WORKING PAPERS ISSN 0781-4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

2

Juhani Heiskanen

PALOVAKUUTUKSEN OSAVAHINGOT JA
SURPLUS-JÄLLEENVAKUUTUS (1981

1 JOHDANTO

Riskiteorian harjoitustyössä tutkitaan osavahinkoasteen olemusta ja yhteyksiä surplus- (eksedentti-) jälleenvakuutukseen. Osavahinkoasteella, lyhyemmin vahinkoasteella, tarkoitetaan vakuutetussa kohteessa sattuneen vahingon suhdetta kohteen vakuutussummaan.

Aihetta sivuavissa aikaisemmissa artikkeleissa vahinkoaste on oletettu vakuutetun kohteen koosta riippumattomaksi. Käytännössä näin ei yleensä ole asianlaita. Tässä tutkimuksessa lähestymistapaa on yleistetty luopumalla riippumattomuusolettamuksesta. Kehitettyjen kaavojen avulla on voitu selvittää surplus- ja excess of loss-jälleenvakuutusmuotojen eroavuuksia mm. solvenssitestin yhteydessä.

Kehitettyjen kaavojen perusteella on lisäksi ollut mahdollista luoda surplus-jälleenvakuutusta koskevat käyttötaulukot, jotka ovat vertailukelpoisia yleisesti käytössä olevien excess of loss-taulukoiden kanssa. Käytetty menetelmä osoittautuu erittäin tarkaksi, joten havainnoista tehtyjä johtopäätöksiä voidaan pitää luotettavina.

2 STRAUBIN MALLI

Artikkelissaan 'How to Fix Retention' [1] Erwin Straub tarkastelee surplus-jälleenvakuutusta kantastruktuurin avulla. Straubin tapaan käytetään merkintöjä

$W(s) = P[S \leqq s]$, vahingoittuneiden kohteiden vakuutusmäärän jakauma

$G(z) = P[Z \leqq z]$, vahinkoasteen jakauma

$V(x) = P[X \leqq x]$, yhden vahingon jakauma

$F(y) = P[Y \leqq y]$, kokonaiskorvausmenon jakauma

Vahinkojen lukumäärän noudattaessa Poisson-jakaumaa parametrilla λ, saadaan kokonaiskorvausmenon tunnusluvuksi

$$E(Y) = \lambda E(X) \quad \text{ja}$$

$$E(Y^2) = \lambda E(X^2) + \lambda^2 E^2(X) \ ,$$

missä $E(X^n) = E(S^n)E(Z^n)$, mikäli

S ja Z ovat toisistaan riippumattomia.

Surplus-jälleenvakuutuksen kyseessä ollen merkitään omalla vastuulla olevaa korvausmenoa $\tilde{X}$:lla ja jälleenvakuutusrajaa m:llä. Oletetaan, että kaikki kohteet, joilla $S > m$, kuuluvat jälleenvakuutuksen piiriin siten, että

$$\tilde{X} = \begin{cases} X \ , \text{ jos } S \leqq m \\ \frac{m}{S} X \ , \text{ jos } S > m \end{cases} .$$

----

[1] Mitteilungen der Vereinigung Schweiz. Versicherungsmathematiker, Heft 1, 1978

$$\alpha_n(s) = E(Z(s)^n | s) = \int_0^s (\frac{x}{s})^n d_x V(s,x)$$

Olkoon edelleen surplus-jälleenvakuutuksen omapidätysraja = m. Tällöin omalla vastuulla olevan yhden vahingon n:s momentti voidaan esittää muodossa

$$E(\tilde{X}^n | m) = \int_0^m \int_0^s x^n d_x V(s,x) d_s W(s) + \int_m^\infty \int_0^s (\frac{x \cdot m}{s})^n d_x V(s,x) d_s W(s)$$

$$= \int_0^m s^n \int_0^s (\frac{x}{s})^n d_x V(s,x) d_s W(s) + m^n \int_m^\infty \int_0^s (\frac{x}{s})^n d_x V(s,x) \cdot d_s W(s)$$

$$= \int_0^m s^n \alpha_n(s) d_s W(s) + m^n \int_m^\infty \alpha_n(s) d_s W(s)$$

Erona Straubin malliin on se, että vahinkoasteen tunnusluvut $\alpha_n(s)$ jäävät integraalin sisään, mikä yleensä vaikeuttaa laskutoimituksia. Käytännössä kaavan soveltaminen on kuitenkin helppoa. Useimmiten laskenta suoritetaan luokitellusta aineistosta. Tällöin vahinkoasteen osalta riittää, että tunnetaan luokkakohtaiset kaksi tai kolme ensimmäistä momenttia $\alpha_n(s)$, $n = 1,2..$.

4 VAHINKOASTEEN PROFIILI PALOVAKUUTUKSESSA

4.1 Aineisto

Tutkimusta varten analysoitiin Vakuutusalan tilastokeskuksessa palovahinkojen tilastoaineisto vuosilta 1973 - 1978. Tilastoon on kerätty korvaustietojen lisäksi myös tieto vahingoittuneiden kohteiden vakuutusmääristä, joten vahinkoasteen ominaisuuksien tutkiminen ei vaatinut lisätoimenpiteitä. Aineisto muunnettiin vuoden 1978 tasoon käyttämällä rakennuskustannusindeksiä. Vastaavat tutkimukset suoritettiin myös eräästä yhtiökohtaisesta aineistosta. Eri aineistoista tehdyt havainnot tukivat toisiaan.

4.2 $\alpha_1(s)$

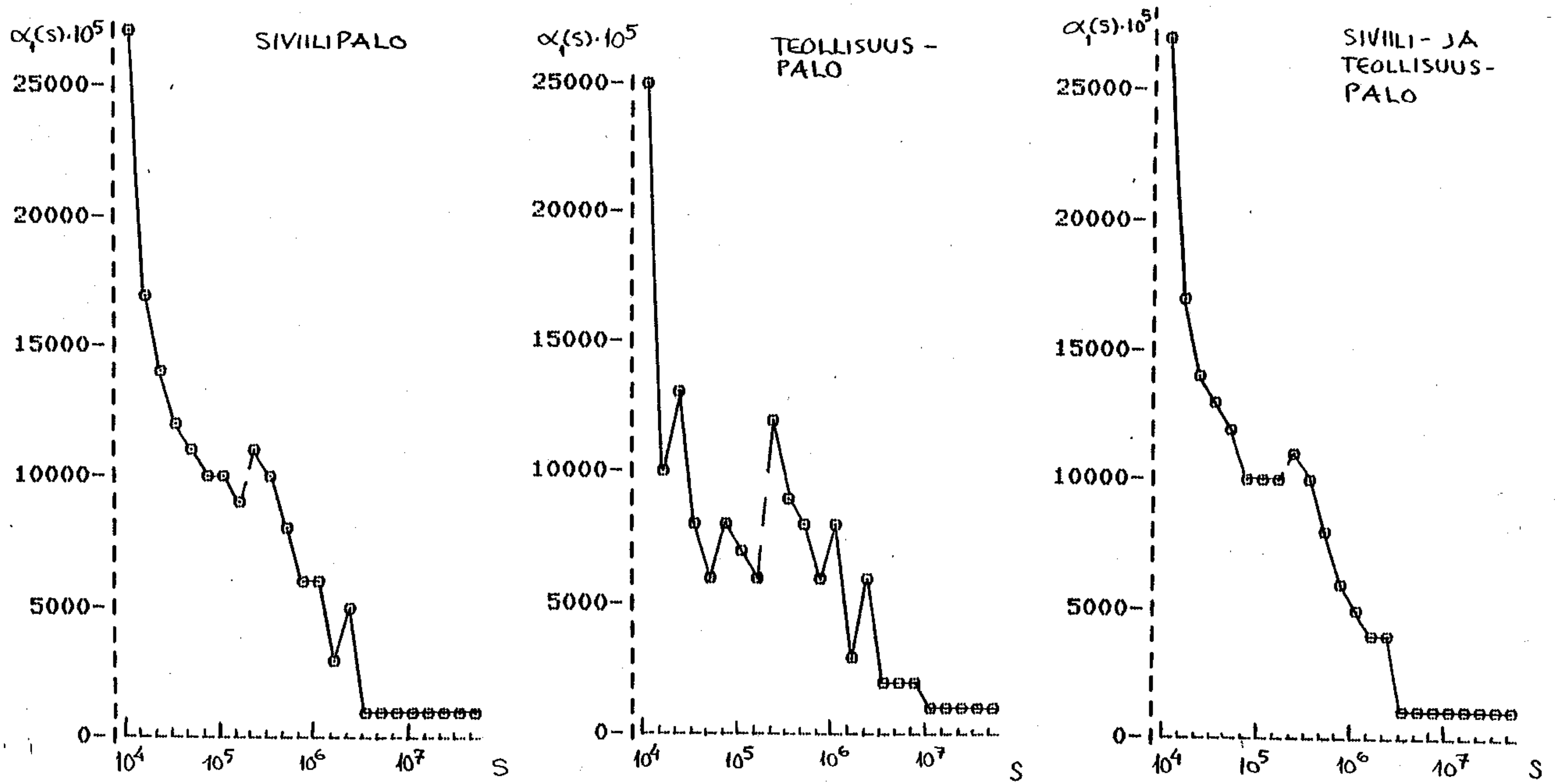
Vahinkoasteen odotusarvo vakuutusmäärän funktiona palovakuutuskollektiivissa

Riskiteoreettisesti paras tapa on ilmeisesti kuvata vahinkoastetta EML:n funktiona. (EML = Estimated Maximun Loss.) Tätä suuretta ei kuitenkaan ole tilastoitu, joten se on korvattu vakuutusmäärällä S.

Kuva 1 esittää $\alpha_1(s)$:n riippuvuutta vakuutusmäärän suuruudesta. S:n kasvaessa $\alpha_1(s)$ pienenee eksponentiaalisesti. Liitteessä 1 on esitetty tarkat numeroarvot siviili- ja palovakuutukselle erikseen ja yhdessä. Estimaattina $\alpha_1(s)$:lle on käytetty Z(s):n aritmeettista keskiarvoa kussakin luokassa. Kaikkiaan aineisto käsitti 41 400 havaintoa, joista teollisuuspalovahinkoja oli 7 900. Havaintojen niukkuus teollisuuspalossa aiheutti tiettyä $\alpha_1(s)$:n värähtelyä. Tätä ilmiötä ei siviilipalossa esiintynyt. Sen sijaan molemmissa lajeissa vakuutusmäärän ollessa 160 - 350 000 mk $\alpha_1(s)$ saa poikkeuksellisen suuria arvoja. Tämä selittyy sillä, että ko. luokkiin kuuluu sekä suurten irtaimistojen että pienten kiinteistöjen vakuutuksia. Suurin osa havainnoista koskee kiinteistöjä, joten kysymys on epäjatkuvuuskohdasta siirryttäessä irtaimistojen joukosta kiinteistöjen joukkoon.

KUVA 1

$\alpha_1(s)$, VAHINKOASTEEN ODOTUSARVO S:N FUNKTIONA



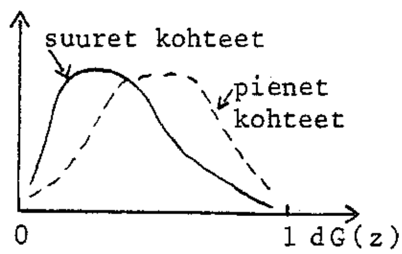
S:N LUOKITTELUSSA JOKAINEN 10:N POTENSSI ON JAETTU KUUTEEN LUOKKAAN, JOIDEN YLÄRAJAT OVAT 1.6, 2, 3.5, 5, 7, 10

4.3
Vahinkoasteen Z sisäinen jakauma G(z)

Z:n jakaumaa selvitettiin lähinnä koko kollektiivin tasolla. Vähemmälle huomiolle jätettiin sen tutkiminen, eroavatko Z:n jakaumatyypit toisistaan siirryttäessä pienistä vakuutuskohteista suuriin kohteisiin. Käytettävissä oli tilastoaineisto, jossa oli suhteellisen niukalti havaintoja suurista kohteista Kuvassa 2 on esitetty siviilipalo- ja teollisuuspalovakuutuksesta erikseen ja yhdessä vahinkoasteen frekvenssifunktiot dG(z). Kuvasta voidaan päätellä, että

- pienten ja suurten vakuutuskohteiden vahinkoasteen jakauman voidaan olettaa kuuluvan samaan jakaumaperheeseen;

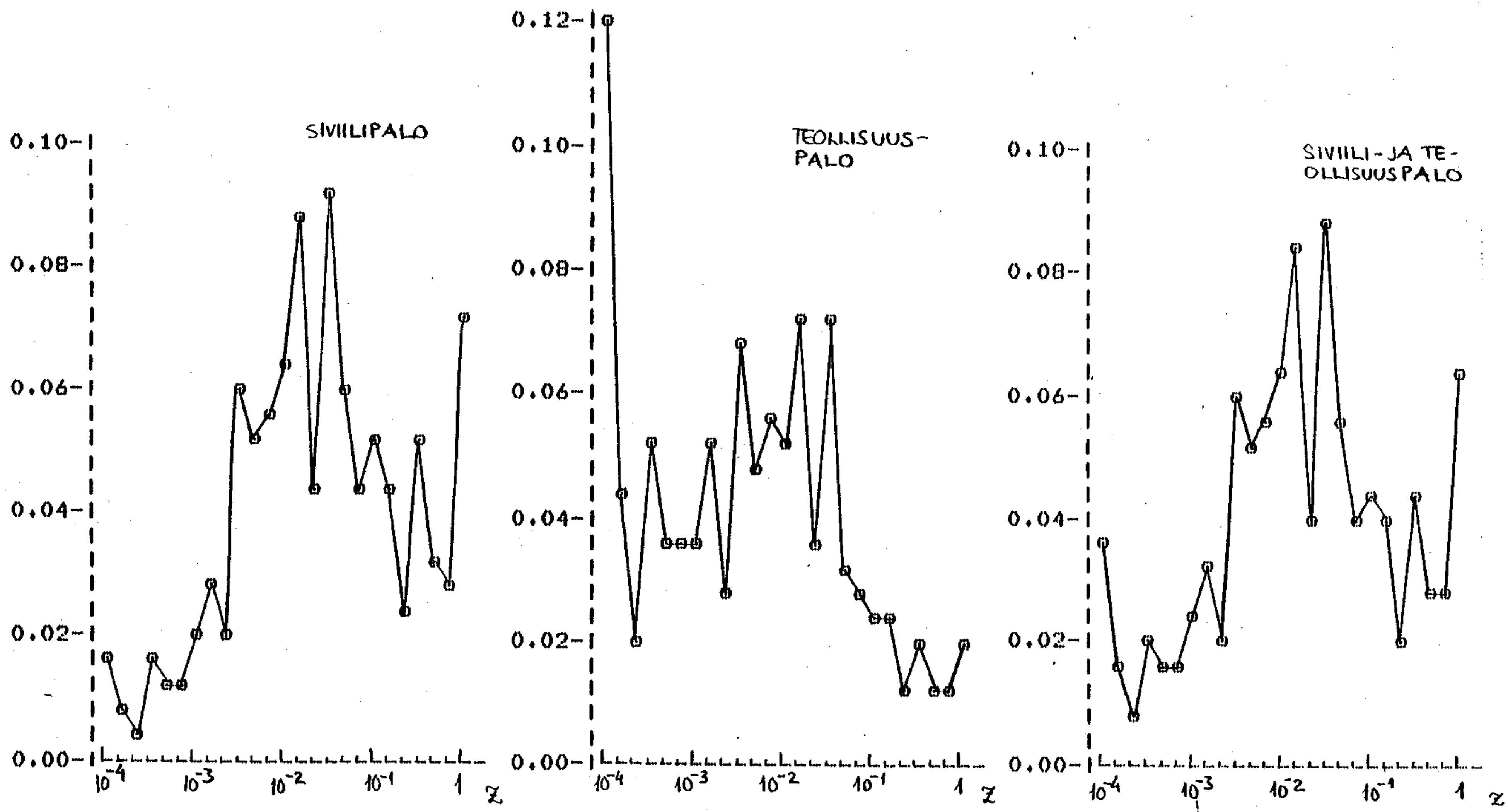
- koska Z:n odotusarvo alenee, kun vakuutusmäärä kasvaa, siirtyy jakauman painopiste vastaavasti vasemmalle.



Venezian ja Gaydos olettavat Z:n jakaumaksi β-jakauman ilman sen kummempia perusteluja. Ko. jakauman soveltuvuutta palovakuutukseen ei tutkittu.

KUVA 2

VAHINKOASTEEN FREKVENSSIFUNKTIO $dG(z)$



JOKAINEN 10:N POTENSSI ON JAETTU KUUTEEN LUOKKAAN, JOIDEN YLÄRAJAT OVAT 1.6, 2, 3.5, 5, 7, 10

5 SURPLUS-JÄLLEENVAKUUTUS JA SOLVENSSITESTI

5.1 Surplus ja excess of loss

Straubin mallia laajennettaessa käytettiin jälleenvakuutusolettamuksena surplus-jälleenvakuutusta. Riskiteorian peruskaavoissa tätä yleisempi jälleenvakuutusolettamus on excess of loss-jälleenvakuutus. Tutkimuksessa käytetty aineisto antaa mahdollisuuden vertailla mainittuja jälleenvakuutusmuotoja mm. solvenssitestin yhteydessä. Liitteessä 1 on esitetty havaintoaineistosta lasketut solvenssitestissä tarvittavat surplus-tunnusluvut. Vastaavat excess of loss-tunnusluvut löytyvät liitteestä 2. Omalla vastuulla olevan yhden vahingon odotusarvon tulee molemmissa järjestelmissä lähestyä samaa raja-arvoa maksimaalin lähestyessä ääretöntä. Laajennetun mallin tarkkuutta kuvaa se, että viimeisen havainnon kohdalla surplus- ja excess of loss-odotusarvot $E(\tilde{X})$ poikkeavat toisistaan vain prosentin verran.

5.2 Solvenssitesti ja herkkyysanalyysi

Seuraavassa tarkastelussa oletetaan, että surplus-omapidätysraja m ja excess of loss-maksimaali M ovat yhtä suuret. Puhumme siten vain maksimaalista M. Herkkyysanalyysin yhteydessä tutkitaan jälleenvakuutustyypin vaikutusta, kun muut muuttujat vakioidaan. Solvenssitestissä on käytetty prof. Teivo Pentikäisen johtaman solvenssityöryhmän tutkimuksen [3] aineistoa.

----

[3] Sosiaali- ja terveysministeriön asettaman solvenssityöryhmän tutkimus: Vakuutusyhtiöiden vakavaraisuudesta sekä tasoitusvarauksesta, Helsinki 28.1.1981 (LUONNOS)

Vakuutusyhtiön oletetaan koostuvan neljästä osastosta

1 Moottoriajoneuvo- ja tapaturma- sekä yhdistelmälajit

2 Palovakuutus

3 Metsä- ja luottovakuutus

4 Jälleenvakuutus

Tarkastelun kohteeksi otetaan tasoitusvarauksen tavoitevyöhykkeen yläraja U2. Muut kuin osasto 2, palo, pidetään vakiotilassa. Paloon sovelletaan sekä excess of loss-jälleenvakuutusta, että erikseen myös surplus-jälleenvakuutusta eri maksimaaleilla M. Ylärajaa U2 testattaessa on käytetty empiiristä havaintoaineistoa. Liitteessä 3 on esitetty tutkimuksen tulokset siviili- ja teollisuuspalovakuutuksesta erikseen ja yhdessä.

Yläraja on saatu kaavasta

$$U2 = 0{,}54 \cdot \bar{f} + 0{,}72 \cdot S \text{ , missä}$$

$$\begin{cases} S^2 = \sum_j \pi_j^2 (300 \cdot \frac{\alpha_{2j}}{\alpha_{1j}^2} \frac{\bar{f}_j}{n_j} + 240 \cdot \bar{f}_j^2 \sigma_{hj}^2) \\ \pi_j = B_j / \sum_j B_j \quad , \quad \bar{f} = \sum_j \pi_j \bar{f}_j \\ \sigma_{hj}^2 = \text{vakuutuslajeittainen huojunnan varianssi} \end{cases}$$

Käytetyt merkinnät on selostettu liitteessä 4.

Kaavassa tarvittavat luvut ovat standardiyhtiömallin mukaan samat kuin raportissa [3]

osasto	M_j Mmk	B_j 1000 mk	N_j kpl	α_{1j} 1000 mk	α_{2j} $10^6 mk^2$	σ_{hj}	$\bar{f}_j$
1	1	64	9100	4,890	743,9	0,03	0,773
2	*)	26	300	*)	*)	0,07	0,720
3	2	1	100	4,920	809	0,8	0,490
4	2	34	500	4,920	809	0,1	0,940

*) luvut käyvät ilmi liitteiden 1 ja 2 havaintoaineistosta.

Kuvassa 3 on graafinen yhteenveto herkkyysanalyysin tuloksista. Maksimaalin ollessa 100 000 markan ja noin 1 Mmk:n välillä, päädytään lähes samaan tasoitusvarauksen tavoitevyöhykkeen ylärajaan riippumatta siitä, kumpaa jälleenvakuutusjärjestelmää palovakuutuksessa sovelletaan. Siviilipalovakuutuksessa maksimaalin M noustessa yli 1 miljoonan markan ja teollisuuspalovakuutuksessa yli 3,5 milj. markan, yläraja on pienempi surplus-järjestelmässä. Suurin ero excess of loss-järjestelmään on siviilipalovakuutuksessa M:n arvolla 7 Mmk, noin 10 %. Teollisuuspalovakuutuksen tulokset ovat jonkin verran epätarkkoja, mutta siinäkin on havaittavissa vastaavat ilmiöt kuin siviilipalossa, tosin muutamaa kertaluokkaa suuremmilla maksimaalin arvoilla.

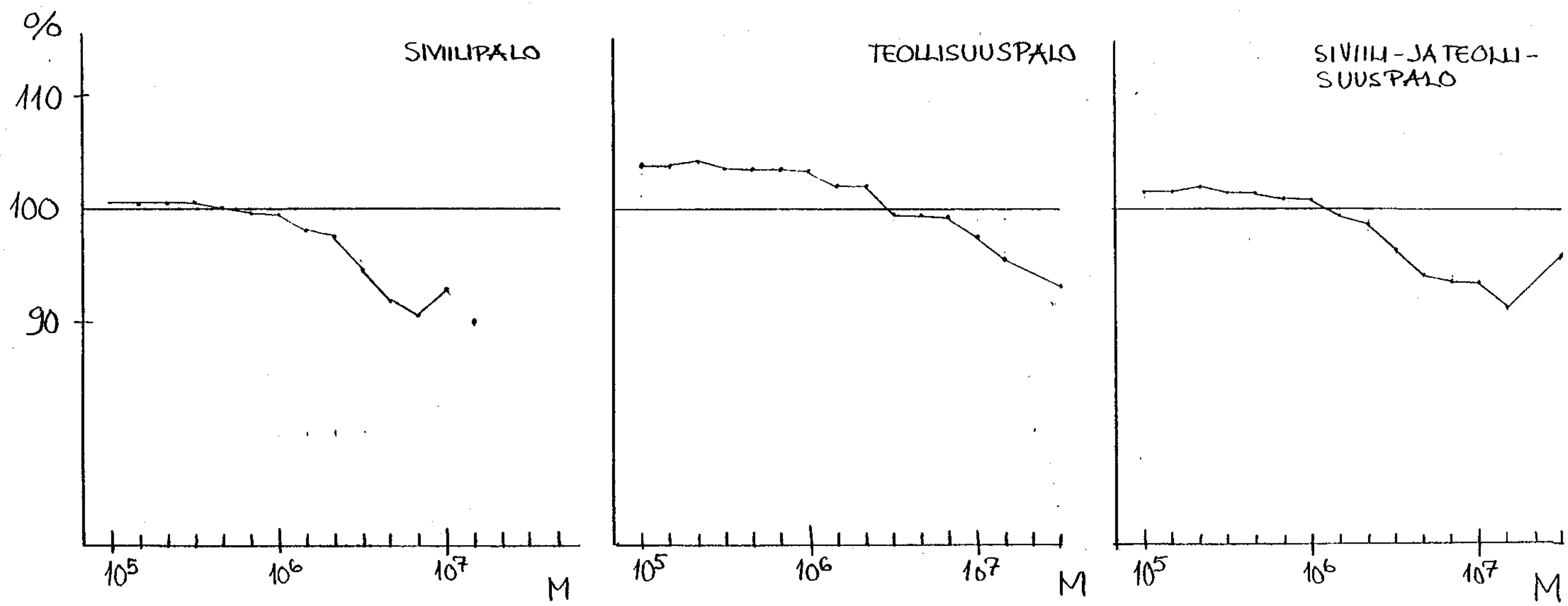
Teoreettisesti alhaisilla M:n arvoilla ylärajan tulisi olla lähes sama molemmissa jälleenvakuutusjärjestelmissä.

Vastaavasti hyvin suurilla maksimaaleilla, omapidätyksen ollessa lähes 100 %, tulisi molempien järjestelmien ylärajojen myös lähestyä toisiaan. Kuvassa 4 on esitetty siviilipalovakuutuksen realisaatio,

minkä perusteella voidaan päätellä reunaehtojen toteutuvan. Teollisuuspalovakuutuksessa tosin rahastotarpeiden välinen ero on todennäköisesti suurimmillaan juuri silloin, kun havainnot vahingoista loppuvat.

Havaintoaineiston perusteella on pääteltävissä, että surplus-jälleenvakuutusta voidaan solvenssitutkimuksissa approksimoida varsin hyvin excess of loss'in avulla.

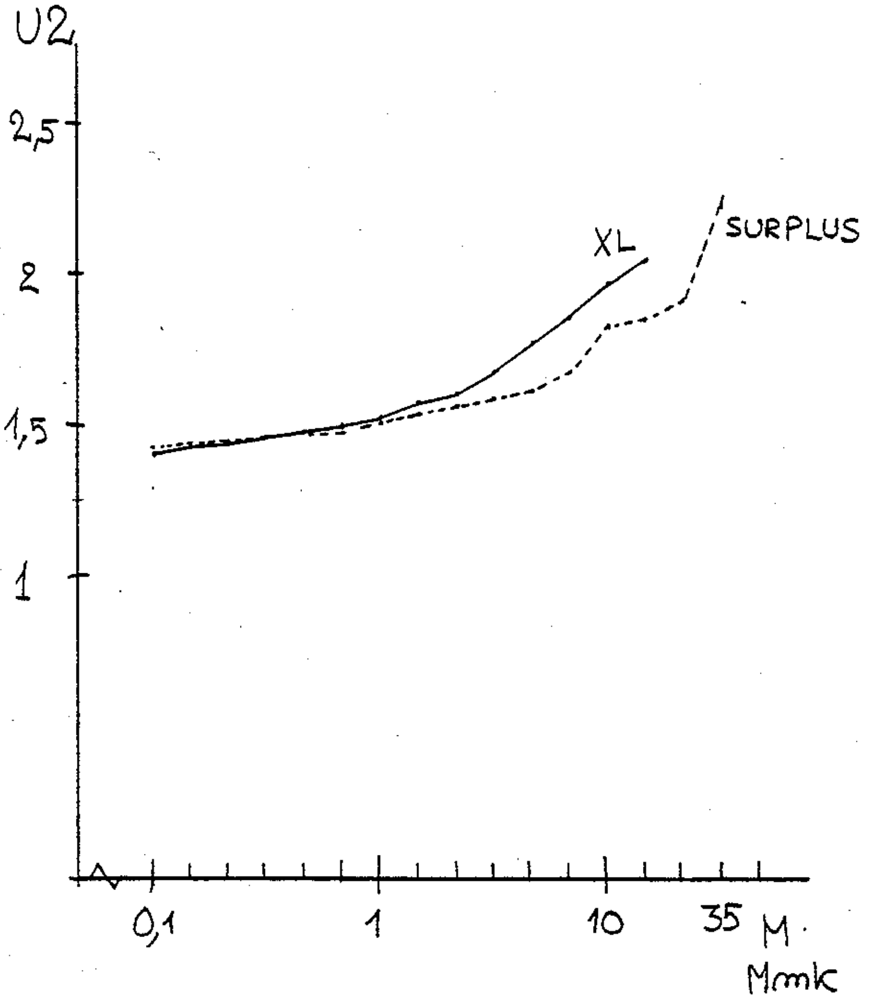
KUVA 3 YLÄRAJA U2 SURPLUS-JÄRJESTELMÄSSÄ, KUN VASTAAVA RAJA XL-JÄRJESTELMÄSSÄ ON 100%.



M:N LUOKITTELUSSA JOKAINEN 10:N POTENSSI ON JAETTU KUUTEEN LUOKKAAN, JOIDEN YLÄRAJAT OVAT 1.6, 2, 3.5, 5, 7, 10

KUVA 4

SOLVENSSIKERROIN U2 MAKSIMAALIN FUNKTIONA, SIVIILIPALOVAKUUTUS



M:N LUOKITUKSESSA JOKAINEN 10:N POTENSSI ON JAETTU KUUTEEN LUOKKAAN, JOIDEN YLÄ-RAJAT OVAT 1.6, 2, 3.5, 5, 7, 10

L I I T T E E T

Liitteisiin on kerätty havaintoaineisto, joihin tekstiosassa esitetyt johtopäätökset ja graafiset kuvat perustuvat. Käyttötaulukot on laadittu siviili- ja teollisuuspalovakuutuksesta erikseen ja yhdessä.

LIITE 1 Surplus-tunnusluvut sekä vahinkoasteen momentit $\alpha_1(s)$ ja $\alpha_2(s)$ vakuutusmäärän funktiona

LIITE 2 Excess of loss-tunnusluvut laskettuna samasta aineistosta kuin liitteen 1 luvut

LIITE 3 Ns. standardiyhtiölle suoritetun tasoitusvarauksen ylärajaa U_2 koskevan herkkyysanalyysin tulokset, U_2 suhteutettuna omalla vastuulla olevaan maksutuloon B

LIITE 4 Tasoitusvarauksen tavoitevyöhykkeen ylärajan kaavassa käytetyt merkinnät

SIVIILIPALO, SURPLUS-TUNNUSLUVUT

S-LUOKAN YLÄRAJA m mk	LUOKAN HAVAITTU KESKIPISTE	$dW(S)$	$W(S)$	$\alpha_1(S)$	$\alpha_2(S)$	$E(\tilde{X}\|m)$	$E(\tilde{X}^2\|m)$	$\frac{E(\tilde{X}^2)}{E^2(\tilde{X})}$
1.000E04	5.424E03	2.065E-01	2.065E-01	2.682E-01	1.631E-01	1.670E03	9.365E06	3.360E00
1.600E04	1.323E04	8.512E-02	2.917E-01	1.729E-01	1.056E-01	1.800E03	1.538E07	4.749E00
2.000E04	1.832E04	5.525E-02	3.469E-01	1.381E-01	8.405E-02	1.971E03	2.055E07	5.290E00
3.500E04	2.682E04	1.231E-01	4.700E-01	1.279E-01	7.920E-02	3.128E03	5.575E07	5.698E00
5.000E04	4.095E04	8.843E-02	5.584E-01	1.184E-01	7.712E-02	3.658E03	8.927E07	6.673E00
7.000E04	5.840E04	7.409E-02	6.325E-01	1.044E-01	6.692E-02	4.245E03	1.368E08	7.591E00
1.000E05	8.337E04	7.305E-02	7.055E-01	9.879E-02	6.013E-02	5.062E03	2.190E08	8.547E00
1.600E05	1.267E05	7.326E-02	7.788E-01	9.927E-02	6.069E-02	6.343E03	4.104E08	1.020E01
2.000E05	1.792E05	2.391E-02	8.027E-01	1.102E-01	6.787E-02	6.081E03	4.360E08	1.179E01
3.500E05	2.610E05	3.542E-02	8.381E-01	1.031E-01	6.474E-02	7.723E03	8.934E08	1.498E01
5.000E05	4.162E05	1.479E-02	8.529E-01	8.011E-02	4.544E-02	7.605E03	1.002E09	1.733E01
7.000E05	5.879E05	1.258E-02	8.655E-01	6.270E-02	3.073E-02	8.130E03	1.322E09	1.999E01
1.000E06	8.489E05	1.392E-02	8.794E-01	4.951E-02	2.871E-02	8.907E03	1.974E09	2.489E01
1.600E06	1.268E06	1.908E-02	8.985E-01	3.557E-02	1.657E-02	1.015E04	3.154E09	3.061E01
2.000E06	1.790E06	8.647E-03	9.072E-01	4.066E-02	1.896E-02	1.014E04	3.404E09	3.311E01
3.500E06	2.697E06	2.233E-02	9.295E-01	1.168E-02	3.444E-03	1.128E04	5.011E09	3.940E01
5.000E06	4.221E06	1.282E-02	9.423E-01	9.025E-03	1.725E-03	1.160E04	6.116E09	4.545E01
7.000E06	5.969E06	1.020E-02	9.525E-01	6.557E-03	9.220E-04	1.219E04	8.478E09	5.710E01
1.000E07	8.428E06	9.452E-03	9.620E-01	1.319E-02	6.116E-03	1.371E04	1.713E10	9.106E01
1.600E07	1.268E07	8.468E-03	9.704E-01	6.107E-03	8.873E-04	1.427E04	1.884E10	9.256E01
2.000E07	1.785E07	4.055E-03	9.745E-01	5.397E-03	7.715E-04	1.439E04	2.264E10	1.094E02
3.500E07	2.641E07	8.170E-03	9.826E-01	8.432E-03	2.759E-03	1.753E04	6.158E10	2.005E02
5.000E07	4.219E07	4.353E-03	9.870E-01	6.881E-03	1.344E-03	1.710E04	5.347E10	1.828E02
7.000E07	5.750E07	3.310E-03	9.903E-01	3.048E-03	3.091E-04	1.655E04	4.528E10	1.653E02
1.000E08	8.539E07	3.578E-03	9.939E-01	8.279E-04	7.990E-06	1.634E04	4.175E10	1.563E02
1.600E08	1.257E08	3.101E-03	9.970E-01	1.168E-03	6.460E-05	1.682E04	4.807E10	1.700E02
2.000E08	1.792E08	1.282E-03	9.983E-01	6.572E-04	7.856E-06	1.645E04	4.356E10	1.609E02
3.500E08	2.488E08	1.580E-03	9.999E-01	4.745E-04	6.703E-06	1.659E04	4.469E10	1.624E02
5.000E08	3.619E08	1.491E-04	1.000E00	2.260E-04	9.880E-08	1.634E04	4.340E10	1.625E02

TEOLLISUUSPALO, SURPLUS-TUNNUSLUVUT

S-LUOKAN YLÄRAJA m mk	LUOKAN HAVAITTU KESKIPISTE	$dW(S)$	$W(S)$	$\alpha_1(S)$	$\alpha_2(S)$	$E(\tilde{X}\vert m)$	$E(\tilde{X}^2\vert m)$	$\frac{E(\tilde{X}^2)}{E^2(\tilde{X})}$
1.000E04	6.532E03	2.553E¯02	2.553E¯02	2.451E¯01	1.481E¯01	5.440E02	2.750E06	9.294E00
1.600E04	1.289E04	2.413E¯02	4.966E¯02	1.027E¯01	4.892E¯02	7.777E02	6.018E06	9.950E00
2.000E04	1.840E04	1.435E¯02	6.401E¯02	1.323E¯01	7.350E¯02	9.393E02	9.086E06	1.030E01
3.500E04	2.764E04	8.357E¯02	1.476E¯01	8.437E¯02	4.236E¯02	1.691E03	2.776E07	9.706E00
5.000E04	4.219E04	5.258E¯02	2.002E¯01	6.038E¯02	2.607E¯02	2.068E03	4.670E07	1.092E01
7.000E04	5.913E04	5.474E¯02	2.549E¯01	7.582E¯02	4.317E¯02	2.744E03	8.744E07	1.162E01
1.000E05	8.457E04	3.924E¯02	2.941E¯01	7.418E¯02	4.154E¯02	3.458E03	1.518E08	1.269E01
1.600E05	1.290E05	4.775E¯02	3.419E¯01	6.432E¯02	3.169E¯02	4.907E03	3.318E08	1.378E01
2.000E05	1.799E05	2.159E¯02	3.635E¯01	1.155E¯01	7.188E¯02	5.637E03	4.795E08	1.509E01
3.500E05	2.696E05	5.359E¯02	4.171E¯01	9.040E¯02	5.393E¯02	8.968E03	1.280E09	1.591E01
5.000E05	4.261E05	2.883E¯02	4.459E¯01	7.535E¯02	3.656E¯02	9.996E03	1.757E09	1.758E01
7.000E05	5.996E05	2.946E¯02	4.754E¯01	6.499E¯02	3.716E¯02	1.202E04	2.837E09	1.964E01
1.000E06	8.534E05	2.845E¯02	5.038E¯01	8.277E¯02	4.479E¯02	1.506E04	4.691E09	2.069E01
1.600E06	1.278E06	3.683E¯02	5.406E¯01	3.325E¯02	1.058E¯02	1.759E04	6.536E09	2.112E01
2.000E06	1.807E06	1.511E¯02	5.558E¯01	5.677E¯02	2.438E¯02	1.891E04	8.474E09	2.370E01
3.500E06	2.709E06	4.445E¯02	6.002E¯01	2.083E¯02	4.994E¯03	2.489E04	1.551E10	2.504E01
5.000E06	4.200E06	2.527E¯02	6.255E¯01	1.746E¯02	4.895E¯03	2.730E04	2.277E10	3.057E01
7.000E06	5.975E06	2.654E¯02	6.520E¯01	1.944E¯02	7.016E¯03	3.235E04	3.805E10	3.635E01
1.000E07	8.518E06	2.921E¯02	6.812E¯01	1.349E¯02	3.303E¯03	3.682E04	5.132E10	3.786E01
1.600E07	1.274E07	3.493E¯02	7.162E¯01	8.407E¯03	8.086E¯04	4.370E04	7.832E10	4.102E01
2.000E07	1.799E07	1.740E¯02	7.336E¯01	1.186E¯02	4.939E¯03	4.626E04	1.244E11	5.815E01
3.500E07	2.722E07	4.839E¯02	7.819E¯01	5.323E¯03	1.161E¯03	5.934E04	2.070E11	5.880E01
5.000E07	4.223E07	3.797E¯02	8.199E¯01	5.182E¯03	5.766E¯04	6.497E04	2.221E11	5.262E01
7.000E07	6.019E07	2.769E¯02	8.476E¯01	3.174E¯03	2.338E¯04	6.493E04	2.226E11	5.281E01
1.000E08	8.518E07	3.327E¯02	8.809E¯01	1.758E¯03	1.386E¯04	6.789E04	2.590E11	5.619E01
1.600E08	1.292E08	4.356E¯02	9.244E¯01	9.985E¯04	2.150E¯05	7.241E04	2.625E11	5.006E01
2.000E08	1.782E08	2.375E¯02	9.482E¯01	5.912E¯04	7.249E¯06	6.938E04	2.618E11	5.439E01
3.500E08	2.575E08	3.759E¯02	9.858E¯01	1.283E¯04	7.338E¯08	7.105E04	3.432E11	6.798E01
5.000E08	4.211E08	7.493E¯03	9.933E¯01	2.066E¯03	1.419E¯04	7.841E04	6.672E11	1.085E02
7.000E08	5.632E08	3.937E¯03	9.972E¯01	2.613E¯04	4.290E¯07	7.151E04	4.024E11	7.869E01
1.000E09	8.102E08	2.413E¯03	9.996E¯01	1.084E¯04	3.379E¯08	7.108E04	4.017E11	7.949E01
1.600E09	1.059E09	3.810E¯04	1.000E00	6.000E¯05	4.667E¯09	7.086E04	4.016E11	7.998E01

TEOLL + SIV-PALO, SURPLUS-TUNNUSLUVUT

S LUOKAN YLÄRAJA m mk	LUOKAN HAVAITTU KESKIPISTE	$dW(S)$	$W(S)$	$\alpha_1(S)$	$\alpha_2(S)$	$E(\tilde{X}\mid m)$	$E(\tilde{X}^2\mid m)$	$\frac{E(\tilde{X}^2)}{E^2(\tilde{X})}$
1.000E04	5.455E03	1.721E¯01	1.721E¯01	2.675E¯01	1.627E¯01	1.455E03	8.107E06	3.828E00
1.600E04	1.321E04	7.352E¯02	2.456E¯01	1.684E¯01	1.020E¯01	1.605E03	1.359E07	5.279E00
2.000E04	1.832E04	4.747E¯02	2.931E¯01	1.377E¯01	8.344E¯02	1.774E03	1.837E07	5.833E00
3.500E04	2.694E04	1.155E¯01	4.086E¯01	1.219E¯01	7.414E¯02	2.855E03	5.045E07	6.190E00
5.000E04	4.110E04	8.161E¯02	4.902E¯01	1.113E¯01	7.087E¯02	3.356E03	8.123E07	7.213E00
7.000E04	5.851E04	7.041E¯02	5.606E¯01	1.002E¯01	6.341E¯02	3.960E03	1.275E08	8.127E00
1.000E05	8.351E04	6.662E¯02	6.273E¯01	9.604E¯02	5.805E¯02	4.758E03	2.063E08	9.114E00
1.600E05	1.270E05	6.840E¯02	6.957E¯01	9.463E¯02	5.684E¯02	6.071E03	3.956E08	1.074E01
2.000E05	1.794E05	2.347E¯02	7.191E¯01	1.111E¯01	6.857E¯02	5.998E03	4.445E08	1.236E01
3.500E05	2.632E05	3.887E¯02	7.580E¯01	9.976E¯02	6.191E¯02	7.961E03	9.674E08	1.526E01
5.000E05	4.193E05	1.746E¯02	7.755E¯01	7.861E¯02	4.265E¯02	8.062E03	1.147E09	1.764E01
7.000E05	5.921E05	1.579E¯02	7.912E¯01	6.351E¯02	3.301E¯02	8.871E03	1.610E09	2.046E01
1.000E06	8.504E05	1.668E¯02	8.079E¯01	6.029E¯02	3.393E¯02	1.008E04	2.491E09	2.453E01
1.600E06	1.271E06	2.245E¯02	8.304E¯01	3.484E¯02	1.470E¯02	1.157E04	3.798E09	2.839E01
2.000E06	1.795E06	9.875E¯03	8.403E¯01	4.535E¯02	2.054E¯02	1.181E04	4.367E09	3.133E01
3.500E06	2.701E06	2.653E¯02	8.668E¯01	1.459E¯02	3.938E¯03	1.386E04	7.006E09	3.645E01
5.000E06	4.215E06	1.519E¯02	8.820E¯01	1.169E¯02	2.728E¯03	1.458E04	9.284E09	4.365E01
7.000E06	5.971E06	1.330E¯02	8.953E¯01	1.144E¯02	3.234E¯03	1.602E04	1.410E10	5.495E01
1.000E07	8.466E06	1.321E¯02	9.085E¯01	1.332E¯02	4.933E¯03	1.811E04	2.364E10	7.211E01
1.600E07	1.271E07	1.350E¯02	9.220E¯01	7.238E¯03	8.486E¯04	1.986E04	3.016E10	7.646E01
2.000E07	1.792E07	6.591E¯03	9.286E¯01	8.642E¯03	2.862E¯03	2.044E04	4.197E10	1.004E02
3.500E07	2.688E07	1.581E¯02	9.444E¯01	6.625E¯03	1.830E¯03	2.548E04	8.949E10	1.378E02
5.000E07	4.222E07	1.074E¯02	9.551E¯01	5.739E¯03	8.285E¯04	2.621E04	8.579E10	1.249E02
7.000E07	5.928E07	7.944E¯03	9.631E¯01	3.132E¯03	2.591E¯04	2.576E04	7.931E10	1.195E02
1.000E08	8.525E07	9.223E¯03	9.723E¯01	1.466E¯03	9.758E¯05	2.615E04	8.341E10	1.219E02
1.600E08	1.283E08	1.079E¯02	9.831E¯01	1.038E¯03	3.153E¯05	2.740E04	8.936E10	1.190E02
2.000E08	1.784E08	5.553E¯03	9.887E¯01	6.035E¯04	7.362E¯06	2.653E04	8.567E10	1.217E02
3.500E08	2.562E08	8.426E¯03	9.971E¯01	1.809E¯04	1.808E¯06	2.697E04	1.030E11	1.416E02
5.000E08	4.165E08	1.545E¯03	9.986E¯01	1.923E¯03	1.308E¯04	2.816E04	1.620E11	2.043E02
7.000E08	5.649E08	8.209E¯04	9.994E¯01	2.438E¯04	3.916E¯07	2.684E04	1.117E11	1.550E02
1.000E09	8.181E08	4.829E¯04	9.999E¯01	1.530E¯04	8.210E¯08	2.679E04	1.116E11	1.555E02
1.600E09	1.059E09	7.243E¯05	1.000E00	6.000E¯05	4.667E¯09	2.672E04	1.115E11	1.562E02

SIVIILIPALO, EXCESS OF LOSS - TUNNUSLUVUT

X-LUOKAN YLÄRAJA M mk	LUOKAN HAVAITTU KESKIPISTE	$dV(X)$	$V(X)$	$E(\tilde{X}\mid M)$	$E(\tilde{X}^2\mid M)$	$\frac{E(\tilde{X}^2)}{E^2(\tilde{X})}$
1.600E01	1.040E01	1.401E-03	1.401E-03	1.599E01	2.558E02	1.000E00
2.000E01	1.858E01	5.664E-04	1.968E-03	1.999E01	3.996E02	1.000E00
3.500E01	2.876E01	2.236E-03	4.204E-03	3.494E01	1.222E03	1.001E00
5.000E01	4.296E01	4.859E-03	9.063E-03	4.985E01	2.489E03	1.002E00
7.000E01	5.998E01	9.301E-03	1.836E-02	6.957E01	4.855E03	1.003E00
1.000E02	8.563E01	2.093E-02	3.929E-02	9.872E01	9.805E03	1.006E00
1.600E02	1.319E02	4.713E-02	8.643E-02	1.550E02	2.441E04	1.015E00
2.000E02	1.809E02	3.575E-02	1.222E-01	1.909E02	3.730E04	1.024E00
3.500E02	2.767E02	1.351E-01	2.573E-01	3.127E02	1.035E05	1.059E00
5.000E02	4.191E02	1.174E-01	3.747E-01	4.146E02	1.895E05	1.102E00
7.000E02	5.913E02	9.623E-02	4.709E-01	5.292E02	3.260E05	1.164E00
1.000E03	8.345E02	7.918E-02	5.501E-01	6.748E02	5.718E05	1.256E00
1.600E03	1.263E03	8.073E-02	6.308E-01	9.175E02	1.196E06	1.420E00
2.000E03	1.793E03	3.598E-02	6.668E-01	1.058E03	1.699E06	1.519E00
3.500E03	2.653E03	7.113E-02	7.379E-01	1.497E03	4.077E06	1.819E00
5.000E03	4.185E03	4.007E-02	7.780E-01	1.858E03	7.118E06	2.063E00
7.000E03	5.920E03	3.437E-02	8.124E-01	2.265E03	1.197E07	2.334E00
1.000E04	8.432E03	3.545E-02	8.478E-01	2.772E03	2.051E07	2.670E00
1.600E04	1.270E04	3.935E-02	8.872E-01	3.555E03	4.052E07	3.206E00
2.000E04	1.778E04	1.610E-02	9.033E-01	3.970E03	5.541E07	3.515E00
3.500E04	2.653E04	3.518E-02	9.385E-01	5.123E03	1.169E08	4.453E00
5.000E04	4.175E04	1.696E-02	9.554E-01	5.906E03	1.825E08	5.232E00
7.000E04	5.831E04	1.210E-02	9.675E-01	6.656E03	2.713E08	6.124E00
1.000E05	8.329E04	1.032E-02	9.778E-01	7.457E03	4.053E08	7.287E00
1.600E05	1.264E05	8.646E-03	9.865E-01	8.496E03	6.677E08	9.249E00
2.000E05	1.780E05	2.981E-03	9.895E-01	8.971E03	8.374E08	1.041E01
3.500E05	2.636E05	4.859E-03	9.943E-01	1.013E04	1.448E09	1.411E01
5.000E05	4.173E05	1.908E-03	9.962E-01	1.082E04	2.025E09	1.730E01
7.000E05	6.044E05	1.222E-03	9.975E-01	1.146E04	2.774E09	2.114E01
1.000E06	8.754E05	6.857E-04	9.982E-01	1.213E04	3.907E09	2.655E01
1.600E06	1.304E06	8.347E-04	9.990E-01	1.299E04	6.072E09	3.597E01
2.000E06	1.767E06	2.683E-04	9.993E-01	1.334E04	7.297E09	4.103E01
3.500E06	2.468E06	2.981E-04	9.996E-01	1.415E04	1.161E10	5.802E01
5.000E06	4.604E06	1.192E-04	9.997E-01	1.477E04	1.686E10	7.728E01
7.000E06	5.808E06	1.192E-04	9.998E-01	1.528E04	2.291E10	9.807E01
1.000E07	8.836E06	8.944E-05	9.999E-01	1.580E04	3.159E10	1.265E02
1.600E07	1.231E07	1.192E-04	1.000E00	1.608E04	3.774E10	1.460E02

TEOLLISUUSPALO, EXCESS OF LOSS-TUNNUSLUVUT

X-LUOKAN YLÄRAJA M mk	LUOKAN HAVAITTU KESKIPISTE	$dV(X)$	$V(X)$	$E(\tilde{X}\|M)$	$E(\tilde{X}^2\|M)$	$\frac{E(\tilde{X}^2)}{E^2(\tilde{X})}$
1.600E01	4.000E00	1.143E¯03	1.143E¯03	1.599E01	2.557E02	1.001E00
2.000E01	1.829E01	8.890E¯04	2.032E¯03	1.998E01	3.995E02	1.001E00
3.500E01	2.841E01	2.159E¯03	4.191E¯03	3.494E01	1.222E03	1.001E00
5.000E01	4.606E01	2.159E¯03	6.350E¯03	4.986E01	2.491E03	1.002E00
7.000E01	5.978E01	5.207E¯03	1.156E¯02	6.968E01	4.869E03	1.003E00
1.000E02	8.602E01	1.105E¯02	2.261E¯02	9.918E01	9.881E03	1.004E00
1.600E02	1.322E02	2.350E¯02	4.610E¯02	1.572E02	2.494E04	1.009E00
2.000E02	1.794E02	1.537E¯02	6.147E¯02	1.950E02	3.855E04	1.014E00
3.500E02	2.776E02	5.893E¯02	1.204E¯01	3.315E02	1.133E05	1.031E00
5.000E02	4.275E02	5.779E¯02	1.782E¯01	4.593E02	2.216E05	1.050E00
7.000E02	6.005E02	7.353E¯02	2.517E¯01	6.163E02	4.093E05	1.077E00
1.000E03	8.250E02	6.541E¯02	3.171E¯01	8.294E02	7.700E05	1.119E00
1.600E03	1.269E03	5.334E¯02	3.705E¯01	1.221E03	1.785E06	1.196E00
2.000E03	1.784E03	2.654E¯02	3.970E¯01	1.468E03	2.669E06	1.240E00
3.500E03	2.709E03	6.642E¯02	4.634E¯01	2.319E03	7.318E06	1.360E00
5.000E03	4.191E03	4.470E¯02	5.081E¯01	3.088E03	1.383E07	1.450E00
7.000E03	5.991E03	5.664E¯02	5.648E¯01	4.015E03	2.489E07	1.544E00
1.000E04	8.368E03	6.883E¯02	6.336E¯01	5.208E03	4.502E07	1.660E00
1.600E04	1.272E04	9.449E¯02	7.281E¯01	7.097E03	9.328E07	1.852E00
2.000E04	1.798E04	3.848E¯02	7.666E¯01	8.107E03	1.295E08	1.970E00
3.500E04	2.625E04	7.023E¯02	8.368E¯01	1.099E04	2.844E08	2.353E00
5.000E04	4.181E04	3.454E¯02	8.713E¯01	1.316E04	4.665E08	2.694E00
7.000E04	5.871E04	2.934E¯02	9.007E¯01	1.540E04	7.327E08	3.089E00
1.000E05	8.302E04	2.096E¯02	9.216E¯01	1.802E04	1.174E09	3.614E00
1.600E05	1.265E05	2.400E¯02	9.456E¯01	2.192E04	2.166E09	4.507E00
2.000E05	1.796E05	9.017E¯03	9.547E¯01	2.391E04	2.879E09	5.035E00
3.500E05	2.682E05	1.626E¯02	9.709E¯01	2.938E04	5.798E09	6.715E00
5.000E05	4.252E05	7.493E¯03	9.784E¯01	3.319E04	8.987E09	8.161E00
7.000E05	5.958E05	6.223E¯03	9.846E¯01	3.686E04	1.333E10	9.813E00
1.000E06	8.657E05	4.826E¯03	9.895E¯01	4.082E04	1.996E10	1.198E01
1.600E06	1.262E06	3.429E¯03	9.929E¯01	4.598E04	3.308E10	1.565E01
2.000E06	1.751E06	1.270E¯03	9.942E¯01	4.851E04	4.213E10	1.790E01
3.500E06	2.621E06	2.159E¯03	9.963E¯01	5.538E04	7.872E10	2.567E01
5.000E06	4.253E06	1.524E¯03	9.978E¯01	5.976E04	1.151E11	3.224E01
7.000E06	5.781E06	8.890E¯04	9.987E¯01	6.300E04	1.531E11	3.858E01
1.000E07	8.217E06	6.350E¯04	9.994E¯01	6.567E04	1.972E11	4.573E01
1.600E07	1.320E07	5.080E¯04	9.999E¯01	6.806E04	2.547E11	5.499E01
5.000E07	4.191E07	1.270E¯04	1.000E00	7.135E04	4.452E11	8.746E01

TEOLL+SIV.PALO, EXCESS OF LOSS-TUNNUSLUVUT

X-LUOKAN YLÄRAJA M mk	LUOKAN HAVAITTU KESKIPISTE	$dV(X)$	$V(X)$	$E(\tilde{X}\mid M)$	$E(\tilde{X}^2\mid M)$	$\frac{E(\tilde{X}^2)}{E^2(\tilde{X})}$
1.600E01	9.375E00	1.352E-03	1.352E-03	1.599E01	2.558E02	1.000E00
2.000E01	1.850E01	6.278E-04	1.980E-03	1.998E01	3.995E02	1.000E00
3.500E01	2.870E01	2.221E-03	4.201E-03	3.494E01	1.222E03	1.001E00
5.000E01	4.325E01	4.346E-03	8.547E-03	4.985E01	2.489E03	1.002E00
7.000E01	5.995E01	8.523E-03	1.707E-02	6.959E01	4.857E03	1.003E00
1.000E02	8.568E01	1.905E-02	3.612E-02	9.881E01	9.820E03	1.006E00
1.600E02	1.320E02	4.264E-02	7.876E-02	1.554E02	2.451E04	1.014E00
2.000E02	1.808E02	3.187E-02	1.106E-01	1.917E02	3.754E04	1.022E00
3.500E02	2.767E02	1.206E-01	2.312E-01	3.163E02	1.054E05	1.054E00
5.000E02	4.200E02	1.061E-01	3.373E-01	4.231E02	1.956E05	1.093E00
7.000E02	5.927E02	9.192E-02	4.292E-01	5.457E02	3.419E05	1.148E00
1.000E03	8.330E02	7.656E-02	5.058E-01	7.042E02	6.095E05	1.229E00
1.600E03	1.263E03	7.552E-02	5.813E-01	9.753E02	1.308E06	1.375E00
2.000E03	1.792E03	3.419E-02	6.155E-01	1.136E03	1.884E06	1.461E00
3.500E03	2.663E03	7.024E-02	6.858E-01	1.654E03	4.693E06	1.716E00
5.000E03	4.186E03	4.095E-02	7.267E-01	2.092E03	8.394E06	1.919E00
7.000E03	5.940E03	3.861E-02	7.653E-01	2.597E03	1.442E07	2.138E00
1.000E04	8.412E03	4.179E-02	8.071E-01	3.235E03	2.517E07	2.405E00
1.600E04	1.271E04	4.983E-02	8.569E-01	4.228E03	5.055E07	2.828E00
2.000E04	1.785E04	2.035E-02	8.773E-01	4.757E03	6.950E07	3.071E00
3.500E04	2.644E04	4.184E-02	9.191E-01	6.239E03	1.487E08	3.821E00
5.000E04	4.177E04	2.031E-02	9.394E-01	7.285E03	2.365E08	4.456E00
7.000E04	5.845E04	1.538E-02	9.548E-01	8.318E03	3.590E08	5.188E00
1.000E05	8.320E04	1.234E-02	9.672E-01	9.466E03	5.514E08	6.153E00
1.600E05	1.265E05	1.157E-02	9.787E-01	1.105E04	9.525E08	7.803E00
2.000E05	1.787E05	4.129E-03	9.829E-01	1.181E04	1.226E09	8.785E00
3.500E05	2.656E05	7.026E-03	9.899E-01	1.379E04	2.275E09	1.196E01
5.000E05	4.211E05	2.970E-03	9.929E-01	1.507E04	3.349E09	1.474E01
7.000E05	5.997E05	2.173E-03	9.950E-01	1.628E04	4.781E09	1.803E01
1.000E06	8.694E05	1.473E-03	9.965E-01	1.758E04	6.958E09	2.250E01
1.600E06	1.283E06	1.328E-03	9.978E-01	1.926E04	1.121E10	3.020E01
2.000E06	1.758E06	4.587E-04	9.983E-01	2.002E04	1.392E10	3.472E01
3.500E06	2.564E06	6.519E-04	9.989E-01	2.198E04	2.436E10	5.041E01
5.000E06	4.341E06	3.863E-04	9.993E-01	2.332E04	3.553E10	6.532E01
7.000E06	5.790E06	2.656E-04	9.996E-01	2.435E04	4.765E10	8.033E01
1.000E07	8.449E06	1.932E-04	9.998E-01	2.529E04	6.305E10	9.862E01
1.600E07	1.275E07	1.932E-04	1.000E00	2.596E04	7.892E10	1.171E02
5.000E07	4.191E07	2.414E-05	1.000E00	2.659E04	1.151E11	1.629E02

SIVIILIPALO

HERKKYYSANALYYSIN TULOKSET

Maksimaali M Mmk	Excess of loss U2	Surplus U2	Suhde % surp/exc.
0,10	1,416	1,423	100,5
0,16	1,427	1,433	100,4
0,20	1,434	1,442	100,6
0,35	1,455	1,460	100,3
0,50	1,473	1,473	100,0
0,70	1,495	1,488	99,5
1,00	1,523	1,515	99,5
1,60	1,573	1,545	98,2
2,00	1,599	1,558	97,4
3,50	1,681	1,590	94,6
5,00	1,767	1,620	91,7
7,00	1,855	1,676	90,4
10,00	1,967	1,826	92,8
16,00	2,039	1,832	89,8
20,00	-	1,901	-
35,00	-	2,226	-

TEOLLISUUS- JA SIVIILIPALO

HERKKYYSANALYYSIN TULOKSET

Maksimaali M Mmk	Excess of loss U2	Surplus U2	Suhde % surp/exc
0,10	1,41	1,43	101,4
0,16	1,42	1,44	101,4
0,20	1,42	1,45	102,1
0,35	1,44	1,46	101,4
0,50	1,46	1,48	101,4
0,70	1,48	1,49	100,7
1,00	1,50	1,51	100,7
1,60	1,54	1,53	99,4
2,00	1,57	1,55	98,7
3,50	1,64	1,58	96,3
5,00	1,71	1,61	94,2
7,00	1,78	1,67	93,8
10,00	1,86	1,74	93,5
16,00	1,93	1,76	91,2
20,00	-	1,86	-
35,00	2,10	2,01	95,8

TASOITUSVARAUKSEN TAVOITEVYÖHYKKEEN YLÄRAJAN KAAVASSA KÄYTETYT MERKINNÄT

Alaindeksi j viittaa osastoon

U2	tasoitusvarauksen tavoitevyöhykkeen yläraja suhteessa B:hen
B_j	bruttovakuutusmaksutulo yhtiön omalla vastuulla
B	$= \sum_j B_j$
$\bar{f}_j$	keskimääräinen (liukuva) vahinkosuhde
$\bar{f}$	$= \sum_j \pi_j \bar{f}_j$
α_{1j}, α_{2j}	yksittäisen vahingon jakauman momentit
n_j	vahinkojen lukumäärän odotusarvo
π_j	osaston "paino" B_j/B
σ^2_{hj}	vakuutuslajeittainen huojunnan varianssi

XVI ASTIN COLLOQUIUM 1982 IN BELGIUM

Speakers Corner

DEGREE OF LOSS AND SURPLUS REINSURANCE

by

Juhani Heiskanen

Fennia Insurance Company Limited, Helsinki

FENNIA
1882-1982

Table of Contents

1
INTRODUCTION

"It has been known for years that the size of an object and the concentration of high values within a limited area has an influence on claims frequency and on the pure risk premium. Insurance will constantly have to update its experience data in this field if insurers want to be in a position to calculate adequate and fair premium rates for clients in commerce and industry."

"The successful description of the risk premium rate as a function of size by means of a mathematical function has a special importance as it lends stability to the risk premium rate of the highest size classes where the statistical material is small and observations therefore show strong random fluctuations."

The above quotation is taken from Gunnar Benktander's article (2), which also gives a historical view of the studies in this area.

2 RISK PREMIUM RATE

The usual approach (see Benktander (2)) is to express the risk premium rate in fire insurance as a function of size (sum insured) as follows.

Let for the sum s

$f(s) = A \cdot s^a$ be the claims frequency and

$\alpha(s) = B \cdot s^{-b}$ the average loss degree, i.e. the claim amount related to the size of the object.

The risk premium rate is

$$r(s) = f(s) \cdot \alpha(s),$$

if, as usual, the claim amounts are assumed to be identically distributed and also independent of each other and of the number of claims as well.

Fig. 1 summarizes the statistics from the Finnish civil and industrial fire insurance and supports the hypothesis that the average loss degree decreases exponentially with the increasing size of the risk. (The jump in the observed curve at about the sum of 0,2 FIM million is explained by the overlapping data from both goods and buildings).

In fact, the Finnish as well as the other European figures seem to be very similar. The value of factor b of the average loss degree was found to be about 0,65 (exponential curve fitting with correlation coefficient of 92 per cent) for Finland while Benktander reports values about 0,75 for Italy.

The distribution of claims frequency can vary considerably even from one sub-portfolio to another. A small Finnish portfolio containing risks larger than 1 FIM million gives an estimate of 0,35 for the coefficient a. The reported French and Italian values (Benktander (2)) have been around 0,50. Factor $b - a$ of the risk premium has then quite generally shown values between 0,25 - 0,30 thus indicating that the risk premium rate decreases with the size of the risk.

3 MOMENTS OF CLAIM DISTRIBUTION AS A FUNCTION OF THE SIZE OF THE RISK

In property insurance, the risk premium rate formula $f(s) \cdot \alpha(s)$ alone can not be used for the purpose of making tariffs. E.g. Bühlmann (4) suggests adding a security loading proportional to the standard deviation (or variance) of the aggregate claims amount.

In the following we join the distributions of claims frequency and of the size of the risk by defining the distribution of the size of damaged objects.

We introduce the following denotions

$Z(s) = \frac{X}{s}$, the loss degree for fixed sum s

$W(s) = P(S \leq s)$, the distribution of the size of damaged objects

$V(x, s) = P(X \leq x | s) = P(Z(s) \leq \frac{x}{s} | s)$, the distribution of claim amount

$F(y) = P(Y \leq y)$, the distribution of the aggregate claims amount.

Restricting ourselves to the Poisson distributed number of claims with parameter n we use the standard formulas for the gross business

$$E(Y) = n \cdot E(X)$$

$$E(Y^2) = n \cdot E(X^2) + n^2 E^2(X)$$

In estimating the moments of the aggregate claims amount, we need the moments of claim distribution. If the loss degree Z were assumed to be independent of the size of the risk (see Venezian and Gaydos (8)), we would have

$$E(X^n) = E(S^n) \cdot E(Z^n).$$

However, as was shown above, we can not accept this hypothesis as a generalized rule.

The n:th moment of the loss degree for fixed s is given by

$$\alpha_n(s) = E(Z(s)^n|s) = \int_0^s (\frac{x}{s})^n d_x V(x,s)$$

Further we have

$$E(X^n) = \int_0^\infty \int_0^s x^n d_x V(x,s) d_s W(s)$$

$$= \int_0^\infty s^n \int_0^s (\frac{x}{s})^n d_x V(x,s) d_s W(s)$$

$$= \int_0^\infty s^n \alpha_n(s) d_s W(s)$$

4 MOMENTS OF NET CLAIM DISTRIBUTION IN SURPLUS REINSURANCE

If a surplus reinsurance arrangement is used with a net retention m, the net amount $\tilde{X}$ of a claim is defined (see (1)):

$$\tilde{X} = \begin{cases} X\,, & \text{if } S \leq m \\ \frac{m}{S}X\,, & \text{if } S > m \end{cases} .$$

The moments of the claim amount on the insurer's own account can then be derived as follows

$$E(\tilde{X}^n|m) = \int_0^m \int_0^s x^n d_x V(x,s) d_s W(s) + \int_m^\infty \int_0^s \left(\frac{x \cdot m}{s}\right)^n d_x V(x,s) d_s W(s)$$

$$= \int_0^m s^n \alpha_n(s) d_s W(s) + m^n \int_m^\infty \alpha_n(s) d_s W(s) .$$

Since the moments $\alpha_n(s)$ of the loss degree are inside the integrals, this may prevent us from arriving at explicit solutions of $E(\tilde{X}^n|m)$ except in a few special cases. In practical applications, however, we can use numerical methods in evaluating the integrals above. In such cases it may be sufficient to use the observed values of $\alpha_n(s)$ in chosen size classes.

5
SURPLUS VERSUS EXCESS OF LOSS CONTRACT

We have now a method for calculating the moments of the net amount of a claim as a function of net retention with a surplus reinsurance arrangement. The claims statistics giving information about the loss degree can also be used as a basis for examining the risk theoretical properties of the excess of loss reinsurance method. In theoretical studies the XL-method is widely used because it leads to fairly simple and handy formulas e.g.

$$E(\tilde{X}^n | M) = \int_0^M x^n dV(x) + M^n (1 - V(M)).$$

Especially interesting is to compare the surplus method with the XL-method. We can, for instance, look for net retention levels leading to equal mean values of the net claim amount. In Fig. 2 $E(\tilde{X})$ is described, both in surplus and in XL-method, as a function of net retention. Theoretically $E(\tilde{X})$ must converge to the same absolute value in the case of both methods as the net retention tends to infinity.

We can also examine eventual differences of these two reinsurance forms when calculating limits for equalization reserves. In Fig. 3, the upper limit of the solvency margin ratio (in proportion to net premiums) is presented as a function of net retention when either the surplus or the XL-reinsurance is used. The model is described in detail by Pentikäinen and Rantala (6). The standard portfolio was composed of four sections each of them representing a special type of insurance. Different reinsurance forms were tested in the section including large risks such as industrial fire. Besides of the ordinary Poisson-variation, the limit formula contains also long-term and short-term fluctuations (see (6)), which are independent of the net retention level.

The curves in Fig. 3 would suggest that the use of surplus and excess of loss reinsurance forms will actually lead to fairly similar risk theoretical stability properties of the whole risk exposure if the

same net retention level is applied. They also support the conjecture that the solvency indicators such as ruin probability, minimum solvency ratio etc. are not sensitive to the form of the reinsurance treaty chosen, if the estimated maximum losses on the insurer's own account are kept equal.

Examples of the main reports produced by the PCR-system

Contact : Anders Elwin, Stockholm

PORTFOLIO DESCRIPTION NUMBER: 10
RUN FOR COMP X 82/05/25 16.34.17

AMOUNT GROUP	FROM ('000)	TO ('000)	NO OF POLICIES	SAMPLE SIZE PCT	RATE	SUM OF AMOUNTS (MILL.)	TOTAL PREMIUM ('000)
1	25	100	85000	1	1.31	5240	6905
2	101	300	46700	1	1.39	9388	13135
3	301	3000	4100	2	1.1	6590	7303
4	3001	30000	1400	4	1.08	23448	25376
TOTAL:			137200			44666	52719

COLOGNE RE

CLAIMS SIMULATION NUMBER: 26
RUN FOR COMP X 82/05/27 11.14.05
ON PORTFOLIO DESCRIPTION NUMBER: 10

CLAIMS FREQUENCY IN PCT GROUP	1..................	1.3
	2..................	1.2
	3..................	1.25
	4..................	1.1
NUMBER OF CLAIMS:................................		1734
TOTAL AMOUNT('000) OF POLICIES HIT BY CLAIM:......		565114
TOTAL CLAIM AMOUNT('000):.........................		39896
CLAIM AMOUNT IN PCT OF EML (HIT POLICIES):........		7.1
CLAIMS RATIO (CLAIM AMOUNT IN PCT OF TOT PREMIUM):		75.7
LARGEST CLAIM('000):..............................		7794
SMALLEST CLAIM('000):.............................		2
AVERAGE CLAIM('000):..............................		23

COLOGNE RE

PROP REINSURANCE PROGRAM NO: 19
RUN FOR COMP X 82/05/27 11.17.12
ON PORTF DESCR NO: 10 CLAIMS SIM NO: 26
RETENTION: 700000
FIRST SURPLUS: 12 LINES
SECOND SURPLUS: 10 LINES

	RETENTION	FIRST SURPLUS	SECOND SURPLUS	FACULT	TOTAL
EML(MILL.)............	18298.5	14759.7	6286.8	5323.7	44668.6
PCT OF TOTAL..........	41.0	33.0	14.1	11.9	100.0
PREMIUMS('000)........	24081.8	16075.0	6803.7	5761.4	52721.9
PCT OF TOTAL..........	45.7	30.5	12.9	10.9	100.0
NUMBER POLICIES.......	137200.0	4650.0	1100.0	725.0	137200.0
PCT OF TOTAL..........	100.0	3.4	0.8	0.5	100.0
NUMBER CLAIMS.........	1734.0	56.0	14.0	10.0	1734.0
PCT OF TOTAL..........	100.0	3.2	0.8	0.6	100.0
CLAIMS AMOUNT('000)...	19448.0	9063.0	5844.0	5541.0	39896.0
PCT OF TOTAL..........	48.7	22.7	14.6	13.9	100.0
CLAIMS RATIO..........	80.8	56.4	85.9	96.2	75.7
AVG CLAIM('000).......	11.2	161.8	417.4	554.1	23.0
COMMISSION('000)......	0.0	5224.4	2041.1	1584.4	0.0
COMM PCT OF PREM......	0.0	32.5	30.0	27.5	0.0
RESULT INCL COMM('000)	13483.7	1787.6	¯1081.4	¯1364.0	12825.9
RESULT PCT OF PREM....	56.0	11.1	¯15.9	¯23.7	24.3

COLOGNE RE

References

(1) Beard, Pentikäinen and Pesonen:
Risk Theory

(2) Benktander: Claims frequency and Risk Premium Rate as A Function of the Size of the Risk
Astin Bulletin, vol VII 1973

(3) Benktander and Ohlin:
A Combination of Surplus and Excess Reinsurance of A Fire Portfolio
Astin Bulletin, vol IV 1967

(4) Bühlmann: Mathematical Methods in Risk Theory
Springer-Verlag 1970

(5) Elwin:
a) Computerization as a Tool for Management in Insurance and Reinsurance
b) The PCR-system, a computerized tool for analysis of an insurance portfolio, claims simulation and reinsurance program
The Cologne Re, 1982

(6) Pentikäinen and Rantala:
Solvency of Insurers and Equalization Reserves I - II
Helsinki, 1982

(7) Straub: How to Fix Retention
Mitteilungen der Vereinigung Schweiz. Versicherungsmatematiker, Heft 1, 1978

(8) Venezian and Gaydos: The effects of variable size of risk on capital solvency requirement
Research report at the colloquium of risk theory, Texas, 1980