

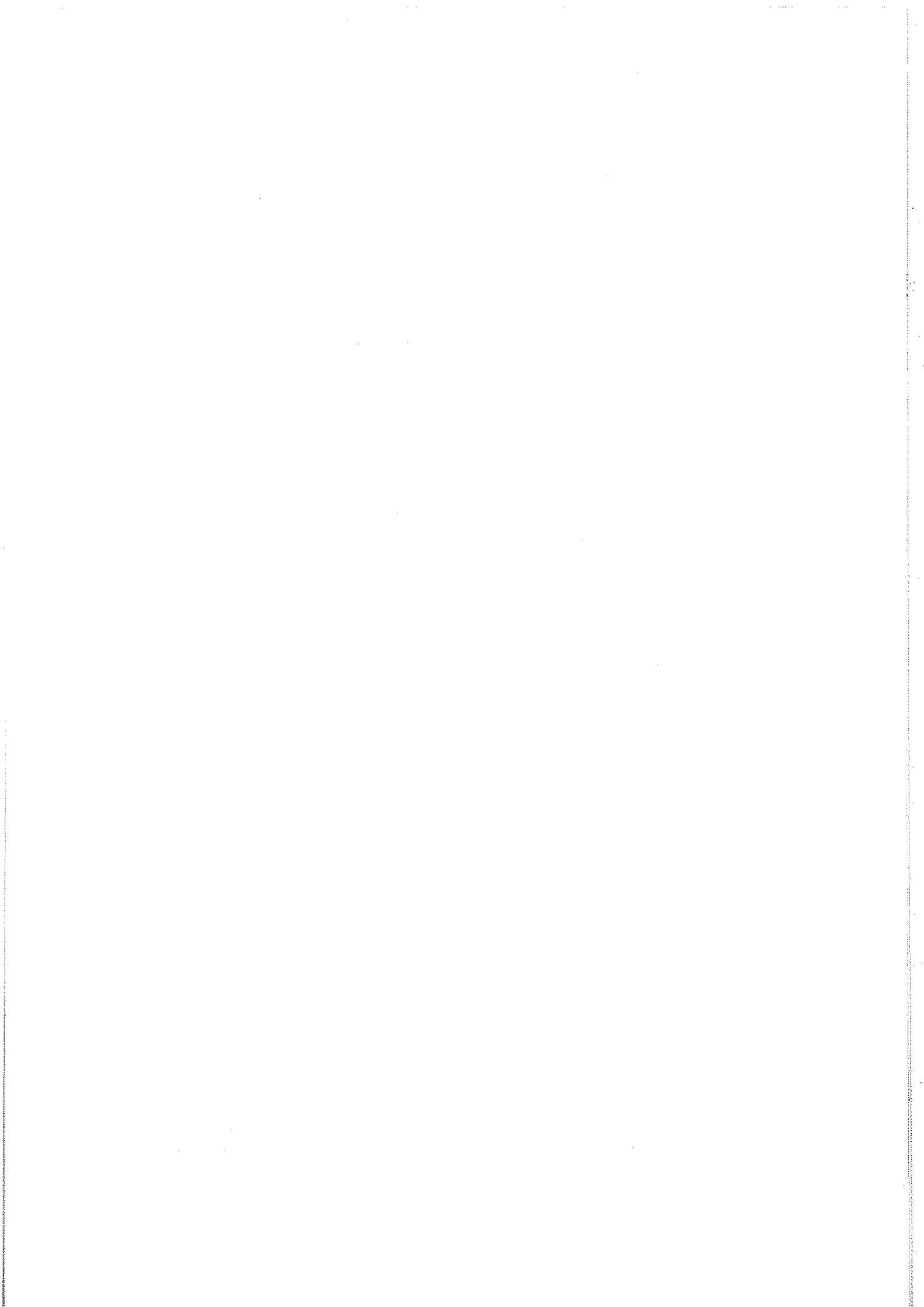
ORDNAT URVAL VID ANALYS AV STORA ERSÄTTNINGSKRAV

AV

RAOUL M. BERGLUND

770.99.592

**SGF-STUDIE
13.8.1996**

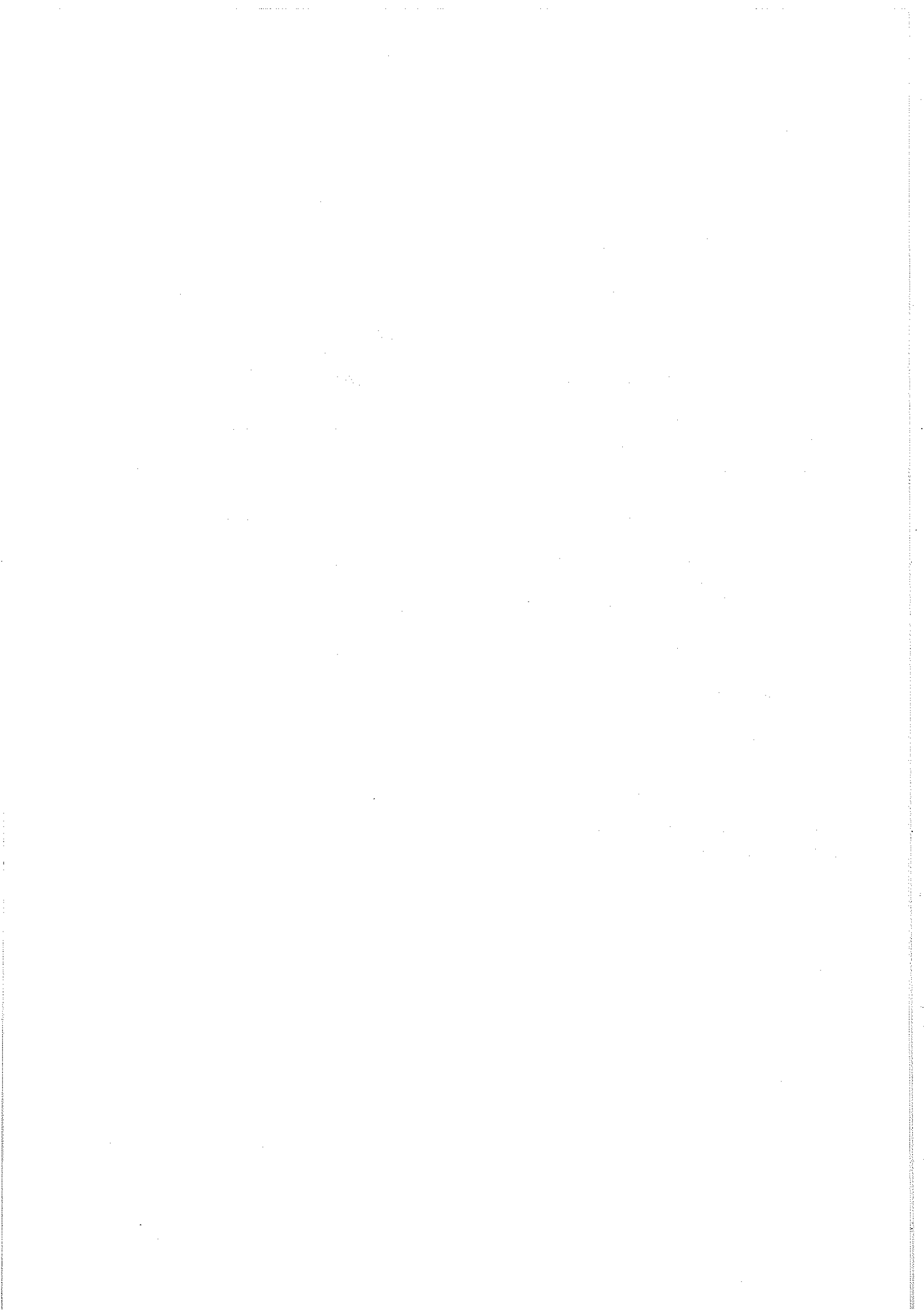


INNEHÅLLSFÖRTECKNING:

Inledning	1
1. Klassificering av fördelningar	3
2. Ordnat urval och ersättningskrav	6
2.1 Väntevärdet och variansen av det i :te största ersättningskravet.....	6
2.2 Övre gränser för väntevärde av det i :te största ersättningskravet.....	9
3. Numerisk tillämpning	13
3.1 Antal försäkringsfall.....	13
3.2 Ersättningskravets storlek	14
3.2.1 Observerade ersättningskrav.....	14
3.2.2 Insättning av en falsk observation	18
4. Avslutande kommentarer	22
Tillkännagivande.....	22
Referenser	23

Bilaga:

BERGLUND, R.M. (1996) Notes on the net premium for a generalized largest claims reinsurance cover.



Inledning

Inom skadeförsäkring ingås ett avtal vanligtvis med tanke på finansiell trygghet gentemot en händelse som inträffar med liten sannolikhet. Om en dylik händelse inträffar kan detta förorsaka ersättningskrav som är betydligt större än i medeltal. För att kunna fastställa en tillräcklig premie är det ur försäkringsbolagets synvinkel av avsevärd betydelse att kunna undersöka storleken av dessa händelser. Om ett stort ersättningskrav inträffar och vi dessutom har ett försäkringsbestånd där antalet försäkringsfall, i viss bemärkelse, är litet, så styr det stora ersättningskravet nästan fullständigt beståndets natur (BEIRLANT och TEUGELS 1992). Då stora ersättningskrav och tiden mellan stora ersättningskrav tenderar att gå hand i hand är det till och med möjligt att premien fastställts på en nivå som inte ger tillräcklig säkerhet mot stora ersättningskrav. Denna händelse benämns vanligtvis fatalism (PENTIKÄINEN 1982).

Ovanstående situation kan uppstå i ett litet försäkringsbolag. Antag att ett medelstort försäkringsbestånd består av risker med låg skadeintensitet. Stora ersättningskrav inträffar sällan och premien pressas nedåt av konkurrens på marknaden. Beståndets volym är inte tillräcklig för att jämna ut eventuella stora ersättningskrav. Trots detta är vi tvungna att kunna analysera beståndets natur och speciellt dess natur då det inträffat stora ersättningskrav.

Denna studie presenterar en metod att analysera stora ersättningskrav med hjälp av teorin om ordnat urval. Med ordnat urval avses att ersättningskraven sorteras endera i stigande eller avtagande ordning. Speciellt undersöker man egenskaper hos det i :te största ersättningskravet. Det första avsnittet framför en metod för att kunna identifiera ifall fördelningen till ett antal observationer kan anses ha ett beteende som karaktäriserar stora ersättningskrav. Detta kan anses vara ett första steg till att uppskatta ersättningskravens fördelning. Det andra avsnittet presenterar en teori för att kunna bestämma väntevärde och varians för det i :te största ersättningskravet samt övre gränser för väntevärde. Dessa är mycket användbara då vi analyserar storleken av de ordnade förväntade ersättningskraven. Självfallet är resultaten beroende av såväl ersättningskravens fördelning som fördelningen av antalet försäkringsfall. Fördelningen av ersättningskravens storlek antas följa en fullständig Pareto-fördelning och antalet försäkringsfall antas följa en Poisson-, negativ binomial- eller geometrisk fördelning. Den presenterade teorin tillämpas sedan på båt-försäkring, som är av ovan beskriven natur. Välkända estimeringsmetoder tillämpas direkt, utan att undersöka de estimerade parameterarnas lämplighet.

Användning av ordnat urval i riskteori har främst tillämpats vid återförsäkring. Speciellt har man undersökt riskpremier för återförsäkringstyperna LCR (largest claims reinsurance) och ECOMOR (d'excédent du coût moyen relatif). Då riskpremien för dessa två återförsäkringstyper hänför sig till väntevärdet av ordnade stokastiska variabler, som anger ersättningskravens storlek, kan tillämpningen av resultaten självfallet utvidgas till att utnyttjas i en analys av hela försäkringsbeståndet. Om ersättningskravens storlek följer en enparametrisk Pareto-fördelning och antalet försäkringsfall är Poisson-fördelade, så ges ändliga formler för väntevärdet till det största ersättningskravet av AMMETER (1964a) och för det i :te största av AMMETER (1964b). KUPPER (1971) ger väntevärdet av det största ersättningskravet då antalet försäkringsfall följer en geometrisk fördelning och CIMINELLI (1976) betraktar en negativ binomialfördelning. Kremer (1985) presenterar en generell ändlig formel för väntevärdet av det i :te största ersättningskravet. BERGLUND (1996) ger enkla och användbara uttryck för att bestämma väntevärdet av det i :te största ersättningskravet då

ersättningskravens storlek följer en fullständig Pareto-fördelning och antalet försäkringsfall är endera Poisson-, negativ binomial- eller geometriskt fördelade.

Eftersom återförsäkringstyper baserade på ordnade ersättningskrav sällan påträffas i verkligheten, leder detta till att tillämpning av ordnat urval på återförsäkring ofta ger resultat av enbart teoretisk karaktär. Denna studie framställer teorin för ordnat urval i riskteoretisk miljö ur en praktisk synvinkel, där bevisföring är inkluderad enbart om resultaten avviker från referenserna eller om den eljest behövs för att framställningen skall bli klarare. Detta gäller speciellt avsnitt 2.2, där övre gränserna är härledda från resultat givna med avseende på återförsäkring. Följaktligen utvidgar denna studie perspektivet på klassisk riskteori.

1. Klassificering av fördelningar

När vi betraktar stora ersättningskrav är fördelningen av ersättningskravens storlek, F , av avsevärd betydelse. Av speciellt intresse är att undersöka bredden av fördelningens högra svans. En bredare svans påvisar ökad sannolikhet för stora ersättningskrav. Följaktligen behöver vi metoder för att kunna jämföra olika fördelningar och deras svansbredd. Detta utförs genom att jämföra svansen med en exponentialfördelning. Om en fördelning F har bredare svans än exponentialfördelningen benämns den subexponentiell och i det motsatta fallet, d.v.s. en smalare svans, superexponentiell. Metoden baserar sig på att utgående från observationer på ersättningskrav estimerar en parameter β , som karakteriserar en fördelning enligt klassificeringen ovan. Vi inleder teorin med några definitioner.

En fördelningsfunktion F , där $F(0) = 0$, $F(x) < 1$ för $x > 0$, sägs vara subexponentiell om

$$(1.1) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F^{(2)}(x)}{1 - F(x)} = 2,$$

där $F^{(2)}(x)$ anger den andra faltningen av F .

En mätbar och slutligen positiv funktion $l(x)$, $x \in \mathbb{R}^+$, benämns långsamt varierande om för alla $t > 0$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(tx)}{l(x)} = 1.$$

Antag nu att F är subexponentiell och uppfyller således (1.1). Då gäller (PITMAN 1980) att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(x+y)}{1 - F(x)} = 1, \quad \forall y.$$

Då

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - F(\log(kx))}{1 - F(\log(x))} = 1, \quad k > 0,$$

inser vi att $1 - F(\log(x))$ är en långsamt varierande funktion. För $\beta > 0$ gäller nu att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^\beta \cdot (1 - F(\log(x))) = \infty$$

och genom att substituera x med e^x , får vi att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-\beta x}}{1 - F(x)} = 0,$$

vilket påvisar valet av benämningen subexponentiell. Låt nu

$$(1.2) \quad \sigma_F = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\log(1-F(x))}{\log(e^{-x})} = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{-\log(1-F(x))}{x}.$$

Fördelningen F är nu superexponentiell om och endast om $\sigma_F > 0$ och subexponentiell om och endast om $\sigma_F = 0$. Om fördelningsfunktionen F är känd kan vi genom (1.2) avgöra dess beteende. Vi är dock intresserade av metoder med vilka vi från ett observerat material x_1, x_2, \dots, x_n kan avgöra ifall dess fördelningen är av sub- eller superexponentiell karaktär. Fortsättningen på detta avsnitt följer BEIRLANT och TEUGELS (1992). Beteckna

$$(1.3) \quad e(x) = E[\tilde{X} - x \mid \tilde{X} > x] = \frac{1}{1-F(x)} \int_x^{\infty} 1-F(u) du,$$

där $x > 0$ och \tilde{X} är en icke negativ stokastisk variabel, som anger ersättningskravens storlek. Låt dessutom C_0 ange en klass av långsamt varierande funktioner $l(x)$ för vilket det gäller att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(xt) - l(x)}{g(x)} = \log(t),$$

för alla $t > 0$ och för någon långsamt varierande funktion $g(x)$. Genom att utnyttja (1.3) och (1.2) kan vi nu klassificera en fördelning enligt följande:

i) Om $e(x) \sim x^\beta l(x)$, då $x \rightarrow \infty$ med $\beta < 1$ och där $l(x)$ är en långsamt varierande funktion så gäller att

$$-\log(1-F(x)) \sim \frac{x^{1-\beta}}{(1-\beta) \cdot l(x)}, \quad \text{då } x \rightarrow \infty,$$

ii) Om $e(x) \sim x \cdot l(x)$, då $x \rightarrow \infty$ och där $l(x)$ är en långsamt varierande funktion så gäller att

$$-\log(1-F(x)) \in C_0.$$

Vi har härmed fyra olika alternativ:

1) $\beta = 1$, vilket ger enligt ii) ovan att $\sigma_F = 0$ och fördelningen F är subexponentiell,

2) $\beta \in (0, 1)$, vilket ger enligt i) ovan att

$$\sigma_F = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^\beta \cdot (1-\beta) \cdot l(x)} = 0$$

och fördelningen F är subexponentiell,

3) $\beta = 0$, vilket ger enligt i) ovan att

$$\sigma_F = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-\beta) \cdot l(x)}$$

inte är entydig,

4) $\beta < 0$, vilket ger enligt i) ovan att

$$\sigma_F = \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{-\beta}}{(1-\beta) \cdot l(x)} > 0$$

och fördelningen F är superexponentiell.

Uppenbarligen kan vi tillämpa endera (1.2) eller β för att avgöra en fördelnings karaktär. Då vi utnyttjar observerade ersättningskrav tillämpas den senare. Vi noterar att

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log[e(x)]}{\log[x]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log[x^\beta \cdot l(x)]}{\log[x]} = \lim_{x \rightarrow \infty} \beta + \frac{\log[l(x)]}{\log[x]} = \beta,$$

ty $\log[l(x)]/\log[x] \rightarrow 0$, då $x \rightarrow \infty$. Låt nu x_1, x_2, \dots, x_n ange n stycken observerade ersättningskrav och

$$x_{n:1} \geq x_{n:2} \geq \dots \geq x_{n:n}$$

ange samma ersättningskrav ordnade i avtagande storleksordning. Ett intuitivt estimat till parametern β ges nu av

$$\hat{\beta}_{n:k} = \frac{\log[\hat{e}(x_{n:k+1})]}{\log[x_{n:k+1}]},$$

där $1 \leq k < n$ och

$$\hat{e}(x_{n:k+1}) = \left(\frac{1}{k} \cdot \sum_{i=1}^k x_{n:i} \right) - x_{n:k+1}.$$

Vi observerar direkt att estimatet även är beroende av k och följaktligen får vi $n-1$ olika estimat till β . För att praktiskt avgöra en fördelnings karaktär bör man därför lämpligen studera dessa värden grafiskt för olika värden på k och från denna göra slutsatser om värdet på β . Om värdena på $\hat{\beta}_{n:k}$ för växande k är nära och över 1, kan vi följaktligen anta att fördelningen är subexponentiell. En utmärkt presentation över fördelningsfunktioner som är subexponentiella ges av PANJER och WILLMOT (1992).

2. Ordnat urval och ersättningskrav

I detta avsnitt kommer vi genomgående att anta att \tilde{N} är en stokastisk variabel, som anger antalet försäkringsfall som inträffar under en given period, och $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$ motsvarande oberoende, icke negativa och identiskt fördelade ersättningskrav med en kontinuerlig fördelningsfunktion F . Dessutom antar vi att $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$ är oberoende av antalet försäkringsfall \tilde{N} och att

$$\tilde{X}_{\tilde{N}:1} \geq \tilde{X}_{\tilde{N}:2} \geq \dots \geq \tilde{X}_{\tilde{N}:\tilde{N}}$$

anger ersättningskraven ordnade i avtagande ordning. Trots att $\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}}$ är oberoende, så är $\tilde{X}_{\tilde{N}:1}, \tilde{X}_{\tilde{N}:2}, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}:\tilde{N}}$ alltid beroende stokastiska variabler (DAVID 1970).

2.1 Väntevärdet och variansen av det i :te största ersättningskravet

Låt $\phi(t)$ ange den sannolikhetsgenererande funktionen till antalet försäkringsfall \tilde{N} . För att vi skall kunna bestämma väntevärdet av det i :te största ersättningskravet, antar vi ytterligare att sannolikhetsgenererande funktionens derivator $\phi^{(i)}(t)$ existerar i intervallet $(0,1)$ för varje $i \geq 1$. Täthetsfunktionen till det i :te största ersättningskravet ges nu av (CIMINELLI 1976)

$$P(\tilde{X}_{\tilde{N}:i} = x) = \frac{1}{\Gamma(i)} f(x) [1 - F(x)]^{i-1} \phi^{(i)}(F(x)),$$

där $\Gamma(x)$, $x > 0$, anger den fullständiga gammafunktionen

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot u^{x-1} du.$$

Det första origomomentet ges av (KREMER 1985)

$$(2.1) \quad E[\tilde{X}_{\tilde{N}:i}] = \frac{1}{\Gamma(i)} \cdot \int_0^1 F^{-1}(u) \cdot \phi^{(i)}(u) \cdot (1-u)^{i-1} du$$

och det andra av

$$E[\tilde{X}_{\tilde{N}:i}^2] = \frac{1}{\Gamma(i)} \cdot \int_0^1 [F^{-1}(u)]^2 \cdot \phi^{(i)}(u) \cdot (1-u)^{i-1} du.$$

En fördelning som ofta används för att beskriva stora ersättningskrav är den s.k. fullständiga Pareto-fördelningen, som definieras enligt

$$(2.2) \quad F(x) = 1 - \left(\frac{d+\beta}{x+\beta} \right)^\alpha \quad x \geq d,$$

där parametrarna α , β och d satisfierar $\alpha > 0$ och $\beta > -d$ (DAYKIN et al. 1994). Den första parametern α anger bredden på fördelningens svans och är direkt förknippad med existensen av origomoment. Parametern β påverkar mest den vänstra delen av fördelningen. Den tredje parametern d begränsar definitionsområdet av x nedifrån. Genom att tillämpa (2.1) med fördelningen (2.2) får vi följande resultat (BERGLUND 1996).

Antag att ersättningskravens storlek är fördelade enligt (2.2), $\alpha > 1$ och att antalet ersättningskrav följer en

i) Poisson-fördelning

$$P(\tilde{N} = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \lambda > 0.$$

Då ges väntevärdet till det i :te största ersättningskravet av

$$(2.3) \quad E[\tilde{X}_{\tilde{N}:i}] = \frac{1}{\Gamma(i)} \cdot \left[(d+\beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot \Gamma_\lambda \left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha} \right) - \beta \cdot \Gamma_\lambda(i) \right],$$

där $\Gamma_\lambda(x)$, $x > 0$, anger den ofullständiga gammafunktionen

$$\Gamma_\lambda(x) = \int_0^\lambda e^{-u} \cdot u^{x-1} du.$$

ii) negativ binomialfördelning

$$P(\tilde{N} = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r) \cdot k!} \cdot \left(\frac{1}{1+\lambda} \right)^r \cdot \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^k \quad r, \lambda > 0.$$

Då ges väntevärdet till det i :te största ersättningskravet av

$$(2.4) \quad E[\tilde{X}_{\tilde{N}:i}] = \frac{\Gamma(r+i)}{\Gamma(i) \cdot \Gamma(r)} \cdot \left[(d+\beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot B \left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha}; \frac{\alpha r + 1}{\alpha}; \frac{\lambda}{1+\lambda} \right) - \beta \cdot B \left(i; r; \frac{\lambda}{1+\lambda} \right) \right],$$

där $B(a; b; x)$, $a, b > 0$ och $0 < x < 1$, anger den ofullständiga betafunktionen, d.v.s.

$$B(a; b; x) = \int_0^x u^{a-1} \cdot (1+u)^{-(a+b)} du.$$

iii) geometrisk fördelning

$$P(\tilde{N} = k) = \left(\frac{1}{1+\lambda} \right) \cdot \left(\frac{\lambda}{1+\lambda} \right)^k \quad \lambda > 0.$$

Då ges väntevärdet till det i :te största ersättningskravet av

$$(2.5) \quad E[\tilde{X}_{N:i}] = i \cdot \left[(d + \beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot B\left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha}; \frac{\alpha + 1}{\alpha}; \frac{\lambda}{1 + \lambda}\right) - \beta \cdot B\left(i; I; \frac{\lambda}{1 + \lambda}\right) \right],$$

där $B(a; b; x)$, $a, b > 0$ och $0 < x < 1$, anger den ofullständiga betafunktionen.

Om antalet försäkringsfall är stort kan den ofullständiga gammafunktionen ersättas med den fullständiga och den ofullständiga betafunktionen med den fullständiga, vilket ger för Poisson-fördelat antal försäkringsfall att

$$E[\tilde{X}_{N:i}] = \frac{I}{\Gamma(i)} \cdot \left[(d + \beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha}\right) - \beta \cdot \Gamma(i) \right]$$

och för negativ binomialfördelat antal försäkringsfall att

$$E[\tilde{X}_{N:i}] = \frac{I}{\Gamma(i)} \cdot \left[(d + \beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha}\right) \cdot \frac{\Gamma\left(r + \frac{I}{\alpha}\right)}{\Gamma(r)} - \beta \cdot \Gamma(i) \right].$$

För ett stort antal försäkringsfall kan vi speciellt förvänta oss att väntevärdet av det i :te största ersättningskravet är mindre om antalet försäkringsfall följer en geometrisk fördelning ($r = I$) än om det följer en Poisson-fördelning (BERGLUND 1996). Om $\alpha > 2$ ges motsvarande andra origomoment för

i) Poisson-fördelat antal försäkringsfall av

$$E[\tilde{X}_{N:i}^2] = \frac{I}{\Gamma(i)} \cdot \left[(d + \beta)^2 \cdot \lambda^{2/\alpha} \cdot \Gamma_\lambda\left(\frac{\alpha i - 2}{\alpha}\right) - \beta \cdot (d + \beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot \Gamma_\lambda\left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha}\right) + \beta^2 \cdot \Gamma_\lambda(i) \right],$$

ii) negativ binomialfördelat antal försäkringsfall av

$$E[\tilde{X}_{N:i}^2] = \frac{\Gamma(r + i)}{\Gamma(i) \cdot \Gamma(r)} \cdot \left[(d + \beta)^2 \cdot \lambda^{2/\alpha} \cdot B\left(\frac{\alpha i - 2}{\alpha}; \frac{\alpha r + 2}{\alpha}; \frac{\lambda}{1 + \lambda}\right) - \beta \cdot (d + \beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot B\left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha}; \frac{\alpha r + 1}{\alpha}; \frac{\lambda}{1 + \lambda}\right) + \beta^2 \cdot B\left(i; r; \frac{\lambda}{1 + \lambda}\right) \right],$$

iii) geometriskt fördelat antal försäkringsfall av

$$E[\tilde{X}_{N:i}^2] = i \cdot \left[(d + \beta)^2 \cdot \lambda^{2/\alpha} \cdot B\left(\frac{\alpha i - 2}{\alpha}; \frac{\alpha + 2}{\alpha}; \frac{\lambda}{1 + \lambda}\right) - \beta \cdot (d + \beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot B\left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha}; \frac{\alpha + 1}{\alpha}; \frac{\lambda}{1 + \lambda}\right) + \beta^2 \cdot B\left(i; I; \frac{\lambda}{1 + \lambda}\right) \right].$$

Väntevärdet av det i :te största ersättningskravet kan nu beräknas enligt den välbekanta formeln $Var[\tilde{X}] = E[\tilde{X}^2] - (E[\tilde{X}])^2$. Motsvarande väntevärden då ersättningskravens storlek är exponentialfördelad

$$(2.6) \quad F(x) = \beta \cdot e^{-\beta(x-c)} \quad x > c$$

kan konstrueras, oavsett (2.1). För ett fixt $\tilde{N} = n$ gäller (PANJER och WILLMOT 1992) att

$$(2.7) \quad \tilde{X}_{n,i} = \sum_{k=i}^n \frac{1}{k} \cdot \tilde{W}_k,$$

där $\tilde{W}_1, \tilde{W}_2, \dots, \tilde{W}_n$ är oberoende stokastiska variabler fördelade enligt (2.6). Väntevärdet av (2.7) ges av

$$E[\tilde{X}_{n,i}] = \frac{1}{\beta} \sum_{k=i}^n \frac{1}{k}.$$

Genom att nu tillämpa väntevärdets iterativitet får vi att

$$E[\tilde{X}_{\tilde{N},i}] = \sum_{n=i}^{\infty} P(\tilde{N} = n) \cdot \frac{1}{\beta} \sum_{k=i}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{\beta} \cdot \sum_{k=i}^{\infty} \frac{1}{k} \cdot \left(1 - \sum_{n=0}^{k-1} P(N = n) \right).$$

Under exponentiellt fördelade ersättningskrav tillämpades redan den ovanbeskrivna metoden av KREMER (1986 och 1994)[†] för att beräkna riskpremier till en speciell klass av återförsäkring baserat på ordnade ersättningskrav. Resultatet är givande men under vissa omständigheter är det lättare att beräkna (2.3) till (2.5). Då vi enligt avsnitt 1. använder exponentialfördelningen som gränsfall för att diagnosticera beteendet för stora ersättningskrav, är följaktligen Pareto-fördelningen i denna studie fördelaktigare att använda som modell för ersättningskravens storlek. Dessutom är fördelningsfunktioner av typ Pareto subexponentiella (PANJER och WILLMOT 1992) och speciellt för stora ersättningskrav, en av de mest använda modellerna för ersättningskravens storlek (DAYKIN et al. 1994).

2.2 Övre gränser för väntevärdet av det i :te största ersättningskravet

I detta avsnitt skall vi bestämma övre gränser för väntevärdet av det i :te största ersättningskravet. För att härleda dessa gränser utnyttjar vi resultat givna i KREMER (1983 och 1988) som ger övre gränser för riskpremien till en speciell klass av återförsäkringstyper baserade på de största ersättningskraven. Därtill kommer att resultaten är mera rigoröst presenterade. Den första metoden att bestämma en övre gräns för det i :te största

[†] KREMER (1986 och 1994) ger ett uttryck där detta resultat ingår och hänvisar till artikeln "Simple formulas for the premiums of the LCR and ECOMOR treaties under exponential claim sizes" (KREMER 1986, Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik). Denna artikel har dock inte varit tillgänglig.

ersättningskravet utnyttjar resultat från KREMER (1983). Låt K_k ange en växande samling av risker, sådana att det för antalet försäkringsfall \tilde{N}_k i samlingen K_k gäller att

$$\lim_{k \rightarrow \infty} E[\tilde{N}_k] = \infty \quad \text{och} \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\text{Var}[\tilde{N}_k]}}{E[\tilde{N}_k]} = 0.$$

Enligt DAVID (1970) gäller för ett fixt $\tilde{N} = n$ att

$$(2.8) \quad E[\tilde{X}_{n,i}] \leq \mu + \sigma \sqrt{n \cdot \binom{2i-2}{i-1} \cdot \binom{2n-2i}{n-i} / \left(\binom{2n-1}{n-1} - 1 \right)},$$

där

$$\mu = E[\tilde{X}_k] \quad \text{och} \quad \sigma^2 = \text{Var}[\tilde{X}_k].$$

Då det enligt KREMER (1983) asymptotiskt gäller att

$$\binom{2n-2i}{n-i} / \binom{2n-1}{n-1} \leq \left(1 + \frac{i}{n-i} \right)^{2i-1} / 2^{2i-1}$$

fås genom att tillämpa Jensens olikhet[†] att

$$\begin{aligned} E[\tilde{X}_{\tilde{N}_k,i}] &= E[E[\tilde{X}_{\tilde{N}_k,i} \mid \tilde{N}_k]] \\ &\leq E \left[\mu + \sigma \sqrt{\tilde{N}_k \cdot \binom{2i-2}{i-1} \cdot \binom{2\tilde{N}_k-2i}{\tilde{N}_k-i} / \left(\binom{2\tilde{N}_k-1}{\tilde{N}_k-1} - 1 \right)} \cdot P(\tilde{N}_k \geq i) \right] \\ &\leq \mu \cdot P(\tilde{N}_k \geq i) + \sigma \cdot E \left[\sqrt{\tilde{N}_k \cdot \binom{2i-2}{i-1} \cdot \binom{2\tilde{N}_k-2i}{\tilde{N}_k-i} / \left(\binom{2\tilde{N}_k-1}{\tilde{N}_k-1} \right)} \right] \\ &\leq \mu \cdot P(\tilde{N}_k \geq i) + \sigma \cdot E \left[\sqrt{\tilde{N}_k \cdot \binom{2i-2}{i-1} \cdot \left(1 + \frac{i}{\tilde{N}_k-i} \right)^{2i-1} / 2^{2i-1}} \right] \\ &\leq \mu \cdot P(\tilde{N}_k \geq i) + \sigma \cdot \sqrt{\binom{2i-2}{i-1} / 2^{2i-1}} E \left[\tilde{N}_k \cdot \left(1 + \frac{i}{\tilde{N}_k-i} \right)^{2i-1} \right]. \end{aligned}$$

[†] Jensens olikhet ges av $E[g(\tilde{X})] \geq g(E[\tilde{X}])$, där g är en konvex funktion av \tilde{X} .

Nu får vi att

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{E[\tilde{X}_{\tilde{N}_k, i}] - \mu}{\sigma \sqrt{E[\tilde{N}_k]}}$$

$$\leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\sigma} \cdot \frac{P(\tilde{N}_k \geq i) - 1}{\sqrt{E[\tilde{N}_k]}} + \sqrt{\frac{\binom{2i-2}{i-1}}{2^{2i-1}} E\left[\frac{\tilde{N}_k}{E[\tilde{N}_k]} \cdot \left(1 + \frac{i}{\tilde{N}_k - i}\right)^{2i-1}\right]} = \sqrt{\frac{\binom{2i-2}{i-1}}{2^{2i-1}}},$$

ty enligt KREMER (1983) gäller att

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\tilde{N}_k}{E[\tilde{N}_k]} = 1 \text{ och } \lim_{k \rightarrow \infty} \tilde{N}_k = \infty.$$

Genom att nu betrakta en specifik samling av risker får vi uppenbarligen att

$$(2.9) \quad E[\tilde{X}_{\tilde{N}, i}] \leq \mu + \sigma \cdot \sqrt{\frac{\binom{2i-2}{i-1}}{2^{2i-1}}} \cdot \sqrt{E[\tilde{N}]}$$

Då enligt DAVID (1970) (2.8) ger goda resultat för små i :n, kan vi även förvänta oss att (2.9) även ger acceptabla resultat för små i :n. En uppenbar nackdel med (2.9) är att

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\binom{2i-2}{i-1}}{2^{2i-1}}} = 0,$$

vilket ger att övre gränsen domineras av väntevärdet μ . För stora i :n ger detta en alltför grov övre gräns. Dessutom är övre gränsen för stora i :n problematiskt att beräkna. En fördel med (2.9) är att den för små i :n lätt kan beräknas. Genom att utnyttja ett resultat givet i KREMER (1988) kan en annan övre gräns konstrueras. Låt

$$\tilde{R}_{\tilde{N}}(\tilde{X}_{\tilde{N}, 1}, \tilde{X}_{\tilde{N}, 2}, \dots, \tilde{X}_{\tilde{N}, \tilde{N}}) = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} a_k \cdot \tilde{X}_{\tilde{N}, k},$$

där a_k , $k \geq 1$, är reella konstanter. Följande övre gräns ges i KREMER (1988)

$$E[\tilde{R}_{\tilde{N}}] \leq E[\tilde{N} \cdot \bar{a}_{\tilde{N}}] \cdot \mu + \sigma \cdot \sqrt{E[\tilde{N}(\tilde{N} - 1) \cdot s_{\tilde{N}}^2]},$$

där

$$\bar{a}_{\tilde{N}} = \frac{1}{\tilde{N}} \cdot \sum_{k=1}^{\tilde{N}} a_k \text{ och } s_{\tilde{N}}^2 = \frac{1}{\tilde{N} - 1} \cdot \sum_{k=1}^{\tilde{N}} (a_k - \bar{a}_{\tilde{N}})^2.$$

För $a_i = 1$ när $i = k$ och $a_i = 0$ när $i \neq k$ får vi att

$$\tilde{N} \cdot \bar{a}_{\tilde{N}} = \begin{cases} 1, & \text{om } \tilde{N} \geq i \\ 0, & \text{om } \tilde{N} < i \end{cases}$$

och

$$\tilde{N}(\tilde{N}-1) \cdot s_{\tilde{N}}^2 = \begin{cases} \tilde{N}-1, & \text{om } \tilde{N} \geq i \\ 0, & \text{om } \tilde{N} < i, \end{cases}$$

ty då $\tilde{N} \geq i$ gäller att

$$\tilde{N}(\tilde{N}-1) \cdot s_{\tilde{N}}^2 = \tilde{N} \cdot \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \left(a_k - \frac{1}{\tilde{N}} \cdot \sum_{k=1}^{\tilde{N}} a_k \right)^2 = \tilde{N} \left(1 - \frac{1}{\tilde{N}} \right)^2 + \tilde{N} \cdot (\tilde{N}-1) \cdot \left(\frac{1}{\tilde{N}} \right)^2 = \tilde{N}-1.$$

Uppenbarligen får vi nu följande övre gräns för väntevärdet av det i :te största ersättningskravet

$$(2.10) \quad E[\tilde{X}_{\tilde{N};i}] \leq \mu \cdot P(\tilde{N} \geq i) + \sigma \cdot \sqrt{E[\tilde{N}-1 \mid \tilde{N} \geq i] \cdot P(\tilde{N} \geq i)}.$$

För små värden på i kan vi anta att $P(\tilde{N} \geq i) \approx 1$ vilket ger

$$(2.11) \quad E[\tilde{X}_{\tilde{N};i}] \leq \mu + \sigma \cdot \sqrt{E[\tilde{N}]-1}.$$

Övre gränsen (2.10) är i visst avseende betydligt ändamålsenligare än (2.9). Dominansen av ersättningskravens väntevärde μ är klart upphävd och vi kan även beräkna övre gränser för stora i :n. För dessa värden förväntas att övre gränsen är god. Genom (2.11) kan vi enkelt uppskatta en övre gräns för de största ersättningskraven.

3. Numerisk tillämpning

I detta avsnitt skall vi tillämpa den tidigare beskrivna teorin på båtförsäkring. Försäkringsbeståndet karaktäriseras av liten skadefrekvens, där en eller två stora ersättningskrav fullständigt styr beståndets beteende. Först beskriver vi modeller för antalet försäkringsfall och ger nödvändiga parameterestimater för dessa. Därefter utför vi en analys med observerade ersättningskrav samt jämför denna analys med en analys där vi ytterligare tillsatt en observation på en totalförlust.

3.1 Antal försäkringsfall

I det följande skall vi estimerade de förekommande parametrarna i de olika modellerna för antalet försäkringsfall som använts i den tidigare presenterade teorin. Enligt den allmänna principen kommer vi att föredra maximum likelihood-estimat (ML-estimat) och om dessa inte kan uppnås tillämpas momentmetoden. Härledningarna av analytiska uttryck för estimaten utelämnas och ges direkt i tabellerna nedan.

Modell	ML-estimat
$Po(\lambda)$	$\hat{\lambda} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k = \bar{x}$
$Geom(\lambda)$	$\hat{\lambda} = \bar{x}$

Tabell 1: ML-estimat till en Poisson-fördelning och geometrisk fördelning.

Då antalet försäkringsfall är negativ binomialfördelat kan man inte uppnå ett praktiskt uttryck för ML-estimat (uttryck för ML-estimat ges av LEMAIRE 1995). Följaktligen är vi tvungna att tillämpa momentmetoden. Momentmetoden ger dock estimat som saknar ML-estimats goda statistiska egenskaper (se PANJER och WILLMOT 1992). Hur som helst, med momentmetoden uppnås estimat relativt enkelt och är ibland den enda möjliga metoden för att uppnå estimat. För att uppnå parameterestimater till en negativ binomialfördelning tillämpas momentmetoden, vilket ger följande analytiska uttryck för estimatet:

Modell	Momentestimat
$NB(r, \lambda)$	$\hat{r} = \frac{m_2^2}{m_2 - m_1^2 - m_1}$ och $\hat{\lambda} = \frac{m_2 - m_1^2 - m_1}{m_1}$

Tabell 2: Momentestimat till en negativ binomialfördelning. Beteckningen m_i anger det i :te origomomentet.

Båtförsäkring har en run-off på cirka tre år, varvid frekvensstatistiken för antalet försäkringsfall löper från affärsår 1985 fram till år 1993. Då antalet försäkringsfall är i viss

mening litet, är statistiken kollektivt given, i stället för att vara uppdelad i antalet försäkringsfall grupperat enligt försäkringsbeloppet. En dylik indelning kommer dock att ges och utnyttjas senare. Ur tabell 3 framgår att skadeintensitet är liten och med enbart små variationer genom åren.

	1993	1992	1991	1990	1989	1988	1987	1986	1985
Antal förs.fall	57	61	53	66	69	73	42	42	36
Antal försäkringar	1657	1672	1670	1610	1490	1354	1164	1042	952
Frekvens givet i %	3,4400	3,6483	3,1737	4,0994	4,6309	5,3914	3,6082	4,0307	3,7815

Tabell 3: Observerade skadefrekvenser.

Om vi antar att antalet försäkringar för det nuvarande affärsåret uppskattas till cirka 2000, ger insättning av värdena i tabell 3 i de analytiska uttrycken givna i tabell 1 och 2 följande parameterestimater till de olika modellerna för antalet försäkringsfall:

Modell	ML-estimat	Momentestimat
$Po(\lambda)$	$\hat{\lambda} = 79,6667$	$\hat{\lambda} = 79,6667$
$Geom(\lambda)$	$\hat{\lambda} = 79,6667$	$\hat{\lambda} = 79,6667$
$NB(r, \lambda)$	-----	$\hat{r} = 73,3261$ och $\hat{\lambda} = 1,08647$

Tabell 4: Parameterestimat till antalet försäkringsfall.

Vi noterar att de analytiska uttrycken för ML-estimat och momentestimat är identiska för de två första modellerna.

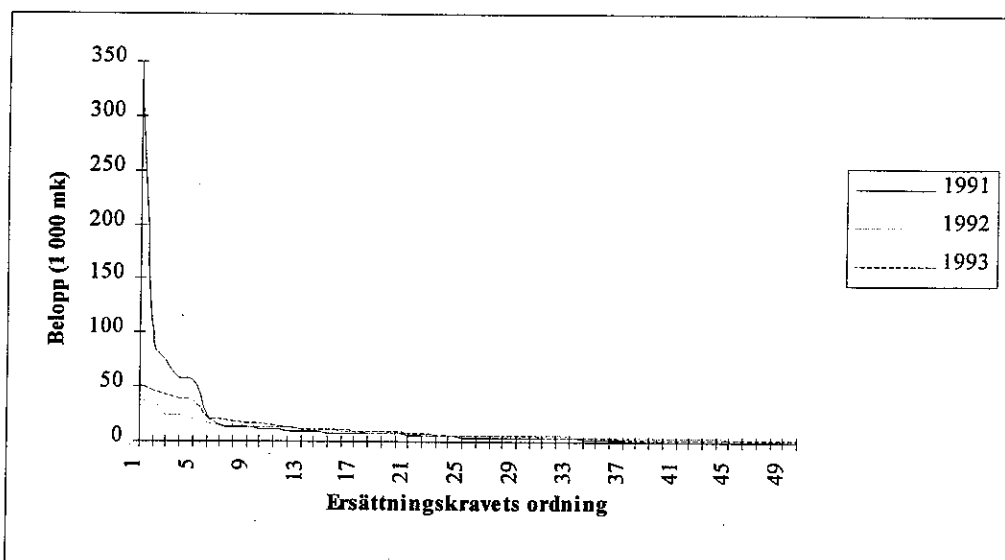
3.2 Ersättningskravets storlek

I detta avsnitt skall vi utgående från den tidigare presenterade teorin analysera om de observerade ersättningskraven kan anses vara subexponentiellt fördelade och ytterligare undersöka väntevärde, varians samt övre gränser för väntevärdet av det i :te största ersättningskravet.

3.2.1 Observerade ersättningskrav

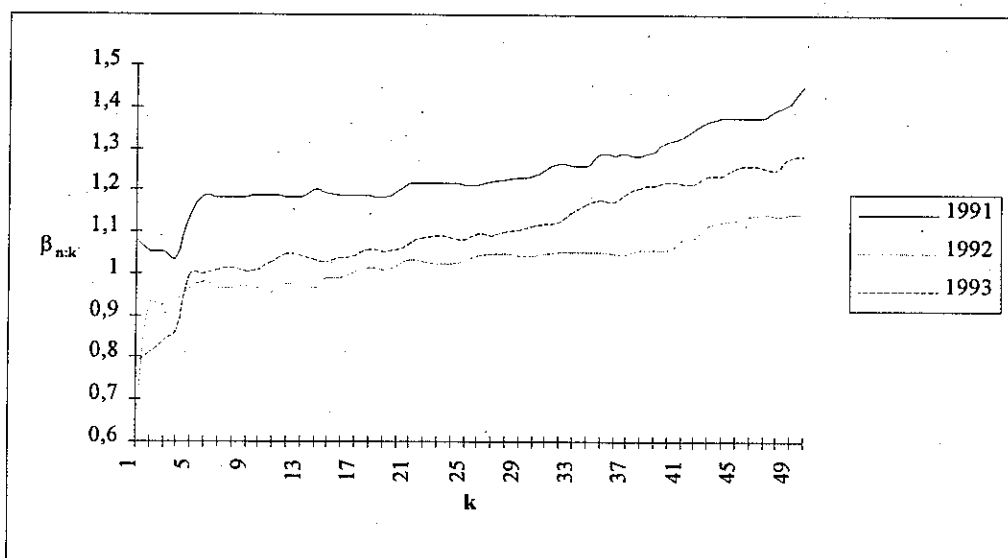
Då statistiken för ersättningskraven under ett affärsår är för liten för att undersökas, sammanfogas observationerna från tre på varandra följande år, nämligen 1991-1993. Detta kan även anses vara lämpligt då vi intuitivt förväntar oss att det vart tredje år sker ett ersättningskrav som är märkbart större än i medeltal, samt att dessa tre år även kan anses vara avslutade. De ordnade observerade ersättningskraven för de tre affärsåren ges i figur 1. I denna observerar vi att affärsår 1991 innehåller ett ersättningskrav som är märkbart större än

de övriga. Mellan de olika åren varierar enbart de sju största ersättningskraven och därefter följer de olika ordningarna varandra väl. Då skadeintensiteten mellan de olika affärsåren är stabil, styr följaktligen de största ersättningskraven totalt beståndets natur.



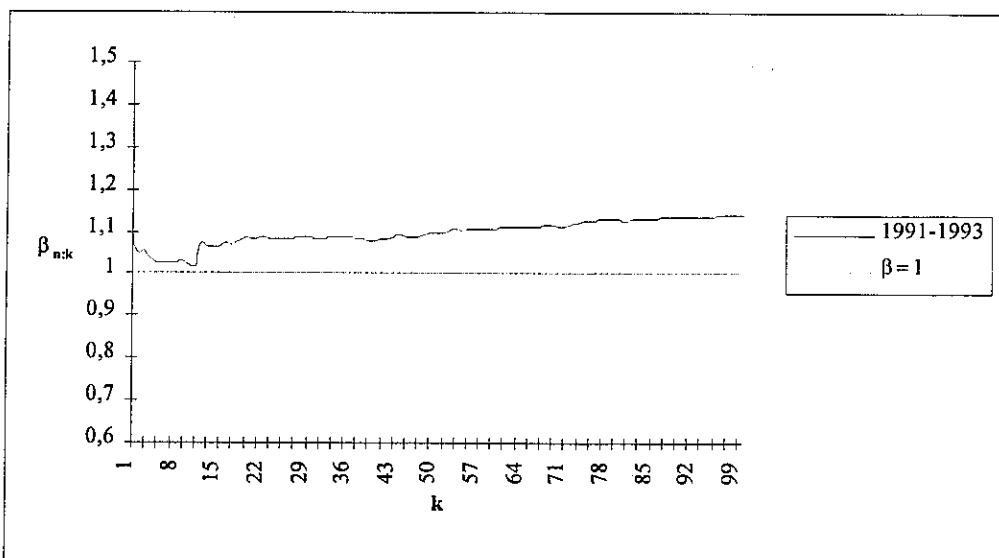
Figur 1: Ersättningskraven för affärsåren 1991-1993 ordnade i avtagande ordning.

Genom att tillämpa (2.4) på de observerade ersättningskraven för de olika affärsåren observerar vi att varje år kan anses innehå en fördelning av subexponentiell karaktär (figur 2). Dessutom observerar vi att affärsår 1992, som har de stabilaste observationerna, till en början antar låga $\beta_{n,k}$ värden som dock senare ökar mot och över 1 då k växer.



Figur 2: Värden av parametern $\beta_{n,k}$ för affärsår 1991-1993.

Då varje affärsår kan anses vara fördelat enligt en subexponentiell fördelning, kan vi även förvänta oss att de sammanlagda observationerna för de olika åren följer samma mönster. Figur 3 visar att de sammanslagna observationerna klart antyder ett subexponentiellt beteende.



Figur 3: Värden av parametern β_{nk} för affärsåren 1991-1993 sammanslaget.

Ovanstående resultat indikerar ett kraftigt subexponentiellt beteende, varvid vi lämpligen kan välja en Pareto-fördelning som modell för ersättningskravens storlek. Vi väljer en $Pareto(\alpha, \beta, 0)$ fördelning, där momentmetoden ger följande analytiska uttryck och parametervärden:

Modell	Momentestimat	Parametervärde
$Pareto(\alpha, \beta, 0)$	$\hat{\alpha} = \frac{2 \cdot (m_2 - m_1^2)}{m_2 - 2 \cdot m_1^2}$ och $\hat{\beta} = m_1 \cdot \left(\frac{2 \cdot (m_2 - m_1^2)}{m_2 - 2 \cdot m_1^2} - 1 \right)$	$\hat{\alpha} = 2,34011$ $\hat{\beta} = 13692$

Tabell 5: Momentestimat och parameterestimat till $Pareto(\alpha, \beta, 0)$, där vi betraktat observationer från affärsåren 1991-1993. Beteckningen m_i anger det i :te origomomentet.

Väntevärde och varians till det totala ersättningskravet

$$\tilde{X} = \sum_{k=1}^{\tilde{N}} \tilde{X}_k$$

kan nu beräknas enligt de välkända formlerna (DAYKIN et al. 1994)

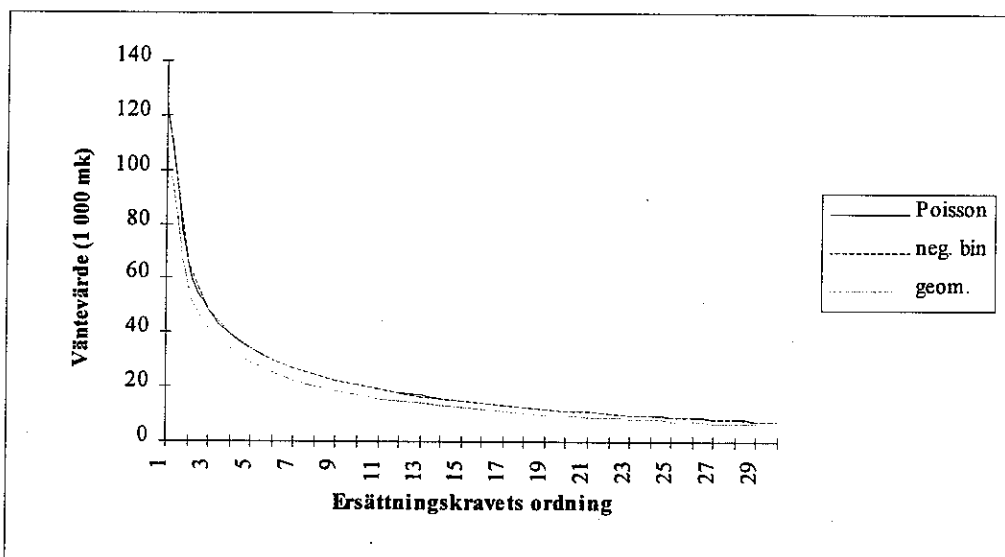
$$E[\tilde{X}] = E[\tilde{X}_i] \cdot E[\tilde{N}] \text{ och } Var[\tilde{X}] = E[\tilde{N}] \cdot Var[\tilde{X}_i] + (E[\tilde{X}_i])^2 \cdot Var[\tilde{N}].$$

För Poissonfördelat antal ersättningkrav får vi härmed att

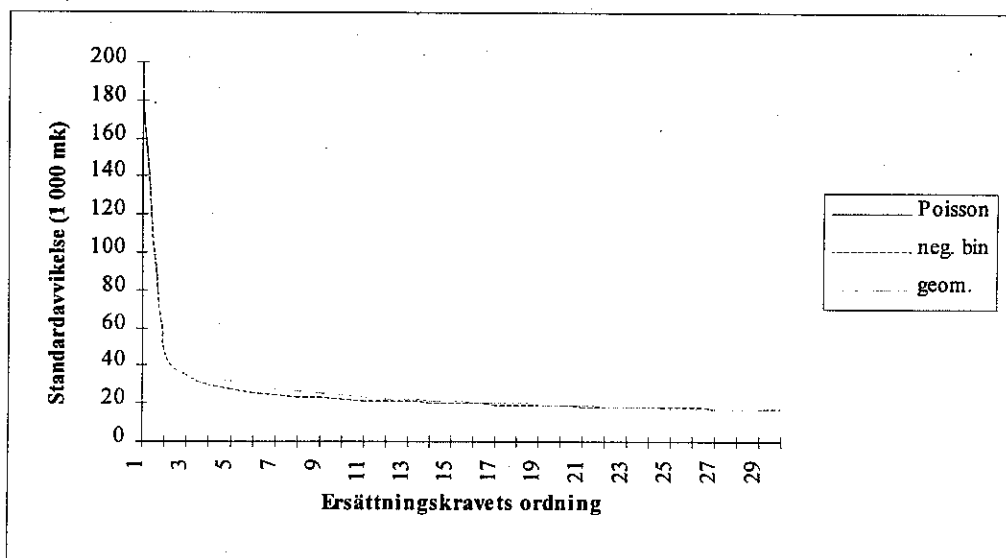
$$E[\tilde{X}] = 816\,330 \text{ och } \sqrt{Var[\tilde{X}]} = 256\,370..$$

Från dessa kan vi dock inte bilda oss en uppfattning om storleken av de olika ersättningskraven. Låt oss därför vidga våra vyer och analysera modellen med tillämpning av

ordnat urval. Väntevärdet av det i :te ersättningskravet ges i figur 4. Vi observerar att väntevärdena sammanfaller då antalet försäkringsfall är Poisson- och negativ binomialfördelat. Helt förväntat får vi mindre väntevärden vid en geometrisk fördelning. En aning överraskande ger dock geometriskt fördelat antal försäkringsfall större standardavvikelse (figur 5). Att Poisson- och negativ binomialfördelat antal försäkringsfall följer varandra bekräftas också av tabell 3. En negativ binomialfördelning lämpar sig bättre vid situationer där de årliga variationerna p.g.a. trender, oscillationer m.m. är märkbarare än i detta fall eller i situationer beskrivna i LEMAIRE (1995). Ur figur 5 inser vi även att de två största ersättningskravens standardavvikelser är märkbart större än de övriga som följer en relativt jämn nivå. Uppenbarligen styr de två största ersättningskraven fullständigt beståndets natur. I fortsättningen kommer vi enbart att betrakta Poisson-fördelat antal försäkringsfall.

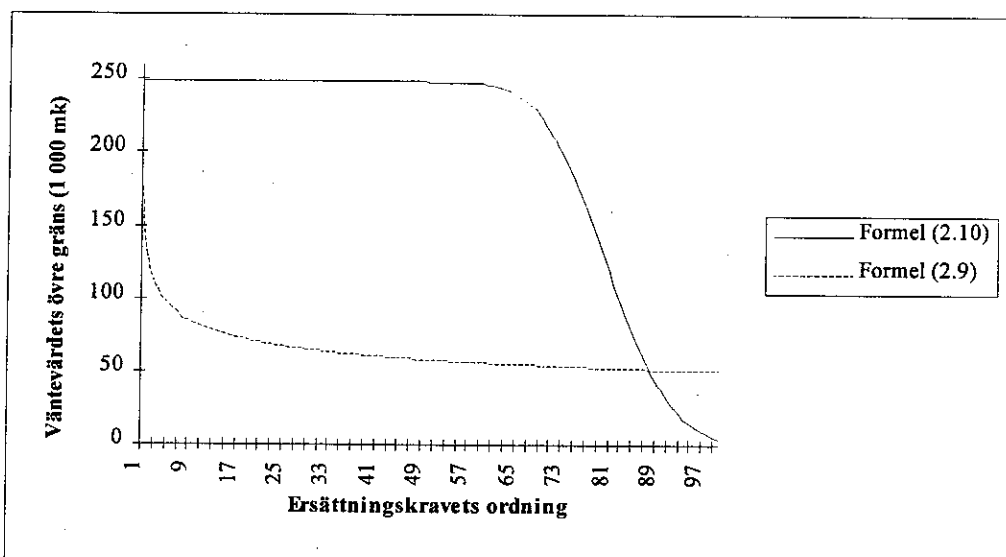


Figur 4: Väntevärdet av det i :te största ersättningskravet då ersättningskravets storlek är Pareto-fördelat och antalet försäkringsfall är Poisson-, negativ binomial- eller geometriskt fördelat.



Figur 5: Standardavvikelse av det i :te största ersättningskravet då ersättningskravets storlek är Pareto-fördelat och antalet försäkringsfall är Poisson-, negativ binomial- eller geometriskt fördelat.

Av intresse är även att studera övre gränsen för väntevärdet av det i :te största ersättningskravet. Enligt föregående avsnitt kan detta beräknas genom att tillämpa formel (2.9) eller (2.10). Redan tidigare har kommentarer angående en jämförelse mellan dessa formler gjorts, men de numeriska resultaten ger ytterligare intressant information (figur 6). Approximationen (2.11) tenderar att gälla alltför länge vilket ger upphov till grova övre gränser och ger först för stora i :n en bättre approximation än (2.9). Dessutom är (2.10) beroende av fördelningen till antalet försäkringsfall, vilket inte är fallet med (2.9) som enbart kräver kännedom om väntevärdet av antalet försäkringsfall. Därför kan (2.9) betraktas som en allmän övre gräns för väntevärdet av det i :te största ersättningskravet, som är oberoende av fördelningen till antalet försäkringsfall.



Figur 6: Övre gränser för det i :te största ersättningskravet då ersättningskravets storlek är Pareto-fördelad och antalet försäkringsfall följer en Poisson-fördelning.

3.2.2 Insättning av en falsk observation

Ur tabell 6, kan vi konstatera att skadeintensiteten hos de värdefulla båtarna är avsevärt högre än hos dem med mindre försäkringsbelopp. Orsaken till detta ligger främst i attityden till sjösäkerhet och oaktsamhet. Speciellt observerar vi att båtar med ett försäkringsvärde större än en halv miljon är mycket riskfyllda försäkringsobjekt. Då i den ovanbeskrivna modellen

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{X}_{N:1}] &= 124\,766 & \text{och} & & \sqrt{\text{Var}[\tilde{X}_{N:1}]} &= 183\,522 \\
 E[\tilde{X}_{N:2}] &= 65\,599 & \text{och} & & \sqrt{\text{Var}[\tilde{X}_{N:2}]} &= 46\,952 \\
 E[\tilde{X}_{N:3}] &= 48\,657 & \text{och} & & \sqrt{\text{Var}[\tilde{X}_{N:3}]} &= 34\,747 \\
 E[\tilde{X}_{N:4}] &= 39\,776 & \text{och} & & \sqrt{\text{Var}[\tilde{X}_{N:4}]} &= 30\,102,
 \end{aligned}$$

kan vi uppenbarligen konstatera att en totalförlust av en dylik båt inte är beaktad. Självfallet är detta en direkt följd av att det under affärsåren 1991-1993 inte har inträffat ett sådant ersättningskrav. Hur som helst, är sannolikheten för en totalförlust betydande och bör beaktas. Låt oss därför insätta i observationerna en falsk observation av en totalförlust på 800 000 mk.

Förs.belopp	1993	1992	1991	1990	1989	1988	1987
< 100 000	1155 / 30	1151 / 34	1144 / 29	1108 / 32	1060 / 36	973 / 38	868 / 24
100 000 ≤ - < 150 000	216 / 11	220 / 10	229 / 2	212 / 11	198 / 12	181 / 11	156 / 10
150 000 ≤ - < 200 000	103 / 3	102 / 5	110 / 7	112 / 6	86 / 7	76 / 7	60 / 1
200 000 ≤ - < 300 000	102 / 7	113 / 7	106 / 6	109 / 7	95 / 8	90 / 9	58 / 2
300 000 ≤ - < 400 000	52 / 1	50 / 2	47 / 4	41 / 5	27 / 3	16 / 1	11 / 2
400 000 ≤ - < 500 000	13 / 1	14 / 0	14 / 3	13 / 2	13 / 3	8 / 2	6 / 3
500 000 ≤	16 / 4	22 / 3	20 / 2	15 / 3	11 / 0	10 / 5	5 / 0
Summa	1657 / 57	1672 / 61	1670 / 53	1610 / 66	1490 / 69	1354 / 73	1164 / 42

Tabell 6: Antalet försäkringar och antalet försäkringsfall uppdelade enligt försäkringsbelopp.

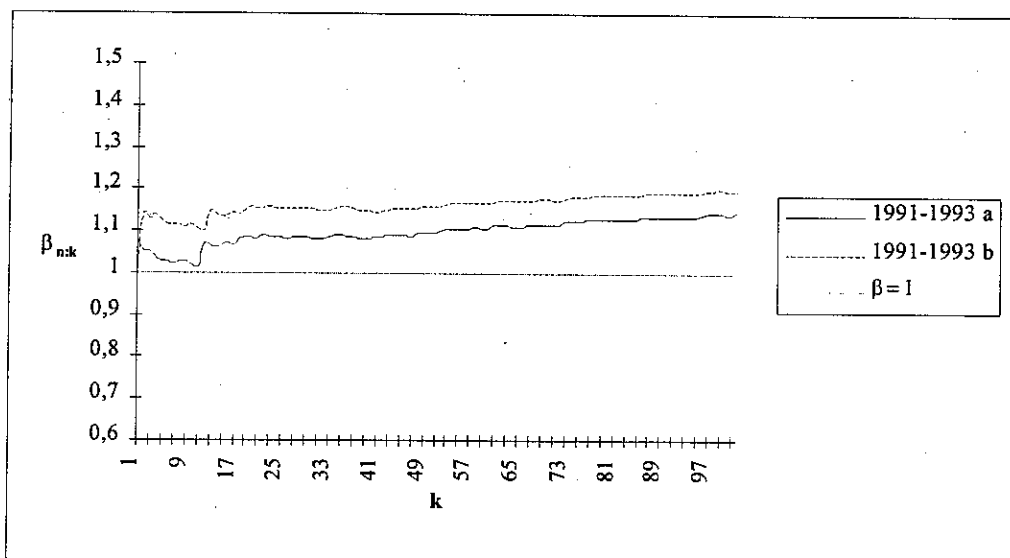
Självfallet är följden av denna falska observation att vi kan observera ett större subexponentiellt beteende än tidigare, vilket verifieras av figur 7. Återigen väljer vi som modell för ersättningskravets storlek en $Pareto(\alpha, \beta, 0)$ fördelning, där vi i detta fall får parameterestimaten

$$\hat{\alpha} = 2,10887 \text{ och } \hat{\beta} = 16\ 257.$$

Väntevärde och standardavvikelse till det totala ersättningskravet ges nu av

$$E[\tilde{X}] = 1\ 171\ 379 \text{ och } \sqrt{Var[\tilde{X}]} = 591\ 451,$$

vilket tyder på ett betydligt instabilare bestånd, men ger dock fortfarande inte tillräcklig information om de största ersättningskraven.



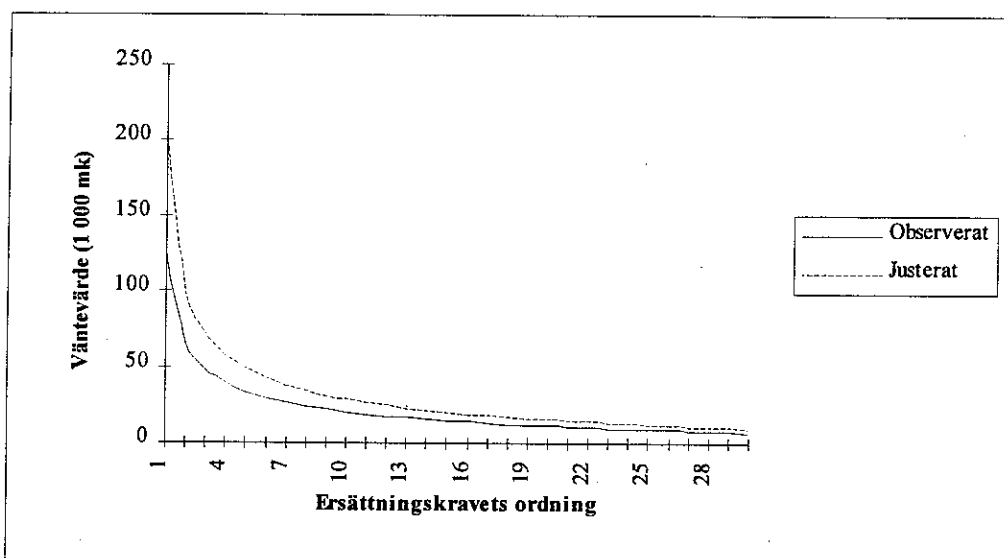
Figur 7: Värden av parametern β_{nk} med verkliga observationer (1991-1993 a) och med en falsk observation (1991-1993 b).

Ur figur 8 observerar vi att insättning av en falsk observation har förväntat ökat väntevärdet av de ordnade ersättningskraven och påverkat betydligt de ca tio största ersättningskraven. En

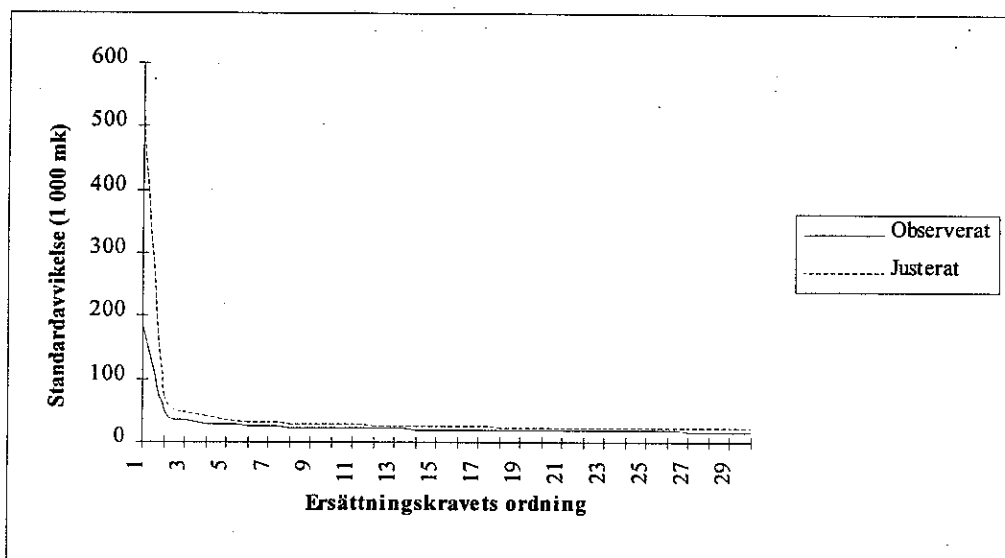
aning överraskande har standardavvikelsen för det största ersättningskravet ökat avsevärt, medan den för de övriga ersättningskraven är närmast oförändrad. Speciellt gäller att

$$\begin{aligned}
 E[\tilde{X}_{\tilde{N}:1}] &= 202\,747 & \text{och} & \sqrt{\text{Var}[\tilde{X}_{\tilde{N}:1}]} = 522\,421 \\
 E[\tilde{X}_{\tilde{N}:2}] &= 98\,898 & \text{och} & \sqrt{\text{Var}[\tilde{X}_{\tilde{N}:2}]} = 70\,666 \\
 E[\tilde{X}_{\tilde{N}:3}] &= 71\,596 & \text{och} & \sqrt{\text{Var}[\tilde{X}_{\tilde{N}:3}]} = 48\,210 \\
 E[\tilde{X}_{\tilde{N}:4}] &= 57\,710 & \text{och} & \sqrt{\text{Var}[\tilde{X}_{\tilde{N}:4}]} = 40\,279,
 \end{aligned}$$

varvid vi i denna modell beaktar ett ersättningskrav från en totalförlust av en båt med försäkringsvärde större än en halv miljon.



Figur 8: Väntevärdet av det i :te största ersättningskravet med det observerade materialet och med det justerade materialet.

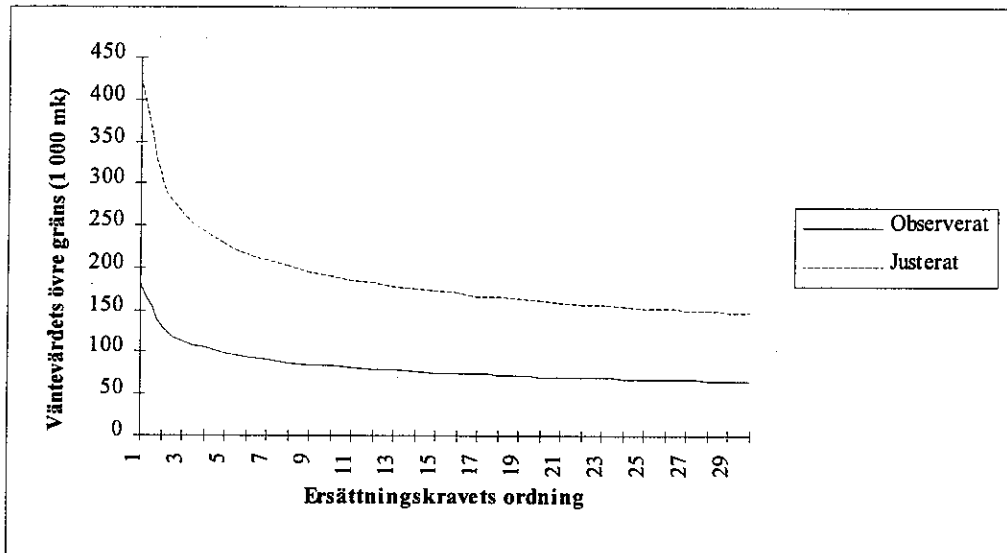


Figur 9: Standardavvikelse av det i :te största ersättningskravet med det observerade materialet och med det justerade materialet.

En jämförelse av förändringen i den fördelningsfria övre gränsen enligt (2.9) ges i figur 10. I denna observerar vi att skillnaderna är stora. Orsaken till detta kan relateras till att (2.9) domineras av väntevärde och standardavvikelse till ersättningskravets fördelning. Insättning av en falsk observation förändrade dessa enligt följande:

$$E[\tilde{X}_i] = 10\,217 \rightarrow E[\tilde{X}_i] = 14\,661$$

$$\sqrt{\text{Var}[\tilde{X}_i]} = 26\,799 \rightarrow \sqrt{\text{Var}[\tilde{X}_i]} = 64\,523.$$



Figur 10: Övre gräns, enligt (2.9), för väntevärdet till det i :te största ersättningskravet med det observerade materialet och med det justerade materialet.

5. Avslutande kommentarer

Några absoluta sanningar om hur en analys av stora ersättningskrav skall utföras ges självfallet inte i denna studie. Den presenterar dock ett alternativ baserat på ordnat urval hur vi kan få en bättre förståelse för försäkringsbeståndet och speciellt för de stora ersättningskraven. Detta kan komma väl till nytta vid valet av återförsäkring samt vid uppföljning av premiesättningen.

Fastän teorin i avsnitt 2 till synes är tillfredsställande, bör dock följande synpunkter framföras. Genom att med ersättningskrav utföra en numerisk lek, observerar vi att $\hat{\beta}_{n,k}$ till en början tenderar att vara låg, ibland till och med negativ, men ökar sedan nästan alltid till ca 0,5 och växer därefter mycket långsamt mot 1. Så följaktligen skulle detta alltid påvisa ett subexponentiellt beteende trots att vi ur materialet direkt kan konstatera motsatsen. Med numeriska manipuleringar kan vi konstatera att ett subexponentiellt beteende karaktäriseras av att redan de första värdena på $\hat{\beta}_{n,k}$ är nära 1, ökar sedan snabbt över 1 och stiger därefter långsamt uppåt. Följaktligen överensstämmer inte teori och numerisk tillämpning, vilket troligtvis beror på hur $\hat{\beta}_{n,k}$ estimerats samt att β är definierat som ett gränsvärde. Hur som helst, kan vi utnyttja denna metod för att jämföra olika års talserier och därmed avgöra den subexponentiella karaktären mellan de olika åren. Enligt figur 2 får vi alltså att affärsåret 1991 är mest subexponentiellt följt av 1993 och 1992.

Teorin i det tredje avsnittet avviker från standardteorin om ordnat urval genom att vi i denna betraktar ett stokastiskt antal försäkringsfall. Då ersättningskravets storlek följer en fullständig Pareto-fördelning kan mycket enkla och användbara uttryck konstrueras. Då många matematiska programpaket innehåller rutiner för att beräkna de speciella funktioner som används, kan vi ytterst enkelt beräkna väntevärde, varians m.m. för det i :te största ersättningskravet.

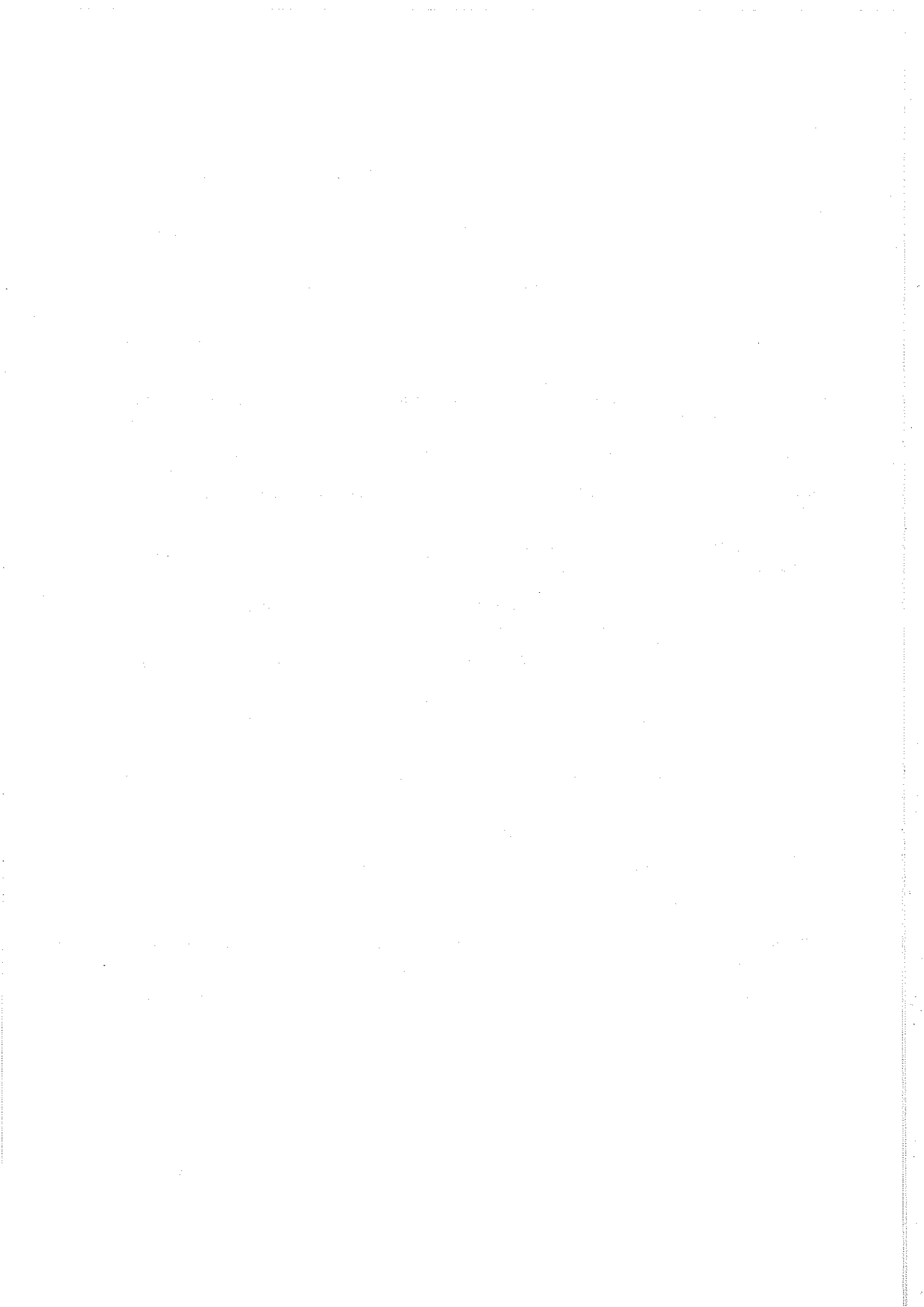
Analysmetoden given i denna studie kompletterar utmärkt övriga analysprinciper, som t.ex. simulering, och kan således anses vara ett positivt bidrag till analys av stora ersättningskrav.

Tillkännagivande

Jag är tacksam för hjälp och värdefulla kommentarer som F.M. Carina Holmberg, D.K. Anita Cromwell-Morgan och F.M. Margrét Halldórsdóttir har givit.

Referenser

- AMMETER, H. (1964a) Note concerning the distribution function of the total loss excluding the largest individual claims. *Astin Bulletin* 3, 132-143.
- AMMETER, H. (1964b) The rating of "largest claim" reinsurance covers. *Quarterly letter from the Allgemeene Reinsurance Companies, Jubilee number 9*, 5-17.
- BEIRLANT, J. och TEUGELS, J.L. (1992) Modeling large claims in non-life insurance. *Insurance: Mathematics and Economics* 11, 17-29.
- BERGLUND, R.M. (1996) Notes on the net premium for a generalized largest claims reinsurance cover. Inlämnat manuskript.
- CIMINELLI, E. (1976) On the distribution of the highest claims and its application to the automobile insurance liability. *Transactions of the 20th International Congress of Actuaries*, 501-517.
- DAVID, H.A. (1970) *Order Statistics*. John Wiley & Sons, New York.
- DAYKIN, C.D., PENTIKÄINEN, T. och PESONEN, M. (1994) *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman & Hall, London.
- KREMER, E. (1983) Distribution-free upper bounds on the premium of the LCR and ECOMOR treaties. *Insurance: Mathematics and Economics* 2, 209-213.
- KREMER, E. (1985) Finite formulae for the premium of the general reinsurance treaty based on ordered claims. *Insurance: Mathematics and Economics* 4, 233-238.
- KREMER, E. (1986) Recursive calculation of the net premium for largest claims reinsurance covers. *Astin Bulletin* 16, 101-108.
- KREMER, E. (1988) A General bound for the net premium of the largest claims reinsurance covers. *Astin Bulletin* 18, 69-78.
- KREMER, E. (1994) Recursive largest claims reinsurance rating, revisited. *Blätter der Deutschen Gesellschaft für Versicherungsmathematik*, 457-469.
- KUPPER, J. (1971) Contributions to the theory of the largest claim cover. *Astin Bulletin* 6, 134-146.
- LEMAIRE, J. (1995) *Bonus-Malus Systems in Automobile Insurance*. Kluwer Academic Publishers, Boston.
- PANJER, H.H. och WILLMOT, G.E. (1992) *Insurance Risk Models*. Society of Actuaries, Schaumburg, Illinois.
- PENTIKÄINEN, T. (1982) *Solvency of Insurers and Equalization Reserves* (Vol. I). Insurance Publishing Company, Helsinki.
- PITMAN, E.J.G. (1980) Subexponential distribution functions. *Journal Australian Math. Soc. Ser. A* 29, 337-347.



NOTES ON THE NET PREMIUM FOR A GENERALIZED LARGEST CLAIMS REINSURANCE COVER

BY RAOUL M. BERGLUND

Alandia Group, Mariehamn, Finland

ABSTRACT

In the present paper the author gives net premium formulas for a generalized largest claims reinsurance cover. The claim sizes are assumed to have a complete Pareto distribution and number of claims to have a Poisson, negative binomial or geometric distribution. The formulas are simple and the net premium can easily be obtained.

KEYWORDS

Net premium; largest claims reinsurance; LCR; ECOMOR; Pareto.

1. INTRODUCTION

Net premium for the largest claim reinsurance was already introduced by AMMETER (1964a) and for largest claims reinsurance by AMMETER (1964b). Simple formulas were presented under the assumptions that the claim sizes obeyed an one parametric Pareto distribution and the number of claims was Poisson distributed. KUPPER (1971) gave a formula for the largest claim reinsurance when the number of claims was geometrically distributed and CIMINELLI (1976) considered a negative binomial distribution. The author of this paper gives simple net premium formulas for a generalized largest claims reinsurance cover, by applying the general formula given by KREMER (1985), under complete Pareto distributed claim sizes and when the number of claims have a Poisson, negative binomial or geometric distribution. More general results were given by KREMER (1988a) for some generalized claim number distributions and a general claim size distribution. Those results, however, were not so practical for a specific claim size distribution. Under complete Pareto distributed claim sizes, the net premium formulas presented in this paper are simple and easily calculated.

2. PRELIMINARIES

Let N denote the random variable of the number of claims that occur in a given time period and X_1, X_2, \dots, X_N the corresponding non-negative claim sizes. Denote by

$$X_{N:1} \geq X_{N:2} \geq \dots \geq X_{N:N}$$

the claims ordered in a decreasing size. Let

$$f_i: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

($i \geq 1$) be measurable functions, that satisfy

$$f_i(0) = 0 \text{ and } \sum_{i=1}^n f_i(y_i) \in \left[0, \sum_{i=1}^n y_i \right]$$

for all $0 \leq y_n \leq \dots \leq y_2 \leq y_1$. This representation was first made by KREMER (1982) and the following main definition by KREMER (1984):

Definition. The family f_i , $i \geq 1$, defines a reinsurance treaty called reinsurance treaty based on ordered claims, where the reinsurers share of the total loss $\sum_{i=1}^N X_i$ is given by the random variable

$$(2.1) \quad R_N(X_{N:1}, X_{N:2}, \dots, X_{N:N}) = \sum_{i=1}^N f_i(X_{N:i}).$$

We are especially interested in the case

$$(2.2) \quad f_i(x) = a_i \cdot x,$$

where a_i , $i \geq 1$, are real constants. This reinsurance treaty is defined as the generalized largest claims cover (KREMER 1988b). We get for

$$a_1 = a_2 = \dots = a_p = 1, a_i = 0 \quad \forall i > p$$

the so called LCR(p) treaty covering the p largest claims and for

$$a_1 = a_2 = \dots = a_{p-1} = 1, a_p = p-1, a_i = 0 \quad \forall i > p$$

the so called ECOMOR(p) treaty covering all claims excess of the p th largest claim.

3. FORMULAS FOR THE NET PREMIUM

The main result by KREMER (1985) gives a general formula to determine the net premium for the reinsurance treaty (2.1). If we further assume that (2.2) holds, i.e. we consider a generalized largest claims reinsurance cover, it may be stated as follows:

Theorem. Assume the claim sizes X_1, X_2, \dots, X_N to i.i.d. with continuous distribution function F and independent of the claims number N . Denote by

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(N=k) \cdot t^k$$

the probability generating function of N , which is assumed to have derivatives $\phi^{(i)}(t)$ on $(0,1)$ of each order $i \geq 1$. Then the net premium to (2.1), with the assumption (2.2), is given by

$$(3.1) \quad E[R_N(X_{N:1}, X_{N:2}, \dots, X_{N:N})] = E[R_N] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\Gamma(i)} \cdot \int_0^1 F^{-1}(u) \cdot (1-u)^{i-1} \cdot \phi^{(i)}(u) du,$$

where $F^{-1}(t) = \inf\{x: F(x) \geq t\}$ and $\Gamma(x)$, $x > 0$, is the complete gamma function

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} \cdot u^{x-1} du.$$

From now on we assume that the claim sizes are distributed according to the complete Pareto distribution, $\text{Pareto}(\alpha, \beta, d)$, which distribution function is given by

$$F(x) = 1 - \left(\frac{d + \beta}{x + \beta} \right)^{\alpha} \quad x \geq d,$$

where the parameters α , β and d satisfy $\alpha > 0$ and $\beta > -d$. The complete Pareto distribution is, especially if there is a possibility of large claims, the mostly used claim size distribution (DAYKIN et al. 1994). In the literature this distribution is sometimes also called the "shifted" Pareto distribution (RYTGAARD 1990). If we further assume that the number of claims have a Poisson, negative binomial or geometric distribution we will get the following extremely handy formulas for calculating the net premium for a generalized largest claims reinsurance cover.

Corollary. *If the claim sizes have a $\text{Pareto}(\alpha, \beta, d)$ distribution, $\alpha > 1$, and the number of claims has a*

i) Poisson distribution

$$P(N = k) = \frac{\lambda^k}{k!} \cdot e^{-\lambda} \quad \lambda > 0,$$

then the net premium is given by

$$(3.2) \quad E[R_N] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\Gamma(i)} \cdot \left[(d + \beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot \Gamma_{\lambda} \left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha} \right) - \beta \cdot \Gamma_{\lambda}(i) \right],$$

where $\Gamma_{\lambda}(x)$, $x > 0$, denotes the incomplete gamma function

$$\Gamma_{\lambda}(x) = \int_0^{\lambda} e^{-u} \cdot u^{x-1} du.$$

ii) negative binomial distribution

$$P(N = k) = \frac{\Gamma(r+k)}{\Gamma(r) \cdot k!} \cdot \left(\frac{1}{1+\lambda}\right)^r \cdot \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^k \quad r, \lambda > 0,$$

then the net premium is given by

$$(3.3) \quad E[R_N] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cdot \Gamma(r+i)}{\Gamma(i) \cdot \Gamma(r)} \cdot \left[(d+\beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot B\left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha}; \frac{\alpha r + 1}{\alpha}; \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) - \beta \cdot B\left(i; r; \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) \right]$$

where $B(a; b; x)$, $a, b > 0$ and $0 < x < 1$, denotes the incomplete beta function, i.e.

$$B(a; b; x) = \int_0^x u^{a-1} \cdot (1+u)^{-(a+b)} du.$$

iii) geometric distribution

$$P(N = k) = \left(\frac{1}{1+\lambda}\right) \cdot \left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^k \quad \lambda > 0,$$

then the net premium is given by

$$(3.4) \quad E[R_N] = \sum_{i=1}^{\infty} a_i \cdot i \cdot \left[(d+\beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot B\left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha}; \frac{\alpha + 1}{\alpha}; \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) - \beta \cdot B\left(i; 1; \frac{\lambda}{1+\lambda}\right) \right]$$

where $B(a; b; x)$, $a, b > 0$ and $0 < x < 1$, denotes the incomplete beta function.

Proof: i) Since the i th derivative of the probability generating function of a Poisson random variable is

$$\phi^{(i)}(t) = \lambda^i \cdot e^{\lambda(t-1)}$$

and

$$F^{-1}(t) = \frac{d+\beta}{(1-x)^{1/\alpha}} - \beta$$

the net premium (3.1) is given by

$$E[R_N] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\Gamma(i)} \cdot \int_0^1 \left(\frac{d+\beta}{(1-u)^{1/\alpha}} - \beta \right) \cdot (1-u)^{i-1} \lambda^i e^{\lambda(u-1)} du.$$

Substituting $\lambda(u - I) = -t$ gives

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\Gamma(i)} \cdot \int_0^{\lambda} \left((d + \beta) \cdot \left(\frac{\lambda}{t} \right)^{1/\alpha} - \beta \right) \cdot t^{i-1} e^{-t} dt \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\Gamma(i)} \cdot \left[(d + \beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \int_0^{\lambda} t^{\frac{i\alpha-1}{\alpha}} e^{-t} dt - \beta \cdot \int_0^{\lambda} t^{i-1} e^{-t} dt \right] \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\Gamma(i)} \cdot \left[(d + \beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot \Gamma_{\lambda} \left(\frac{i\alpha - 1}{\alpha} \right) - \beta \cdot \Gamma_{\lambda}(i) \right],
 \end{aligned}$$

since $\alpha > 1$. *ii)* In this case the i th derivative of the probability generating function of the number of claims is

$$\phi^{(i)}(t) = \frac{\Gamma(r+i)}{\Gamma(r)} \cdot \lambda^i \cdot [I - \lambda(t - I)]^{-r-i}.$$

Hence the net premium (3.1) is given by

$$E[R_N] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cdot \Gamma(r+i)}{\Gamma(i) \cdot \Gamma(r)} \cdot \int_0^I \left(\frac{d + \beta}{(I - u)^{1/\alpha}} - \beta \right) \cdot (I - u)^{i-1} \cdot \lambda^i \cdot [I - \lambda(u - I)]^{-(r+i)} du.$$

Substituting $\lambda(u - I) = -t$ gives

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cdot \Gamma(r+i)}{\Gamma(i) \cdot \Gamma(r)} \cdot \int_0^{\lambda} \left((d + \beta) \cdot \left(\frac{\lambda}{t} \right)^{1/\alpha} - \beta \right) \cdot t^{i-1} \cdot (I + t)^{-(r+i)} dt \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cdot \Gamma(r+i)}{\Gamma(i) \cdot \Gamma(r)} \cdot \left[(d + \beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot \int_0^{\lambda} t^{\frac{\alpha i - 1}{\alpha}} \cdot (I + t)^{-(r+i)} dt - \beta \cdot \int_0^{\lambda} t^{i-1} \cdot (I + t)^{-(r+i)} dt \right] \\
 &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i \cdot \Gamma(r+i)}{\Gamma(i) \cdot \Gamma(r)} \cdot \left[(d + \beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot B \left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha}; \frac{\alpha r + 1}{\alpha}; \frac{\lambda}{I + \lambda} \right) - \beta \cdot B \left(i; r; \frac{\lambda}{I + \lambda} \right) \right],
 \end{aligned}$$

since $\alpha > 1$. *iii)* The statement follows from *ii)*, by noticing that a geometric distribution is a negative binomial distribution with $r = 1$.

□

Since many computer programs have built-in routines for computing the complete gamma, incomplete gamma and the incomplete beta function, the above net premiums can be calculated easily. If we, however, assume that λ is large, then in (3.2) the incomplete gamma function may be approximated by the complete gamma function and in (3.3) and (3.4) the incomplete beta function may be approximated by the complete beta function, i.e.

$$B(a; b; x) \approx B(a; b) = \frac{\Gamma(a) \cdot \Gamma(b)}{\Gamma(a + b)}.$$

Inserting this approximation in the net premium formula (3.3) we get

$$(3.6) \quad E[R_N] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\Gamma(i)} \cdot \left[(d+\beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha}\right) \cdot \frac{\Gamma\left(r + \frac{1}{\alpha}\right)}{\Gamma(r)} - \beta \cdot \Gamma(i) \right].$$

The above formula's resemblance with (3.1) is obvious, but it should be noticed that the value of λ is not necessarily the same in the two formulas. If we choose $r = 1$, then λ has the same meaning, the expected number of claims, and the net premium formula (3.6) becomes

$$E[R_N] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a_i}{\Gamma(i)} \cdot \left[(d+\beta) \cdot \lambda^{1/\alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha i - 1}{\alpha}\right) \cdot \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) - \beta \cdot \Gamma(i) \right].$$

Since

$$0 < \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) < 1,$$

we have established that for large λ we can expect the net premium (3.4) to be less than the net premium (3.2). In the case of a LCR(1) treaty and Pareto($\alpha - 1, 0, 1$) distributed claim sizes, this result was already given by KUPPER (1971).

Because reinsurance based on ordered claims is rarely applied in practice, KREMER (1985) also states that the net premium formula (3.1) is mainly of theoretical interest. It is, however, worth noticing that in the net premium formulas above, we get by removing the summation and setting $a_i = 1$, for $i \geq 1$, the expected value of i th largest claim. In the same way it is possible to construct expressions for the second moment about the origin, and so on. Therefore the formulas given in this paper could also be useful in analyzing some characteristics of the i th largest claim.

4. A NUMERICAL EXAMPLE

Let the distribution for the claim sizes be Pareto($\alpha, \beta, 0$). For the insurance line under consideration the method of moments give the following parameter estimates: Pareto $\hat{\alpha} = 2.3401$ and $\hat{\beta} = 13692$, Poisson $\hat{\lambda} = 79.667$, negative binomial $\hat{\lambda} = 1.0865$ and $\hat{r} = 73.326$, and for the geometric $\hat{\lambda} = 79.667$. Denote by μ the total claim size, which is given by the well-known formula (DAYKIN et al. 1994)

$$\mu = E[N] \cdot E[X].$$

For the premium rates $\mu_{\text{LCR}(p)}/\mu$ and $\mu_{\text{ECOMOR}(p)}/\mu$ we have the following results:

LCR(p) treaty

p	Poisson	negative binomial	geometric
1	15.33 %	15.28 %	13.40 %
2	23.39 %	23.31 %	20.36 %
3	29.37 %	29.27 %	25.48 %
4	34.25 %	34.13 %	29.65 %
5	38.44 %	38.30 %	33.20 %

ECOMOR(p) treaty

p	Poisson	negative binomial	geometric
2	7.27 %	7.25 %	6.44 %
3	11.43 %	11.40 %	10.11 %
4	14.71 %	14.66 %	12.99 %
5	17.51 %	17.46 %	15.46 %

REFERENCES

- AMMETER, H. (1964a) Note concerning the distribution function of the total loss excluding the largest individual claims. *ASTIN Bulletin* 3, 132-143.
- AMMETER, H. (1964b) The rating of "largest claim" reinsurance covers. *Quarterly letter from the Allgemeene Reinsurance Companies, Jubilee number 9*, 5-17.
- CIMINELLI, E. (1976) On the distribution of the highest claims and its application to the automobile insurance liability. *Transactions of the 20th International Congress of Actuaries*, 501-517.
- DAYKIN, C.D., PENTIKÄINEN, T. and PESONEN, M. (1994) *Practical Risk Theory for Actuaries*. Chapman & Hall, London.
- KREMER, E. (1982) Rating of largest claims and ECOMOR reinsurance treaties for large portfolios. *ASTIN Bulletin* 13, 47-56.
- KREMER, E. (1984) An asymptotic formula for the net premium of some reinsurance treaties. *Scandinavian Actuarial Journal*, 11-22.
- KREMER, E. (1985) Finite formulae for the premium of the general reinsurance treaty based on ordered claims. *Insurance: Mathematics and Economics* 4, 233-238.
- KREMER, E. (1988a) Rückversicherungsprämien unter Verallgemeinerten Schadenzahlverteilungen. *Transactions of the 23rd International Congress of Actuaries*, 73-79.
- KREMER, E. (1988b) A general bound for the net premium of the largest claims reinsurance covers. *ASTIN Bulletin* 18, 69-78.
- KUPPER, J. (1971) Contributions to the theory of the largest claim cover. *ASTIN Bulletin* 6, 134-146.
- RYTGAARD, M. (1990) Estimation in the Pareto distribution. *ASTIN Bulletin* 20, 201-216.

RAOUL M. BERGLUND

Alandia Group, PB 121, 22101 Mariehamn, Finland.

