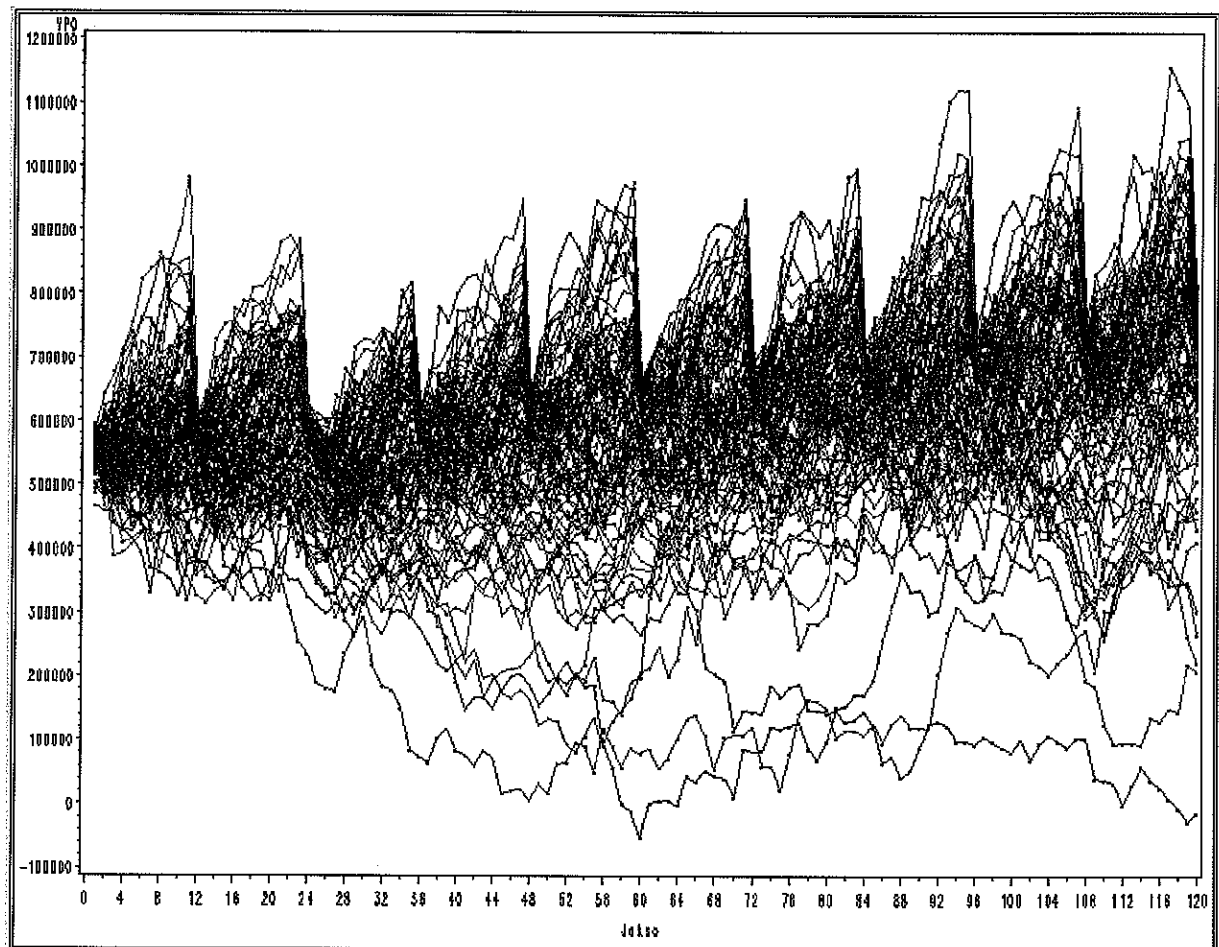


PALM - Pohjolan vahinkovakuutusliikkeen matemaattinen malli

Janne Kaippio
Kevät 2005



Sisällysluettelo

Sisällysluettelo	2
Johdanto	3
Korkorakenne	7
Inflaatio	8
Rahamarkkinavälineet	9
Joukkovelkakirjalainat	10
Osakkeet, Kiinteistöt, Private Equityt ja absoluuttiset tuoton sijoitukset.....	13
Vakuutusmaksut ja liikekulut	14
Bruttovakuutusmaksutuotto ja bruttovakuutusmaksutulo	15
Bruttovakuutusmaksuvastuu.....	16
Voimassa olevien ja uusiutuvien vakuutuskappaleiden lukumäärät	17
Vakuutusmaksujen kassavirta.....	17
Vakuutusmaksusaamiset.....	19
Liikekulut.....	19
Jälleenvakuuttajan osuus vakuutusmaksuista	19
Korvaukset.....	20
Bruttokorvausmeno.....	21
Korvaustoiminnan liikekulut	22
Maksetut bruttokorvaukset ja bruttokorvausvastuu.....	22
Kokonaiskorvausmeno	26
Wilson-Hilferty-generaattori	28
Jälleenvakuuttajan osuus korvausmenosta	31
Muut tase-erät	32
Kassavirta	35
Sijoitustoiminnan tulos	35
Sijoitusten markkina-arvo ja arvostuserot	36
Sijoitusten kirjanpitoarvot	37
Tilikauden voitto/tappio.....	38

Johdanto

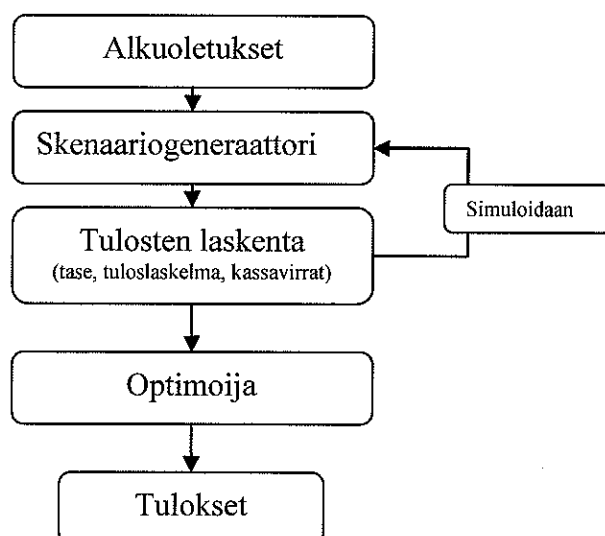
Huolellisella varojen ja velkojen hallinnalla vakuutusyhtiön on mahdollista parantaa kannattavuuttaan ja arvioida vakavaraisuuttaan. Tällaista hallintaa kutsutaan lyhyesti *ALM*:ksi (*ALM* = *Asset Liability Management*) ja sen tärkeän osan muodostaa vakuutusyhtiön vakuutusliikkeen ja sen katteena olevien varojen matemaattinen malli (*ALM* = *Asset Liability Model*). Yleensä *ALM*:lla tarkoitetaan juuri varojen ja velkojen hallintaa (*M* = *Management*) ja erikoistapauksissa puhutaan tämän osasta, matemaattisesta mallista (*M* = *Model*). *ALM*:lla pyritään tehokkaaseen ja systemaattiseen tapaan hallita vakuutusyhtiön varoihin ja velkoihin liittyviä riskejä. Alkujaan *ALM* kehitettiin 1970 luvulla erityisesti korkoriskin hallintaan henkivakuutusyhtiöissä, mutta nykyään *ALM*:lla käsitetään koko vahinkovakuutusyhtiön varojen ja velkojen riskien hallintaa. Vielä nykyäänkin **rajoitetummassa** mielessä *ALM* käsitetään yhtiön varojen ja velkojen "yhteen sovittamista" (*matching*). Tämä tarkoittaa sijoitustoiminnan duraation ja volatiliteetin sovittamista vastaavaksi vastuuvelan kanssa. Tosin laajemmassa mittakaavassa *ALM*:lla tarkoitetaan muun muassa seuraavien riskien hallintaa:

- korko
- inflaatiot
- eri sijoitusinstrumenttien (osakkeet, kiinteistöt jne.) tuotot
- vastuuvelan oikeellisuus
- likviditeetti
- osingonjakopolitiikka
- verot, suhdannevaihtelut, markkinat.

ALM:n rinnalla on alettu puhumaan *DFA*:sta (*DFA* = *Dynamic Financial Analyses*). Tämä pitää sisällään koko vakuutusyhtiön taloudellisen tilan mallintamisen. Toisin kuin *ALM*:ssa, *DFA*:ssa pyritään myös mallintamaan dynaamisten työkalujen avulla vakuutusyhtiön johdon tulevaisuudessa tekemiä päätöksiä. *DFA*:n käyttöönottoon on vaikuttanut ratkaisevasti tietokoneiden laskentatehojen merkittävä kasvu.

Viime aikoina kiinnostusta *ALM*:iin on lisännyt *IAS*. Näillä näkyvin *IAS*:n vaiheen kaksi jälkeen (aikaisintaan vuoden 2009 alku) henkivakuutusyhtiöllä tulee olla *ALM* (*M* = *Management*) osana riskienhallintaa. Tällä hetkellä näyttää siltä, että vahinkovakuutusyhtiöiltä ei tulla suoraan vaatimaan *ALM*:a, mutta niitä tullaan kannustamaan sen käyttöönottoon.

Tyypillisen *ALM*:n rakenne on seuraavanlainen:

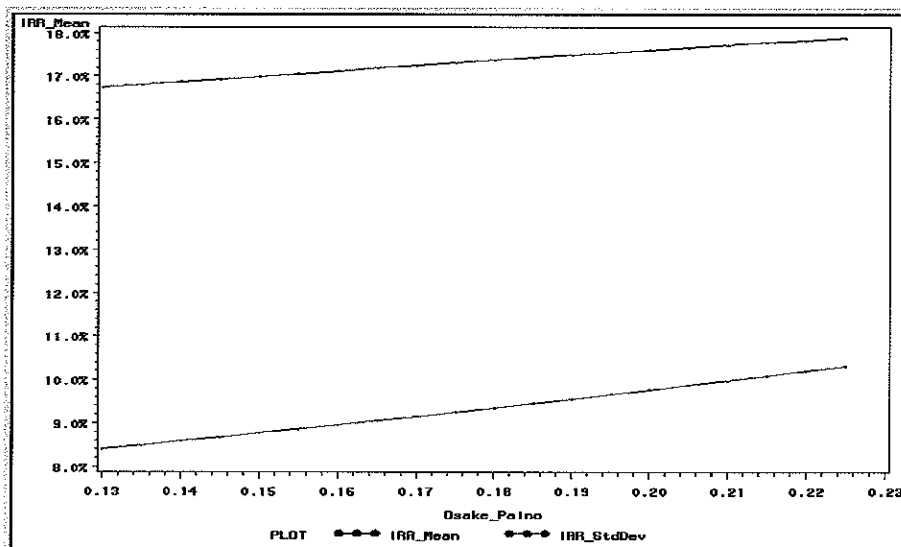


Kuva 1: *ALM*:n rakenne

- *Alkuoletukset* pitää sisällään mallin parametrit (esimerkiksi vahingon suuruuden jakauman, osakkeiden volatilitiitin) ja alkutilan mukaisen aloittavan taseen.
- *Skenaariogeneraattori* on ALM:n sydän. Siinä generoidaan mallin ja alkuoletusten mukaisesti yhtiön varat ja velat eri ajanjaksoina.
- *Tunnuslukujen laskenta* pitää sisällään muun muassa taseen, tuloslaskelman, kassavirtalaskelman ja erilaisten tunnuslukujen laskennan.
- *Optimoija* hakee erilaisten vaihtoehtojen väliltä optimaalisimman. *Optimoija* voisi esimerkiksi pitää sisällään optimaalisen sijoitusallokaation hakemisen, jos sijoitusten tuotolle on asetettu alaraja ja eri sijoitusinstrumenteille on määrätty sallittu vaihteluväli..
- *Tulokset* pitää sisällään simuloinnista opitut asiat (tunnuslukujen jakaumat ja luottamusvälit, herkinmät parametrit jne.).

Kuvan 1 mukaisesti ALM:n voisi kuvata prosessiksi, missä yksi simulaatiokierros pitää sisällään vakuutusmaksujen, korvausten ja sijoitustuottojen simuloimisen jokaiselle kuukaudelle t (esimerkiksi yhteensä 36 kuukautta). Kuukauden $t=1$ aloittavan taseen ja edellä generoitujen vakuutusmaksujen, korvausten ja sijoitustuottojen avulla voidaan muodostaa jokaisen kuukauden lopettava tase. Toistamalla simulaatiokierros useita kertoja (*Monte Carlo* -simulointi) voidaan laskea esimerkiksi vahinkosuhteelle keskiarvo ja keskihajonta.

Valittaessa simuloitavien ajanjaksojen lukumäärää ALM:ssa täytyy olla varovainen, koska malli, minkä parametrit on johdettu historiasta, ei välttämättä toimi oikein kuvattaessa tapahtumia viiden tai kymmenen vuoden kuluttua. Yleisesti ottaen ALM:a voidaan käyttää lyhyen aikavälin vakuutusteknisen tuloksen ennustamiseen (kuluva ja seuraava vuosi), mutta pitemmän aikavälin tarkasteluissa (5 ja 10 vuotta) tuloksista voidaan katsoa vain yleisiä suuntaviivoja (esimerkiksi miten 5 vuoden sisäinen korkokanta muuttuu sijoitusallokaation muuttuessa). ALM:n sijoituspuolen mallia ei yleisesti voi käyttää ennustamiseen vaan vain eri skenaarioiden tarkastelemiseen.



Kuva 2: Sisäisen korkokannan (IRR) ja sen keskihajonnan kehittyminen sijoitusten osakeallokaation noustessa ja vastaavasti joukkovelkakirjojen allokaation laskiessa.

Tässä dokumentissa esitetään vakuutusyhtiön matemaattinen malli PALM (*PALM = Pohjola Asset Liability Model*). PALM:iin on pyritty sisällyttämään kaikki olennaisimmat vahinkovakuutusyhtiön tulokseen vaikuttavat satunnaistekijät. Tässä dokumentissa keskitytään *alkuoletuksiin* ja *skenaariogeneraattoriin* sekä sivutaan *tunnuslukujen laskentaa* (kuva 1).

PALM:n ideana on

- stokastisen matemaattisen mallin avulla ymmärtää paremmin vahinkovakuutusliikkeen käyttäytymistä
- saada simuloimalla kuva vahinkovakuutusyhtiön taloudellisesta tilasta tulevaisuudessa eri lähtöoletuksilla.

Yksi stokastisen matemaattisen mallin etu on se, että tarkasteltaville suureille voidaan laskea epävarmuutta kuvaavat hajonnat ja luottamusvälit (yhdistetty kulusuhde, sijoitustoiminnan tuotto).

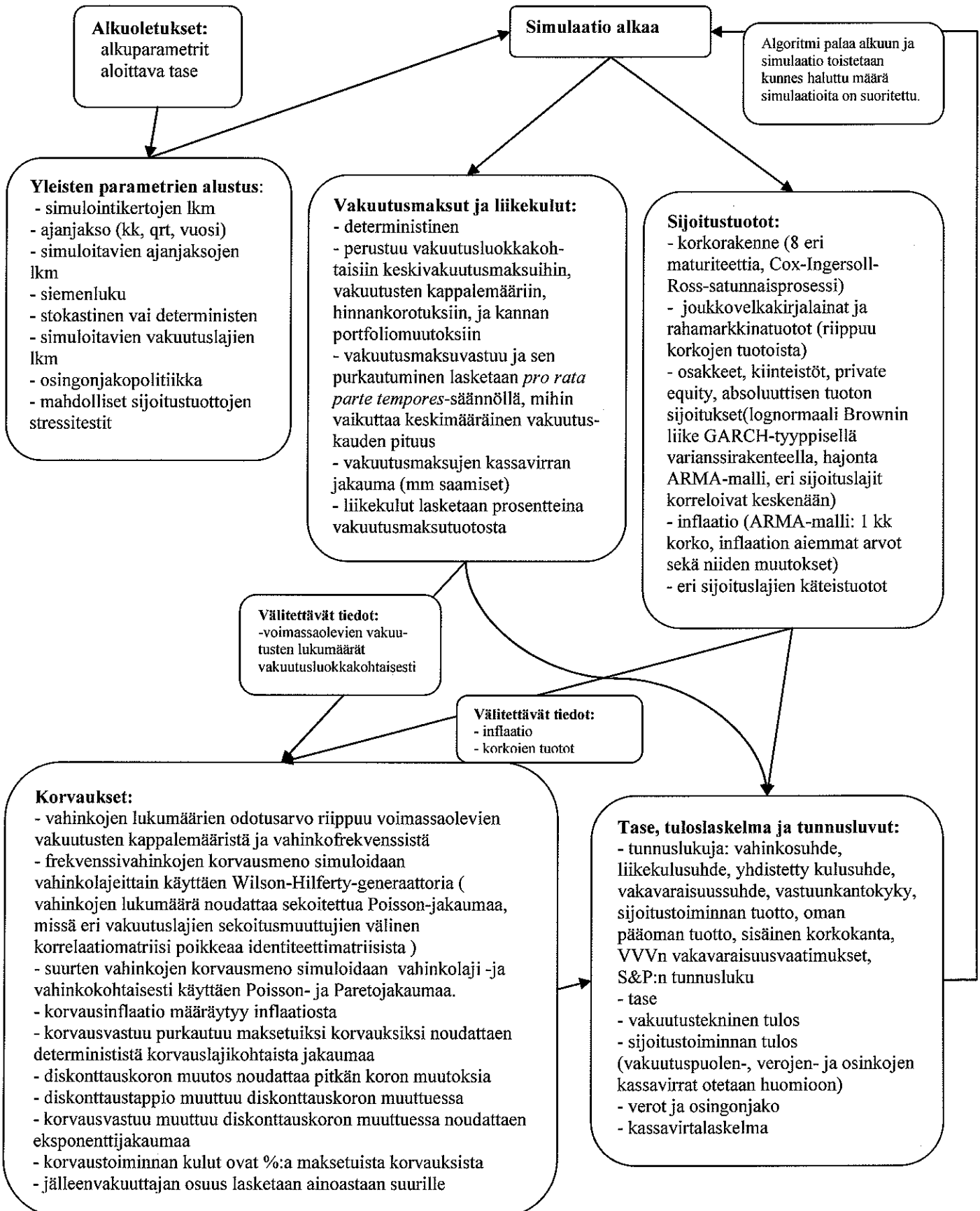
PALM:n avulla voidaan esimerkiksi tarkastella seuraavia asioita:

- aloituspääoman vaikutus vakavaraisuuteen eri ajanhetkinä
- eri sijoitusallokaatioiden vaikutus vakavaraisuuteen ja sisäiseen korkokantaan
- vakuutusteknisen tuloksen kehittyminen tulevaisuudessa
- vakavaraisuuden herkkyys sijoitusten tuotto-oletuksille
- poikkeuksellisten sijoitustuottojen vaikutus vakavaraisuuteen
- vakuutusteknisen tuloksen herkkyys korvausinflaatiolle
- korvausvastuun muuttuminen diskonttauskoron vaihtuessa
- eri jälleenvakuutusratkaisujen vaikutus tulokseen
- optimaalista osingonjakopolitiikkaa tietyin kriteerein (esimerkiksi viiden vuoden sisäinen korkokanta)
- kassavirta eri ajanjaksoina
- yksittäisen vakuutuslajin sitoma pääoma
- lyhyen aikavälin ennustaminen
- yksittäisen vakuutuslajin kannattavuuden herkkyys eri parametreille.

Mallissa on otettu huomioon muun muassa

- vahinkojen lukumäärän ja suuruuden stokastisuus
- korvausmallin parametrien eroavaisuudet eri vahinkolajien välillä
- suurten ja pienten vahinkojen erilaiset stokastiset ominaisuudet
- korvausinflaation vaikutus vahingon suuruuteen
- vahinkojen lukumäärien kausivaihtelu
- vahinkojen lukumäärän riippuminen liikkeen volyyymista
- korvausvastuun ja diskonttaustappion muuttuminen diskonttauskoron muuttuessa
- eri vahinkolajien korvausvastuun purkautumisjakaumien eroavaisuudet
- liikekulut sekä korvaustoiminnan liikekulut
- vakuutuskappaleiden ja vakuutusmaksujen kehittyminen tulevaisuudessa eri vakuutusluokissa (deterministinen)
- vakuutusten uusmyynti sekä raukeaminen
- vakuutusmaksusaamisten arvioiminen
- sijoitustuottojen stokastinen mallintaminen (korot, joukkovelkakirjalainat, kiinteistöt, rahamarkkinavälineet, absoluuttiset tuoton sijoitukset, private equityt)
- eripituisten korkotuottojen väliset korrelaatiot
- osakkeiden, absoluuttisten tuoton sijoitusten, kiinteistöjen ja private equityjen tuottojen väliset korrelaatiot
- joukkovelkakirjalainojen arvonkehityksen riippuvuus koroista
- joukkovelkakirjalainojen jakautuminen luokkiin duraation perusteella
- lyhyen koron, inflaation ja rahamarkkinavälineiden välinen riippuvuus
- vakuutus- ja sijoituspuolen välinen korrelaatio; korvausinflaatio riippuu inflaatiosta
- vakuutusmaksujen, korvausten, liikekulujen, verojen ja osingonjaon generoiman kassavirran vaikutus taseen varoihin ja edelleen jakautuminen eri sijoituslajeille
- verot ja voitonjako (osingonjako)

PALM algoritmina:



Sijoitustuotot

Yleensä merkittävin osa vahinkovakuutusliikkeen tuloksen heilahtelusta selittyy sijoitustuottojen satunnaisheilahtelulla. Erilaisia sijoitustuottojen malleja on hyvin monenlaisia ja ei ole olemassa mitään *universaalisti* parasta mallia. PALM:n *sijoitustuottojen* malli on valittu siten, että se sopii vahinkovakuutusyhtiön varojen satunnaisheilahtelun mallintamiseen, on yleisesti hyväksytty, realistinen ja vastaa sitä rakennetta mihin sijoitukset on jaettu. *Sijoitustuottojen* mallin valintaan on vaikuttanut myös oleellisuusnäkökulma.

Sijoitustuottoja mallinnettaessa on parametrien valinnalla luonnollisesti suuri merkitys. Onkin yleistä, että *sijoitustuottojen* mallin eri parametreille tehdään herkkyysanalyys¹. Parametrit voidaan johtaa toteutuneesta aineistosta (esim. toteutuneet *Euribor*-korot) tai parametreina voidaan käyttää markkinoilla yleisesti hyväksyttyjä arvoja (esim. osakkeiden tuotto-odotus). Sijoitustuottojen korrelaatiomatriisin² objektiivinen valinta on hankalaa ja siksi on perusteltua käyttää hyväksi markkinoilla yleisesti käytettyjä arvoja. Euroopassa on olemassa myös yrityksiä, joilta on mahdollista tilata parametreja erilaisiin sijoitusmalleihin.

On syytä korostaa, että PALM:n sijoitustuottojen mallin tarkoitus ei ole ennustaa tulevia sijoitustuottoja, vaan antaa kuvan sijoitustuottojen satunnaisheilahtelusta.

PALM:n *sijoitustuottojen* malli on stokastinen ja se on jaettu kolmeen osaan:

- inflaatio
- korkorakenne (joukkovelkakirjalainat, rahamarkkinavälineet)
- osakkeet, kiinteistöt, private equityt ja absoluuttiset tuoton sijoitukset.

Yleisesti ottaen sijoitusinstrumentin tuotto jonakin ajanjaksona muodostuu sijoitusinstrumentin arvon muutoksesta ja käteistuotosta ko. ajanjaksona. Täten **PALM:n sijoitustuottojen malli generoi eri sijoitusinstrumenttien arvonmuutoksen ja käteistuoton ajanjaksona t** ³. Sijoitusten arvo jonakin ajanhetkenä t saadaan ottamalla huomioon sijoituksen arvo edellisenä ajanjaksona $t-1$ ja sijoituksen arvonmuutos ajanjaksona t . PALM:n *sijoitustuottojen* mallissa ajanjakson t oletetaan olevan kuukausi.

Seuraavassa on kuvattu *sijoitustuottojen* malli. Eri sijoitusinstrumenttien arvo ajanhetkenä $t = 0$ on aloittavan taseen mukainen.

Korkorakenne

PALM:ssa korkorakenteen perusteella määräytyy inflaatio, rahamarkkinavälineiden ja joukkovelkakirjojen arvonkehitys. Siis korkorakenteella PALM:ssa on ratkaiseva merkitys taseen vastaavia mallinnettaessa.

Korot on mallinnettu käyttäen *Cox, Ingersoll & Rossin* satunnaisprosessia:

$$r_t(t) - r_t(t-1) = a_t \cdot (b_t - r_t(t-1)) + \sqrt{r_t(t-1)} \cdot \sigma_t \cdot Z_t,$$

missä

- $r_t(t)$ = koron, jonka maturiteetti on τ , arvo vuositasolla ajanjaksona t ($\tau = \{1,3,12 \text{ kk}, 3,5,7,10 \text{ ja } 15 \text{ vuotta}\}$)
- a_t = nopeus, millä koron muutos hakeutuu pitkän aikavälin keskiarvoon

¹ Herkkyysanalyysillä tarkoitetaan sitä, että simuloidaan mallia monta kertaa siten, että joka kerta muutetaan hieman jotain alkuparametria.

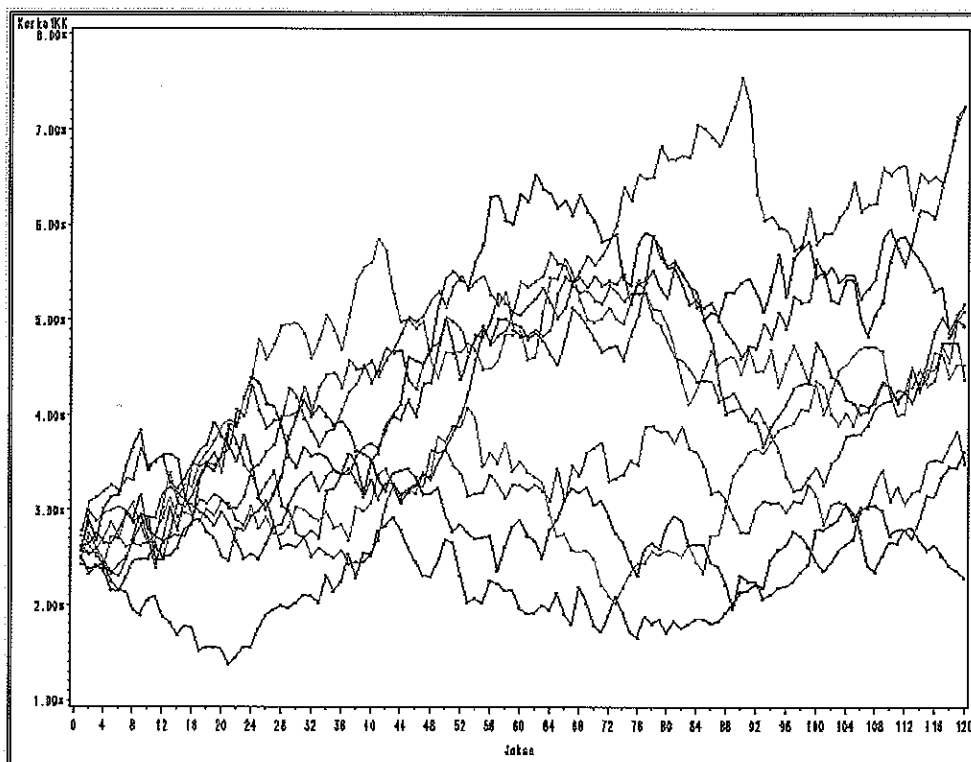
² Sijoitustuottojen välisellä korrelaatiomatriisilla tarkoitetaan eri sijoitusinstrumenttien tuottojen välisiä lineaarisia riippuvuuksia.

³ Ajanjakso t käsittää aikavälin $(t-1, t]$.

- b_τ = pitkän aikavälin keskiarvo
- σ_τ = koron muutoksen keskihajonta
- Z_τ = standardisoitu ja normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja⁴. $E(Z_\tau) = 0$ kaikilla τ :n arvoilla ja $\text{Corr}(Z_i, Z_j) = \rho_{ij}$

Korkorakenne perustuu seuraaville oletuksille:

1. Koron muutos ajanjaksona t voidaan katsoa olevan normaalisti jakautunut keskiarvona $a_\tau \cdot (b_\tau - r_\tau(t-1))$
Keskihajontana $\sqrt{r_\tau(t-1)} \cdot \sigma_\tau$.
2. Korot hakeutuvat kohti pitkäaikavälin keskiarvoa b_τ nopeudella a_τ .
3. Koron muutoksen varianssi ajanjaksona t on verrannollinen koron arvoon edellisenä ajanjaksona $t-1$.
4. Maturiteetiltaan eripituisten korkojen arvon muutokset ovat riippuvaisia toisistaan.



Kuva 3: 1 kk:n korko, 10 simulaatiota ja 10 vuotta. Parametrit on johdettu toteutuneesta *euribor*-aineistosta ($a = 0,135$, $\mu = 0,049$, $\sigma = 0,033$ ja $r(0) = 0.021$).

Inflaatio

Inflaatio-mallin vaikutus PALM:ssa on suuri. Simuloitaessa esimerkiksi 10 vuotta eteenpäin, niin 2 %:n vuosi-inflaatiolla inflaatioindeksi 10 vuoden lopussa on 122 %:a. Korvausinflaatio on oletettu olevan *Korvausten* mallissa suoraan verrannollinen yleiseen inflaation. Korvausinflaatio taas vaikuttaa vahingon suuruuden jakauman momentteihin⁵. *Inflaation* malli perustuu sille olettamukselle, että inflaatio jonakin ajanjaksona määräytyy lyhyen aikavälin (1 kk) korosta ja inflaatiosta aikaisempina ajanjaksoina.

Inflaatio on mallinnettu aikasarjana, missä virhetermi on normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja:

⁴ Standardisoitu ja normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja noudattaa normaalijakaumaa, minkä keskiarvo on 0 ja hajonta on 1.

⁵ Todennäköisyysjakauman momenttien perusteella määräytyy suoraan muun muassa jakauman keskiarvo, varianssi ja vinous.

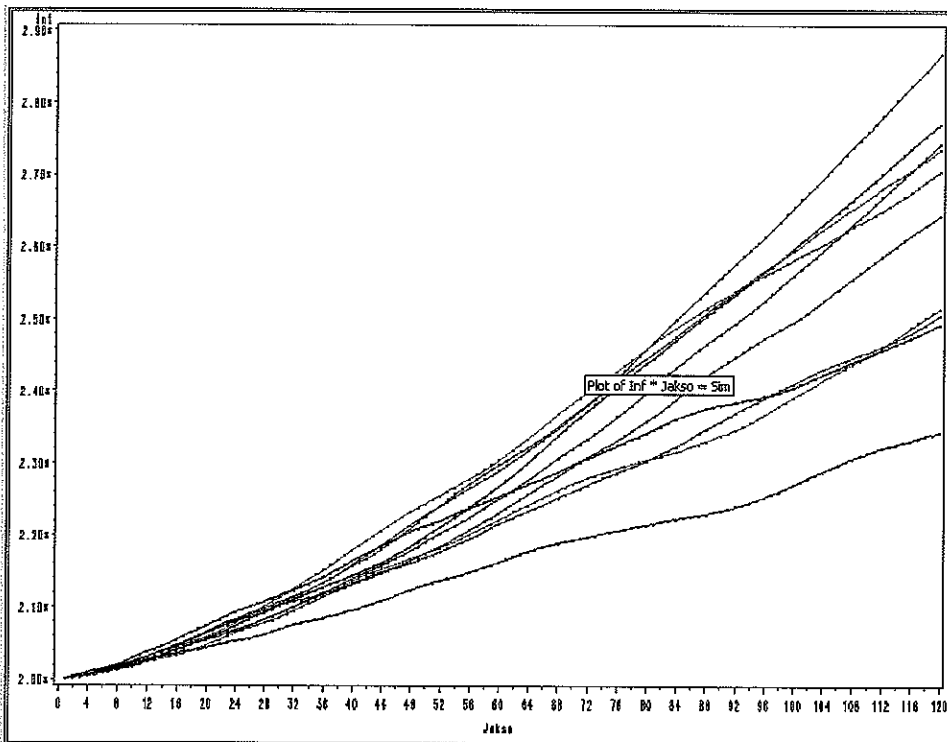
$$r_t(t) = \alpha_1 \cdot r_1(t) + \alpha_2 \cdot r_1(t-1) + \alpha_3 \cdot \sigma_t \cdot Z(t-1) + \alpha_4 \cdot \sigma_t \cdot Z(t-12) + \alpha_5 \cdot \sigma_t \cdot Z(t),$$

missä

- $r_t(t)$ = inflaation arvo vuositasolla ajanjaksona t
- $r_1(t)$ = yhden kuukauden koron arvo (vuositasolla) ajanjaksona t
- α_i = parametri
- σ_t = inflaation hajonta
- $Z(t)$ = standardisoidun ja normaalisti jakaantuneen satunnaismuuttujan Z arvo ajanhetkenä t . Siis kyseessä on sama satunnaismuuttuja Z , minkä aikaisemmat arvot ajanjaksoina $t-1$ ja $t-12$ vaikuttavat inflaation arvoon jonakin ajanjaksona t .

Siis inflaatio ajanjaksona t riippuu

1. lyhyen aikavälin koron (1 kk) arvosta ajanjaksona t .
2. inflaatiosta edellisellä ajanjaksona $t-1$ ja
3. Standardoidun ja normaalisti jakautuneen satunnaismuuttujan arvosta ajanjaksoina t , $t-1$ ja $t-12$ (ajanjaksona t on kuukausi). Täten inflaation arvon kehitykseen on saatu mukaan kausivaihtelu.



Kuva 4: Vuosittaisen inflaation kehitys 10 vuoden aikana kuukausitasolla ($r_t(0) = 0.02$, $\sigma_t = 0.01$, $\alpha_1 = 0.15$). 10 simulaatiota. Vuosittainen inflaatio lähestyy hyvin tasaisesti ja hitaasti kohti 1 kuukauden pitkän aikavälin keskiarvoa (4,9 %), koska α_1 :n arvo on pieni (0,15), inflaation aloitusarvo on 2 %:a ja σ_t on hyvin pieni (1 %). Parametrien arvot on johdettu toteutuneesta inflaatiotodatasta (vuodet 1990-2003).

Rahamarkkinavälineet

ALM:ssa rahamarkkinavälineillä tarkoitetaan lähes riskittömiä pankkitalletuksia (käteinen). Rahamarkkinavälineiden tuotot saadaan korkomallin perusteella korkotuottona ja arvomuutoksena:

$$\frac{rm(t) - rm(t-1)}{rm(t-1)} = \alpha \cdot (r_1(t) - r_1(t-1)) + rmc(t)$$

ja

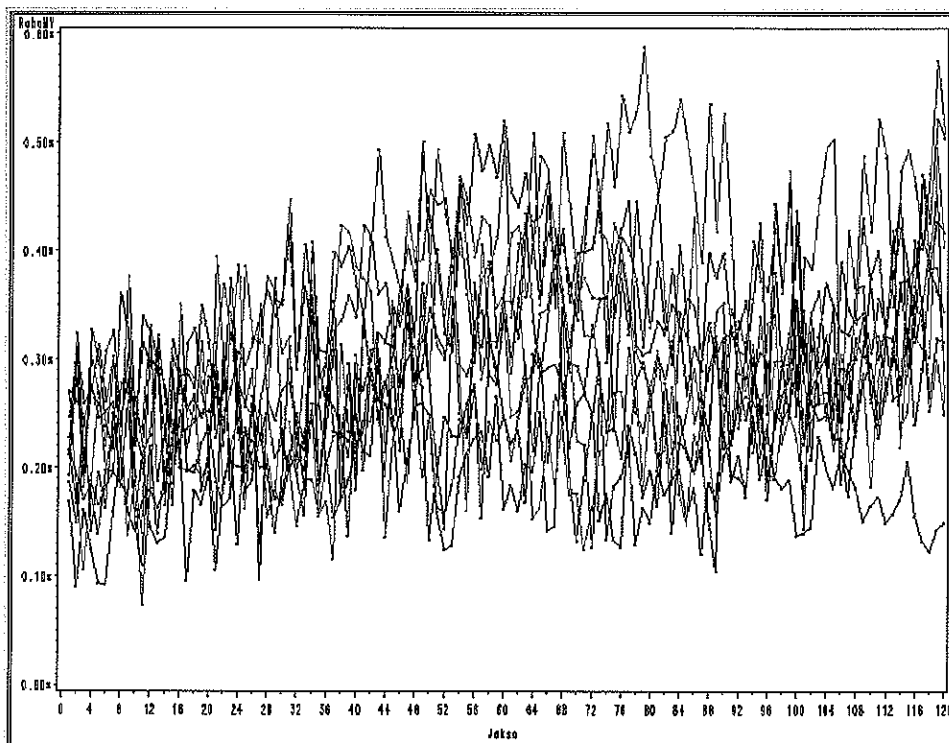
$$rmc(t) = \frac{r_1(t)}{12},$$

missä

- $rm(t)$ = rahamarkkinavälineiden markkina-arvo ajanjaksona t
- $rm(0)$ = rahamarkkinavälineiden markkina-arvo alun aloittavassa taseessa, ajanjaksona $t = 0$
- α = parametri
- $rmc(t)$ = rahamarkkinavälineiden käteistuotto ajanjaksona t
- $r_1(t)$ = yhden kuukauden koron arvo ajanjaksona t .

Rahamarkkinavälineiden malli perustuu seuraaville olettamuksille:

1. Rahamarkkinavälineiden arvon muutos on suoraan verrannollinen lyhyen aikavälin korkoon.
2. Rahamarkkinavälineiden käteistuotto määräytyy suoraan lyhyen aikavälin korosta.



Kuva 5: Rahamarkkinavälineiden suhteellinen arvomuutos kuukausitasolla. 10 vuotta ja 10 simulaatiota. ALM:ssä rahamarkkinavälineet on oletettu niin riskittömiksi sijoituskohteiksi, että negatiiviset arvonehkitykset ovat hyvin epätodennäköisiä. Kuvan simulaatiossa $\alpha = 0,25$, joten negatiivinenkaan lyhyen koron muutos ei saa rahamarkkinavälineiden arvomuutosta negatiiviseksi (rahamarkkinavälineiden käteistuotto pitää arvomuutoksen kokonaisuudessaan positiivisena).

Joukkovelkakirjalainat

Yleensä vahinkovakuutusyhtiön varoista selvästi huomattavin osa on sidottu joukkovelkakirjalainoihin. Joukkovelkakirjalainojen tuotto-odotus ja hajonta ovat pienempiä kuin osakemarkkinavälineillä. Nousevan korkotrendin vallitessa joukkovelkakirjalainojen arvo laskee ja laskevan korkotrendin vallitessa vastaavasti nousee. Yleensä ALM:ssä (*ALM=Asset Liability Matching*) varojen ja vastuiden vastaavuus saadaan juuri

sovittamalla yhteen joukkovelkakirjalainojen duraatio (lainan "pituus") ja korvausvastuun duraatio ("hännän painotettu pituus").

Joukkovelkakirjalainojen mallin perusidea on mallintaa joukkovelkakirjalainojen arvonmuutos jakamalla joukkovelkakirjalainat duraation mukaan duraatioluokkiin (5 kpl) ja muodostaa jokaiselle duraatioluokalle viitekorko korkorakenteen kahden eri pituisen koron painotettuna keskiarvona. Edelleen mallissa oletetaan, että **joka hetki joukkovelkakirjalaina vaihdetaan uuteen joukkovelkakirjalainaan, jonka maturiteetti on alkuperäisen joukkovelkakirjalainan mukainen ja kuponki on viitekoron mukainen** (viitekorko noudattaa markkinakorkoa). Täten joukkovelkakirjalainan arvonmuutos pitää sisällään volyyymimuutosta.

Joukkovelkakirjalainojen tuotto koostuu korkotuotosta (BC) ja arvonmuutoksesta (ΔB) ja se perustuu korkomalliin. Joukkovelkakirjalainat on jaettu duraation perusteella d luokkaan ja kunkin duraatioluokan tuottoa ohjaa kahdesta eri pituisesta maturiteetista muodostettu viitekorko. Siis

$$\frac{B(t) - B(t-1)}{B(t-1)} = BC(t) - \sum_{i=1}^d \alpha_i \cdot D_i \cdot (\beta_i \cdot (r_{x(i)}(t) - r_{x(i)}(t-1)) + (1 - \beta_i) \cdot (r_{y(i)}(t) - r_{y(i)}(t-1)))$$

ja

$$BC(t) = \sum_{i=1}^d \alpha_i \cdot \frac{\beta_i \cdot r_{x(i)}(t-1) + (1 - \beta_i) \cdot r_{y(i)}(t-1)}{12},$$

missä

$$D = \sum_{i=1}^d \alpha_i \cdot D_i$$

ja

$$D_i = \beta_i \cdot x(i) + (1 - \beta_i) \cdot y(i) \quad x(i), y(i) \in \{1, 3, 12 \text{ kk}, 3, 5, 7, 10 \text{ ja } 15 \text{ vuotta}\}$$

missä

- $B(t)$ on joukkovelkakirjalainojen **markkina-arvo** ajanjaksona t ($B(0)$ on joukkovelkakirjalainojen markkina-arvo simulaation alun aloittavassa taseessa, ajanhetkenä $t = 0$)
- $BC(t)$ = joukkovelkakirjalainojen käteistuotto **prosentteina** (korkotuotto) ajanjaksona t
- α_i = duraatioluokan i suhteellinen osuus joukkovelkakirjalainoista ($\sum_{i=1}^d \alpha_i = 1$)⁶
- β_i = parametri, millä kahden eri maturiteettisen koron maturiteetti saadaan samaksi kuin joukkovelkakirjalainojen duraatio duraatioluokassa i
- d = duraatioluokkien lukumäärä
- D = joukkovelkakirjalainojen duraatio⁷
- D_i = joukkovelkakirjalainojen duraatio duraatioluokassa i
- $x(i)$ ja $y(i)$ ovat duraatioluokasta i riippuva koron maturiteetti.
- $r_j(t)$ = korkomallin mukaisen koron, jonka maturiteetti on j , arvo ajanjaksona t .

Joukkovelkakirjalainojen malli perustuu seuraaville olettamuksille:

⁶ Duraatioluokan i suhteellinen osuus α_i joukkovelkakirjalainoista on suhteessa joukkovelkakirjalainojen markkina-arvoon.

⁷ Duraatio on kassavirran suoritusten nykyarvoilla painotettu maksuaikojen odotusarvo.

1. Käteistuotto määräytyy suoraan viitekorosta
2. Arvonmuutos määräytyy suoraan viitekoron arvonmuutoksesta.
3. Joukkovelkakirjalainojen tuotto on käteistuoton ja arvonmuutoksen summa.
4. Joukkovelkakirjalainat on jaettu duraation perusteella luokkiin, missä jokaisen luokan keskimääräinen duraatio määrittelee viitekoron kahden eri pituisen koron painotettuna keskiarvona (konveksi kombinaatio).
5. Joukkovelkakirjalainojen keskimääräinen duraatio pysyy samana ajan t kuluessa⁸

Joukkovelkakirjalainojen mallin voi yksinkertaisesti kuvata olettamalla joukkovelkakirjalainojen keskimääräisen duraation olevan sama kuin jonkin korkorakenteen maturiteetin i . Tällöin

$$BC(t) = r_i(t)$$

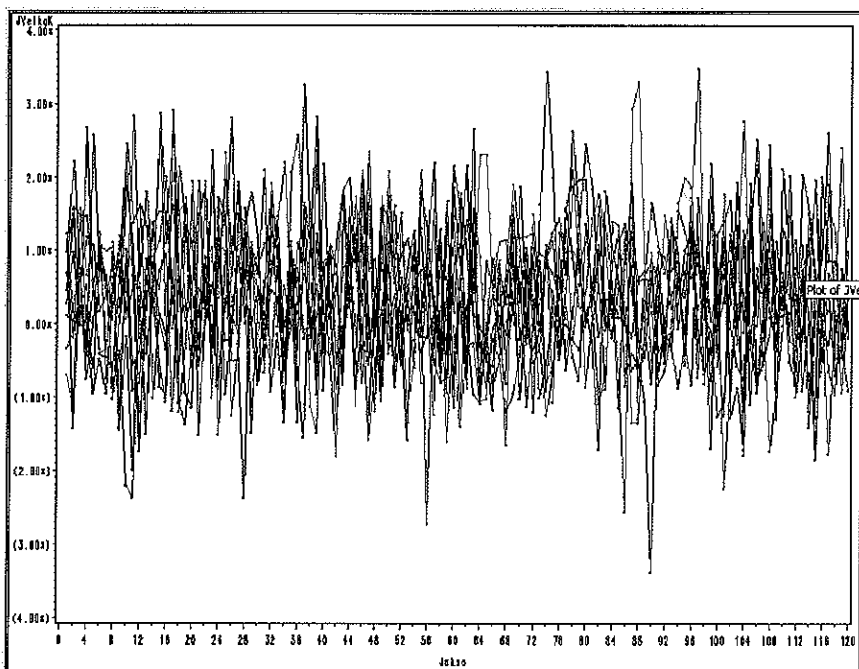
ja

$$B(t) = (1 + BC(t) - D_i \cdot (r_i(t) - r_i(t-1))) \cdot B(t-1).$$

Esimerkki:

Duraatio 5 vuotta
Nimellisarvo hetkenä $t=0$ 1000 €

Vuosi (t)	$r(t)$	$BC(t)$	$B(t)$	% muutos
0	2,0 %	2,0 %	1 000	
1	2,5 %	2,5 %	1 000	0,0 %
2	3,0 %	3,0 %	1 005	0,5 %
3	3,5 %	3,5 %	1 015	1,0 %
4	4,0 %	4,0 %	1 030	1,5 %
5	4,5 %	4,5 %	1 051	2,0 %



Kuva 6: Joukkovelkakirjalainojen arvonmuutos kuukausitasolla. 10 vuotta ja 10 simulaatiota. Kuvasta voi nähdä kuinka suhteelliset arvonmuutokset ovat likimain tasaisesti jakautuneet keskiarvon ympärille.

⁸ *Joukkovelkakirjalainojen* mallissa on epäsuorasti oletettu, että joka ajanjakson t lopussa kaikki joukkovelkakirjalainat vaihdetaan vastaamaan ajanjakson t alun mukaista joukkovelkakirjalainojen portfolion rakennetta (täten duraatio pysyy vakiona).

Osakkeet, Kiinteistöt, Private Equityt ja absoluuttiset tuoton sijoitukset

Joukkovelkakirjalainojen jälkeen toiseksi suurimman sijoituserän vahinkovakuutusyhtiön taseessa muodostaa yleensä osakkeet. Osakkeiden painoa muuttamalla voidaan tehokkaasti vaikuttaa tilikauden tuloksen satunaisheilahtelun suuruuteen.

Osakkeiden mallin parametreja johdettaessa (esim. keskimääräinen tuotto-odotus ja tuoton volatilitiiteetti) nojaututaan joko yleisesti hyväksyttyihin arvoihin (osakkeiden pitkänaikavälin tuotto-odotus 9 %:a) tai sitten mallia simuloidaan useilla eri parametrien arvoilla (herkkyystestejä).

PALM:ssa on oletettu, että osakkeet, kiinteistöt, private equityt ja absoluuttiset tuoton sijoitukset noudattavat log-normaalia Brownin liikettä. Lisäksi PALM:ssa on oletettu, että eri sijoituslajien tuotot korreloivat keskenään. Täten sijoitusinstrumentin tuotto S_t ajanjaksona t toteuttaa stokastisen differentiaaliyhtälön

$$\ln(dS_t) = \mu dt + \sigma \sqrt{dt} dZ.$$

Edellä μ on satunnaismuuttujan S odotusarvo, σ keskihajonta ja Z standardoitu ja normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja (satunnaismuuttujat Z_t korreloivat keskenään eri sijoituslajien välillä). Edellä sijoitusinstrumentin volatilitiiteetti σ^2 on oletettu pysyvän vakiona ajan suhteen, mikä ei välttämättä ole realistinen oletus. Soveltamalla GARCH-tyyppistä mallia varianssirakenteeseen, saadaan varianssi σ_t^2 muuttumaan ajan suhteen:

$$\sigma_t^2 = \alpha + \beta \varepsilon_{t-1}^2 + \gamma \sigma_{t-1}^2,$$

missä α , β ja γ ovat parametreja sekä ε on ajanjakson $t-1$ mukainen sijoitusinstrumentin tuotto. Edellä kuvattu log-normaali Brownin liike GARCH-tyyppisellä varianssirakenteella on yleisesti paljon käytetty ja yksi finanssiteorian perusmalleista.

PALM:ssa sijoituslajin i (osakkeet, kiinteistöt, absoluuttiset tuoton sijoitukset, private equityt) tuotto ajanjaksona t on kuvattu ainoastaan diskreettiaikaisena log-normaalina Brownin liikkeenä, missä varianssirakenne on GARCH-tyyppinen:

$$\ln\left(\frac{S_i(t)}{S_i(t-1)}\right) = \mu_i - \frac{1}{2} \cdot \sigma_i^2(t) + \sigma_i(t) \cdot Z_i$$

ja

$$SC_i(t) = c_i$$

missä

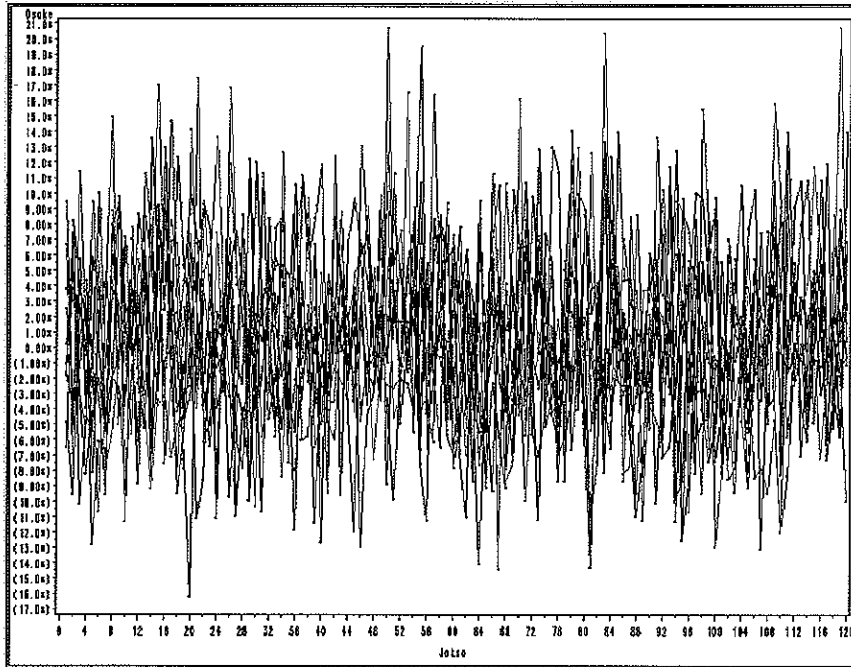
- $S_i(t)$ = sijoituslajin i markkina-arvo ajanjaksona t
- $S_i(0)$ = sijoituslajin i markkina-arvo alun aloittavassa taseessa, ajanhetkenä $t = 0$
- μ_i = sijoituslajin i tuoton odotusarvo
- $\sigma_i(t)$ = sijoituslajin i keskihajonta ajanjaksona t
- Z_i = normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja. $E(Z_i) = 0$ kaikilla i :n arvoilla ja $\text{Corr}(Z_i, Z_j) = \rho_{ij}$
- $SC_i(t)$ = sijoituslajin i käteistuotto ajanjaksona t
- c_i = sijoituslajikohtainen vakio.

Sijoituslajin i käteistuoton on oletettu sisältyvän sijoituslajin arvonmuutokseen. Tällä on lähinnä merkitystä laskettaessa Suomen kirjanpitolainsäädännön mukaista sijoitustoiminnan tulosta.

Edelleen sijoituslajin i tuoton varianssi riippuu varianssin ja sijoitustuoton edeltävistä arvoista. Täten sijoituslajin mallissa on ajan suhteen muuttuva volatilitiiteetti:

$$\sigma_i^2(t) = \alpha_i + \beta_i \cdot \left(\frac{S_i(t-1)}{S_i(t-2)} - 1 \right)^2 + \gamma_i \cdot \sigma_i^2(t-1).$$

missä α_i , β_i ja γ_i ovat sijoituslajikohtaisia vakiota.



Kuva 7: Osakkeiden suhteellinen arvon muutos, 10 vuotta ja 10 simulaatiota kuukausitasolla ($\mu = 9\%$ ja volatilitiiteetti on ajan suhteen vakio, $\sigma = 20\%$, parametrit ovat vuositasolla).

Vakuutusmaksut ja liikekulut

Yleisesti ottaen vakuutusmaksujen ja liikekulujen malli on yleensä ALM:issa deterministinen. Tämä johtuu siitä, että vakuutusmaksujen ja liikekulujen stokastiset ominaisuudet ovat niin vaikeita mallintaa ja parametrien valinta on usein hyvin subjektiivista. Stokastisia osia voisi olla esimerkiksi stokastisen kansantaloustuotteen (nousu- ja laskukaudet) vaikutus vakuutuskappaleiden lukumäärään sekä asiakkaiden hintajousto. Lisäksi olisi mahdollista olettaa, että vakuutusmaksujen vuosittaiset muutokset riippuvat yleisestä inflaatiosta.

PALM:n *vakuutusmaksujen ja liikekulujen* malli on deterministinen. Malli generoi vakuutusluokkoittain vakuutusmaksutulon, vakuutusmaksuvastuun, vakuutusmaksusaamiset, vakuutusmaksujen kassavirran, liikekulut ja voimassa olevien vakuutuskappaleiden lukumäärät. Parametrit ovat kuukausi- tai vuosikohtaisia ja siis poikkeavat toisistaan eri vakuutusluokissa.

PALM:ssa ei ole oletettu, että *sijoitustuottojen* mallin generoima yleinen inflaatio vaikuttaisi suoraan vakuutusmaksuihin, koska ei ole realistista olettaa, että jokaisessa vakuutuslajissa vakuutusmaksuja joka vuosi korotettaisiin inflaation verran. Täten vakuutusmaksujen korotuksia kontrolloidaan PALM:ssa vakuutusluokka- ja vuosikohtaisilla parametreilla (prosentuaalisia korotuksia).

Seuraavassa on kuvattu *vakuutusmaksujen ja liikekulujen* malli yhdelle vakuutusluokalle. Ajanjakso $t = (t-1, t]$ on kuukausi.

Bruttovakuutusmaksutuotto ja bruttovakuutusmaksutulo⁹

PALM:n vakuutusliikkeen positiivinen kassavirta koostuu suurilta osin vakuutusmaksutuotosta. Koska malli on deterministinen, on PALM:n eri skenaarioita helppo ohjata hinnankorotuksilla ja portfoliomuutoksilla.

Vakuutusmaksutuotot saadaan oikaisemalla vakuutusmaksutulo vakuutusmaksuvastuun muutoksella. Siis vakuutusluokan v ajanjakson t bruttovakuutusmaksutuotot

$$GPE^v(t) = GPW^v(t) - GPR^v(t) + GPR^v(t-1),$$

missä $GPW^v(t)$ on ajanjakson t vakuutusmaksutulo vakuutusluokassa v ja $GPR^v(t)$ on ajanhetken t mukainen vakuutusmaksuvastuu¹⁰ vakuutusluokassa v .

Vakuutusmaksutulo¹¹ pohjautuu uusiutuvaan vakuutusmaksutuloon (P_t), mikä kuvastaa ajanjaksona uusiutuvien vakuutusten vakuutusmaksutuloa, kun vakuutusten raukeamista ei ole otettu huomioon.

Vakuutusmaksutuloon vaikuttaa myös edellisinä ajanjaksoina alkaneiden vakuutusten raukeamiset ($p_t(i) - p_t(i-1)$), pienentää vakuutusmaksutuloa), missä täytyy ottaa huomioon keskimääräinen vakuutuskauden pituus:

$$GPW(t) = \sum_{i=1}^{12} P_t(t-i+1) \cdot (p_t(i) - p_t(i-1)) \cdot \text{Max}\left(0, \frac{l(c(t-i+1)) - i + 1}{l(c(t-i+1))}\right),$$

missä

- $P_t(t)$ = ajanjakson t uudistuva vakuutusmaksutulo
- Olkoon kuukausi $t \in \{1, 2, \dots, 12\}$. Tällöin $1 - p_t(t)$ on aikavälillä $(1, t)$ (suhteessa vakuutuksen alkamishetkeen) rauenneitten vakuutusten suhteellinen osuus. Siis $p_t(t) - p_t(t-1)$ on se osuus (miinus merkkisenä) vakuutuksista, mitkä raukeavat¹² ajanjaksona t . Funktio $p_t(t)$ saa arvoja väliltä $[0, 1]$, kun $t \in (1, 12)$ ja se on monotonisesti vähenevä ($p_t(0) = 0$).
- $l(t)$ = keskimääräisen vakuutuskauden pituus ajanjaksona t ($l \in \mathbb{N}[1, 12]$). Ideana on se, että aikaisimpina ajanjaksoina rauenneitten vakuutusten aiheuttamassa oikaisussa vakuutusmaksutuloon täytyy ottaa huomioon se, että kuinka kauan vakuutus on ollut voimassa ajanjaksoon t mennessä.
- $c(t)$ = ajanjakso t muutettuna kalenterikuukaudeksi.

Useimmat PALM:n parametreista on annettu erikseen yhden vuoden jokaiselle kuukaudelle, joten funktion c avulla voidaan poimia ajanjaksoa vastaava kalenterikuukauden mukainen parametri. Täten PALM:ssa on otettu huomioon (sekä vakuutusten että korvausten mallissa) vuoden sisällä tapahtuvat kausivaihtelut.

Edelleen uudistuva vakuutusmaksutulo saadaan ottamalla huomioon vuotta aikaisempi uudistuva vakuutusmaksutulo ($P_t(t-12)$), hinnankorotukset ($p_t(t)$) ja portfoliomuutokset ($p_c(t)$):

$$P_t(t) = P_t(t-12) \cdot (1 + p_t(t)) \cdot (1 + p_c(t)), \text{ kun } t \geq 1$$

⁹ Brutto tarkoittaa jatkossa ilman jälleenvakuuttajan osuutta.

¹⁰ PALM:ssa vakuutusmaksuvastuu lasketaan *pro rata parte tempores* -säännöllä.

¹¹ Jatkossa muuttujien merkinnöistä on poistettu viittaus vakuutusluokkaan v , vaikka parametrit ovatkin vakuutusluokakohtaisia.

¹² Vakuutusten raukeamisella tarkoitetaan esimerkiksi vakuutuksen päättymistä kesken vakuutuskauden.

ja

$$P_r(t) = \frac{\psi(t) \cdot \zeta(t)}{\sum_{i=1}^{12} p_i(i) / 12}, \text{ kun } -11 \leq t \leq 0,$$

missä

- $p_i(t)$ = ajanjakson t hinnankorotukset
- $p_c(t)$ = ajanjakson t portfoliomuutokset (kantamuutokset)
- $\psi(c)$ = kalenterikuukauden c uudistuvien vakuutuskappaleiden lukumäärä
- $\zeta(c)$ = kalenterikuukauden c keskimääräinen perusvakuutusmaksu.

Parametrit ψ ja ζ ovat ajanhetken $t = 0$ mukaisia parametreja, joiden tulo on uudistuva vakuutusmaksutulo. Uudistuvan vakuutusmaksutulon P_r laskentakaava ajanhetkeä $t = 0$ aikaisempina ajanhetkinä on luonteeltaan tekninen ja riippuu aloitusparametrien skaalaamisesta. PALM:ssa portfoliomuutoksilla tarkoitetaan vuosittaisia prosentuaalisia muutoksia vakuutuskappalemäärissä.

Bruttovakuutusmaksuvastuu

Koska suurin osa vahinkovakuutusyhtiön vakuutuksista on kalenterivuotisia, vakuutusmaksuvastuu vuoden lopussa on hyvin pieni verrattuna esimerkiksi korvausvastuuseen. Toisaalta kalenterivuoden sisällä vakuutusmaksuvastuu pienenee tasaisesti vuoden kuluessa.

PALM:ssa vakuutusmaksuvastuu pohjautuu

- aloittavan taseen mukaiseen vakuutusmaksuvastuuseen, mikä purkautuu ajan kuluessa erityisen jakauman mukaisesti
- uusien vakuutusten vakuutusmaksutulosta johdettuun vakuutusmaksuvastuuseen (*Pro Rata Parte Tempores*), mihin vaikuttaa keskimääräinen vakuutuskauden pituus ja vakuutusten raukeaminen.

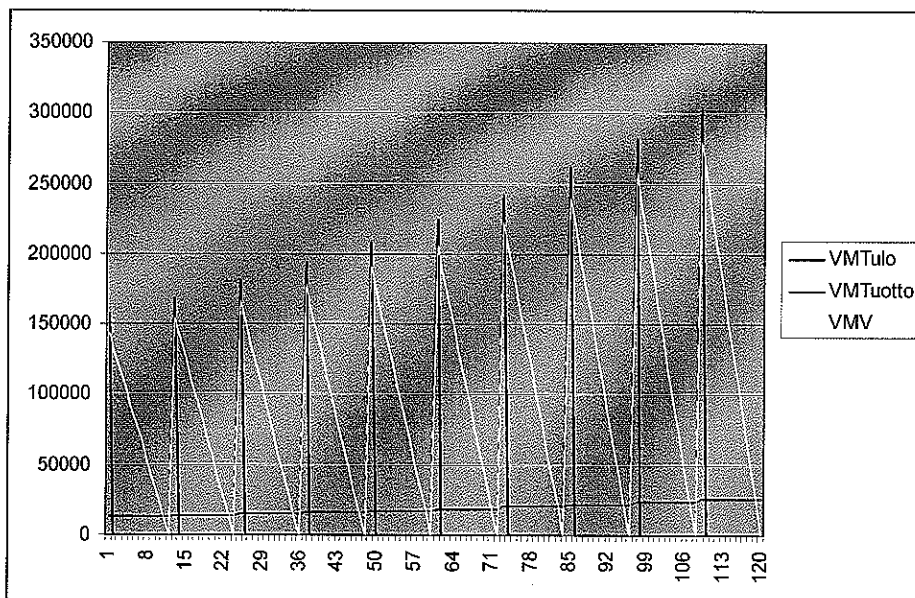
PALM:ssa keskimääräisen vakuutuskauden pituuden oletetaan olevan enimmillään 12 kuukautta.

Siis ajanhetken t vakuutusmaksuvastuu:

$$GPR(t) = GPR(0) \cdot \kappa(t) + \sum_{i=1}^{\text{Min}(12,t)} P_r(t-i+1) \cdot p_i(i) \cdot \text{Max}(0, \frac{l(c(t-i+1)) - i}{l(c(t-i+1))}),$$

missä $\kappa(t)$ on aloittavan taseen mukaisen vakuutusmaksuvastuun purkautumisjakauma. **Vakuutusmaksuvastuun määrään alentavasti vaikuttaa edellisten ajanjaksojen vakuutusten raukeaminen ($p_i(i)$).**

PALM:ssa jakauma $\kappa(t)$ on määritetty siten, että jos hinnankorotukset ja portfoliomuutokset ovat nolla, niin vakuutusmaksuvastuun muutos on nolla.



Kuva 8: Vakuutusmaksutulo, vakuutusmaksutuotto ja vakuutusmaksuvastuu lajissa, missä vakuutukset ovat kalenterivuotisia.

Voimassa olevien ja uusiutuvien vakuutuskappaleiden lukumäärät

Yhtä aikaa voimassa olevien vakuutuskappaleiden lukumäärä ajanjaksona t ($P_F(t)$) perustuu uusiutuvien vakuutuskappaleiden lukumäärään edellisinä 12 kuukautena ($P_N(t)$) korjattuna vakuutusten raukeamisella ($p_i(t)$):

$$P_F(t) = \sum_{i=1}^{12} p_i(c(t-i+1)) \cdot P_N(t-i+1),$$

missä $P_N(t)$ on ajanjaksona t alkavien vakuutusten lukumäärä. Voimassaolevien vakuutuskappaleiden lukumäärää tarvitaan *korvausten* mallissa, missä ajanjaksona t sattuneiden vahinkojen keskimääräinen lukumäärä on suoraan verrannollinen ajanjaksona t voimassa olevien vakuutuskappaleiden lukumäärään.

Edelleen ajanjaksona t alkavien vakuutusten lukumäärä ($P_N(t)$) riippuu vuoden takaisesta alkaneiden vakuutuskappaleiden lukumäärästä ($P_N(t-12)$), mitä on korjattu portfoliomuutoksilla:

$$P_N(t) = P_N(t-12) \cdot (1 + p_c(t)), \text{ kun } t \geq 1$$

ja

$$P_N(t) = \frac{\psi(t)}{\sum_{i=1}^{12} p_i(i)/12}, \text{ kun } -11 \leq t \leq 0,$$

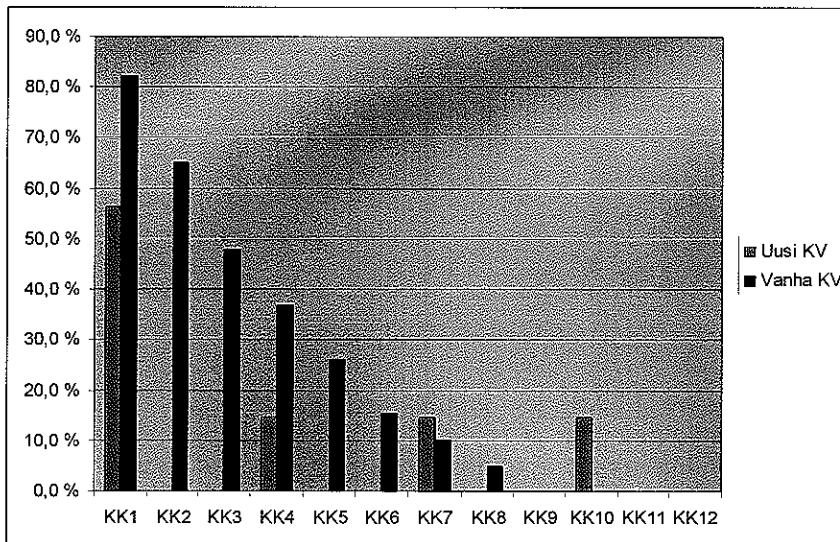
missä $\psi(t)$ on alkuparametri, mikä kuvaa uudistuvien vakuutuskappaleiden lukumäärää kalenterikuukautena t .

Vakuutusmaksujen kassavirta

Yksinkertaistettuna vakuutusmaksujen kassavirta kuvastaa sitä nopeutta, millä vakuutuksenottajat maksavat vakuutusmaksut vakuutusyhtiölle. Kassavirtajakautama on erilainen erityisesti eri asiakassegmenteissa (yksityis-, yritys- ja suuryrityisasiakkaat).

PALM:ssa ajanjakson t vakuutusmaksujen kassavirran laskemisen hankalaksi tekee vakuutusten raukamiset ja ensimmäisen kalenterivuoden aikana maksetut vakuutusmaksut. Oleellista on nimittäin se, että stabiilissa tilanteessa (ts. ei vakuutusmaksu- eikä portfoliomuutoksia) vakuutusmaksujen kassavirran jakautuminen kalenterikuukausille täytyy olla sama eri vuosien välillä.

Vakuutusmaksujen kassavirta perustuu uusien vakuutusten kassavirtajakaumaan ja tästä johdettuun aloittavan taseen mukaisen vakuutusmaksusaamisten purkautumisjakaumaan



Kuva 9 Uusien vakuutusten vakuutusmaksujen kassavirran jakauma ja sitä vastaava aloittavan taseen mukaisen vakuutusmaksusaamisten purkautumisjakauma.

Vakuutusmaksujen kassavirta ajanjaksona t muodostuu aloittavan taseen mukaisen vakuutusmaksusaamisten purkautumisesta, uusien vakuutusten maksuista ja poistuneiden vakuutusten vakuutusmaksujen palautuksista:

$$\begin{aligned}
 P_p(t) = & PRC(0) \cdot (\phi(t-1) - \phi(t)) + \sum_{i=1}^{\min(12,t)} P_r(t-i+1) \cdot p_i(i) \cdot \lambda(i) \\
 & + \sum_{i=t}^{11} P_r(t-i) \cdot (p_i(i+1) - p_i(i)) \cdot \max\left(0, \frac{l(c(t-i+1)) - i}{l(c(t-i+1))}\right) \\
 & + \sum_{i=1}^{\min(12,t)-1} P_r(t-i) \cdot (p_i(i+1) - p_i(i)) \cdot \left(\sum_{j=1}^i \lambda(j) - 1 + \max\left(0, \frac{l(c(t-i+1)) - i}{l(c(t-i+1))}\right)\right),
 \end{aligned}$$

missä

- $P_p(t)$ = ajanjaksona t maksetut vakuutusmaksut
- $PRC(t)$ = vakuutusmaksusaamiset ajanhetkenä t
- $\phi(t)$ = aloittavan taseen mukaisen vakuutusmaksusaamisten kassavirran jakauma
- $\lambda(t)$ = vakuutusmaksujen kassavirran jakauma
- $p_i(0) = 1$.

Vakuutusmaksujen kassavirran yhtälö sisältää seuraavat tekijät riveittäin:

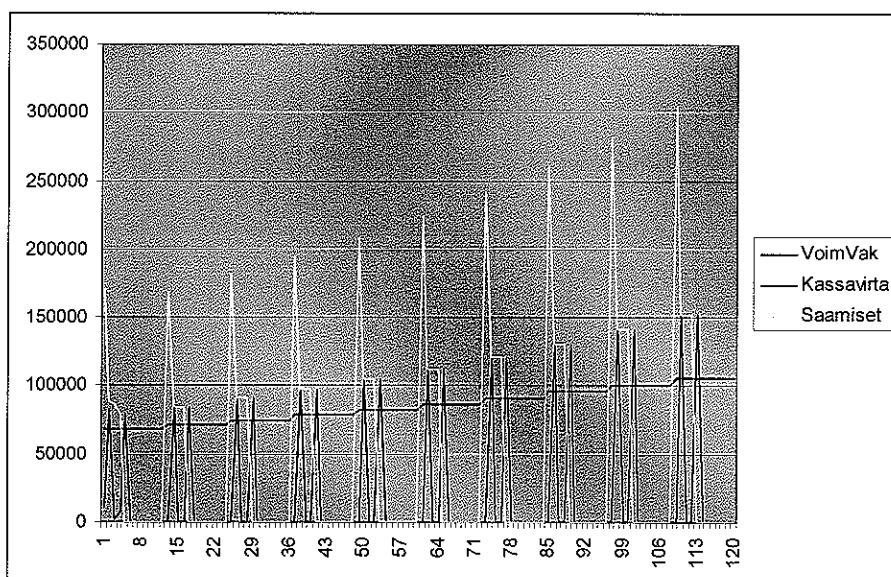
1. Ajanhetken $t = 0$ mukaisen vakuutusmaksusaamisten purkautuminen. Edellisen 12 kuukauden aikana alkaneiden vakuutusten vakuutusmaksujen kassavirta.
2. Ajanhetkeä $t = 1$ ennen alkaneiden vakuutusten, mitkä ovat rauenneet ajanjaksona t , vakuutusmaksujen palautukset. Kaavassa on otettu huomioon se, että kuinka kauan rauennet vakuutukset ovat olleet voimassa ajanhetkeen t mennessä.
3. Kuten kohdassa 2, mutta vakuutukset ovat alkaneet ajanhetken $t = 0$ jälkeen.

Vakuutusmaksusaamiset

PALM:ssa vakuutusmaksusaamisten jakauman perustuu suoraan vakuutusmaksujen kassavirtajakaumaan.

Vakuutusmaksusaamiset ajanhetkenä t muodostuu jäljellä olevasta aloittavan taseen mukaisesta vakuutusmaksusaamisesta ja uusien vakuutusten vakuutusmaksujen saamisista:

$$PRC(t) = PRC(0) \cdot \phi(t) + \sum_{i=1}^{\min(t,12)} P_r(t-i+1) \cdot p_i(i) \cdot (1 - \sum_{j=1}^i \lambda(j)).$$



Kuva 10: Voimassa olevien vakuutuskappaleiden lukumäärä, vakuutusmaksujen kassavirta ja vakuutusmaksusaamiset lajissa, missä vakuutukset ovat kalenterivuotisia. Vaaka-akselilla on kuukaudet ja pystyakselilla on eurot paitsi vakuutuskappaleiden lukumäärän tapauksessa, milloin pystyakseli merkitsee lukumäärää.

Liikekulut

Liikekulut E ajanjaksona t saadaan kertomalla vakuutusmaksutuotto ajanjaksosta t riippuvalla parametrilla $\varepsilon(t)$:

$$E(t) = \varepsilon(t) \cdot GPE(t).$$

Jälleenvakuuttajan osuus vakuutusmaksuista

PALM:ssa jälleenvakuutussuojien oletetaan olevan kalenterivuotisia. Täten jälleenvakuuttajan osuus¹³ vakuutusmaksutulosta allokoitetaan vuoden ensimmäiselle kuukaudelle. Osuuden oletetaan muuttuvan ajan kuluessa samassa suhteessa kuin voimassa olevien vakuutuskappaleiden lukumäärä. Täten PALM:ssa oletetaan implisiittisesti, että jälleenvakuutusmaksun suhde jälleenvakuutussuojan riskimaksuun on ajan suhteen vakio. Siis

$$RPW(t) = \theta \cdot \frac{P_F(t)}{P_F(1)} \cdot GPW(t) \cdot I(\text{Mod}(t,12) = 1),$$

missä

- $RPW(t)$ = jälleenvakuuttajien osuus vakuutusmaksutulosta

¹³ Osuudella tarkoitetaan puhuttaessa jälleenvakuuttajan osuudesta rahamääräistä osuutta.

- $P_F(t)$ = voimassa olevien vakuutusten lukumäärä ajanjaksona t
- θ = ajan suhteen vakiona pysyvä parametri, jälleenvakuuttajan suhteellinen osuus vakuutusmaksutulosta prosentteina.
- $I(\cdot)$ = indikaattorifunktio. Funktion $I(\text{Mod}(t,12) = 1)$ avulla jälleenvakuuttajan osuus bruttovakuutusmaksutulosta allokoidaan vuoden ensimmäiselle kuukaudelle.

Jälleenvakuuttajan osuus vakuutusmaksuvastuusta lasketaan *Pro Rata Parte Temporis* -säännöllä jälleenvakuuttajan osuudesta vakuutusmaksuvastuusta (Huom: jälleenvakuutusuojat oletetaan olevan kalenterisvuotisia):

$$RPR(t) = -RPW(12 \cdot (\text{Year}(t) - 1) + 1) \cdot \frac{12 - c(t)}{12},$$

$RPR(t)$ on jälleenvakuuttajan osuus vakuutusmaksuvastuusta ja $\text{Year}(t)$ ($\text{Year}(1) = 1$) on ajanjaksoa t vastaava vuosi.

Jälleenvakuutusmaksujen oletetaan purkautuvan kassavirraksi välittömästi:

$$RPC(t) = RPW(t),$$

missä $RPC(t)$ on jälleenvakuutusmaksujen kassavirta ajanjaksona t .

Edellä määriteltyjen erien nojalla

$$NPW(t) = GPW(t) - RPW(t),$$

$$NPE(t) = NPW(t) - GPR(t) + GPR(t-1) + RPR(t) - RPR(t-1) \text{ ja}$$

$$NPR(t) = GPR(t) - RPR(t),$$

missä NPW on nettovakuutusmaksutulo, NPE on nettovakuutusmaksutuotto ja NPR on nettovakuutusmaksuvastuu.

Korvaukset

Matemaattisen mallintamisen näkökulmasta ALM:n haastavin osa-alue sijoitustuottojen ohella on korvausten mallintaminen. Korvauskulujen mallintaminen on perinteinen riskiteorian sovellusalue ja monessa suhteessa helpompi kuin sijoitustuottojen mallintaminen, koska mallin valinta ei ole niin subjektiivista kuin sijoitustuottojen mallin valinta. Vaikkakin tuloksen satunnaisheilahtelusta vakuutustekninen osa (ja siis korvaukset) selittää usein pienemmän osan kuin sijoitustuottojen aiheuttama satunnaisheilahtelu, niin korvausprosessi on ratkaiseva tarkasteltaessa vakuutusteknistä tulosta sekä vakuutusmaksu- ja korvausvastuuta. Olennaista on erityisesti mallintaa korvausvastuun purkaantumisjakauma. Siis kuinka nopeasti vahingon satuttua korvaukset maksetaan vahingon kärsineelle.

PALM:n *korvausmallia* valittaessa on huomiota erityisesti kiinnitetty seuraaviin asioihin:

- Vakuutuslajin sisällä eri vahinkolajien välillä on merkittäviä eroavaisuuksia korvausten satunnaisprosessissa. Täten jokainen vakuutuslaji on jaettu useampaan vahinkolajiin. Jokaiselle vahinkolajille generoidaan erikseen korvausmeno (siis parametrit riippuvat vahinkolajista), mikä purkaantuu maksetuiksi korvauksiksi vahinkolajille tyypillisen jakauman mukaisesti.
- Kaikkia vahinkoja ei ole mahdollista simuloida yksitellen, koska jo 100 vahingon simuloiminen kuukausitasolla 10 vuodeksi 3000 kertaa nostaa laskutoimitusten määrän reippaasti yli 36 miljoonan.

Täten vahingot on jaettu vahingon suuruuden mukaan frekvenssivahinkoihin ja suuriin vahinkoihin. Suuren vahingon raja riippuu vahinkolajista.

- *Frekvenssivahinkojen* malli on ns. *Compound Mixed Poisson* -prosessi. Siis vahinkojen lukumäärä noudattaa *Mixed Poisson* -jakaumaa, mikä ottaa huomioon myös vahinkojen lukumäärien huojunnan (tästä etuliite *Mixed*)¹⁴. Edelleen *Poisson*-jakauma nojaa siihen oletamaan, että jokaisena aikavälinä vahinkoja sattuu intensiteetillä, mikä on suoraan verrannollinen ajanjakson pituuteen ja eri aikaväleinä sattuneiden vahinkojen lukumäärät eivät riipu toisistaan. Vahingon suuruuden jakauma on määritelty ainoastaan kolmen ensimmäisen momentin tarkkuudella (ts. frekvenssi vahingon suuruuden jakaumasta tarvitsee tietää vain keskiarvo, keskihajonta ja vinous), joten vahingon suuruuden jakauma on määritelty hyvin yleisellä tasolla. Edelleen frekvenssivahinkojen simuloimiseen on käytetty *Wilson-Hilferty*-generaattoria, mikä on approksimaatio edellä kuvatusta mallista.
- *Suurten vahinkojen* mallissa jokainen vahinko simuloidaan erikseen. Vahinkojen lukumäärä noudattaa *Poisson*-jakaumaa (vrt. perustelut edellä) ja vahingon suuruus noudattaa *Pareto*-jakaumaa. *Pareto*-jakauma on hyvin vino jakauma ja soveltuu hyvin suurten vahinkojen mallintamiseen¹⁵. *Pareto*-jakauma on riskiteorian tunnetuin ja eniten käytetty jakauma mallinnettaessa suuria vahinkoja.
- Korvausinflaatio vaikuttaa vahingon suuruuden momentteihin ja korvausinflaatio on suoraan verrannollinen *sijoitustuottojen* mallin generoimaan lyhyen aikavälin korkoon.
- Vahinkomallin generoiman korvausvastuun oletetaan purkautuvan kassavirraksi deterministisen jakauman mukaisesti. Maksettuihin korvauksiin on otettu huomioon diskonttaustappio¹⁶, mikä riippuu stokastisesta tai deterministisestä diskonttauskorosta.
- PALM:ssa on mahdollisuus valita, että vahinkomallin generoima korvausvastuu muuttuu diskonttauskoron muuttuessa.
- Parametrit on määritelty kuukausikohtaisesti, koska on erityisesti haluttu ottaa huomioon kalenterivuoden sisällä tapahtuva kausivaihtelu.
- PALM:ssa on oletettu, että korvausvastuun arvioinnissa ei ole virhettä. Siis vahingon sattuessa vahingon suuruuden tarkka arvo on tiedossa kokonaisuudessaan. Tätten PALM:ssa *RunOff*-tulos on aina 0.

Seuraavassa on kuvattu *korvausten* malli yhdelle vakuutusluokalle. Ajanjaksona $t = (t - 1, t]$ on kuukausi.

Bruttokorvausmeno

Vakuutusluokan v ajanjakson t bruttokorvausmeno (siis ennen jälleenvakuuttajan osuuden vähentämistä)

$$GCI^v(t) = \sum_{l=1}^{L_v} GCI_l^v(t),$$

missä L_v on vakuutusluokan v vahinkoluokkien l lukumäärä.

Edelleen vakuutusluokan v bruttokorvausmeno¹⁷ ajanjaksona t saadaan oikaisemalla ajanjaksona t maksetut bruttokorvaukset korvausvastuun muutoksella:

$$GCI(t) = GCP(t) + CHC(t) + GCR(t) - GCR(t - 1),$$

¹⁴ Olkoon N satunnaismuuttuja, mikä noudattaa sekoitettua *Poisson*-jakaumaa keskiarvona λ . Olkoon q sekoitustermiä kuvaava satunnaismuuttuja. Tällöin vahinkojen lukumäärä N voidaan esittää hierarkisena mallina. Siis ensin generoidaan satunnaismuuttujan q arvo, minkä jälkeen N noudattaa *Poisson*-jakaumaa parametrina $\lambda \cdot q$. Yleensä q valitaan siten, että q :n keskiarvo on 1. Sekoitustermillä q voidaan lisätä *Poisson*-jakauman varianssia.

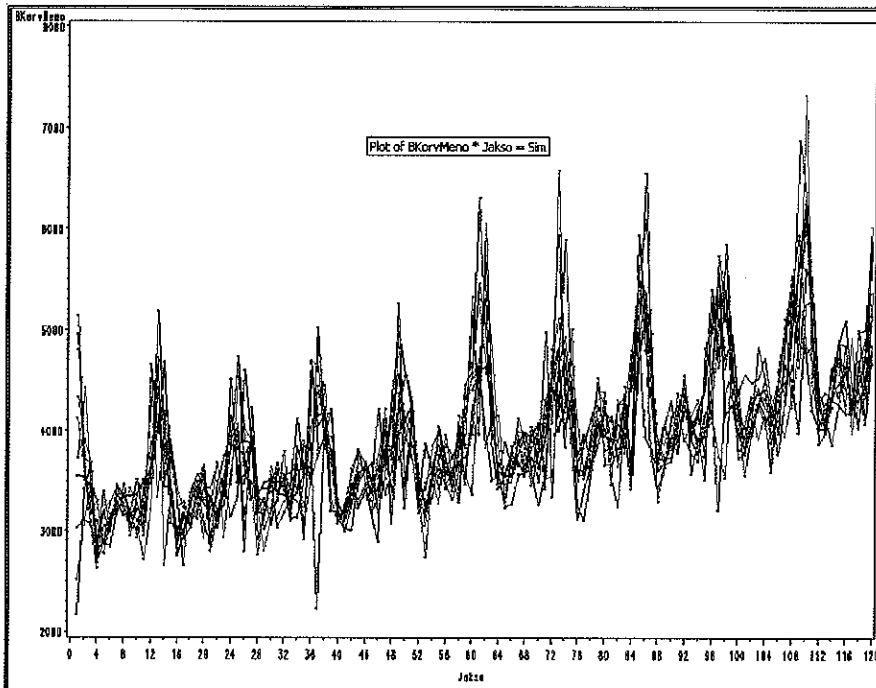
¹⁵ Äärimmäisten havaintojen teoriassa *Pareto*-jakaumalla on sama asema kuin normaalijakaumalla on suurten lukujen teoriassa!

¹⁶ Diskonttaustappiolla tarkoitetaan vahingon varaukselle oletettua saatua tulevaa sijoitustuottoa.

¹⁷ Jatkossa muuttujien merkinnöistä on poistettu viittaus vakuutusluokkaan v ja vahinkoluokkaan l , vaikka parametrit riippuvatkin vakuutusluokasta ja vahinkoluokasta.

missä

- $GCI(t)$ = bruttokorvausmeno ajanjaksona t
- $GCP(t)$ = maksetut bruttokorvaukset ajanjaksona t
- $CHC(t)$ = korvaustoiminnan liikekulut ajanjaksona t
- $GCR(t)$ = bruttokorvausvastuu ajanhetkenä t .



Kuva 11: Bruttokorvausmenon kehittyminen kuukausitasolla vakuutuslajissa, missä on suuri kausi vaihtelu (10 vuotta ja 10 simulaatiota). Koska kyseessä on autovakuutus, voi kuvasta huomata kuinka talvikuukausina sattuu huomattavasti enemmän vahinkoja kuin kesäkuukausina. Korvausmenon trendi aiheutuu korvausinflaatiosta.

Korvaustoiminnan liikekulut

Osan ajanjakson t korvausmenosta muodostaa korvaustoiminnan liikekulut. Korvaustoiminnan liikekulut lasketaan prosentuaalisena osuutena maksetuista bruttokorvauksista:

$$CHC(t) = \omega(t) \cdot GCP(t)$$

ja parametri $\omega(t) \in \mathbb{R}$.

Maksetut bruttokorvaukset ja bruttokorvausvastuu

PALM:ssa maksettujen korvausten ja korvausvastuun laskenta perustuu korvausvastuun purkautumisjakaumaan ja ajanjakson kokonaiskorvausmenoon. Kokonaiskorvausmeno muodostuu vahinkojen satunnaisprosessin generoimasta korvausmenosta.

Ajanjaksona t maksettuihin bruttokorvauksiin on otettu huomioon diskonttaustappio, aloittavan taseen mukaisen korvausvastuun purkautuminen maksetuiksi korvauksiksi ja uusista (simuloiduista) vahingoista maksetut korvaukset.

$$GCP(t) = f_1(r_t) + GCR(0) \cdot (h(t-1) - h(t)) + \sum_{j=1}^t X(t-j+1) \cdot (g(j-1) - g(j)).$$

Ajanjakson t bruttokorvausvastuu sisältää diskonttauskoron muutoksen aiheuttaman muutoksen korvausvastuuseen, aloittavan taseen mukaisesta korvausvastuusta jäljellä olevan osuuden ja uusista vahingoista aiheutuvan korvausvastuun:

$$GCR(t) = f_2(r_t) \cdot (GCR(0) \cdot h(t) + \sum_{j=1}^t X(t-j+1) \cdot g(j)),$$

Edellä

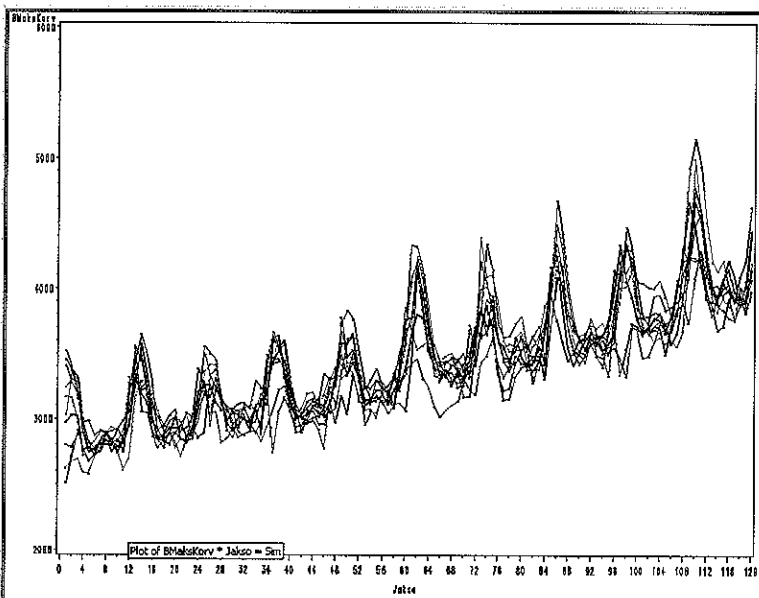
- $f_1(r_t)$ = diskonttaustappio ajanjaksona t korolla r_t
- $f_2(r_t)$ = korvausvastuun suhteellinen muutos ajanhetkenä t diskonttauskoron muuttuessa
- $h(t)$ = aloittavan taseen mukaisen korvausvastuun purkautumisjakauma kassavirraksi
- $X(t)$ = kokonaiskorvausmeno ajanjaksona t
- $g(t)$ = kokonaiskorvausmenon X purkautumisjakauma kassavirraksi.

PALM:ssa jonkin kuukauden t kokonaiskorvausmeno vastaa kyseenomaisena kuukautena sattuneiden (simuloitujen) vahinkojen korvausvaateiden kokonaissummaa. Siis PALM:ssa kirjanpidon mukainen bruttokorvausmeno ja simuloitu kokonaiskorvausmeno poikkeavat (yleensä) toisistaan.

Diskonttaustappiota muodostuu niissä vakuutuslajeissa, joissa korvausvastuu tai sen osa on diskontattu. Tällöin osa maksetuista korvauksista katetaan korvausvastuulle ansaitusta sijoitustuotosta. Siis diskonttaustappio on diskonttokoron mukainen osuus ajanjakson t keskimääräisestä korvausvastuusta:

$$f_1(r_t) = \frac{GCR(t) + GCR(t-1)}{2} \cdot \rho \cdot r_t,$$

missä ρ on se osuus vastuuvälästä, mikä on diskontattu ja r_t on sijoituspuolella generoidun (markkina) koron arvo ajanjaksona t tai vakio (laskuperustekorko)¹⁸. PALM:ssa on siis mahdollista tutkia diskonttauskoron muutoksen vaikutusta vastuuvälän määrään.



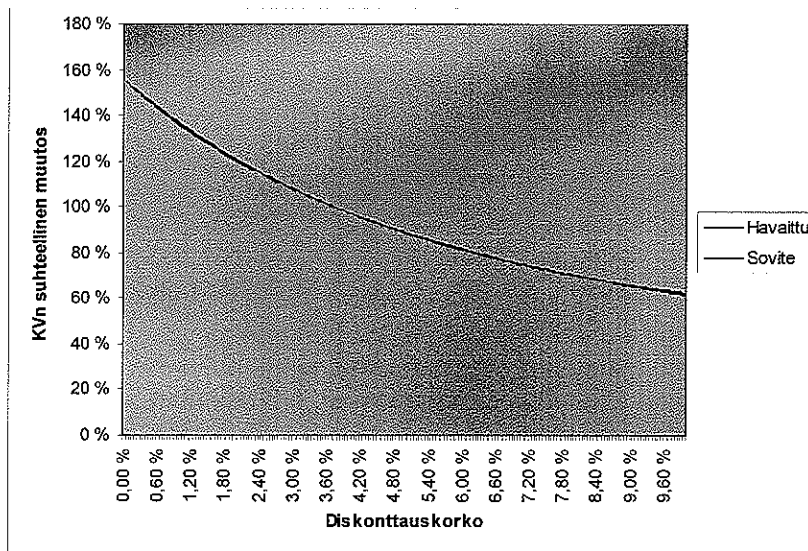
Kuva 12: Vastaava asetelma kuin kuvassa 11, mutta maksetut korvaukset.

¹⁸ Diskonttaustappiota laskettaessa päädyttäisiin tarkempaan lopputulokseen, jos koron r_t paikalla käytettäisiin korkoutuvuutta $\ln(r_t + 1)$.

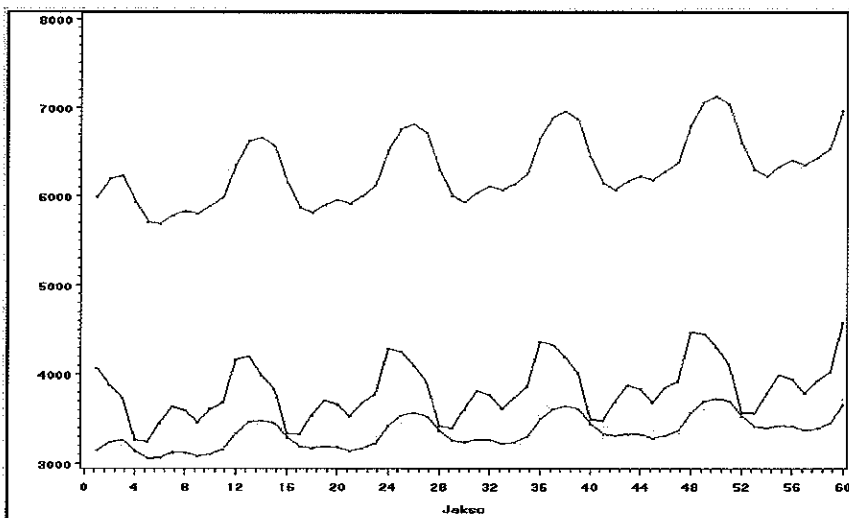
Edelleen niissä lajeissa, joissa osa korvausvastuusta on diskontattu, diskonttokoron muutos vaikuttaa korvausvastuun määrään. Tämä (suhteellinen) muutos on PALM:ssa mallinnettu eksponenttifunktiona:

$$f_2(r_t) = a + b \cdot e^{\zeta \cdot r_t},$$

missä a , b ja ζ ovat parametreja sekä $f_2(r_t) = 1$, kun r_t on yhtä suuri kuin jokin perustasoksi valittu korko (esimerkiksi laskuperustekorko).



Kuva 13: Lakisääteisen tapaturmavakuutuksen korvausvastuun suhteellinen muutos diskonttokoron muuttuessa (uusi kuolevuusmalli, perustasoksi on valittu 3,7 %)



Kuva 14: Kuvassa on keskimääräinen kuukausittainen korvausmeno (musta), korvausvastuu (vihreä) ja maksetut korvaukset (punainen) vakuutuslajissa missä on suuri kausivaihtelu. Kuvasta voi nähdä kuinka ajan kuluessa korvausmeno muuttuu korvausvastuiksi ja edelleen purkaantuu maksetuiksi korvauksiksi.

Koron r_t maturiteetti τ valitaan siten, että se vastaa vahinkolajin keskimääräistä duraatiota, mikä vastaa korvausvastuun purkautumisjakauman painotettua keskiarvoa:

$$\tau \approx \sum_{t=1}^{\theta} \frac{t}{12} \cdot (h(t) - h(t-1)),$$

missä θ määrää jakauman hännän pituuden ja $h(0) = 1$

PALM:ssa vastuuvelan diskonttaus perustuu sille olettamalle, että tulevat kassavirrat voidaan diskontata johonkin ajanhetkeen käyttäen korkoa, mikä ei riipu ajanjaksosta minä kassavirta realisoituu. Siis PALM:ssa diskonttaus jonakin ajanhetkenä lasketaan vakiokorolla (tosin diskonttauskorko saa edelleen eri arvoja eri ajanjaksoina).

PALM:ssa lajit, joissa on diskontattua korvausvastuuta mallinnetaan samalla tavalla kuin lajit joissa korvausvastuuta ei diskontata lainkaan. Mahdollista olisi myös mallintaa diskontattu korvausvastuu siten, että esimerkiksi liikennevakuutuksessa joka ajanjakso generoitaisiin vahingoittuneen ikä, sukupuoli ja vuotuismäärä. Tällöin vahingolle voitaisiin laskea jokaiselle ajanhetkelle henkivakuutusmatematiikan mukaisesti pääomitettu varaus (eläkemuotoinen varaus) ja kassavirran muodostaisi vuotuismäärä.

PALM:ssa ajanjakson t kokonaiskorvausmeno X purkaantuu maksetuiksi korvauksiksi jakauman

$$g(t) = \text{Max}(0, (\frac{\chi}{\chi+t})^{\omega} - (\frac{\chi}{\chi+\theta})^{\omega} \cdot \frac{t}{\theta})$$

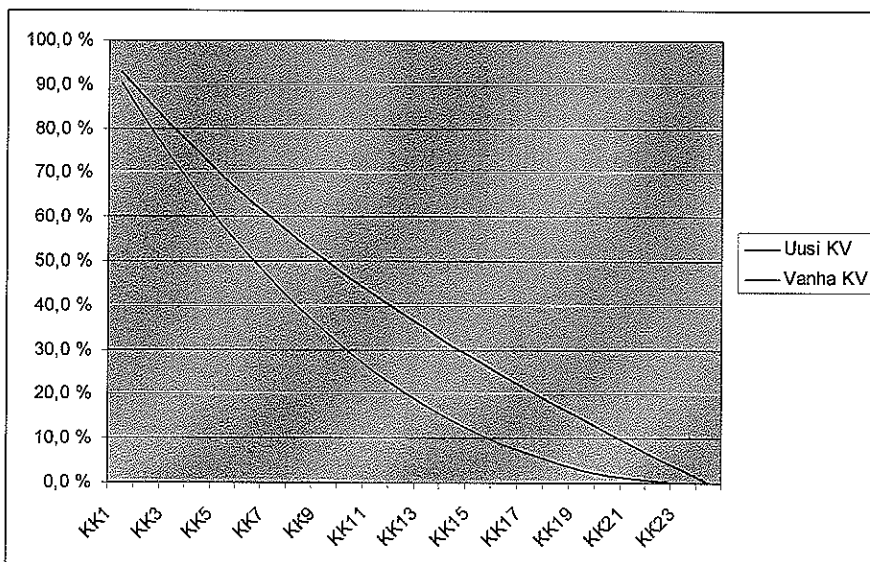
mukaisesti, missä

- parametri θ määrää jakauman *hännän* pituuden
- t on kuukausi
- χ ja ω ovat parametreja, mitkä määräävät jakauman muodon.

Jakauman g avulla voidaan laskea simulaation alun mukaisen aloittavan taseen korvausvastuun purkautumisjakauma

$$h(i) = \frac{\sum_{j=i+1}^{\theta} g(j)}{\sum_{j=1}^{\theta} g(j)}.$$

Jakaumat g ja h on määritelty siten, että stabiilissa tilanteessa (vakuutuskappaleiden lukumäärä pysyy ajan suhteen vakiona) kokonaiskorvausvastuu (uuden ja vanhan korvausvastuun summa) on ajan suhteen vakio. Lajissa, missä vastuuvetka on diskontattu, jakauma g on sovitettava kassavirtaan, mistä on vähennetty diskonttaustappio.



Kuva 15: Uuden (g) ja vanhan (h) korvausvastuun purkautumisjakauma lajissa, missä hännän pituus on 24 kk.

Kokonaiskorvausmeno

Kokonaiskorvausmenon laskentaan sisältyy PALM:n *korvausmallin* stokastisuus.

Kokonaiskorvausmeno pitää sisällään jonakin ajanjaksona sattuneiden (simuloitujen) vahinkojen korvausten kokonaissumman.

PALM:ssa on oletettu, että vahingon sattuessa vahingon suuruus on kokonaisuudessaan tarkasti tiedossa. Siis PALM:ssa *RunOff*-tulos on 0.

Kokonaiskorvausmeno (X_T) ajanjaksona t jakautuu pienten (frekvenssi) vahinkojen ja suurten vahinkojen aiheuttamaan korvausmenoon:

$$X_T(t) = X_f(t) + X_L(t).$$

Suurten vahinkojen kokonaiskorvausmenossa (X_L) vahinkojen lukumäärä noudattaa *Poisson*-jakaumaa ja vahingon suuruus noudattaa *Pareto*-jakaumaa:

$$X_L(t) = I(t) \cdot \sum_{i=1}^{N(t)} X_i(t),$$

missä

- $X_i(t)$ = satunnaismuuttuja, mikä noudattaa *Pareto* jakaumaa parametrein α, β ja D
- *Pareto* jakauman kertymäfunktio on muotoa $F(x) = 1 - \left(\frac{D + \beta}{x + \beta}\right)^\alpha$
- $N(t)$ = satunnaismuuttuja, mikä noudattaa *Poisson*-jakaumaa parametrina ν
- *Poisson*-jakauman tiheysfunktio on muotoa $p(n) = e^{-\nu} \frac{\nu^n}{n!}$
- $I(t)$ = korvausinflaatioindeksi ajanjaksona t .

Frekvenssivahinkojen kokonaiskorvausmeno ajanjaksona t lasketaan käyttäen *Wilson-Hilferty*-generaattoria, mikä on approksimaatio *Compound Mixed Poisson* -prosessista. *WH*-generaattori toimii hyvin ainoastaan tilanteissa, missä korvausmenon vinous on välillä $(0,1)$, mikä on syytä aina tarkistaa ennen kuin *WH*-generaattoria sovelletaan käytännössä. Korvausmenon vinouden lähestyessä nollaa *WH*-generaattori lähestyy normaalijakaumaa. *WH*-generaattorin ideana on muuntaa standardoitu satunnaismuuttuja sellaiseen muotoon, että se noudattaisi approksimoitavaa kokonaiskorvausmenoa. Suuren vahingon rajaa valittaessa on syytä kiinnittää huomiota frekvenssivahinkojen jakauman vinouteen, jotta tämä olisi pienempi kuin 1 (tällöin *WH*-generaattori toimii luetettavammin).

Frekvenssivahinkojen kokonaiskorvausmeno

$$X_f(t) = EX(t) + x(t) \cdot \sigma_X(t),$$

missä

- $EX(t)$ = frekvenssivahinkojen kokonaiskorvausmenon odotusarvo ajanjaksona t
- $\sigma_X(t)$ = kokonaiskorvausmenon hajonta ajanjaksona t
- $x(t)$ = apusatunnaismuuttujan arvo ajanjaksona t . Satunnaismuuttujan x jakauman ominaisuudet määräytyvät täysin kokonaiskorvausmenon vinoudesta. *WH*-generaattorin ydin on satunnaismuuttujassa x , mikä approksimoi kokonaiskorvausmenon satunnaisheilautelua odotusarvon ympärillä.

Edelleen

$$EX(t) = n(t) \cdot m(t),$$

missä n on vahinkojen lukumäärän odotusarvo ja m on vahingon suuruuden odotusarvo. Vahinkojen lukumäärän odotusarvo n riippuu voimassaolevien vakuutuskappaleiden lukumäärästä $P_F(t)$ ja vahinkofrekvenssistä f (mikä taas riippuu kalenterikuukaudesta c^{19}):

$$n(t) = P_F(t) \cdot f(c(t)).$$

Vahingon suuruuden odotusarvo

$$m(t) = I(t) \cdot \kappa(c(t)),$$

missä parametrin $\kappa(c(t))$ arvo riippuu kalenteri kuukaudesta c ja korvausinflaatioindeksi

$$I(t) = \delta(t) \cdot \prod_{i=1}^t (r_i(i) + 1)^{1/12}$$

riippuu suhdeluvusta $\delta(t)$ ja sijoituspuolen generoimasta inflaatiosta $r_i(t)$ aikavälinä $(1, t)$. Suhdeluku δ kuvastaa vahinkolajin korvausinflaation suhdetta yleiseen inflaatioon.

Kokonaiskorvausmenon varianssi

$$\sigma_X(t)^2 = n(t) \cdot a_2(c(t)) + n(t)^2 \cdot m(t)^2 \cdot \sigma_q^2(c(t))$$

ja kokonaiskorvausmenon vinous

$$\gamma_X(t) = \frac{n(t) \cdot a_3(c(t)) + 3 \cdot n(t)^2 \cdot m(t) \cdot a_2(c(t)) \cdot \sigma_q^2(c(t)) + n(t)^3 \cdot m(t)^3 \cdot \gamma_q(c(t)) \cdot \sigma_q^3(c(t))}{\sigma_X^3(t)}$$

missä

- $a_i(c(t))$ = vahingon suuruuden i :s momentti, mikä riippuu kalenterikuukaudesta c^{20}
- $\sigma_q^2(c(t))$ = vahinkojen lukumäärän huojunnan varianssi, mikä riippuu kalenterikuukaudesta c
- $\gamma_q(c(t))$ = vahinkojen lukumäärän huojunnan vinous, mikä riippuu kalenterikuukaudesta c .

Edelleen apusätunnaismuuttuja x määräytyy kokonaiskorvausmenon vinouden avulla:

$$x(t) = b_1(t) \cdot (Z - b_2(t))^3 - b_3(t),$$

missä

¹⁹ Kalenterikuukauden c voidaan ajatella olevan ajanhetken t funktio.

²⁰ $a_1 = \mu$, $a_2 = \sigma^2 + \mu^2$ ja $a_3 = \frac{\gamma}{\sigma^3} + 3 \cdot a_1 \cdot a_2 - 2 \cdot a_1^3$.

$$b_1(t) = \frac{\gamma_X(t)^2}{108}, b_2(t) = \frac{\gamma_X(t)}{6} - \frac{6}{\gamma_X(t)}, b_3(t) = \frac{2}{\gamma_X(t)}$$

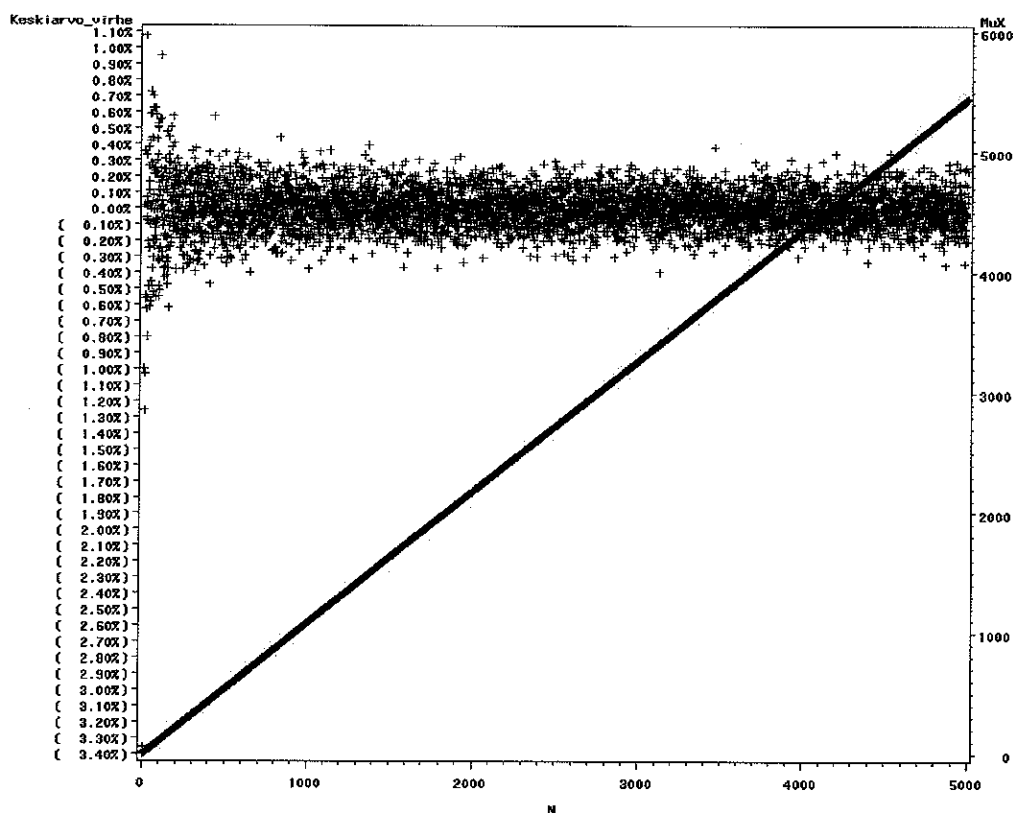
ja Z on satunnaismuuttuja, mikä noudattaa standardoitua normaalijakaumaa.

Wilson-Hilferty-generaattori

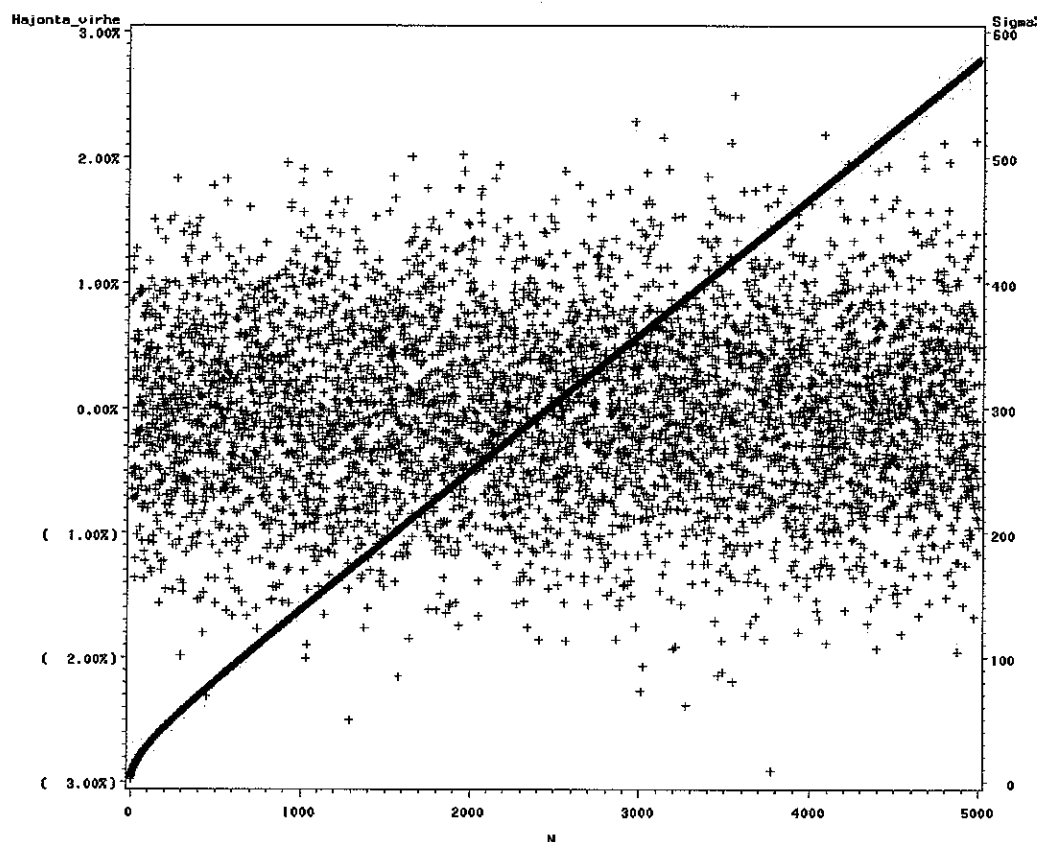
Seuraavassa kuvissa on tarkasteltu *Wilson-Hilferty*-generaattorin antamaa approksimaatiota kokonaiskorvausmenolle vakuutuslajissa, missä

- keskimääräinen yksittäisen vahingon suuruus on 1,09 k€
- yksittäisen vahingon suuruuden hajonta on 2,5 k€
- yksittäisen vahingon suuruuden vinous on 14
- vahinkojen lukumäärän huojuksen varianssi on 0,1.

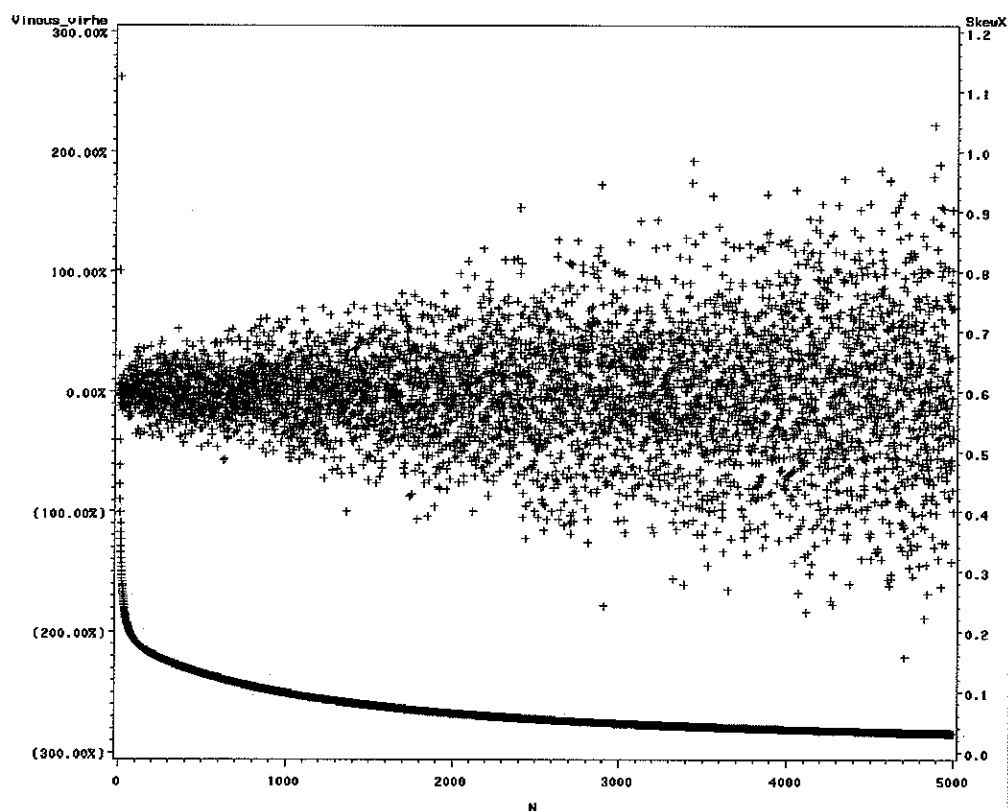
Kuvista voidaan todeta, että WH-generaattori toimii erittäin hyvin myös tilanteissa, missä vahinkojen lukumäärä on pieni. Kuvista näkyy myös selvästi se, että korvausmenon jakauma lähestyy normaalijakaumaa vahinkojen lukumäärän kasvaessa (vinous lähenee nollaa). WH-generaattoria on simuloitu 10 000 kertaa.



Kuva 16: Korvausmenon keskiarvon suhteellinen virhe (WH-generaattorin mukainen kokonaiskorvausmenon keskiarvo jaettuna kokonaiskorvausmenon teoreettisella odotusarvolla) vahinkojen lukumäärän kasvaessa (N). MuX on kokonaiskorvausmenon teoreettinen odotusarvo.



Kuva 17: Korvausmenon keskihajonnan suhteellinen virhe (WH-generaattorin mukainen approksimaatio kokonaiskorvausmenon keskihajonnalle jaettuna kokonaiskorvausmenon teoreettisella keskihajonnalla) vahinkojen lukumäärän kasvaessa (N). SigmaX on kokonaiskorvausmenon teoreettinen keskihajonta.

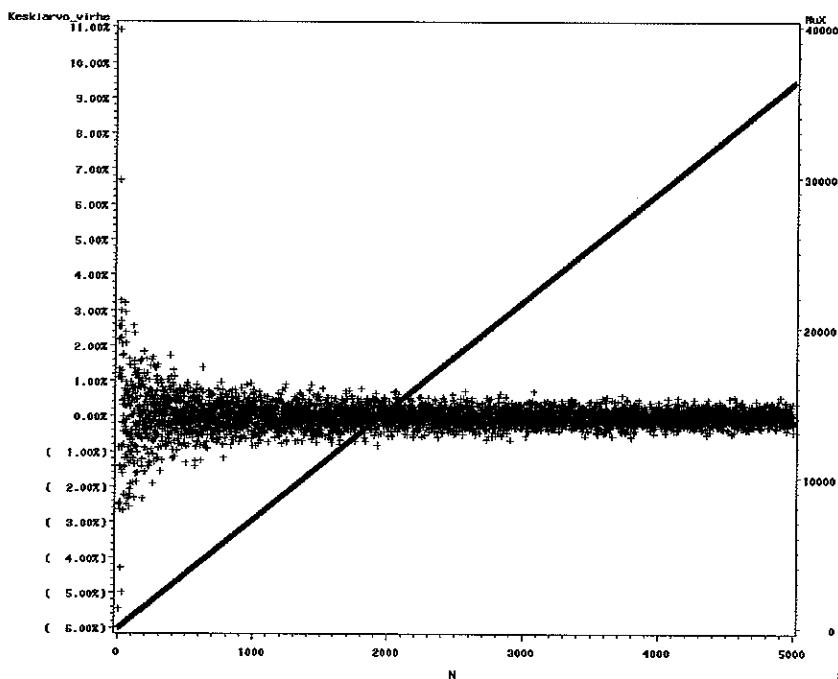


Kuva 18: Korvausmenon vinouden suhteellinen virhe (WH-generaattorin mukainen approksimaatio jaettuna kokonaiskorvausmenon teoreettisella vinoudella) vahinkojen lukumäärän kasvaessa (N). SkewX on kokonaiskorvausmenon teoreettinen vinous.

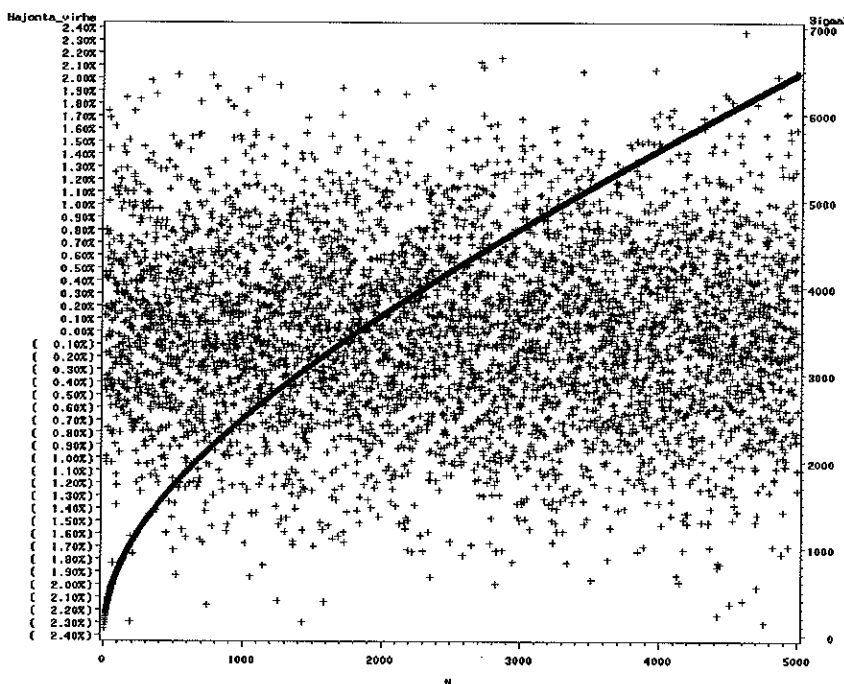
Seuraavassa on tarkasteltu *WH*-generaattorin toimimista vakuutuslajissa, missä

- keskimääräinen yksittäisen vahingon suuruus on 7.27 k€
- yksittäisen vahingon suuruuden hajonta on 75.4 k€
- yksittäisen vahingon suuruuden vinous on 44.9
- vahinkojen lukumäärän huojunnan varianssi on 0.1.

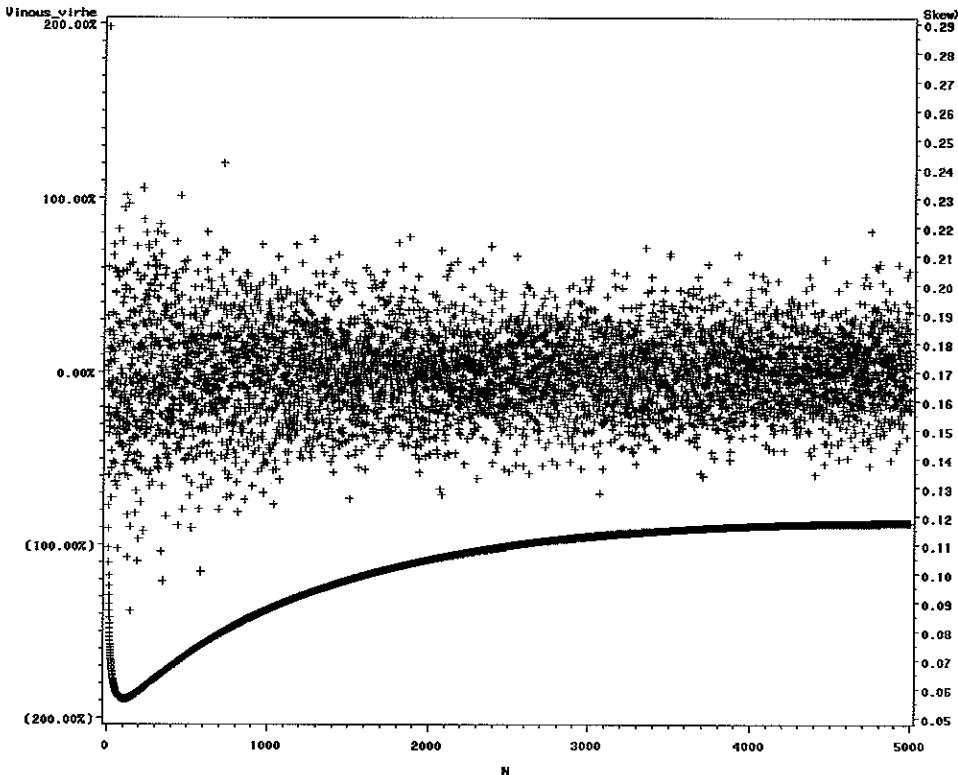
Kuvista voidaan edelleen todeta, että *WH*-generaattori toimii erittäin hyvin myös tilanteissa, missä vahinkojen lukumäärä on pieni. *WH*-generaattoria on simuloitu 10 000 kertaa.



Kuva 19 Korvausmenon keskiarvon suhteellinen virhe (*WH*-generaattorin mukainen kokonaiskorvausmenon keskiarvo jaettuna kokonaiskorvausmenon teoreettisella odotusarvolla) vahinkojen lukumäärän kasvaessa (*N*). *MuX* on kokonaiskorvausmenon teoreettinen odotusarvo.



Kuva 20: Korvausmenon keskihajonnan suhteellinen virhe (*WH*-generaattorin mukainen approksimaatio kokonaiskorvausmenon keskihajonnalle jaettuna kokonaiskorvausmenon teoreettisella keskihajonnalla) vahinkojen lukumäärän kasvaessa (*N*). *SigmaX* on kokonaiskorvausmenon teoreettinen keskihajonta.



Kuva 21: Korvausmenon vinouden suhteellinen virhe (WH-generaattorin mukainen approksimaatio jaettuna kokonaiskorvausmenon teoreettisella vinoudella) vahinkojen lukumäärän kasvaessa (N). SkewX on kokonaiskorvausmenon teoreettinen vinous.

Jälleenvakuuttajan osuus korvausmenosta

Jälleenvakuuttajan osuus korvausmenosta on mallinnettu siten, että ainoastaan suurten vahinkojen korvausmeno X_L otetaan huomioon (paitsi *Stop Loss* -suoja). Tämä ei sinänsä ole kovin rajoittavaa, koska yleensä *Excess of Loss* -suojan omapidätysraja on suurempi kuin suuren vahingon raja.

Jälleenvakuutussuojien malli on *Excess of Loss*-, *Quota Share*- ja *Stop Loss*²¹ -suojiin yhdistelmä. Mallissa jokaisessa *Excess of Loss* -suojan kerroksessa voi olla eri *Quota Share* -suoja. *Stop Loss* -suoja huomioidaan vasta *Excess of Loss* ja *Quota Share* -suojiin jälkeen:

$$RCI(t) = X_R(t) + I(\text{Mod}(t,12) = 0) \cdot \left(\sum_{i=t-11}^t (X(i) - X_R(i)) - I_c(t) \cdot SL(t) \right)^+$$

ja

$$X_R(t) = I_c(t) \cdot \sum_{l=1}^L \sum_{i=1}^{N(t)} \alpha_l \cdot \text{Min}(b_{l+1} - b_l, (X_i(t) - b_l)^+),$$

missä

- $RCI(t)$ = jälleenvakuuttajan osuus ajanjakson t korvausmenosta
- $I(\cdot)$ = indikaattorifunktio. Funktiolla $I(\text{Mod}(t,12) = 0)$ varmistetaan se, että *Stop Loss* -suoja lasketaan vain vuoden lopussa.
- $(b - a)^+ = \text{Max}(0, b - a)$
- $SL(t)$ = *Stop Loss* -suojan raja ajanjaksona t

²¹ *Stop Loss* -suoja on oletettu olevan voimassa kalenterivuositain.

- $X_R(t)$ = jälleenvakuuttajan osuus suurten vahinkojen korvausmenosta
- L = jälleenvakuutussuojan eri kerrosten lukumäärä
- α_l = jälleenvakuuttajan suhteellinen osuus kerroksen l korvausmenosta (*Quota Share*)
- b_l = kerroksen l alaraja (*Excess of Loss*).

Jälleenvakuuttajan osuus ajanjakson t maksetuista korvauksista perustuu olettamukseen, että maksettu korvaus ja jälleenvakuuttajan osuus siitä realisoituvat samanaikaisesti²²:

$$RCP(t) = \sum_{j=1}^t RCI(t-j+1) \cdot (g(j-1) - g(j)),$$

missä $RCP(t)$ on jälleenvakuuttajan osuus maksetuista korvauksista ajanjaksona t .

Edelleen

$$RCR(t) = \sum_{j=1}^t RCI(t-j+1) \cdot g(j),$$

missä $RCR(t)$ on jälleenvakuuttajan osuus ajanhetken t mukaisesta korvausvastuusta.

Täten

$$NCI(t) = GCI(t) - RCI(t) \text{ ja} \\ NCR(t) = GCR(t) - RCR(t),$$

missä $NCI(t)$ on ajanjakson t mukainen nettokorvausmeno ja $NCR(t)$ on ajanhetken t mukainen nettokorvausvastuu.

Muut tase-erät

PALM:n *muut tase-erät* mallissa generoidaan muut kuin *vakuutusmaksujen ja liikekulujen sekä korvaus* mallissa esitetyt taseen erät. Muut tase-erät muodostavat merkittävän osuuden taseen vastattavista ja muodostavat suurimman osan vakavaraisuuspääomasta.

$$GW(t) = GW(t-1), \\ CA(t) = CA(t-1), \\ EQ(t) = EQ(t-1) \text{ ja} \\ FU(t) = FU(t-1),$$

missä

- $GW(t)$ = aineettomat hyödykkeet ajanjaksona t (taseen vastaavaa puolella)
- $CA(t)$ = kassa ajanhetkenä t (taseen vastaavaa puolella)
- $EQ(t)$ = oma pääoma ajanhetkenä t (taseen vastattavaa puolella)
- $FU(t)$ = rahastot ajanhetkenä t (taseen vastattavaa puolella, lasketaan omaan pääomaan)

²² Oletamus ei ole rajoittava, koska suuren vahingon sattuessa jälleenvakuuttajan osuus korvauksesta saadaan yleensä ennen korvauksen maksamista vahingon kärsineelle.

PALM:ssa pääomalainojen malli on rakennettu siten, että pääomalainoihin tulee korotus $Y(t)$ ajanjakson t lopussa, jos vakavaraisuuspääoma ajanjakson t lopussa on pienempi kuin vakio kertaa vakuutusvalvontaviraston vakavaraisuuspääoman vähimmäismäärä:

$$SUL(t) = SUL(t-1) + Y(t)$$

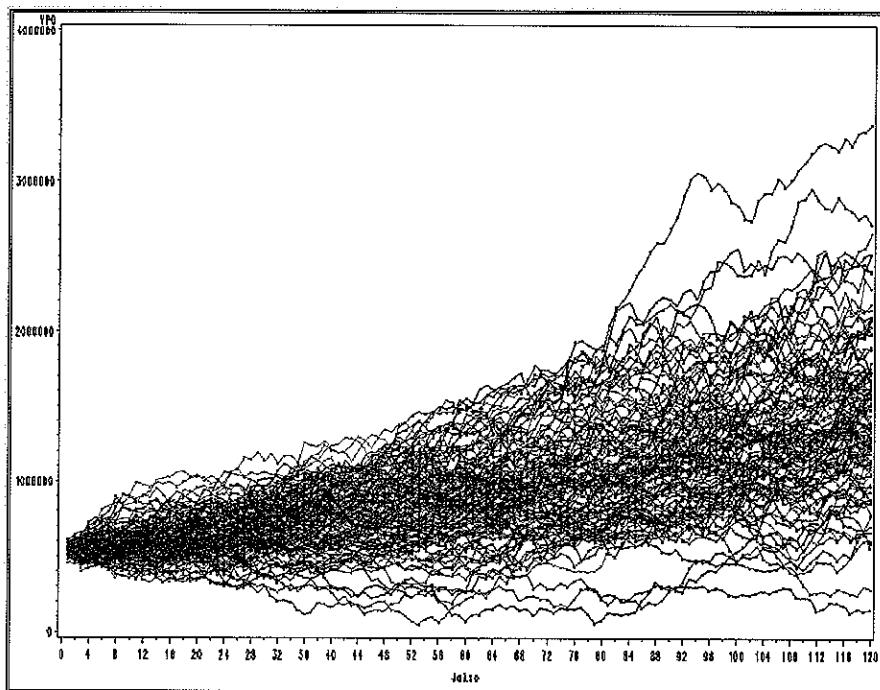
ja

$$Y(t) = \text{Max}(0, \alpha \cdot VPO(t)_{\min} - VPO(t)),$$

missä

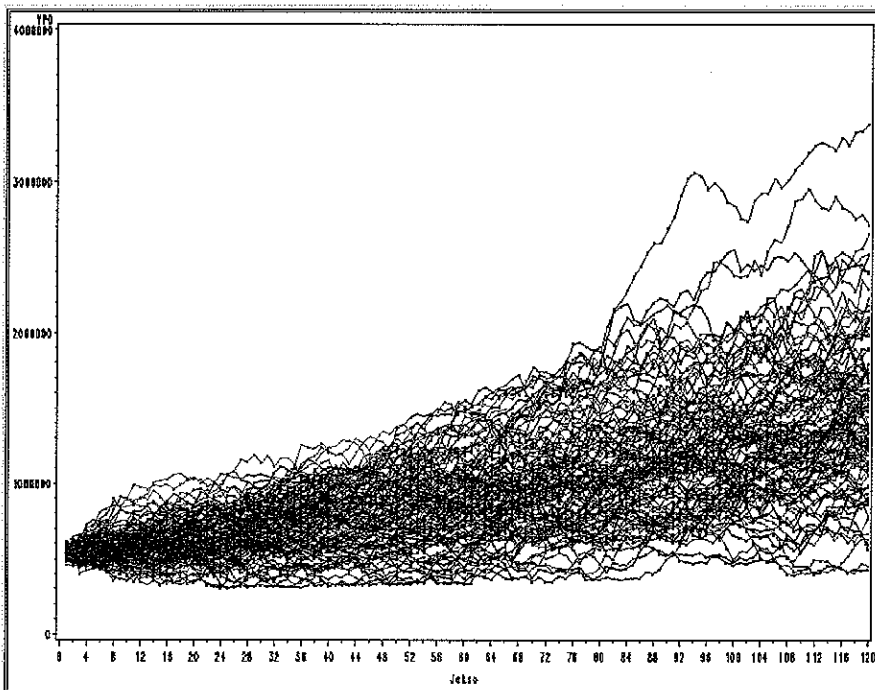
- α = vakio
- $VPO(t)_{\min}$ = vakuutusvalvontaviraston vakavaraisuuspääoman vähimmäismäärä
- $VPO(t) = VD(t) + FU(t) + SUL(t) + PL(t) + PPL(t) + EQR(t)$ ²³
- $SUL(t)$ = pääomalainat ajanhetkenä t
- $Y(t)$ = pääomalainan lisäys ajanhetkenä t . Y riippuu ajanhetken t taseesta.

Kuvista 13 ja 14 voidaan havaita, kuinka pääomalainojen dynaaminen lisääminen leikkaa pois konkurssitilanteet ($VPO < VPO_{\min}$). Skenaariossa $\alpha = 1,3$, mikä pudotti 10 vuoden konkurssi todennäköisyyden 3,1 %:sta nollaan ja samalla 10 vuoden sisäinen korkokanta laski 14,4 %:sta 14,3 %:iin (simulaatioiden määrä on nostettu 100:sta 1000:een).



Kuva 22: VPO:n kehittyminen 10 vuoden aikana kuukausitasolla (100 simulaatiota). Ei pääomalainojen dynaamista lisäystä.

²³ Osa $VPO(t)$:n eristä on selitetty muissa tämän dokumentin kappaleissa.



Kuva 23: VPO:n kehittyminen 10 vuoden aikana kuukausitasolla (100 simulaatiota). Pääomalainojen dynaaminen lisäys mukana.

Ajanjakson t siirtovelat $L(t)$ muodostuvat jaetuista osingoista D

$$L(t) = L(t-1) + D(t) - D(t-4).$$

Muut vakuutustekniset erät taseessa ovat

$$EQR(t) = \text{Min}(1,5 \cdot 12 \cdot GPE(t); 1,04 \cdot EQR(t-1))$$

ja

$$CGR(t) = CGR(t-1),$$

missä $EQR(t)$ on tasoitusmäärän arvo ajanhetkenä t ja $CGR(t)$ on yhteistakuuerä ajanjaksona t .

SiiS PALM:ssa on oletettu, että tasoitusmäärä kasvaa vuodessa 4 %:a ja on maksimissaan 1,5 kertaa vakuutusmaksutuotto (vuositasolla), koska on luultavaa, että tulevaisuudessa IAS:n myötä tasoitusmäärä lasketaan Suomessa toisin vahinkovakuutusyhtiöille kuin nykyään (tulevaisuudessa luultavasti yksinkertaisempi tapa verrattuna nykyiseen). STM:n määräysten mukaan tasoitusmäärä vaihtelee riippuen tilikauden vakuutusteknisestä tuloksesta, joten PALM:n antama tilikauden tulos ei vastaa tältä osin täysin STM:n määräyksiä.

Edellisten tilikausien voitto/tappio saadaan laskettua seuraavasti:

$$PPL(t) = PPL(t-1) + PL(t-1),$$

missä $PPL(t)$ on ajanhetken t mukainen edellisten tilikausien voitto/tappio ja $PL(t)$ on ajanjakson t mukainen voitto/tappio.

Kassavirta

PALM:ssa taseen vastaavat ja vastattavat riippuvat toisistaan seuraavista tekijöistä:

- Korvausinflaatio mikä on verrannollinen yleiseen inflaatioon.
- Kassavirta.

PALM:ssa kassavirta sijoitetaan sijoitusallokaation mukaisesti taseen vastaaviin.

Ajanjakson t kassavirran muodostavat muuttujat on määritelty PALM:n eri malleja käsittelevissä kappaleissa:

$$CF(t) = \sum_{v=1}^V (P_{p,v}(t) - E_v(t) - \sum_{l=1}^{L_v} (GCP_l^v(t) + CHC_l^v(t))) + Y(t) - T(t) - DC(t),$$

missä

- $CF(t)$ = kassavirta ajanjaksona t
- $P_{p,v}(t)$ = vakuutusluokassa v maksetut vakuutusmaksut ajanjaksona t
- $RPC_v(t)$ = vakuutusluokan v jällelvakuutusmaksut ajanjaksona t
- $E_v(t)$ = vakuutusluokassa v maksetut liikekulut ajanjaksona t
- $GCP_l^v(t)$ = vakuutusluokassa v ja vahinkoluokassa l maksetut korvaukset ajanjaksona t
- $CHC_l^v(t)$ = vakuutusluokassa v ja vahinkoluokassa l maksetut korvaustoiminnan liikekulut ajanjaksona t
- $Y(t)$ = ajanjaksona t saatu pääomalainan lisäys
- $T(t)$ = ajanjaksona t maksetut verot
- $DC(t)$ = maksetut osingot ajanjaksona t .

Ajanjakson t kassavirta $CF(t)$ ei sisällä sijoituspuolen generoimaa kassavirtaa, koska PALM:ssa sijoitusinstrumentin tuottama kassavirta oletetaan sijoitettavan välittömästi samaan sijoitusinstrumenttiin.

PALM:ssa ajanhetkenä t jaetut osingot realisoituvat kassavirraksi 4 kuukauden kuluttua. Siis olkoon $D(t)$ ajanjaksona t jaetut osingot. Tällöin

$$DC(t) = D(t - 4).$$

Sijoitustoiminnan tulos

PALM:ssa *sijoitustoiminnan tulos* lasketaan Suomen kirjanpitosäännösten mukaisesti. *Sijoitustoiminnan tulos* perustuu *aloittavan taseen* mukaisen sijoitussalkun markkina-arvon ja kirjanpitoarvon muutokseen ajanjaksona t . Edelleen *sijoitustuottojen* malli generoi eri sijoitusinstrumenttien arvon muutokset ja käteistuotot ajanjaksona t .

PALM:ssa taseen vastaavien sijoitusten allokaatio eri sijoitusinstrumenteille oletetaan olevan ajan suhteen vakio. Edelleen sijoitukset on jaettu kuuteen sijoitusluokkaan:

- osakkeet
- kiinteistöt
- joukkovelkakirjalainat
- rahamarkkinavälineet
- private equityt

- absoluuttisen tuoton sijoitukset.

Sijoitusten markkina-arvo ja arvostuserot

Ajanjakson t sijoitustoiminnan tulos on ajanjakson t sijoitusten kirjanpitoarvojen erotus:

$$IR(t) = BV(t) - BV(t-1) = \sum_{i=1}^6 (BV_i(t) - BV_i(t-1)),$$

missä

- $IR(t)$ = ajanjakson t sijoitustoiminnan tulos
- $BV(t)$ = sijoitusten kirjanpitoarvo ajanhetkenä t
- $BV_i(t)$ = sijoituslajin i kirjanpitoarvo ajanhetkenä t .

Sijoitusten markkina-arvo muodostuu kirjanpitoarvoista ja arvostuseroista:

$$MV(t) = \sum_{i=1}^6 MV_i(t) = \sum_{i=1}^6 (BV_i(t) + VD_i(t)),$$

missä

- $MV(t)$ = sijoitusten markkina-arvo ajanhetkenä t
- $MV_i(t)$ = sijoituslajin i markkina-arvo ajanhetkenä t
- $VD_i(t)$ = sijoituslajin i arvostusero ajanhetkenä t .

Sijoitusten arvostusero on markkina-arvojen ja kirjanpitoarvojen välinen erotus:

$$VD(t) = \sum_{i=1}^6 VD_i(t) = MV(t) - BV(t) = \sum_{i=1}^6 (MV_i(t) - BV_i(t)),$$

missä $VD(t)$ on sijoitusten arvostuserot ajanhetkenä t

Edelleen sijoitusten markkina-arvo ajanhetkenä t saadaan ottamalla huomioon kassavirta, sijoitusten arvonmuutokset ja käteistuotot²⁴:

$$MV(t) = CF(t) + \sum_{i=1}^6 (1 + IVC_i(t)) \cdot MV_i(t-1),$$

missä

- $CF(t)$ = kassavirta ajanjaksona t (vrt. kappale *Kassavirta*)
- $IVC_i(t)$ = sijoituslajin i arvonmuutos ajanjaksona t ²⁵.

Koska PALM:ssa sijoitusallokaatio on ajan suhteen vakio²⁶, niin

$$MV_i(t) = \alpha_i \cdot MV(t) \text{ kaikilla } i \in \{1, \dots, 6\},$$

²⁴ Sijoitusten käteistuotot sisältyvät sijoitusten arvonmuutokseen IVC .

²⁵ PALM:n sijoitustuottojen mallin mukaisesti $IVC_1 = SC_1, IVC_2 = SC_2, IVC_3 = BC, IVC_4 = RMC, IVC_5 = SC_3$ ja $IVC_6 = SC_4$.

²⁶ PALM:ssa ajanjakson t käteistuotto CF ei muuta ajanhetken t sijoitusallokaatiota.

missä α_i on sijoituslajin i allokaatio ($\sum_{i=1}^6 \alpha_i = 1$).

Sijoitusten kirjanpitoarvot

Sijoitusten kirjanpitoarvo perustuu PALM:ssa sille olettamalle, että sijoituslajin käteistuotto sijoitetaan kyseenomaiseen sijoituslajiin välittömästi (ei generoidu kassavirtaa) ja ajanjakson kassavirta jakautuu eri sijoituslajeille sijoitusallokaation mukaisesti. Eli sijoituslajin i kirjanpitoarvo ajanhetkenä t perustuu seuraaviin sääntöihin:

- Sijoituslajin käteistuotto lisää suoraan kirjanpitoarvoa.
- Sijoituslajin positiivinen arvomuutos ei muuta kirjanpitoarvoa.
- Jos sijoituslajin negatiivinen arvomuutos on niin suuri, että sijoituslajin markkina-arvo on pienempi kuin kirjanpitoarvo, niin kirjanpitoarvo asetetaan yhtä suureksi kuin markkina-arvo.
- Jos kassavirta on positiivinen, niin sijoituslajin kirjanpitoarvo nousee $\alpha_i \cdot CF(t)$ verran.
- Jos kassavirta on negatiivinen, niin sijoituslajin kirjanpitoarvo laskee suhteessa $\alpha_i \cdot BV(t-1) / MV_i(t)$.

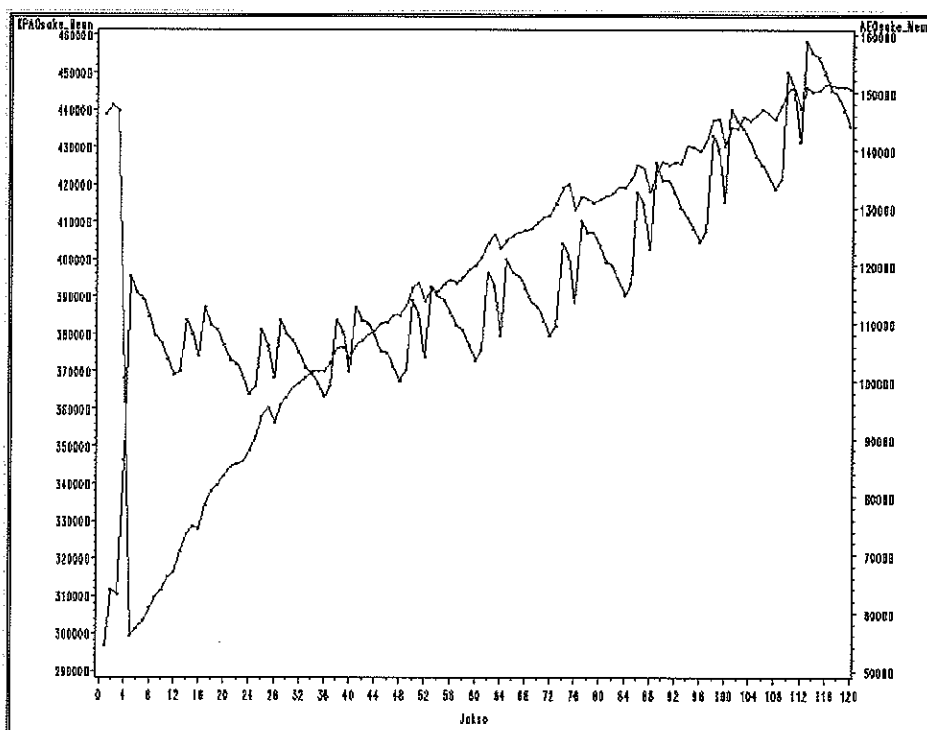
Siis

$$BV_i(t) = ABV_i(t) + \alpha_i \cdot CF(t) \cdot (I(CF(t) > 0) + I(CF(t) < 0) \cdot ABV_i(t) / MV_i(t)),$$

missä

$$ABV_i(t) = \min(BV_i(t-1), MV_i(t-1) \cdot (1 + IVC_i(t)))$$

ja $I(\cdot)$ on indikaattorifunktio.



Kuva 24: Keskimääräinen osakkeiden kirjanpitoarvon ja arvostuserojen kehittyminen 10 vuoden aikana kuukausikohtaisesti (1000 simulaatiota). Jokaisessa simulaatiossa osakkeiden arvon muutos neljäntenä ja viidentenä kuukautena on -10 %, mikä näkyy selvästi kuvassa osakkeiden arvostuserojen putoamisena.

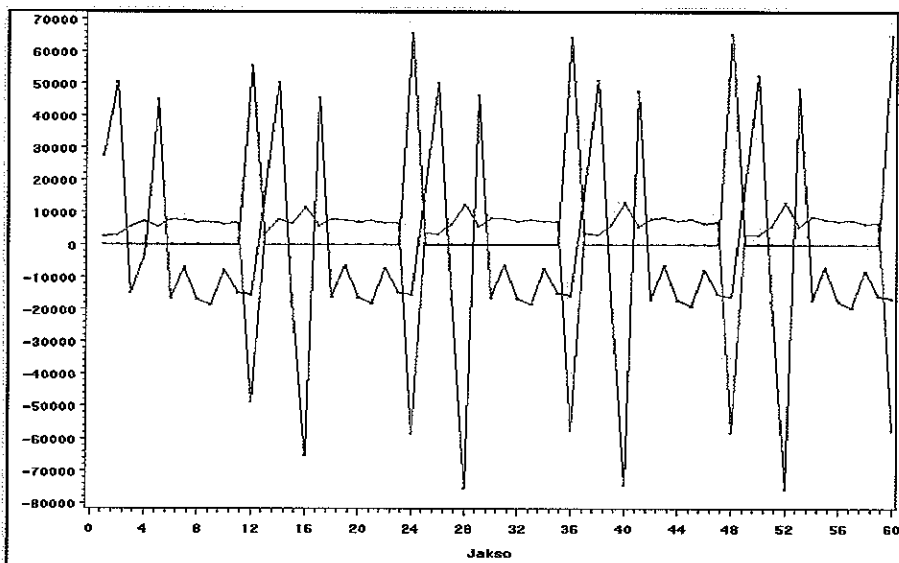
Tilikauden voitto/tappio

Yhdistelemällä edellisissä kappaleissa määriteltyjä suureita saadaan tilikauden t (tuloslaskelman) voitoksi/tappioksi:

$$PL(t) = NPE(t) - NCI(t) - E(t) + IR(t) - T(t) + Y(t) - D(t) - CEQR(t),$$

missä

- $PL(t)$ = ajanjakson t voitto tai tappio
- $NPE(t)$ = ajanjakson t nettovakuutusmaksutuotot
- $NCI(t)$ = ajanjakson t nettokorvausmeno
- $E(t)$ = ajanjakson t liikekulut²⁷
- $IR(t)$ = ajanjakson t sijoitustoiminnan tuotto
- $T(t)$ = ajanjaksona t maksetut verot
- $Y(t)$ = ajanjaksona t saatu pääomalainojen lisäys
- $D(t)$ = ajanjaksona t jaetut osingot
- $Y(t)$ ja $D(t)$ voivat riippua esimerkiksi ajanjakson t tuloksesta tai ajanhetken t mukaisesta taseesta
- $CEQR(t) = EQR(t) - EQR(t-1)$, missä $EQR(t)$ on tasoitusmäärä hetkenä t .



Kuva 25: Keskimääräinen kassavirta, jaetut osingot ja tilikauden voitto kuukausitasolla (60 kuukautta ja 1000 simulaatiota). Kuvassa punainen viiva on jaetut osingot, musta viiva on kassavirta ja vihreä on tilikauden voitto/tappio. Kuvasta voi hyvin nähdä kuinka osinkojen jako purkautuu kassavirraksi neljä kuukautta tulouttamisen jälkeen.

Ajanjaksona t jaetut osingot $D(t)$ on esimerkki *dynaamisesta työkalusta*. Mallinnettaessa osingonjakopolitiikkaa joudutaan yhtiön johdon tulevat päätökset osingonjakopolitiikasta muuntamaan matemaattiseksi malliksi. ALM:ssa ajanjaksona t jaettavan osingon suuruus voi riippua esimerkiksi seuraavista tekijöistä:

- prosenttia tilikauden voitosta
- vakavaraisuustunnusluvut
 - vakavaraisuussuhde
 - vastuunkantokyky
 - vakuutusvalvontaviraston vakavaraisuusvaatimukset

²⁷ Edellä on implisiittisesti oletettu, että ajanjaksona t aiheutuneet verot T ja pääomalainan lisäys X maksetaan ajanjaksona t .

- muut (esimerkiksi *Standard & Poor's vakavaraisuustunnusluku*)
- vahinkosuhte
- sijoitustoiminnan tulos
- sijoitusallokaatio.

Ajanjaksona t maksetut verot riippuvat edellisten ajanjaksojen voitoista ja tappioista:

$$T(t) = \tau \cdot \text{Max}(0, \sum_{i=t(x)}^t (NPE(i) - NCI(i) - E(i) + IR(i) - CEQR(t)),$$

missä

- τ = veroprosentti
- $t(x)$ = sellainen ajanjakso, jolle on voimassa $\prod_{i=t(x)}^{t-1} I(T(i) = 0) = 1$ tai muuten $t(x) = t$.

PALM:ssa tilikauden verot T perustuvat sille olettamalle, että edellisten tilikausien tappiot voidaan ottaa huomioon laskettaessa tilikauden verojen suuruutta.

Lähdeluettelo

Krugman, P.R. & M. Obstfeld (1994). International Economics: Theory and Practice. New York: HarperCollins College Publishers. 3. painos.

Daykin, C.D., Pentikäinen T., Pesonen M. Practical Risk Theory for Actuaries. London: Chapman & Hall (1994). 1. painos.