty} g(u)du$. Kun h on kyllin pieni, on

(15) $$0 < Q - h \sum_{n=1}^{\infty} g(nh) < \varepsilon \qquad \text{ja}$$

$$0 < h \sum_{n=o}^{\infty} g(nh) - Q < \varepsilon.$$

Merkitään $N = [\frac{t}{2h}]$ ja valitaan t niin suureksi, että

(16) $$h \sum_{n=N+1}^{\infty} g(nh) < \varepsilon \qquad \text{ja}$$

$$(17) \qquad \left| \frac{m(u + h) - m(u)}{h} - \frac{1}{\mu} \right| < \varepsilon \quad ,$$

jos $u + h \geq \frac{t}{2}$. Näillä t:n arvoilla voidaan $T_2(t)$:tä arvioida seuraavasti:

$$\sum_{n=o}^{N-1} g(nh + h)[m(t - nh) - m(t - nh - h)] \leq T_2(t)$$

$$\leq \sum_{n=o}^{N} g(nh)\ [m(t - nh) - m(t - nh - h)]$$

Lausekkeen (17) perusteella saadaan:

$$(\frac{1}{\mu} - \varepsilon)h \sum_{n=1}^{N} g(nh) \leq T_2(t) \leq (\frac{1}{\mu} + \varepsilon)\ h \sum_{n=o}^{N} g(nh) \ ,$$

sillä $t - nh \geq t - \frac{t}{2h}\ h = \frac{t}{2}$ kaikilla $n = 0,1\ldots, N$. Arvion (16) nojalla $h \sum_{n=1}^{N} g(nh) > h \sum_{n=1}^{\infty} g(nh) - \varepsilon$, joten huomioimalla vielä (15) saadaan epäyhtälö

$$(\frac{1}{\mu} - \varepsilon)(Q - 2\varepsilon) < T_2(t) < (\frac{1}{\mu} + \varepsilon)(Q + \varepsilon),$$

joka on voimassa, kun t vain on kyllin suuri. Siis $\lim_{t\to\infty} T_2(t) = \frac{1}{\mu} Q$ ja

$$(18) \qquad \lim_{t\to\infty} \int_o^t g(t - u)dm(u) = \lim_{t\to\infty} [T_1(t) + T_2(t)] = \frac{1}{\mu} Q \ ,$$

mikä pitikin todistaa. Jos $\mu = \infty$, korvataan esitetyssä todistuksessa luku $\frac{1}{\mu}$ luvulla 0, jolloin täsmälleen sama todistus antaa raja-arvoksi (18) luvun 0, sillä oletuksen perusteella $Q < \infty$.

Ennen varsinaista rajajakaumalausetta todistetaan vielä seuraava apulause, jota varten otamme käyttöön joitakin määritelmiä ja merkintöjä.

Määritellään työjakso aikaväliksi, jolloin palvelija työskentelee jatkuvasti. Kun systeemissä ei ole asiakkaita, vallitsee lepojakso. Jos palvelijalla on asiakas hetkellä $t = 0$, alkaa ko. hetkestä ns. alkutyöjakso, joka päättyy, kun palvelija on seuraavan kerran vapaa. Merkitään $\hat{G}(x)$:llä todennäköisyyttä, että alkutyöjakson pituus $\leq x$. Alkutyöjakson jälkeen työ- ja lepojaksot vaihtelevat. Varsinaiset työjaksot ovat samoin jakautuneita, keskenään riippumattomia satunnaismuuttujia. Merkitään $G(x)$:llä todennäköisyyttä, että työjakson pituus $\leq x$. Merkitään E_i:llä systeemin tilaa silloin, kun $X(t) = i$.

Apulause 5. Raja-arvo

$$\lim_{t\to\infty} P\{X(t) = 0\} = \lim_{t\to\infty} P_o(t) = P_o$$

on aina olemassa ja riippumaton $X(0)$:n jakaumasta. Jos liikenneintensiteetti $\rho < 1$, niin $P_o = 1 - \rho$, jos $\rho \geq 1$, on $P_o = 0$.

Todistus: Merkitään $N_o(t)$:llä aikavälillä $(0,t]$ tapahtuvien siirtymien $E_1 \to E_0$ lukumäärän odotusarvoa. Selvästi lauseke (I on indikaattori)

$$\sum_{i=1}^{\infty} I\ (i\text{:s siirtymä } E_1 \to E_o \text{ tapahtuu viimeistään hetkellä } t)$$

ilmaisee siirtymien $E_1 \to E_o$ lukumäärän aikavälillä $(0,t]$. Odotusarvon ominaisuuksien nojalla pätee siis

$$N_o(t) = \sum_{i=1}^{\infty} P\{i\text{:s siirtymä } E_1 \to E_o \text{ tapahtuu viimeistään hetkellä } t\}. \tag{19}$$

Lepojakson - jakson, jona palvelija on vapaa - kertymäfunktio on $F(t) = 1 - e^{-\frac{t}{a}}$ $t \geq 0$. Kuten edellä, olkoon $\hat{G}$ alkutyöjakson (initial busy period) ja G muun työjakson kuin alkutyöjakson kertymäfunktio. Koska peräkkäisten siirtymien

$E_1 \to E_o$ väliset ajat ovat toisistaan riippumattomia, samoin jakautuvia satunnaismuuttujia, yhteisenä kertymäfunktionaan F:n ja G:n konvoluutio F * G (Huom! työjakson pituus on riippumaton sitä edeltävän lepojakson pituudesta), saadaan $N_o(t)$:n lausekkeeksi kaavan (19) mukaisesti:

$$(20) \qquad N_o(t) = G(t) + \sum_{n=1}^{\infty} G(t) * [F(t) * G(t)]^{(n)} ,$$

missä $[F * G]^{(n)}$ tarkoittaa (F * G):n n-kertaista konvoluutiota itsensä kanssa. Lausekkeesta (20) saadaan kaava

$$dN_o(t) = dG(t) + \sum_{n=1}^{\infty} d\left\{G(t) * [F(t) * G(t)]^{(n)}\right\},$$

jonka oikea puoli on kokonaistodennäköisyyden kaavan nojalla todennäköisyys, että hetkellä t sattuu siirtymä $E_1 \to E_o$. Tämän valmistelun jälkeen voidaan kirjoittaa

$$P_o(t) = P_o(0)e^{-\frac{t}{a}} + \int_0^t e^{-\frac{t-u}{a}} dN_o(u),$$

mikä nähdään seuraavasti: hetkellä t = 0 vallitsee tila E_o, eikä yhtään asiakasta saavu aikavälillä (0,t], tai viimeinen aikavälillä (0,t] sattuvista siirtymistä $E_1 \to E_o$ sattuu hetkellä u, eikä aikavälillä (u,t] saavu yhtään asiakasta. Sovelletaan jälkimmäiseen termiin apulausetta 4. Tämä käy päinsä, sillä funktio F * G ei ole lauseketta (14) vastaavaa muotoa. Lisäksi lepojakson ja sitä seuraavan työjakson yhteisen pituuden odotusarvo on $a + \tau$, missä työjakson odotusarvo τ määritetään seuraavasti: olkoon q työjakson aikana palveltujen asiakkaiden lukumäärä. Silloin $\tau = qb$. Tarkastellaan toisaalta kahden peräkkäisen työjakson alkamisajankohtaa. Niiden välisen aikavälin odotusarvo on toisaalta qa ja toisaalta ko. odotusarvo on työjakson pituuden odotusarvon qb

ja lepojakson pituuden odotusarvon a summa. Näin ollen qa = qb + a eli $q = \frac{a}{a-b}$, jos $\rho = \frac{b}{a} < 1$, muuten $q = \infty$. Siis

$$\tau = \begin{cases} \frac{b}{1-\rho}, & \text{jos } \rho < 1 \\ \infty, & \text{jos } \rho \geq 1 \end{cases}$$

Koska lisäksi $g(u) = e^{-\frac{1}{a}u}$ on välillä $[0,\infty)$ rajoitetusti heilahteleva, on apulauseen 4 nojalla

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^t e^{-\frac{t-u}{a}} dN_0(u) = \frac{1}{\tau + a} \int_0^\infty e^{-\frac{u}{a}} du = \frac{1}{\frac{1}{a}(\tau+a)}$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{jos } \rho \geq 1 \\ \frac{1}{\frac{1}{a}(\frac{b}{1-\rho} + a)} = 1 - \rho, & \text{jos } \rho < 1. \end{cases}$$

Näin apulause on todistettu.

Nyt voimme todistaa seuraavan varmuuslisän λ merkitystä korostavan lauseen.

<u>Lause 6</u>. Yleistetyssä Poisson-riskiprosessissa on rauniotodennäköisyys äärettömän pitkän ajan kuluessa varma, jos varmuuslisä $\lambda = 0$; mikäli $\lambda > 0$, on vastaava todennäköisyys < 1.

<u>Todistus</u>: Olkoon alkupääoma = $U \geq 0$. Lauseen 3 perusteella

$$\lim_{t\to\infty} V(U,t) = \lim_{t\to\infty} P\left\{N(t) \leq \frac{a}{b(1+\lambda)} U\right\}$$

Jos nyt $\lambda > 0$, on liikenneintensiteetti $\rho < 1$ (kts. lauseen 3 jälkeistä kappaletta), joten apulauseen 5 nojalla

$$\lim_{t\to\infty} P\left\{N(t) \leq \frac{a}{b(1+\lambda)} U\right\} \geq \lim_{t\to\infty} P\left\{N(t) = 0\right\} = 1 - \rho > 0$$

eli $1 - \lim_{t\to\infty} V(U,t)$ = rauniotodennäköisyys

äärettömän pitkän ajan kuluessa $\leq \rho < 1$.

Jos taas $\lambda = 0$, on $\rho = 1$ ja apulauseesta 5 ja lauseen 3 todistuksesta seuraa, että

$$\lim_{t\to\infty} V(0,t) = \lim_{t\to\infty} P\left\{\sup_{\tau<t} [S'(\tau) - \tau] \leq 0\right\}$$

$$= P\left\{\sup_{0\leq\tau<\infty} [S'(\tau) - \tau] \leq 0\right\} = 0.$$

Näin ollen tapaus $\lambda = 0$ on todistettu, kun $U = 0$. Olkoon nyt $U > 0$. Tällöin on olemassa U' siten, että $0 < \frac{a}{b} U < U'$ ja $P\left\{S'(U') < U' - \frac{a}{b} U\right\} > 0$. Luvun U' valinnasta johtuen on voimassa epäyhtälö

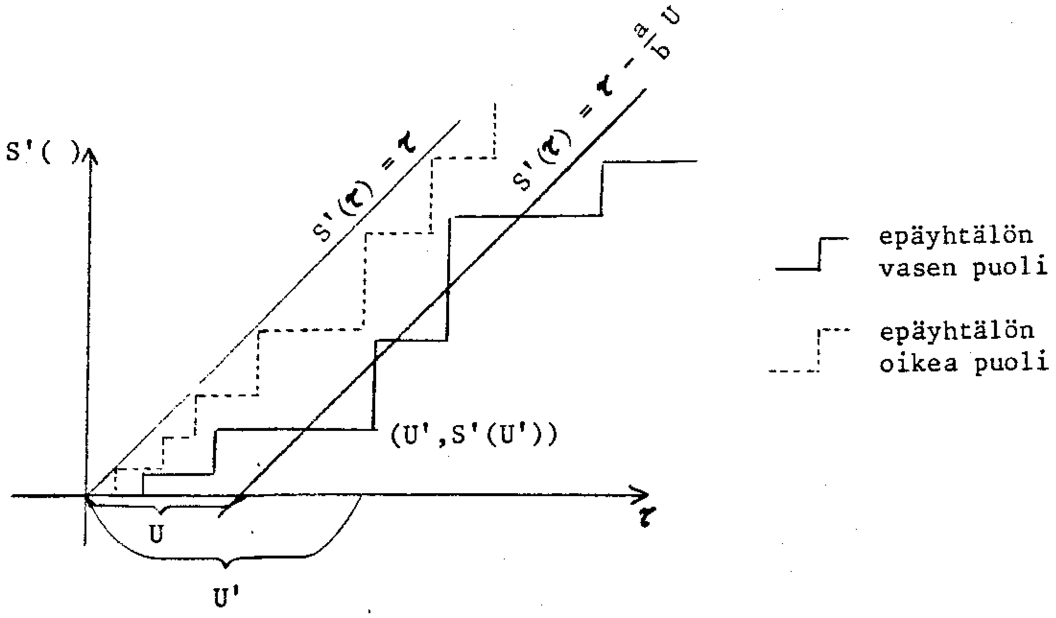
$$(21) \qquad P\left\{S'(U') < U' - \frac{a}{b} U\right\} P\left\{\sup_{0\leq\tau<\infty} [S'(\tau) - \tau] \leq \frac{a}{b} U\right\}$$

$$\leq P\left\{\sup_{0\leq\tau<\infty} [S'(\tau) - \tau] \leq 0\right\} = 0,$$

joten $\lim_{t\to\infty} V(U,t) = P\left\{\sup_{0\leq\tau<\infty}[S'(\tau) - \tau] \leq \frac{a}{b} U\right\} = 0$,

myös silloin, kun $U > 0$. Näin väite on todistettu.

Huomautus: Epäyhtälöä (21) voidaan havainnollistaa seuraavasti:



Epäyhtälön vasen puoli kuvaa niitä prosessin $\{S'(t)\}$ reaalisaatioita, jotka ensin etenevät $(\tau, S'(\tau))$-koordinaatiston origosta positiivisella todennäköisyydellä suoran $S'(\tau) = \tau - \frac{a}{b}U$ alapuoliseen pisteeseen (esim. pisteeseen $(U', S'(U'))$ ja sen jälkeen pysyvät suoran $S'(\tau) = \tau$ alapuolella. Epäyhtälö (21) seuraa siitä, että nämä reaalisaatiot kuuluvat luonnollisesti ko. epäyhtälön oikean puolen edustamaan tapahtumaan. On huomattava, että epäyhtälössä (21) esiintyvä todennäköisyys $P\left\{\sup_{0\leq\tau<\infty}[S'(\tau) - \tau] \leq \frac{a}{b}U\right\}$ pitäisi itse asiassa olla muotoa

$$P\left\{\sup_{U'\leq\tau<\infty}[S'(\tau) - \tau] \leq \frac{a}{b}U\right\}.$$

Helposti kuitenkin nähdään, että nämä todennäköisyydet yhtyvät, sillä lauseen 3 nojalla yo. todennäköisyydet ovat raja-arvoja, kun $t \to \infty$ ja näin ollen ei ole merkitystä sillä, kasvaako t rajatta nollasta vai U':sta lähtien.

Siirrymme seuraavaksi tarkastelemaan lauseen 3 analogiatuloksen hyväksikäyttöä rauniotodennäköisyyden simuloinnissa. Lauseen 3 mukaan todennäköisyys

$V(U,t)$, ettei aikavälillä $(0,t]$ satu yleistetyssä Poisson-riskiprosessissa vararikkoa, kun alkupääoma on U, on sama kuin todennäköisyys, että analogisessa jonoprosessissa hetkellä t jonoon saapuva asiakas joutuu odottamaan korkeintaan ajan $\frac{a}{b(1+\lambda)}U$, kun jono hetkellä $t = 0$ oli tyhjä. Todennäköisyyden $P\left\{N(t) \leq \frac{a}{b(1+\lambda)} U\right\}$ arvioimiseksi simuloidaan ko. jonoprosessin jonotusaikaa käyttämällä kaavaa

$$(22) \qquad W_{n+1} = [W_n + X_n - A_{n+1}]^+ ,$$

missä W_n = n:nnen asiakkaan jonotusaika

X_n = n:nnen asiakkaan palveluaika

A_{n+1} = n:nnen ja (n+1):nnen asiakkaan saapumishetkien välinen aika

$[x]^+$ = x, jos $x > 0$ ja $= 0$ muutoin.

Kaavan (22) perustelu on selvä: jonoon saapuvan asiakkaan jonotusaika on sama kuin edellisen asiakkaan jonotusaika lisättynä tämän palveluajalla ja vähennettynä näiden asiakkaiden saapumishetkien välisellä ajalla. Kaavaa (22) käytetään niin kauan kuin löydetään sellainen n, että

$$(23) \qquad \sum_{i=1}^{n} A_i < t \leq \sum_{i=1}^{n+1} A_{n+1} ,$$

ts. simulointia jatketaan niin kauan kuin ennalta määrätty tarkkailuhetki t joutuu kahden peräkkäisen saapumishetken väliin. Kun ehdon (23) täyttävä n on löydetty, määritetään jonotusaika $N(t)$ kaavasta

$$(24) \qquad N(t) = [W_n + X_n - (t - \sum_{i=1}^{n} A_n)]^+ .$$

Tämän jälkeen tutkitaan toteuttaako $N(t)$ ehdon

(25) $$N(t) \leq \frac{a}{b(1+\lambda)} U .$$

Jokaisella simulointikierroksella määritetään N(t) kaavan (24) mukaisesti ja tutkitaan toteutuuko ehto (25). Ehdon (25) toteuttavien kierrosten suhde simulointikierrosten kokonaislukumäärään antaa arvion todennäköisyydelle $P\left\{N(t) \leq \frac{a}{b(1+\lambda)} U\right\}$, joka lauseen 3 mukaan on sama kuin V(U,t).

Esitämme seuraavaksi algoritmin, jolla edellä kuvailtu simulointimenetelmä toteutetaan. Olkoon

SL = simulointikierrosten lukumäärä

i = juokseva indeksi, joka kasvaa simulointikierrosten myötä

p = niiden tapausten lukumäärä, jolloin $N(t) \leq \frac{a}{b(1+\lambda)} U$

X = asiakkaan (A_1) palveluaika

A_1 = asiakkaan saapumishetki

A_2 = seuraavan asiakkaan saapumishetki

S = $A_2 - A_1$, ts. peräkkäisten saapumishetkien välinen aika

W_1 = asiakkaan jonotusaika

W_2 = seuraavan asiakkaan jonotusaika

$\rightarrow$ = osoittaa algoritmin askelten välistä siirtymää

$\leftarrow$ = osoittaa sijoitusta

T = simuloitava todennäköisyys

A[0] [ALKUASETUKSET]: $p \leftarrow i \leftarrow 0$.

A[1] [ENSIMMÄINEN ASIAKAS]: Määritä S;

aseta $A_2 \leftarrow A_1 \leftarrow S$, $W_1 \leftarrow W_2 \leftarrow 0$

Jos $t < A_1$, aseta $p \leftarrow p + 1$ ja $\rightarrow$ A[7].

A[2] [SEURAAVA ASIAKAS]: Määritä S ja X;

aseta $A_1 \leftarrow A_2$, $A_2 \leftarrow A_1 + S$, $W_1 \leftarrow W_2$

A[3] [JOKO PÄÄSTIIN HETKEEN t]:

Jos $A_1 < t \leq A_2$, niin $\rightarrow$ A[5].

A[4] [MÄÄRITÄ JONOTUSAIKA]:

$W_2 \leftarrow [W_1 + X - S]^+$, $\rightarrow$ A[2]

A[5] [MÄÄRITÄ N(t)]:

$N(t) \leftarrow [W_1 + X - (t - A_1)]^+$

A[6] [TOTEUTUUKO EHTO (25)]:

Jos $N(t) \leq \frac{a}{b(1+\lambda)} U$, niin $p \leftarrow p + 1$

A[7] [VIELÄKÖ SIMULOIDAAN]:

$i \leftarrow i + 1$,

Jos $i \leq SL$, niin $\rightarrow$ A[1].

A[8] [MÄÄRITÄ TODENNÄKÖISYYS]:

$T \leftarrow \frac{p}{SL}$.

Haluttaessa simuloida pitkään toiminnassa olleen vakuutusyhtiön vararikon välttämistodennäköisyyttä, on algoritmia muutettava siten, että askel A[1] saa seuraavan muodon:

A[1] [ENSIMMÄINEN ASIAKAS]: Määritä S ja N(0);

aseta $A_1 \leftarrow A_2 \leftarrow S$, $W_1 \leftarrow W_2 \leftarrow N(0)$;

Jos $t < A_1$, niin $N(t) \leftarrow [N(0) - t]^+$ ja $\rightarrow$ A[6].

Tässä N(0) tarkoittaa jonotusaikaa hetkellä $t = 0$; N(0):n jakauma määräytyy saapumisprosessi- ja palveluaikaoletuksien perusteella.

Esitetty simulointialgoritmi tuotti seuraavia tuloksia.

Ensimmäinen testikohde oli lauseen 1 tilanne, jossa yleistetyn Poisson-riskiprosessin vahinkojakauma on eksponentiaalinen kertymäfunktionaan $H(x) = 1 - e^{-\mu x}$. Jos oletetaan, että $\mu = 0,5$, $\lambda = 0,1$ ja $U = 5$, antaa kaava 1 äärettömän pitkän ajan vararikon välttämistodennäköisyydeksi 0,276. Simuloinnin tulokset olivat seuraavanlaisia (SL = simulointien lkm, t = simulointiaika):

t \ SL	10	100	1000
0	0,2	0,28	0,265
10	0,2	0,32	0,280
100	0,2	0,31	0,268

Tulokset ovat suuruusluokaltaan oikeita ja tukevat lauseen 1 stationaarisuus-väitettä, sillä taulukon luvut eivät olennaisesti muutu ajan mukana.

Seuraavana sovellutuksena tarkastelemme Beard-Pentikäinen-Pesonen kirjan Risk Theory esimerkkiä 2.5.1, jossa käsitellään 1000 jäsenisen hautausavustus-kassan vakavaraisuutta. Kuolintapauksessa korvaussumma on 5000 mk. Keski-kuolleisuus vuotta kohden on 0,01 ja varmuuslisä on 0,1. Tarkkaillaan avustus-kassan vakavaraisuutta 5 vuoden ajanjaksona. Esimerkissä pyydetään määrittä-mään alkupääoma U siten, että vararikon välttämistodennäköisyys 5 vuoden aikana olisi 0,99. Kaava

(26) $$U = y_{\varepsilon} S\sqrt{n} - \lambda nS,$$

missä $\varepsilon = 0,01$, $y_{\varepsilon} = 2,33$, $S = 5000$

$n = 1000 \cdot 0,01 \cdot 5 = 50$ ja $\lambda = 0,1$,

antaa U:lle likiarvon 57400 mk.

Simulointialgoritmissa oletetaan saapumisprosessi Poisson-prosessiksi parametrinaan 10. Palveluajan jakauma H on muotoa

$$H(x) = \begin{cases} 0, \text{ jos } x < 5000 \\ 1, \text{ jos } x \geq 5000 . \end{cases}$$

Lisäksi asetetaan

$U = 57400$

$t = 5$ (simulointiaika)

$\lambda = 0{,}1$

$SL = 1000$ (simulointien lkm).

Vararikon välttämistodennäköisyydeksi saadaan 0,973, siis jonkin verran pienempi luku kuin kaavan (26) antama tulos.

Simulointialgoritmin yleisiä ominaisuuksia selvittävät seuraavat taulukot, joissa kaikissa taustalla olevassa riskiprosessissa vahinkojen suuruudet ovat nopanheitossa saatuja pistelukuja todennäköisyydellä 1/6, ts. jos X on vahingon suuruus, on

$$P\left\{X = i\right\} = \frac{1}{6}, \quad i = 1,2,\ldots,6.$$

Taulukot ilmaiset mm. seuraavia, melko selvältä tuntuvia seikkoja kuten, että vararikon välttämistodennäköisyys pienenee, kun aika tai saapumisintensiteetti kasvaa ja ko. todennäköisyys kasvaa, kun alkupääoma tai varmuuslisä kasvaa. Näissä taulukoissa on simulointien lukumäärä (SL) 500. Merkitään varmuuslisää λ :lla ja saapumisintensiteettiä s:llä.

U = 5 , t = 1

s \ λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	0,856	0,880	0,882	0,896	0,898	0,9
2	0,754	0,77	0,798	0,806	0,826	0,858
5	0,578	0,612	0,652	0,7	0,702	0,764

U = 10 , t = 1

s \ λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	0,974	0,982	0,984	0,986	0,99	0,994
2	0,934	0,948	0,950	0,952	0,956	0,982
5	0,780	0,806	0,860	0,910	0,914	0,918

U = 5 , t = 10

s \ λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	0,468	0,508	0,580	0,608	0,674	0,742
2	0,306	0,406	0,500	0,620	0,640	0,724
5	0,196	0,332	0,452	0,540	0,610	0,702

U = 10 , t = 10

s \ λ	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	0,690	0,746	0,800	0,860	0,890	0,912
2	0,514	0,614	0,708	0,770	0,838	0,880
5	0,344	0,512	0,642	0,730	0,772	0,848

Lauseen 6 tuloksen laskennalliseksi toteamiseksi simuloitiin yleistettyä Poisson-riskiprosessia, jossa vahinkojakauma on eksponenttijakauma. Jos nyt $\lambda = 0$, on lauseen 6 mukaan konkurssi varma, kun tarkasteluajanjakso on äärettömän pitkä (sama tulos nähdään eksponentiaalisen vahinkojakauman tapauksessa myös kaavasta (1) sijoituksella $\lambda = 0$). Oletetaan, että $U = 1$ ja $\mu = 10$. Tällöin kaavasta (1) saadaan vararikon välttämistodennäköisyydeksi luku 0,634, kun $\lambda = 0{,}1$. Seuraavassa taulukossa on nähtävissä selviytymistodennäköisyyksien kehittyminen ajan kasvaessa.

$U = 1$, $\mu = 10$

t	0	0,1
1	0,94	0,97
10	0,57	0,77
100	0,28	0,62
1000	0,05	0,64

Käytetty simulointikierrosten lukumäärä on 100. Tuloksista nähdään, että arvoa $\lambda = 0{,}1$ vastaava todennäköisyys on asettunut oikean arvonsa 0,634 lähettyville, kun t = 100 tai 1000. Kun varmuuslisä $\lambda = 0$, näyttää selviämistodennäköisyys lähestyvän nollaa, niinkuin kaavasta (1) tai lauseesta 6 on voitu päätelläkin.

On huomattava, että suurilla t:n arvoilla simulointi vaatii runsaasti laskutoimituksia: esimerkiksi edellisessä simulointitehtävässä arvo t = 1000 aikaansaa simulointialgoritmin askelten A[2] - A[4] (luuppiosa) suorittamisen keskimäärin 10^6 kertaa.