

WORKING PAPERS ISSN 0781-4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

56

Pasi Laaksonen

Optioiden hinnoittelu sekä käyttö
vakuutusyhtiöissä

(1999)

Optioiden hinnoittelu sekä käyttö vakuutusyhtiöissä

Pasi Laaksonen

SHV-harjoitustyö
Elokuu 1999

LAAKSONEN PASI: Pricing options and using options in insurance
company.

Thesis for FASF-degree, 52 p.

August 1999

Abstract

An option is a derivative. Derivatives are financial instruments whose value depends on the value of some other variables. Different investment strategies can be carried out with options, both hedging and speculative. In insurance company the risk of other investment instruments can be hedged by using options. An actuary should have knowledge about options, because the funds must be invested so that all obligations can be paid.

This paper contains four parts. In the first part the basic properties of derivatives are introduced. In the second part there is an introduction how the options can be priced. The pricing model called as *Black-Scholes* model is also proved. In the third part it is shown how the price of option given by the Black-Scholes model changes when the value of some model parameter change. In the last part there are some orders which insurance company has to take into account when it is using options.

Keywords: Derivative, option, Black-Scholes model, insurance company.

Sisällys

1 Johdanto	3
2 Johdannaisista	4
2.1 Johdannaisten peruskäsitteitä	4
2.2 Johdannaismarkkinoista	5
2.3 Termit ja futuurit	6
2.4 Swapit	7
2.5 Optiot	7
2.6 Sijoitusstrategioista	9
3 Option hinnoittelu	14
3.1 Hinnoittelun perusteet	14
3.2 Option arvon rajat	17
3.3 Put-Call yhtälö	20
3.4 Binomipuu hinnoittelu	21
3.5 Blackin ja Scholesin hinnoittelumalli	24
3.5.1 Osakkeen arvon kehittyminen	24
3.5.2 Blackin ja Scholesin differentiaaliyhtälö ja hinnoittelu- kaava	29
3.5.3 Parametrien estimoinnista	34
4 Blackin ja Scholesin mallin herkkyyys	38
4.1 Oletukset	38
4.1.1 Osakkeen arvon logaritminormaalisuus	38
4.1.2 Katastrofin vaikutus	39
4.2 Parametrit	40
4.2.1 Osakkeen arvon ja option toteutushinnan suhde	41
4.2.2 Voimassaoloaika	43
4.2.3 Kasvuoletus	44
4.2.4 Hajonta	46
5 STM:n määräyksiä optioista	47
5.1 Johdannaiset sijoitussuunnitelmassa	47

5.2	Suojaavat johdannaiset	48
5.3	Optiot kirjanpidossa	49
5.4	Optiot tilinpäätöksessä	50
5.4.1	Suojaava optio	50
5.4.2	Ei-suojaava optio	51
5.5	Optiot vastuuvelan katteena	51
5.6	Optiot vakavaraisuuslaskelmassa	51

1 Johdanto

Optio on johdannaisiin lukeutuva sijoitusinstrumentti. Optioilla voidaan toteuttaa erilaisia sijoitusstrategioita, kuten suojautumisstrategia tai riskinottostrategia. Koska optioilla voidaan suojautua muiden sijoitusten arvon alenemista vastaan, on optioiden käyttö perusteltua myös vakuutusyhtiössä. Vakuutusyhtiössä sijoitussuunnitelmaan kuuluu omana osanaan johdannaisten käyttöä koskevat periaatteet. Koska vakuutusmatemaatikon on annettava lausunto sijoitussuunnitelmasta, on hänen hyvä tietää myös optioiden perusominaisuudet.

Tämä työ jakautuu neljään lukuun, joista ensimmäisessä tarkastellaan eri johdannaisten perusominaisuuksia. Toisessa luvussa esitetään option hinnoittelun perusteita, sekä esitetään kaksi optioiden hinnoittelumallia. Kolmannessa luvussa tarkastellaan *Blackin* ja *Scholesin* hinnoittelumallin herkkyyttä hinnoittelussa tehtävien oletusten ja tarvittavien parametrien suhteen. Viimeiseen lukuun on kerätty optioita koskevat kohdat sosiaali- ja terveysministeriön määräys- ja ohjekokoelmasta.

Työtä tehdessäni sain hyödyllisiä tietoja käymistäni keskusteluista Conventum Rahastoyhtiö Oy:n toimitusjohtaja Vesa Puttosen ja Vakuutusyhtiö Garantian tutkimusjohtaja Osmo Jaurin kanssa, joita haluan näistä tiedoista kiittää. Lisäksi haluan kiittää tämän SHV tutkielman ohjauksesta aktuaari Martti Pesosta.

2 Johdannaisista

Johdannaisia ovat muunmuassa termiinit, futuurit, swapit ja optiot. Seuraavaksi määritellään johdannaisten peruskäsitteitä sekä esitellään eri johdannaisia ja johdannaissijoitusstrategioita. Termien suomenkieliset vastineet ovat pääasiassa kirjasta Johdannaismarkkinat [3].

2.1 Johdannaisten peruskäsitteitä

Johdannaissopimus eli *johdannainen* on sijoitusinstrumentti, jonka arvo riippuu jonkin *kohde-etuuden* arvosta. Tämä kohde-etuus voi olla esimerkiksi pörssinoteerattu osake, pörssin arvoa kuvaava indeksi tai raaka-aine. Johdannaisessa on aina määritelty kuinka moneen yksikköön kohde-etuutta se oikeuttaa.

Johdannaissopimus tehdään kahden osapuolen välillä, joista toinen myy eli *asettaa*, ja toinen *ostaa* johdannaisten. Johdannaisten myyjällä on hallussaan johdannaisten *lyhyt positio* (short position) ja johdannaisten ostajalla on hallussaan johdannaisten *pitkä positio* (long position), josta käytetään myös nimeä *avoin positio*. Avoimen position haltija on siis ostanut johdannaista enemmän kuin myynyt, ja vastaavasti lyhyen position haltija on myynyt johdannaista enemmän kuin ostanut. Termit avoin ja lyhyt positio ovat käytössä myös muualla, kuten esimerkiksi puhuttaessa osakkeista ja valuutoista.

Johdannaiset voidaan luokitella *osto-* ja *myyntijohdannaisiin*. Ostojohdannaisessa johdannaisten ostajalla on johdannaisesta riippuen joko oikeus tai velvollisuus ostaa johdannaisten kohde-etuus. Vastaavasti myyntijohdannaisessa option ostajalla on oikeus tai velvollisuus myydä johdannaisten kohde-etuus.

Johdannainen tehdään aina tietylle ajanjaksolle, jota kutsutaan *voimassaoloajaksi*. Johdannaisten voimassaoloaika alkaa *sopimushetkestä* eli siitä hetkestä jolloin johdannainen tehdään. Voimassaoloaika päättyy johdannaisten *umpeutumishetkeen* (expiration date) eli tämän jälkeen johdannainen on arvoton. *Toteutushetkeksi* kutsutaan hetkeä, jolloin johdannaisten oikeuttama tai velvoittama kohde-etuuden myyminen tai ostaminen tehdään.

Johdannaisten kohde-etuuteen liittyy *toteutushinta* (strike price) eli hinta, jolla kohde-etuus tullaan johdannaisten perusteella myymään tai ostamaan.

Jos kohde-etuutena on indeksi, toteutushintana on indeksin arvo. Tällöin toteutushetkellä lasketaan indeksijohdannaisen arvo, ja osapuolet toteuttavat johdannaisen ikään kuin johdannaisen ostaja myisi johdannaisen takaisin johdannaisen myyjälle.

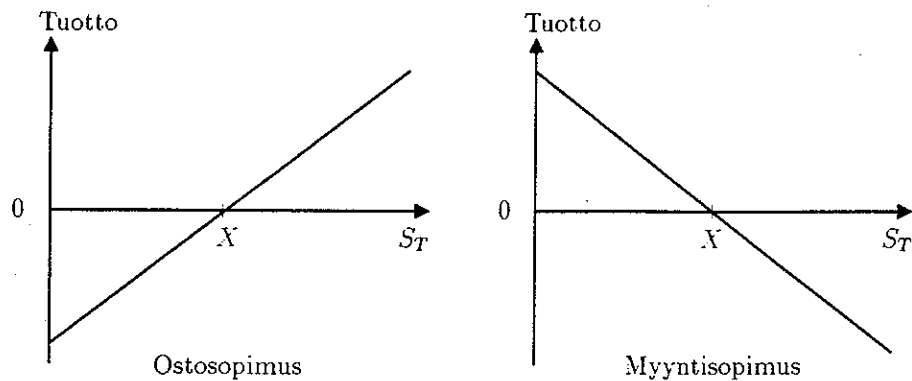
Useimpiin johdannaisiin liittyy myös *ostohinta*, jonka johdannaisen ostaja maksaa johdannaisen myyjälle sopimushetkellä. Optiolla on sopimushetkellä ostohinta, jos sen arvo sopimushetkellä ei ole nolla.

2.2 Johdannaismarkkinoista

Johdannaisilla käydään kauppaa kaksilla erilaisilla markkinoilla, pörssissä ja OTC-markkinoilla. Näiden markkinoiden erot koskevat pääasiassa johdannaisten vakiointia.

OTC-markkinoilla johdannaisten välittäjinä toimivat pankit ja pankkiiriliikkeet, jotka tekevät kauppaa omaan lukuunsa. OTC-markkinoilla johdannaiset ovat vakioimattomia eli sijoittaja voi sopia välittäjän kanssa millaisen johdannaisen hän haluaa ostaa. Tällöin sijoittaja voi valita esimerkiksi johdannaisen voimassaoloajan ja kohde-etuuden mielivaltaisesti, kunhan ne täyttävät välittäjän asettamat vaatimukset. Koska johdannaisen pitää täyttää ainoastaan välittäjän omat säännöt, voidaan OTC-markkinoilla tehdä eksoottisiakin johdannaisia. Sijoittajan vakuusvaatimukset voidaan myös neuvotella erikseen, minkä seurauksena vakavaraisen sijoittajan ei tarvitse asettaa vakuuksia. Pankki tai pankkiiriliike pyrkii löytämään tekemälleen johdannaiselle vastapuolen markkinoilta, jolloin välittäjän riski poistuu ja välittäjälle jää voitoksi osto- ja myyntikurssin välinen erotus.

Pörssimarkkinoilla välittäjä ei ole koskaan kaupan vastapuoli, vaan kaupat tehdään jatkuvasti noteerattavilla osto- ja myyntikursseilla. Pörssimarkkinoilla johdannaiset ovat pitkälle vakioituja, jolloin johdannaisten voimassaoloajat ovat tyypillisesti 2, 4 tai 6 kuukautta, ja kohde-etuuksien määrät, joihin johdannaiset oikeuttavat, ovat vakioita. Markkinoita säätelee johdannaisten kauppaa koskeva laki ja sijoittajilta vaaditaan aina vakuudet.



Kuva 1. Ostettun termiinin tai futuurin tuoton riippuvuus kohde-etuuden arvosta toteutushetkellä S_T , kun sopimuksen toteutushinta on X ja ostohinta 0. Tässä tuotto on johdannaisen toteutushetken arvon ja ostohinnan erotus.

2.3 Termiinit ja futuurit

Termiinissä (forward contracts) ja *futuuriissa* (futures contracts) ostaja ja myyjä sopivat, että kohde-etuus ostetaan tai myydään toteutushintaan sopimuksen umpeutumishetkellä. Termiinissä ja futuurissa siis toteutushetki on sopimuksen umpeutumishetki. Sopimukset ovat molempia osapuolia velvoittavia eli kaupoista on sovittu molempia osapuolia sitovasti jo sopimushetkellä, mutta maksu ja kohde-etuuden toimitus tehdään vasta toteutushetkellä. Termiinejä vaihdetaan OTC-markkinoilla, eli termiineissä ehdot ovat joustavia. Vastaavasti futuureita vaihdetaan pörssissä, jolloin sopimukset ovat pitkälle vakioituja.

Termiinin ja futuurin arvot riippuvat kohde-etuuden arvon kehittymisestä. Kuvassa 1 on esitetty miten termiinin tai futuurin tuottoon vaikuttaa kohde-etuuden arvo toteutushetkellä S_T , kun sopimuksen toteutushinta on X ja ostohinta 0. Tässä tuotto on johdannaisen toteutushetken arvon ja ostohinnan erotus. Termiini ja futuuri ovat aina toisen osapuolen kannalta myyntijohdannainen ja toisen osapuolen kannalta ostojohdannainen. Tämän voi huomata myös kuvasta 1, jossa tietyllä kohde-etuuden arvolla ostosopimus tuottaa voittoa saman verran kuin myyntisopimus tuottaa tappiota.

2.4 Swapit

Swapit ovat sopimuksia, joissa kaksi osapuolta vaihtavat tiettyä ajanjaksona saamansa kassavirrat. Koronvaihtosopimuksessa osapuolet vaihtavat samassa tai eri valuutoissa olevat korkovirtansa ja valuutanvaihtosopimuksessa osapuolet vaihtavat eri valuutoissa olevat kassavirtansa. Esimerkiksi vaihtuvakorkoisen kassavirran voi näin vaihtaa kiinteäkorkoiseen kassavirtaan, jolloin eliminoidaan korkotason vaihtelun aiheuttama korkoriski. Swap-sopimuksella ei yleensä ole ostohintaa, sillä kassavirrat asetetaan siten, että niiden arvioidut nykyarvot ovat yhtäsuuret.

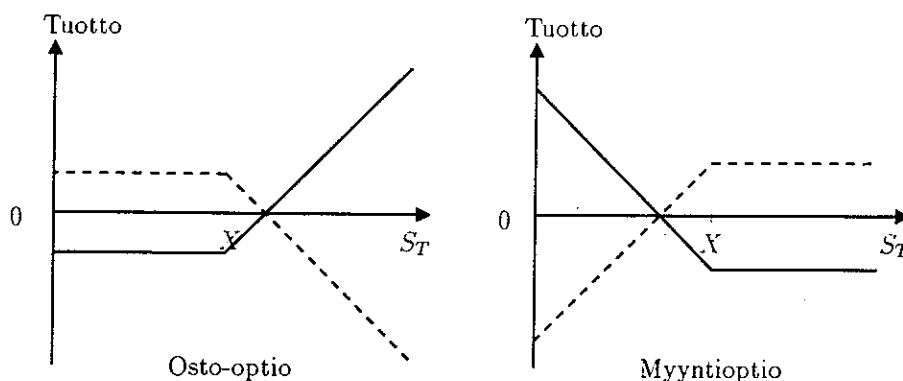
2.5 Optiot

Optio eroaa termiinistä ja futuurista siinä, että option ostajalla on oikeus, mutta ei velvollisuutta toteuttaa optio. Mikäli option ostaja ei toteuta optiota viimeistään umpeutumispäivää, raukeaa optio käyttämättömänä. Option myyjällä on velvollisuus suostua siihen päätökseen, jonka option ostaja tekee.

Osto-optiosta käytetään yleisesti englannin kielistä termiä *call* ja *myyntioptiosta* termiä *put*. Osto-optiossa siis option myyjä antaa option ostajalle oikeuden ostaa kohde-etuus toteutushintaan option myyjältä. Myyntioptiossa option myyjä antaa option ostajalle oikeuden myydä kohde-etuus toteutushintaan option myyjälle.

Optiot jakautuvat kahteen pääluokkaan riippuen siitä milloin option ostaja voi käyttää optio-oikeutensa eli toteuttaa option. Amerikkalaisen option mahdollinen toteutushetki on milloin tahansa option voimassaoloaikana eli ennen option umpeutumispäivää, kun taas eurooppalaisen option ainoa mahdollinen toteutushetki on option umpeutumispäivä. Tämä ei tarkoita sitä, että eurooppalaisella optiolla ei olisi arvoa ennen umpeutumispäivää, sillä option voi myydä edelleen esimerkiksi pörssissä ennen option umpeutumispäivää. Termit amerikkalainen ja eurooppalainen optio eivät tarkoita sitä, että Euroopassa tehtäisiin eurooppalaisia optioita ja Amerikassa amerikkalaisia optioita, vaan ne ovat vain nimiä näille erilaisille optioille. On olemassa myös muunlaisia optiota, joissa mahdolliset toteutushetket ovat eurooppalaisen ja amerikkalaisen option yhdistelmiä.

Optiota tehtäessä sovitaan onko kyseessä osto- vai myyntioptio, amerikk-



Kuva 2. Ostetun ja asetetun option tuoton riippuvuus kohde-etuuden arvosta toteutushetkellä S_T , kun option toteutushinta on X . Tässä tuotto on johdannaisen toteutushetken arvon ja ostohinnan erotus. Yhtenäinen viiva on ostetun option ja katkoviiva asetetun option tuottokäyrä.

kalainen vai eurooppalainen optio, mikä on kohde-etuus ja sen määrä, mikä on option voimassaoloaika, toteutushinta ja option ostohinta.

Optio voidaan *sulkea* ennen umpeutumispäivää. Suljettaessa tehdään vastakkainen optio, jolla varmistetaan alkuperäisestä sopimuksesta syntyvä kulu tai tuotto ennen sopimuksen umpeutumispäivää. Näin esimerkiksi ostettu optio voidaan sulkea myymällä optio, jolla on sama kohde-etuus, kohde-etuuden määrä, umpeutumishetki ja toteutushinta kuin ostetulla optiolla.

Optiomarkkinoilla toimivat sijoittajat jakautuvat suojautujiin (*hedgers*), spekulantteihin (*speculators*) ja arbitraattoreihin (*arbitrageurs*). Suojautajat haluavat vähentää riskiään. Näin voi tehdä esimerkiksi vakuutusyhtiö, jolla on osakesijoituksia ja joka haluaa varmistaa tietylle osake-erälle tietyn vähimmäistuoton. Vakuutusyhtiö voi esimerkiksi ostaa myyntioption, jossa kohde-etuus on osake-erän osakesarja, kohde-etuuksien määrä on osakkeiden lukumäärä osake-erässä ja toteutushinta on osakkeen arvo option ostohetkellä. Näin vakuutusyhtiö eliminoi riskin osakkeen arvon alenemisesta myyntioption voimassaoloaikana ja silti osakesijoituksesta voidaan saada lisätuottoja osakkeen arvon noustessa. Näin myyntioptio toimii vakuutuksena osakkeen arvon alenemista vastaan, ja vakuutusmaksu on optiosta maksettu hinta. Spekulantit hakevat voittoja suurella riskillä, koska optiosijoituksilla voidaan saada suuria voittoja pienellä pääomalla. Esimerkiksi jos osakkeen

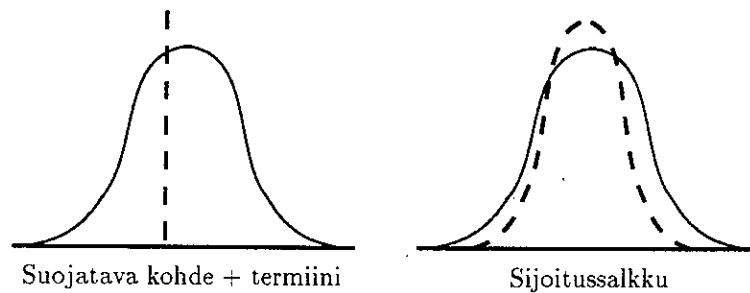
arvo on 100 € ja sijoittaja ostaa osto-option toteutushintaan 105 € ja maksaa optiosta hinnan 2.5 €. Mikäli osake nousee arvoon 110 € on optiosijoittajan tuotto 100% $((110-105-2.5)/2.5)$, mutta osakesijoittajan voitto on ainostaan 10%. Toisaalta jos osake nouseekin vain arvoon 105 € on optiosijoittajan tappio 100%, mutta osakesijoittajan voitto on 5%. Arbitraattori hyödyntää markkinoiden arbitraasia. Arbitraasilla tarkoitetaan, että mahdollista tehdä sijoitus, jolla saadaan voittoa ilman riskiä. Tällainen tilanne on esimerkiksi, kun kahdessa eri pörssissä noteeratun osakkeen arvot eroavat toisistaan. Tällöin arbitraattori ostaa osaketta pörssistä, jossa hinta on alhaisempi ja myy osakkeen pörssiin, jossa hinta on korkeampi. Samoin, jos sijoittajalla on riskitön sijoituskohde, josta saatava tuotto ylittää koron, jolla hän lainaa itselleen rahaa, on kysessä arbitraasi. Arbitraasin ilmenemistä kutsutaan arbitraasimahdollisuudeksi. Todellisessa sijoittajassa yhdistyvät kaikki kolme edellistä tyyppiä, joten puhtaita suojautujia, spekulantteja ja arbitraattoreita on vähän.

2.6 Sijoitusstrategioista

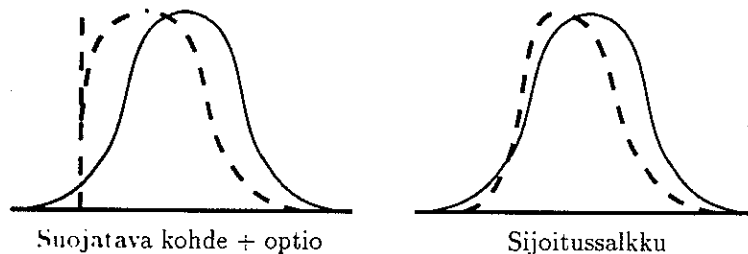
Johdannaisilla saadaan tehtyä rajattomasti erilaisia sijoitussalkkuja. Vakuutusyhtiöissä keskitytään pääasiassa sellaisiin johdannaisiin, joilla pyritään suojautumaan sijoitusrikiltä. Tällöin voidaan käyttää joko termiinejä, futuureja tai optioita. Näillä johdannaisilla on periaatteellisenä erona se miten johdannaisen tekeminen vaikuttaa sijoitussalkun tuoton jakaumaan. Seuraavassa tarkastelussa ei ole otettu huomioon johdannaiskaupoista aiheutuvia välityskustannuksia.

Terminillä ja futuurilla saadaan sijoitussalkun suojattavan kohteen tuotto tai tappio varmistettua etukäteen. Tällöin koko sijoitussalkun tuoton hajonta pienenee, josta seuraa että samalla tuoton odotusarvo pienenee myös. Kuva 3 esittää tilannetta.

Suojauduttaessa sijoitusriskiä vastaan ostamalla myyntioptio sijoitussalkun yksittäiselle kohteelle, saadaan suojattavan kohteen tuoton jakaumasta poistettua toteutushintaa huonommat tuotot. Toisaalta tästä edusta joudutaan maksamaan option ostohinta, joka on suojatun kohteen tuoton jakautuman poistetun osan odotusarvo. Näin suojattavan kohteen tuoton jakau-



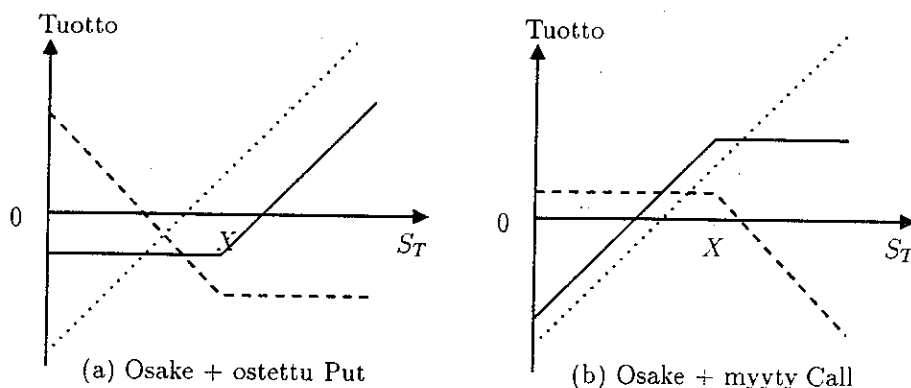
Kuva 3. Ostetun myyntitermiinin vaikutus suojattavan kohteen ja koko sijoitussalkun tuoton jakaumaan. Yhtenäinen viiva kuvaa tilannetta ennen myyntitermiinin ostoa ja katkoviiva tilannetta myyntitermiinin oston jälkeen.



Kuva 4. Ostetun myyntioption vaikutus suojattavan kohteen ja koko sijoitussalkun tuoton jakaumaan. Yhtenäinen viiva kuvaa tilannetta ennen myyntioption ostoa ja katkoviiva tilannetta myyntioption oston jälkeen.

masta tulee "leikattu" ja vastaavasti koko sijoitussalkun tuoton jakaumasta tulee oikealle vino jakauma. Kuva 4 esittää tilannetta option tapauksessa.

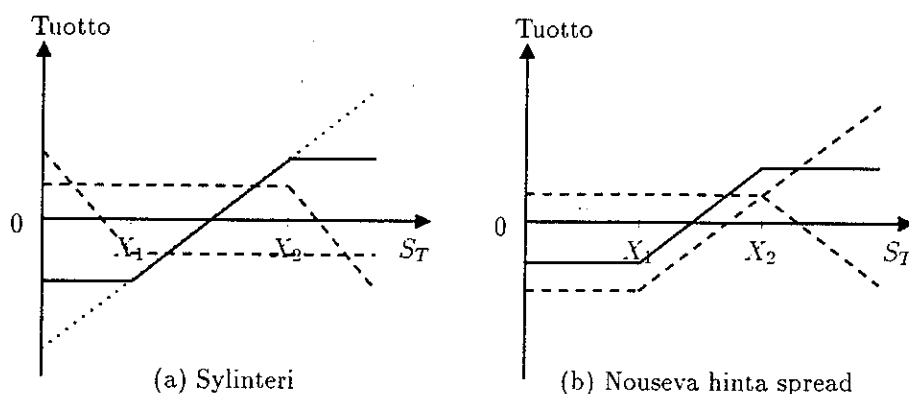
Optioilla tehdyistä suojaavista sijoitusstrategioista helpoimmin ymmärrettävä on strategia, jossa ostetaan myyntioptio ja osake. Tällöin saadaan poistettua osakkeen arvon alenemisesta aiheutuvat tappiot. Suojaavuuden hintana tyydytään myyntioption ostohinnan verran alhaisempaan tuottoon, mikäli osakkeen arvo tulevaisuudessa on toteutushintaa korkeampi. Tällaisen sijoitusstrategian tuottokäyrä on kuvan 5a yhtenäinen käyrä. Suojaavaa sijoitusstrategiaa pitää aina tarkastella kokonaisuutena, eikä komponenteittain. Jos kuvan 5a tilanteessa osakkeen arvo option umpeutumishetkellä olisi suurempi kuin toteutushinta, saattaa joku olla sitä mieltä, ettei optiota kannattanut ostaa, koska optiosta oli ainostaan menoja. Tällöin arvostelija ei



Kuva 5. Kahden sijoitusstrategian, joissa on yhdistetty yksi osake ja yksi optio, tuoton riippuvuus kohde-etuuden arvosta toteutushetkellä S_T , kun option toteutushinta on X . Katkoviiva on option, pisteviiva osakkeen ja yhtenäinen viiva koko salkun tuottokäyrä.

ole ymmärtänyt, että optio suojaa osakesijoitusta sijoitusriskiltä kuten vakuutus suojaa vakuutuksen ottajaa vahinkoriskiltä. Kuvan 5b tilanteessa on ostettu osake ja asetettu osto-optio. Tällainen sijoitusstrategia on suojaava, kun osakkeen arvo on suurempi kuin toteutushinta, sillä option arvo nousee, kun osakkeen arvo laskee. Tällöin ei kuitenkaan voida eliminoida osakkeen arvon romahtamisesta aiheutuvaa tappiota, sillä option arvon nousu lakkaa, kun osakkeen arvo putoaa alle option toteutushinnan. Lisäksi osakkeen arvon noustessa tämän salkun tuotto ei nouse.

Monimutkaisemmissa sijoitusstrategioissa voidaan yhdistellä useampia optioita samaan sijoitussalkkuun. Esimerkiksi kuvassa 6a on strategia, jota kutsutaan sylinteriksi. Tässä strategiassa ostetaan osake ja myyntioptio sekä asetetaan osto-optio, jonka toteutushinta on korkeampi kuin myyntioption toteutushinta. Jos osto- ja myyntioption ostohinnat ovat yhtäsuuret saadaan osakkeen tuotto sellaisenaan, mikäli osakkeen arvo on optioiden toteutushintojen välissä. Tällä strategialla saadaan poistettua suuren tappion mahdollisuus, mutta hintana on, ettei suuria voittojakaan voida saada. Myös pelkillä optioilla voidaan saada aikaan sijoitusstrategia, joka muistuttaa suojaavaa sijoitusta. Kuvan 6b nouseva hinta spread strategiassa ostetaan ja asetetaan myyntioptio, jossa asetetun osto-option toteutushinta on korkeam-



Kuva 6. Kahden sijoitusstrategian, joissa vähintään kaksi optiota, tuoton riippuvuus kohde-etuuden arvosta toteutushetkellä S_T , kun optioiden toteutushinnat ovat X_1 ja X_2 . Katkoviiva on option, pisteviiva osakkeen ja yhtenäinen viiva on koko salkun tuotokäyrä.

pi kuin ostetun osto-option toteutushinta. Näin saadaan leikattua sekä suuret tuotot että suuret tappiot ja toteutushintojen välisellä alueella tuotto muistuttaa sen taustalla olevan osakkeen tuottoa. Optiolla saadaan aikaan paljon kummallisempiakin sijoitusstrategioita, mutta tässä esitetyt ovat yksinkertaisimmat suojaamiseen sopivat strategiat. Lisää erilaisista strategioista voi lukea esimerkiksi John Hullin kirjasta *Options, Futures and Other Derivatives* [1], jossa sijoitusalkkuun otetaan useampia optioita joilla myös voimassaoloajat vaihtelevat.

Vakuutusyhtiössä optioita voitaisiin ainakin teoriassa käyttää eräänlaisena jälleenvakuutuksen korvikkeena takausvakuutuksessa. Takausvakuutuksessa vakuutusyhtiö joutuu korvaamaan, mikäli vakuutettu ei maksukyvyttömyyden takia pysty suoriutumaan rahallisista velvoitteistaan. Jos takausvakuutettu on osakeyhtiö, jonka osake on julkisesti noteerattu, niin teoriassa voidaan ostaa myyntioptio, jossa kohde-etuutena on kyseisen yhtiön osakkeita. Jos vakuutusyhtiö joutuu maksamaan korvauksen tämän vakuutuksen perusteella, on vakuutettu yhtiö maksukyvytön. Maksukyvyttömyyden seurauksena yhtiön osakkeen kurssi on todennäköisesti laskenut huomattavasti ja näin myyntioptiosta saatavilla tuotoilla pystytään peittämään vakuutuksesta aiheutuneita korvauksia. Myyntioption voimassaoloajan tulisi

olla vähintään vakuutuskauden mittainen, jotta optio antaisi "jälleenvakuutussuojan" koko vakuutuskaudelle.

3 Option hinnoittelu

Tässä luvussa käsitellään option hinnoittelun periaatteita. Hinnoittelussa keskitytään osakeoptioihin, minkä vuoksi ensin tarkastellaan osakeoptioiden hinnoitteluun liittyviä muuttujia ja niiden vaikutusta option hintaan. Sen jälkeen tarkastellaan muutamia optioiden hinnoittelun perustuloksia, jonka jälkeen esitetään kaksi hinnoittelumallia *binomipuuhinnoittelumalli* ja *Blackin ja Scholesin hinnoittelumalli*.

3.1 Hinnoittelun perusteet

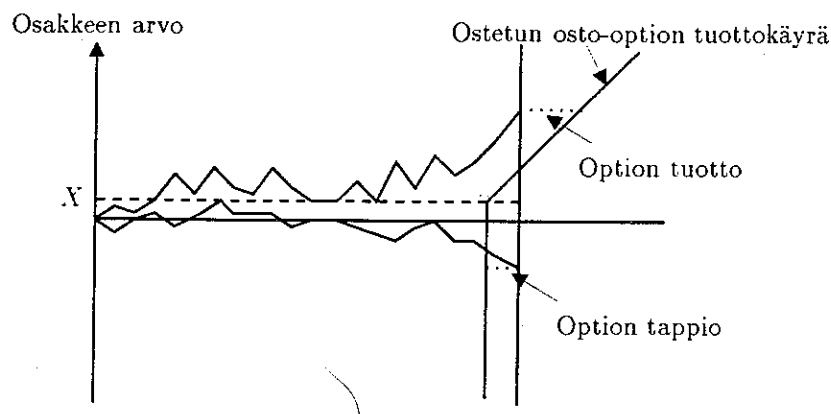
Option hinta on teoriassa helppo laskea. Esimerkiksi eurooppalaisen osto-option hinta c on odotusarvo osakkeen arvosta, joka ylittää option toteutushinnan X option umpeutumishetkellä T eli

$$c = E(\max\{S_T - X, 0\}).$$

Jotta kyseinen odotusarvo saadaan laskettua, on arvioitava osakkeen arvoa kuvaavan satunnaismuuttujan S_T jakauma, mikä on vaikeaa. Hinnoittelussa pyritään mallintamaan option arvon kehitykseen vaikuttavat tärkeimmät muuttujat, joiden avulla option arvo lasketaan.

Hinnoittelussa käytettäville muuttujille käytetään yleisesti seuraavia merkintöjä. Eurooppalaisen osto-option arvoa merkitään kirjaimella c , eurooppalaisen myyntioption arvoa kirjaimella p , amerikkalaisen osto-option arvoa kirjaimella C ja amerikkalaisen myyntioption arvoa kirjaimella P . Osakeoption arvo määräytyy osakkeen arvon mukaan ja näin osakeoption arvoon vaikuttavia suureita ovat muunmuassa:

- Osakkeen arvo, S .
- Option toteutushinta, X .
- Option umpeutumishetki, T .
- Osakkeen arvon muutoksen hajonta, σ .
- Riskitön tuottovaatimus, r .



Kuva 7. Ostetun eurooppalaisen osto-option tuoton riippuvuus osakkeen arvosta. Option toteutushinta on X .

- Osakkeesta tulevaisuudessa saatavat osingot. Muuttujalla D merkitään tulevien osinkojen pääoma-arvoa.

Nämä muuttujat ovat havaittavissa ja on mahdollista arvioida kohtuullisen luotettavasti niiden kehitys lyhyelle ajanjaksolle tulevaisuuteen. Lisäksi laskelmissa käytetään merkintää S_T osakkeen arvosta hetkellä T . Option arvo jakautuu *perusarvoon* ja *aika-arvoon*. Option perusarvo kertoo minkä arvoisen optio olisi, jos option umpeutumishetki olisi nyt. Esimerkiksi myyntioption tapauksessa option perusarvo on toteutushinnan ja kohde-etuuden tarkasteluhetken arvon positiivinen erotus eli $(X - S)^+$. Option aika-arvo on odotusarvo sille, miten kohde-etuuden arvon kehittyminen vaikuttaa option arvoon. Termillä *plusoptio*, (*in-the-money*) tarkoitetaan, että option perusarvo on kyseisellä hetkellä nollaa suurempi ja termillä *miinusoptio* (*out-of-the-money*) tarkoitetaan että option perusarvo on kyseisellä hetkellä 0. Kuvassa 7 on esitetty kaksi mahdollista aikasarjaa osakkeen arvolle. Kuvan oikeassa reunassa on ostetun osto-option tuottokäyrä, joka määrää option arvon option umpeutumishetkellä T . Kuvan vaakasuora katkoviiva on option toteutushinta X , joten optio on ollut plusoptio aina kun osakkeen arvo on ollut katkoviivan yläpuolella ja vastaavasti miinusoptio, kun osakkeen arvo on ollut katkoviivan alapuolella.

Taulukossa (1) on kuvattu miten option arvo muuttuu kun arvoon vaikut-

Muuttuja	Euroop. osto-optio	Euroop. myyntioptio	Amerik. osto-optio	Amerik. myyntioptio
Osakkeen arvo	+	-	+	-
Toteutushinta	-	+	-	+
Aika toteutukseen	+/-	+/-	+	+
Hajonta	+	+	+	+
Riskitön tuottov.	+	-	+	-
Osingot	-	+	-	+

Taulukko 1. Option arvon muuttuminen, kun arvoon vaikuttavan muuttujan arvo kasvaa ja muiden muuttujien arvot ovat vakioita.

tava muuttuja kasvaa ja muiden muuttujien arvot pysyvät vakioina. Osakkeen arvon nouseminen kasvattaa osto-option arvoa, koska option haltija voi ostaa osakkeen samaan hintaan kuin ennen, vaikka osakkeen arvo on noussut. Vastaavasti myyntioption arvo nousee jos osakkeen arvo alenee, koska option haltija saa edelleen myydä osakkeen samaan hintaan, vaikka osakkeen arvo on laskenut. Option toteutushinta vaikuttaa option arvoon päinvastoin, kuin osakkeen arvo. Tämä seuraa suoraan siitä, että option arvo riippuu option toteutushinnan ja osakkeen arvon erotuksesta.

Option voimassaoloajan piteneminen kasvattaa sekä amerikkalaisen osto- että myyntioption arvoa. Tämä johtuu siitä, että voimassaoloajaltaan pidemmässä optiossa on kaikki samat päätöksentekomahdollisuudet kuin lyhyemmässäkin optiossa, minkä lisäksi pidemmässä on myös muita päätöksentekomahdollisuuksia. Eurooppalaisessa optiossa ei voimassaoloajan pitenemisen vaikutusta voida arvioida näin suoraviivaisesti, koska muiden muuttujien arvot vaikuttavat siihen miten voimassaoloajan piteneminen muuttaa option arvoa. Esimerkiksi osinkojen jaon ajankohdat vaikuttavat siihen miten voimassaoloajan piteneminen vaikuttaa option arvoon. Oletetaan tilanne, jossa lyhyemmän osto-option umpeutumishetki on juuri ennen osinkojen jakoa ja pidemmän osto-option umpeutumishetki on osinkojen jaon jälkeen. Tällöin saattaa lyhyempi optio olla arvokkaampi, koska osinkojenjako yleensä laskee osakkeen arvoa. Toisaalta jos osinkoja ei jaeta, on tilanne päinvastoin, koska osakkeen kurssin oletetaan olevan tulevaisuudessa parempi kuin nyt.

Osakkeen arvon hajonnan lisääntyminen kasvattaa optioiden arvoa. Ostioption tuottaa sitä enemmän voittoa mitä korkeampi on osakkeen arvo. Toisaalta ostioption ei ole merkitystä kuinka paljon osakkeen arvo on toteutushinnan alapuolella, joten hajonnan vaikutus negatiiviseen suuntaan on jo leikattu tuotoista pois. Vastaavasti myyntioption tuottaa voittoa, jos osakkeen hinta laskee, mutta osakkeen hinnan noustessa ei tappioita tule enempää vaikka kurssi nousisi lisääkin.

Riskittömän tuottovaatimuksen muutoksen vaikutus option arvoon ei ole aivan yksiselitteinen. Kun riskitön tuottovaatimus kasvaa, joudutaan kasvavirrat diskonttaamaan korkeammalla korolla, joten tuottojen diskonttatut arvot laskevat. Toisaalta jos kaikki muut parametrit pysyvät muuttumattomina, mukaanlukien osakkeen arvo, seuraa tästä, että osakkeenkin odotetaan tulevaisuudessa tuottavan paremmin kuin ennen. Tällöin hajonnan muutoksen vaikutus on samanlainen kuin osakkeen arvon muutoksen vaikutus.

Osinkojen jaolla on päinvastainen vaikutus kuin osakkeen arvon muutoksella. Osingon jakaminen alentaa osakkeen arvoa, koska osinkojen jaon jälkeen yhtiö on jakanut pois osan varoistaan, joten sen arvo on laskenut. Näin ollen suuremmat osingot laskevat osakkeen arvoa enemmän, joten ostioption arvo laskee. Vastaavasti sekä riskittömän tuottovaatimuksen että osinkojen muutosten vaikutus myyntioption arvoon on päinvastainen kuin ostioption arvo. On luonnollisesti mahdollista sopia sellaisesta osakeoptiosta, jossa osinkojen vaikutus osakekurssiin eliminoidaan alentamalla toteutushintaa jaettujen osinkojen määrällä.

3.2 Option arvon rajat

Erilaisten optioiden arvoille voidaan määrätä tietyt perusraajat, jotka ovat aina voimassa. Seuraavissa laskelmissa oletetaan, että välityskustannuksia ei ole, lainaa voidaan ottaa ja rahaa tallettaa riskittömällä korolla sekä että arbitraasimahdollisuuksia ei ole. Lisäksi oletetaan, ettei osinkoja jaeta ennen option umpeutumishetkeä. Tulokset lasketaan osakeoptioille, vaikka samat tulokset ovat lähes aina voimassa myös muille kohde-etuuksille.

Ensin määritellään optioiden arvojen ylärajat. Ostioption arvo ei milloinkaan ylitä sen kohde-etuutena olevan osakkeen arvoa. Mikäli ostioption

arvo on korkeampi kuin osakkeen arvo, kannattaa ennemmin ostaa suoraan osake, koska osakkeesta saa tällöin aina paremman tuoton, eli

$$c \leq S \text{ ja } C \leq S.$$

Vastaavasti mikäli myyntioption arvo on suurempi kuin sen toteutushinta X ei myyntioptiota kannata ostaa. Ostaminen ei kannata, koska suurin mahdollinen tuotto myyntioptiolle on toteutushinta X , joka saadaan jos osakkeen arvo on 0. Tarkka myyntioption arvon yläraja, kun riskitön korko on r , on

$$p, P \leq Xe^{-rT}.$$

Optioiden arvojen alarajojen määrittämisessä käytetään apuna paljon käytettyä *vaihtoehtoisten sijoitussalkkujen menetelmää*, jossa vertaillaan kahden sijoitussalkun tuottoa. Ensin päätellään sijoitussalkkujen arvot option umpeutumishetkellä T , jonka jälkeen voidaan päätellä niiden arvot hetkellä 0. Tarkastellaan ensin eurooppalaisen osto-option arvon alarajaa, kahden sijoitussalkun avulla. Sijoitussalkussa A on yksi eurooppalainen osto-optio jonka toteutushinta on X , sekä rahaa määrä Xe^{-rT} , joka talletetaan. Sijoitussalkussa B on osake. Näiden sijoitussalkkujen arvot hetkellä 0 ovat:

$$\text{Sijoitussalkku A: } c + Xe^{-rT}$$

$$\text{Sijoitussalkku B: } S$$

Mikäli osakkeen arvo hetkellä T on suurempi kuin toteutushinta X , toteutetaan sijoitussalkun A osto-optio talletusvaroilla ja näin sijoitussalkun A arvo hetkellä T on S_T . Toisaalta, jos osakkeen arvo hetkellä T on pienempi kuin toteutushinta X ei osto-optiota toteuteta ja tällöin sijoitussalkun A arvo on X . Eli sijoitussalkun A arvo hetkellä T on $\max\{S_T, X\}$, kun taas sijoitussalkun B arvo on S_T . Tästä seuraa että sijoitussalkku A on aina vähintään yhtä arvokas kuin sijoitussalkku B eli $c + Xe^{-rT} \geq S$, joten

$$c \geq S - Xe^{-rT}.$$

Koska osto-option tappio on korkeintaan osto-option ostohinta, ja sekin on maksettu jo ostohetkellä, ei tulevaisuudessa voi enää tulla tappioita. Tämän vuoksi osto-option arvo ei voi olla negatiivinen, joten lopulliseksi osto-option hinnan alarajaksi saadaan

$$c \geq \max\{S - Xe^{-rT}, 0\}. \quad (1)$$

Eurooppalaisen myyntioption arvon alaraja saadaan samanlaisen päätelyn tuloksena. Valitaan sijoitussalkuksi A myyntioptio toteutushintaan X ja osake, sekä sijoitussalkuksi B rahaa määrä Xe^{-rT} , joka talletetaan, eli

Sijoitussalkku A: $p + S$

Sijoitussalkku B: Xe^{-rT} .

Mikäli osakkeen arvo hetkellä T on suurempi kuin toteutushinta X on sijoitussalkun A arvo S_T ja jos osakkeen arvo on pienempi kuin toteutushinta X toteutetaan myyntioptio, jolloin sijoitussalkun A arvo on X . Toisaalta sijoitussalkun B arvo on X eli sijoitussalkku A on aina vähintään yhtä arvokas kuin sijoitussalkku B, ja kun lisäksi myyntioption tappio on korkeintaan sen ostohinta saadaan

$$p + S \geq Xe^{-rT}, \text{ eli } p \geq Xe^{-rT} - S, \text{ joten } p \geq \max\{Xe^{-rT} - S, 0\}.$$

Amerikkalaisen osto-option tapauksessa voidaan osoittaa, että mikäli sijoittaja aikoo pitää itsellään osakkeet, jonka hän saa toteuttaessaan option, on optimaalista toteuttaa optio vasta umpeutumishetkellä. Edellinen voidaan osoittaa ajattelemalla, että option umpeutumishetki on t_2 ja hetkellä $t_1, t_1 < t_2$, optio on plusoptio ja sijoittaja toteuttaa sopimuksen hintaan X . Mikäli osakkeen arvo laskee hetkeen t_2 mennessä alle toteutushinnan X on sijoittajalla tällöin hallussaan osake arvoltaan $S_T \leq X$ ja jos hän olisi jättänyt toteutuspäätöksen hetkeen t_2 olisi hänellä rahaa määrä X . Tästä seuraa, että jos sijoittaja pitää hallussaan optiollaan ostamansa osakkeet ovat amerikkalainen ja eurooppalainen osto-optio saman arvoisia. Edellisestä ja kaavasta (1) seuraa siis

$$C \geq \max\{S - Xe^{-rT}, 0\},$$

jos sijoittaja ei aio myydä osakkeitaan. Toisaalta jos sijoittaja ei pidä itsellään osaketta, vaan myy sen heti optio-oikeuden toteuttamisen jälkeen, voi option aikaisempikin toteuttaminen olla kannattavaa. Koska amerikkalainen osto-optio voidaan toteuttaa vaikka heti, on option arvon ehdoton alaraja tällöin

$$C \geq \max\{S - X, 0\}.$$

Amerikkalaisen myyntioption tapauksessa option optimaalista umpeutumishetkeä ei voida päätellä edellisellä tavalla. Ainoastaan voidaan päätellä, että jos osakkeen kurssi putoaa nolnaan on optimaalista toteuttaa optio heti. Toteutus kannattaa, koska suurempaa voittoa ei voida saada ja toisaalta kahdesta samansuuruisesta kassavirrasta aikaisempi on arvokkaampi. Tästä seuraa, että amerikkalaisen myyntioption arvon alaraja on

$$P \geq \max\{X - S, 0\}.$$

3.3 Put–Call yhtälö

Seuraavaksi esitetään *Put – Call yhtälö*, jonka avulla saadaan eurooppalaisen osto-option ja eurooppalaisen myyntioption arvon välille yhtälö. Oletuksena on, että optioilla on sama kohde-etuus ja voimassaoloaika. Lisäksi oletetaan, että molempien hinnoittelussa käytetään samaa pääomitus korkoa r . Put – Call yhtälön avulla saadaan laskettua toisen option arvo kun toisen option arvo tiedetään. Tarkastellaan taas kahta sijoitussalkkua. Sijoitussalkussa A on osto-optio toteutushintaan X sekä rahaa määrä Xe^{-rT} joka talletetaan. Sijoitussalkussa B on myyntioptio toteutushintaan X sekä option kohde-etuutena oleva osake, jonka arvo option hinnoitteluhetkellä on S , eli

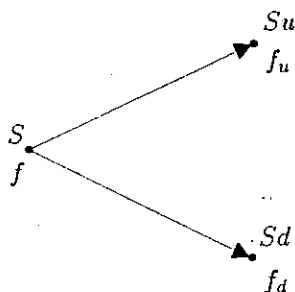
$$\text{Sijoitussalkku A: } c + Xe^{-rT}$$

$$\text{Sijoitussalkku B: } p + S.$$

Mikäli osakkeen arvo S_T toteutushetkellä T on pienempi kuin toteutushinta X raukeaa sijoitussalkun A osto-optio ja sijoitussalkun A arvo on X . Tällöin sijoitussalkussa B myydään osake myyntioptiolla hintaan X . Jos taas osakkeen arvo on suurempi kuin toteutushinta X , toteutetaan sijoitussalkun A osto-optio, jolloin sijoitussalkun A arvo on S_T . Toisaalta sijoitussalkun B myyntioptio raukeaa, joten sijoitussalkun B arvo on S_T . Näin sijoitussalkut ovat aina samanarvoiset riippumatta osakkeen arvosta ja optioiden arvoille saadaan *Put – Call yhtälö*:

$$p + S = c + Xe^{-rT}. \quad (2)$$

Amerikkalaisille optioiden arvoille ei saada vastaavaa yhtälöä. Jos oletetaan lisäksi, että osto-option haltija pitää itsellään hankkimansa osakkeen,



Kuva 8. Yksiaskelinen binomimalli, jossa S , S_u ja S_d ovat kohde-etuuden arvoja ja f , f_u ja f_d ovat johdannaisen arvoja.

on voimassa $c = C$. Koska lisäksi $P > p$, saadaan epäyhtälö

$$P + S > C + Xe^{-rT}.$$

3.4 Binomipuuhinnoittelu

Binomipuuhinnoittelumalli on suosittu menetelmä johdettaessa optioiden ja muiden johdannaisten hintoja, kun kohde-etuuden arvo käyttäytyy binomipuumallin mukaisesti. Tämän hinnoittelumallin soveltaminen osakejohdannaisiin on vaikeaa osakkeen arvon ennustamisen vaikeuden vuoksi, mutta toisaalta binomipuuhinnoittelumallilla saadaan esitettyä hyvin esimerkiksi osinkojen jako.

Mallissa tarkasteltavan johdannaisen voimassaoloaika T jaetaan samannomittaisiin jaksoihin $[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, t_n]$, missä $t_0 = 0$ ja $t_n = T$. Kohde-etuuden arvo S saa muuttua yhden jakson välillä joko arvoon S_u , $u > 1$, tai arvoon S_d , $d < 1$. Johdannaisen arvo jakson alussa on f ja jakson lopussa f_u mikäli kohde-etuuden arvo kasvaa ja f_d mikäli kohde-etuuden arvo alenee. Näin ainoat parametrit kohde-etuuden arvon käyttäytymisestä ovat parametrit u ja d , joilla siis kuvataan sekä kohde-etuuden arvon kehittymisen odotusarvo että hajonta.

Kuvassa 8 on esitetty yhden jakson muutokset sekä kohde-etuuden että johdannaisen arvossa. Koska mallissa oletetaan, että jakson lopussa kohde-etuuden arvon eri vaihtoehdot tiedetään, voidaan todeta ettei riskiä ole. Näin voidaan tuotto-odotukseksi asettaa riskittömän talletuksen korko r . Tarkas-

tellaan sijoitussalkkua, jossa jakson alussa myydään johdannainen hintaan f ja samalla ostetaan kohde-etuutta määrä Δ , eli sijoituksen arvo jakson alussa on $S\Delta - f$. Koska tiedetään sekä kohde-etuuden että johdannaisen arvo jakson lopussa sekä tuottovaatimus, saadaan tästä lasketuksi se kohde-etuuksien määrä Δ , joka pitää hankkia, jotta sijoitus olisi riskitön. Tämä merkitsee sitä, että sijoituksen arvon on jakson lopussa oltava riippumaton siitä kohoaaako kohde-etuuden arvo vai laskeeko se. Siis koska

$$Su\Delta - f_u = Sd\Delta - f_d, \text{ niin } \Delta = \frac{f_u - f_d}{S(u - d)}. \quad (3)$$

Tätä tulosta käyttämällä saadaan lasketuksi sijoituksen arvo jakson lopussa:

$$Su\Delta - f_u = \frac{u(f_u - f_d)}{u - d} - f_u = \frac{df_u - uf_d}{u - d}.$$

Koska riskittömälle sijoitukselle pitää saada riskittömän sijoituksen tuotto r , pitää sijoituksen arvo jakson alussa olla sama kuin sijoituksen arvo jakson lopussa diskontattuna jakson alkuun korolla r , eli

$$S\Delta - f = \frac{df_u - uf_d}{u - d} e^{-r(t_1 - t_0)}.$$

Tästä saadaan

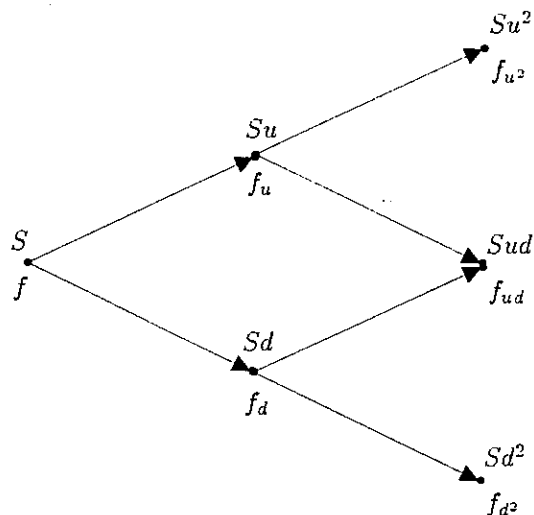
$$f = S\Delta - (Su\Delta - f_u) e^{-r(t_1 - t_0)} = e^{-r(t_1 - t_0)} (pf_u + (1 - p)f_d), \quad (4)$$

missä $p = \frac{e^{r(t_1 - t_0)} - d}{u - d}$. Tässä hinnoittelumallissa ei tarvitse explisiittisesti tietää mikä on kohde-etuuden arvon nousun tai laskun todennäköisyys, mikä saattaa tuntua omituiselta. Mutta kohde-etuuden arvon kehittymisen jakautuma on implisiittisesti otettu huomioon määrättäessä kohde-etuuden jakson lopun "varmoja" arvoja Su ja Sd .

Kaavassa 4 voidaan ajatella että p on todennäköisyys kohde-etuuden arvon kasvulle. Näin saadaan lasketuksi odotusarvo kohde-etuuden arvolle jakson lopussa t_1

$$E(S_{t_1}) = pSu + (1 - p)Sd = pS(u - d) + Sd = Se^{r(t_1 - t_0)}. \quad (5)$$

Edellisestä huomataan, että asettamalla kohde-etuuden arvon nousemisen todennäköisyydeksi p , saadaan sama tulos kuin jos kohde-etuuden arvolle



Kuva 9. Kaksiaskelinen binomimalli, jossa S on kohde-etuuden arvo ja f on johdannaisen arvo.

vaaditaan riskittömän sijoituksen tuotto. Mallissa siis eletään *riskittömässä maailmassa*, jossa sijoittajan ei tarvitse saada lisätuottoja ottamalleen riskille, joten tuotoksi riittää riskittömän sijoituksen tuotto. Kaavan 5 tulos on esimerkki *riskittömän hinnoittelun* periaatteesta. Tätä hinnoittelumallia voidaan käyttää myös riskillisessä maailmassa, käyttämällä riskittömänä tuottovaatimuksena kohde-etuudelta vaadittavaa tuottotasoa.

On tietenkin epärealistista olettaa, että johdannainen voidaan hinnoitella yhdellä jaksolla yli koko johdannaisen voimassaoloajan. Tätä varten yleistetään edellinen tulos yleisemmäksi n -jaksoiseksi malliksi. Tarkastellaan ensin kaksijaksoista mallia, joka on esitetty kuvassa (9). Merkitään jakson $[t_0, t_1]$ pituutta vakiolla τ . Käyttämällä kaavan 4 tulosta saadaan

$$f_u = e^{-r\tau}(pf_{u^2} + (1-p)f_{ud})$$

$$f_d = e^{-r\tau}(pf_{ud} + (1-p)f_{d^2})$$

$$f = e^{-r\tau}(pf_u + (1-p)f_d).$$

Yhdistämällä edelliset yhtälöt saadaan johdannaisen hinnaksi

$$f = e^{-2r\tau}(p^2 f_{u^2} + 2p(1-p)f_{ud} + (1-p)^2 f_{d^2}).$$

Yleistämällä edellinen tulos n -jaksoiseen malliin, jossa $T = n \cdot \tau$, saadaan

$$f = e^{-rT} \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} p^{n-i} (1-p)^i f_{u^{n-i} d^i} \right).$$

Tällä mallilla saadaan laskettua johdannaisten hintoja karkeasti, mutta tarkkoja tuloksia on vaikeampi saada. Tarkoissa tuloksissa pitäisi pystyä määrittämään parametrit u ja d tarkasti, sillä johdannaisten hintahan riippuu ainoastaan näistä muuttujista. Toisaalta binomipuuhinnoittelussa voidaan ottaa joustavasti huomioon esimerkiksi osinkojen jakaminen. Tällöin kohdeetuuden hintaa alennetaan osinkojen jakamishetkellä arvolla, joka vastaa jaettujen osinkojen määrää.

3.5 Blackin ja Scholesin hinnoittelumalli

Blackin ja Scholesin hinnoittelumalli on tunnetuin optioiden hinnoittelumalli. Ensin käsitellään sitä miten Blackin ja Scholesin hinnoittelumalli olettaa kohde-etuuden arvon kehittyvän. Tämän jälkeen johdetaan johdannaisten hinnoittelussa olennainen Blackin ja Scholesin differentiaaliyhtälö, sekä hinnoittelukaavat eurooppalaiselle osto- ja myyntioptiolle. Lopuksi esitetään miten hinnoittelussa käytettäviä parametreja voidaan estimoida. Blackin ja Scholesin hinnoittelumalli johdetaan käyttäen stokastisia differentiaaliyhtälöitä John Hullin kirjan [1] esitystä seuraten. Malli johdetaan osakeoptioille, mutta se on voimassa myös muille kohde-etuuksille, mikäli kohde-etuuden arvon kehittyminen täyttää mallin ehdot. Blackin ja Scholesin hinnoittelumalli voidaan johtaa myös käyttäen martingaaleja, kuten Neftci on tehnyt kirjassaan *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives* [2].

3.5.1 Osakkeen arvon kehittyminen

Aluksi on ymmärrettävä millaisia oletuksia on tehty osakkeen arvon kehitymisestä. Osakkeen arvon kehittymisen oletetaan olevan stokastinen prosessi, jolla on Markov-ominaisuus. Tämä tarkoittaa, että osakkeen arvo tulevana ajanhetkenä riippuu ainoastaan nykyarvosta, mutta ei siitä mikä osakkeen arvo on ollut tätä aikaisempina ajanhetkinä. Mallissa oletetaan, että osakkeen arvon suhteellinen muutos noudattaa *Wienerprosessia*, josta seuraavassa hieman tarkemmin.

Wienerprosessi, jota fysiikassa kutsutaan myös Brownin liikkeeksi, on eräs Markovprosessi. Fyysikot havaitsivat sen tarkkaillessaan pienten hiukkasten satunnaista liikettä, joka aiheutuu molekyylien liikkeestä. Wienerprosessi on jatkuva prosessi, mutta sitä voidaan aproksimoida diskreetillä prosessilla. Jatkossa muuttujalla z merkitään Wienerprosessia, jatkuvan Wienerprosessin muutosta ajan suhteen merkitään muuttujalla dz , $dz = \frac{\partial z}{\partial t}$, ja diskreetin Wienerprosessin muutosta ajan suhteen muuttujalla Δz_i , $\Delta z_i = z(t_i) - z(t_{i-1})$. Diskreetti Wienerprosessi täyttää kaksi ominaisuutta:

Ominaisuus 1: Wienerprosessin muutos $\Delta z_i = \epsilon_i \sqrt{\Delta t_i}$, jossa $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ ja ϵ_i on normaalisti jakautunut satunnaismuuttuja, jonka odotusarvo on 0 ja varianssi on 1, eli $\epsilon_i \sim N(0, 1)$.

Ominaisuus 2: Wienerprosessin muutoksen Δz_i arvot ovat riippumattomat jokaisella erillisellä ajanjaksolla Δt_i .

Prosessista tulee jatkuva, kun Δt_i lähestyy nollaa, jolloin $dz = \epsilon \sqrt{dt}$, jossa satunnaismuuttuja ϵ on jokaiselle ajanjaksolle dt normaalisti jakautunut, eli $\epsilon \sim N(0, 1)$.

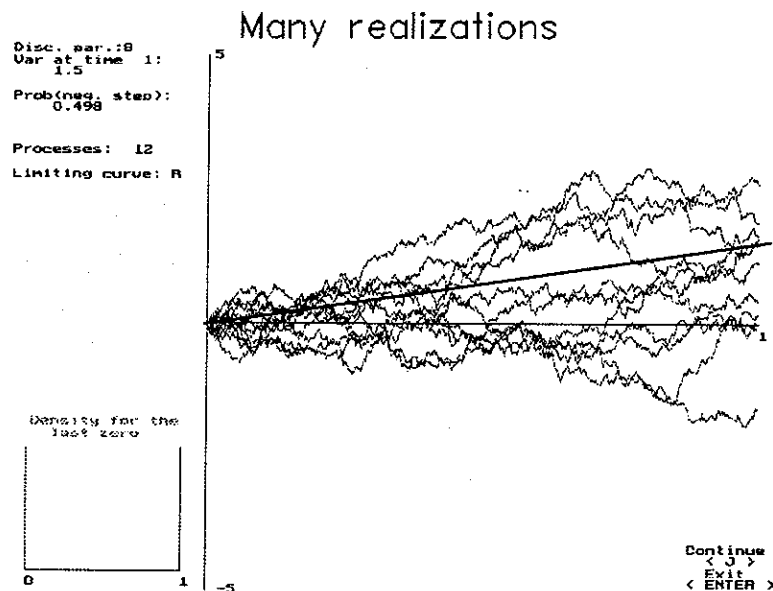
Diskreetillä Wienerprosessilla on seuraavia ominaisuuksia. Oletetaan, että diskreetti Wienerprosessi z on ajanjakson T mittainen ja $T = N \cdot \Delta t$, jossa Δt on vakio. Tällöin

$$z(T) - z(0) = \sum_{i=1}^N \Delta z_i = \sum_{i=1}^N \epsilon_i \sqrt{\Delta t}.$$

Näin saadaan lasketuksi diskreetin Wienerprosessin odotusarvo ja varianssi, jotka ovat

$$\begin{aligned} E[z(T) - z(0)] &= \sum_{i=1}^N E[\epsilon_i] \sqrt{\Delta t} = 0 \\ \text{Var}[z(T) - z(0)] &= \sum_{i=1}^N \text{Var}[\epsilon_i] (\sqrt{\Delta t})^2 = T. \end{aligned}$$

Osakkeen hinnoittelussa tarvitaan yleistettyä Wienerprosessia. Mallissa Wienerprosessiin lisätään deterministinen osa, jolla prosessiin saadaan trendi.



Kuva 10. Simuloituja yleistetyn Wienerprosessin realisaatioita. Kuvan suora on Wienerprosessin odotusarvo.

Yleistetty Wienerprosessi x on muotoa

$$dx = a dt + b dz,$$

jossa parametri a on yleistetyn Wienerprosessin poikkeama, parametri b on yleistetyn Wienerprosessin hajonta ja dz on Wienerprosessi. Kuvassa 10 on esitetty yleistetyn Wienerprosessin realisaatioita ja kuvaan lisätty suora, joka on yleistetyn Wienerprosessin odotusarvo. Laskemalla yleistetyn Wienerpro-

sessin odotusarvo ja varianssi saadaan

$$\begin{aligned} E[x(T) - x(0)] &= E\left[\sum_{i=1}^N (a \Delta t + b \epsilon_i \sqrt{\Delta t})\right] \\ &= \sum_{i=1}^N (a \Delta t + b E[\epsilon_i] \sqrt{\Delta t}) = aT \\ \text{Var}[x(T) - x(0)] &= \text{Var}\left[\sum_{i=1}^N (a \Delta t + b \epsilon_i \sqrt{\Delta t})\right] \\ &= \sum_{i=1}^N (b^2 \text{Var}[\epsilon_i] (\sqrt{\Delta t})^2) = b^2 T. \end{aligned}$$

Koska prosessin lisäykset ovat riippumattomat ja samoin jakautuneet, on yleistetyn Wienerprosessin muutos $x(T) - x(0)$ normaalisti jakautunut odotusarvolla aT ja varianssilla b^2T . Kuva 11 esittää tilannetta, jossa on 5000 yleistetyn Wienerprosessin realisaatiota. Kuvan eriväriset alueet esittävät realisaatioiden tiheyttä ja vasemmassa alakulmassa oleva käyrä kuvaa realisaatioiden jakauman hetkellä 1, joka on normaalijakauman tiheysfunktion kaltainen. Kuvaan on lisätty myös yleistetyn Wienerprosessin odotusarvoa kuvaava suora. Kun yleistettyä Wienerprosessia edelleen yleistetään saadaan *Iton prosessi*

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz,$$

jossa vakiot a ja b ovat muuttujien x ja t funktioita. Tätä prosessia tullaan käyttämään kohde-etuuden arvon kehityksen mallina option hintaa määrittäessä.

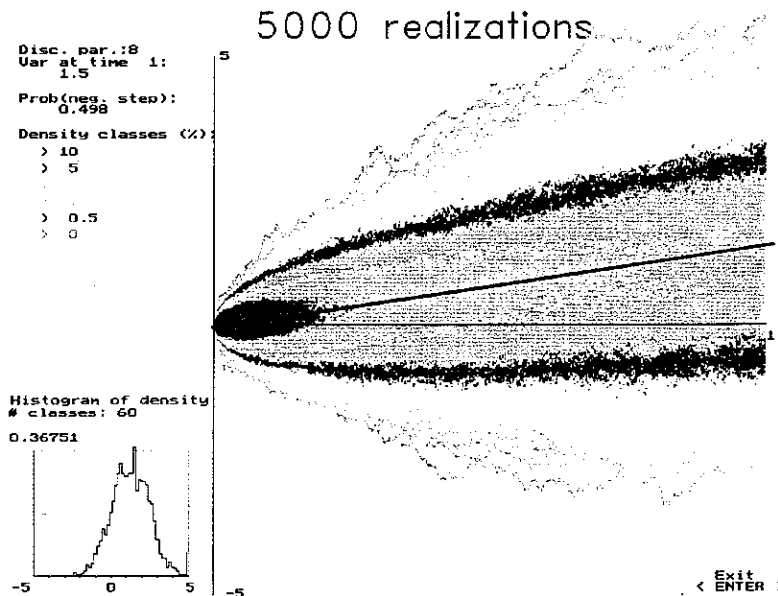
Blackin ja Scholesin hinnoittelumallin johtamisessa tarvitaan lisäksi *Iton lemmaa*, joka esitetään ja todistetaan seuraavaksi.

Lemma 3.1 (Iton lemma). Olkoon x *Iton prosessi*, joka toteuttaa

$$dx = a(x, t) dt + b(x, t) dz, \quad (6)$$

jossa z on Wienerprosessi. Iton prosessin poikkeama on $a(x, t)$ ja hajonta $b(x, t)$. Tällöin muuttujien x ja t jatkuva ja derivoituva funktio $G(x, t)$ toteuttaa yhtälön

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a(x, t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b(x, t)^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b(x, t) dz.$$



Kuva 11. 5000 yleistetyn Wienerprosessin realisaatiota. Kuvan värit kuvaavat realisaatioiden tiheyttä ja suora kuvaa yleistetyn Wienerprosessin odotusarvoa.

Näin G on myös Iton prosessi poikkeamalla

$$\frac{\partial G}{\partial x}a(x, t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}b(x, t)^2$$

ja hajonnalla

$$\frac{\partial G}{\partial x}b(x, t).$$

Todistus 3.1. Taylorin sarja funktion G muutokselle ΔG on

$$\Delta G = \frac{\partial G}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial G}{\partial t}\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}\Delta x^2 + \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial t}\Delta x \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial t^2}\Delta t^2 + \dots \quad (7)$$

Kun kaava (6) diskretisoidaan saadaan

$$\Delta x = a \Delta t + b \epsilon \sqrt{\Delta t},$$

jossa $a = a(x, t)$, $b = b(x, t)$ ja $\epsilon \sim N(0, 1)$. Laskettaessa termiä Δx^2 saadaan

$$\Delta x^2 = b^2 \epsilon^2 \Delta t + o(\Delta t), \quad (8)$$

jossa $\frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \rightarrow 0$, kun $\Delta t \rightarrow 0$. Näin ollen yhtälössä (7) pitää huomioida myös termi Δx^2 , koska siinä esiintyy termi Δt ensimmäisessä asteessa. Yhtälön (8) oikealla puolella oleva satunnaismuuttuja ϵ on normaalisti jakautunut odotusarvolla 0 ja varianssilla 1. Koska satunnaismuuttujan ϵ varianssi on 1 ja $E(\epsilon) = 0$ saadaan

$$\text{Var}(\epsilon) = E(\epsilon^2) - E(\epsilon)^2 = E(\epsilon^2) = 1.$$

Lisäksi

$$\text{Var}(b^2 \epsilon^2 \Delta t) = b^4 \Delta t^2 \text{Var}(\epsilon^2),$$

joten termin Δx^2 odotusarvo on $b^2 \Delta t$ ja varianssi on 0, jos muuttujan Δt korkeammat asteet jätetään huomioimatta. Näin yhtälön (8) oikeasta puolesta tulee deterministinen yhtälö, $\Delta x^2 = b^2 \Delta t$, kun Δt lähestyy nollaa. Kun edellinen tulos sijoitetaan kaavaan (7), ja kun Δx ja Δt lähestyvät nollaa

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x} dx + \frac{\partial G}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b^2 dt.$$

Lisäämällä edelliseen yhtälöön dx kaavasta (6) saadaan Iton lemmän yhtälö

$$dG = \left(\frac{\partial G}{\partial x} a(x, t) + \frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} b(x, t)^2 \right) dt + \frac{\partial G}{\partial x} b(x, t) dz. \quad \square \quad (9)$$

3.5.2 Blackin ja Scholesin differentiaaliyhtälö ja hinnoittelukaava

Blackin ja Scholesin mallissa osakkeen arvon oletetaan kehittyvän Iton prosessin mukaisesti

$$dS = \mu S dt + \sigma S dz,$$

jossa parametri μ on osakkeen oletettu *kasvavuus*, eli jatkuva kasvu, ja parametri σ osakkeen arvon kasvavuuden hajonta. Koska parametrit μ ja σ riippuvat valitusta aikayksiköstä, niin sovitaan, että aikayksikkönä on jatkossa yksi vuosi. Jakamalla edellinen yhtälö osakkeen arvolla, saadaan osakkeen arvon suhteellisen muutoksen prosessiksi

$$\frac{dS}{S} = \mu dt + \sigma \epsilon \sqrt{dt}.$$

Tästä voidaan päätellä, että lyhyellä aikavälillä Δt osakkeen arvon suhteellinen muutos on normaalisti jakautunut odotusarvolla $\mu\Delta t$ ja varianssilla $\sigma^2\Delta t$

Käytetään seuraavaksi Iton lemmän tulosta. Valitaan funktioksi $G(S, t) = \ln S$, josta saadaan osittaisderivaatoiksi

$$\frac{\partial G}{\partial S} = \frac{1}{S}, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} = -\frac{1}{S^2} \text{ ja } \frac{\partial G}{\partial t} = 0.$$

Sijoittamalla osittaisderivaatat yhtälöön (9) ja huomioimalla että $a = \mu S$ ja $b = \sigma S$ saadaan

$$dG = \left(\frac{1}{S}\mu S - \frac{1}{2S^2}\sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{1}{S}\sigma S dz = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dz. \quad \text{|| 2}$$

Koska parametrit μ ja σ ovat vakioita, noudattaa G Iton prosessia, jonka poikkeama on $\mu - \sigma^2/2$ ja varianssi on σ^2 . Lisäksi tiedetään aikaisempien tulosten perusteella, että prosessin G muutos aikavälillä $[t_0, t_1]$ on normaalisti jakautunut odotusarvolla

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (t_1 - t_0)$$

ja varianssilla $\sigma^2 \cdot (t_1 - t_0)$. Koska funktion G arvo hetkellä t on $\ln S$ ja hetkellä T on $\ln S_T$ saadaan

$$\ln S_T - \ln S \sim N \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t), \sigma^2 \cdot (T - t) \right].$$

Tästä saadaan satunnaismuuttujan $\ln S_T$ jakaumaksi

$$\ln S_T \sim N \left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t), \sigma^2 \cdot (T - t) \right].$$

Edellisestä havaitaan, että satunnaismuuttuja S_T on logaritminormaalisti jakautunut, eli satunnaismuuttuja S_T voi saada ainoastaan positiivisia arvoja. Tämä on järkevää koska satunnaismuuttuja S_T kuvaa osakkeen arvoa. Satunnaismuuttujan S_T odotusarvo on

$$E(S_T) = S e^{\mu(T-t)},$$

mikä onkin luonnollista, koska parametri μ määriteltiin osakkeen arvon kasvavuudeksi.

Seuraavaksi johdetaan *Blackin ja Scholesin differentiaaliyhtälö*. Differentiaaliyhtälön johtamisessa muodostetaan sijoitussalkku, joka pyritään saamaan riskittömäksi ajaksi Δt . Tällöin riskittömälle sijoitussalkulle voidaan vaatia riskittömän sijoituksen tuotto r . Oletetaan että

1. Osakkeen arvo seuraa Iton prosessia.
2. Johdannaisten myyminen ja ostaminen on haluttaessa aina mahdollista.
3. Välityskustannuksia ei ole.
4. Johdannaisen voimassaoloaikana ei jaeta osinkoja.
5. Arbitraasimahdollisuutta ei ole.
6. Riskittömän sijoituksen tuotto vuodessa on r kaikille sijoitusajalle.

Tällöin jokaisen edelliset oletukset täyttävän johdannaisen hinnan f tulee täyttää myös Blackin ja Scholesin differentiaaliyhtälö.

Olkoon tarkasteltavan johdannaisen hinta funktio f , joka riippuu osakkeen arvosta S ja johdannaisen jäljellä olevasta voimassaoloajasta t . Iton lemmasta saadaan

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dz.$$

Tarkastellaan seuraavaksi lyhyttä aikaväliä Δt , jolloin osakkeen arvo seuraa prosessia

$$\Delta S = \mu S \Delta t + \sigma S \Delta z, \quad (10)$$

ja johdannaisen hinta seuraa prosessia

$$\Delta f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) \Delta t + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S \Delta z. \quad (11)$$

Tarkasteltavaan sijoitussalkkuun kuuluu yksi myyty johdannainen ja ostettuja johdannaisen kohde-etuutena olevia osakkeita määrä $\partial f / \partial S$. Merkitään muuttujalla Π sijoitussalkun arvoa, eli

$$\Pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S. \quad (12)$$

Lasketaan seuraavaksi sijoitussalkun arvon Π muutos $\Delta\Pi$

$$\Delta\Pi = -\Delta f + \frac{\partial f}{\partial S}\Delta S.$$

Kun edelliseen yhtälöön sijoitetaan kaavojen (10) ja (11) tulokset, saadaan

$$\Delta\Pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S^2}\sigma^2 S^2 \right) \Delta t. \quad (13)$$

Edellisestä yhtälöstä on eliminoinut termi Δz , joten sijoitussalkku on riskitön ajan Δt . Nyt sijoitussalkulle pitää saada riskittömän sijoituksen tuotto r ajalta Δt , koska muuten syntyisi arbitraasimahdollisuus. Tästä siis seuraa, että

$$\Delta\Pi = r\Pi \Delta t$$

Sijoittamalla edelliseen kaavojen (12) ja (13) tulokset saadaan

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS\frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf, \quad (14)$$

joka on Blackin ja Scholesin differentiaaliyhtälö. Differentiaaliyhtälöllä on useita ratkaisuja, jotka riippuvat sekä valitusta johdannaisesta että asetuista reunaehdoista. Eurooppalaisen osto-option reunaehdot ovat

$$f = \max(X - S_t, 0), \quad \text{kun } t = T$$

ja eurooppalaisen myyntioption

$$f = \max(S_t - X, 0), \quad \text{kun } t = T.$$

Esimerkiksi voidaan osoittaa, että futuurin hinta

$$f = S - Ke^{-r(T-t)},$$

jossa S on kohde-etuuden arvo futuurin hinnoitteluhetkellä, K futuurin toteutushinta ja r sijoituksen tuottovaatimus, toteuttaa Blackin ja Scholesin differentiaaliyhtälön. Sijoittamalla osittaisderivaatat

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -rKe^{-r(T-t)}, \quad \frac{\partial f}{\partial S} = 1 \text{ ja } \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = 0,$$

yhtälöön (14) saadaan

$$-rKe^{-r(T-t)} + rS.$$

Tämä on sama kuin rf , joten futuurin hinta täyttää Blackin ja Scholesin differentiaaliyhtälön.

Seuraavaksi johdetaan *Blackin ja Scholesin hinnoittelukaava* eurooppalaiselle osto- ja myyntioptioille. Ensin johdetaan osto-option hinta. Oletetaan lisäksi, että option voimassaoloaika on T eli että $t = 0$. Eurooppalaisen osto-option hinta saadaan laskemalla odotusarvo osakkeen toteutushinnan X ylittävästä arvosta hetkellä T , ja diskonttaamalla tämä odotusarvo option osto hetkeen eli

$$c = e^{-rT} E[\max(S_T - X, 0)].$$

Edellisessä kappaleessa johdettiin satunnaismuuttujan S_T todennäköisyysjakauma

$$\ln S_T \sim N \left[\ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T, \sigma^2 T \right].$$

Merkitsemällä $S_T = e^w$ sekä merkitsemällä satunnaismuuttujan w jakauman parametreja

$$\tilde{\mu} = \ln S + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T \quad \text{ja} \quad \tilde{\sigma} = \sigma^2 T$$

ja merkitsemällä

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{z^2}{2}} dz,$$

saadaan

$$\begin{aligned} c &= e^{-\mu T} E[\max(S_T - X, 0)] = e^{-\mu T} \int_X^\infty (y - X) dF_{S_T}(y) \\ &= e^{-\mu T} \int_X^\infty (y - X) dF_{S_T}(y) = \frac{e^{-\mu T}}{\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{\ln w}^\infty \frac{(e^w - X)e^w}{e^w} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w-\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}\right)^2} dw \\ &= \frac{1}{\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{\ln w}^\infty e^{w-\mu T-\frac{1}{2}\left(\frac{w-\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}\right)^2} dw - \frac{Xe^{-\mu T}}{\tilde{\sigma}\sqrt{2\pi}} \int_{\ln w}^\infty e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{w-\tilde{\mu}}{\tilde{\sigma}}\right)^2} dw \end{aligned}$$

$$= S \Phi(d_1) - X e^{-\mu T} \Phi(d_2), \quad (15)$$

jossa

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (\mu + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{ja} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Tulos (15) on *Blackin ja Scholesin hinnoittelukaava* eurooppalaiselle osto-optiolle. Kuten aikaisemmin mainittiin on, amerikkalaisen osto-option hinta sama kuin eurooppalaisen osto-option hinta, mikäli sijoittaja pitää hankkimansa osakkeet, eli tällä edellytyksellä $C = c$.

Eurooppalaisen myyntioption hinta voidaan laskea joko samoin kuin edellä tai vaihtoehtoisesti voidaan käyttää hyväksi Put-Call yhtälöä (2) sivulta 20:

$$\begin{aligned} p &= c + X e^{-rT} - S = S \Phi(d_1) - X e^{-\mu T} \Phi(d_2) + X e^{-\mu T} - S \\ &= X e^{-\mu T} \Phi(-d_2) - S \Phi(-d_1). \end{aligned} \quad (16)$$

Amerikkalaiselle myyntioptiolle ei pystytä johtamaan analyttistä kaavaa, joten sen hinnoittelussa on tyydyttävä numeerisiin menetelmiin.

Eurooppalaisten optioiden tapauksessa Blackin ja Scholesin hinnoittelukaavat voidaan yleistää tilanteeseen, jossa osinkojen jako sallitaan. Vaikka tulevaisuudessa maksettavien osinkojen suuruudet ja maksuajat eivät ole tarkasti tiedossa voidaan ne ainakin lyhyellä aikavälillä yleensä arvioida kohtuullisella tarkkuudella. Merkitään muuttujalla D ennen option umpeutumispäivää jaettavien osinkojen pääoma-arvoa, kun diskonttauskorkona on käytetty korkoutuvuutta μ , joka on sama kuin osakkeen arvon kasvavuus. Option hintaa laskettaessa diskontatut osingot vähennetään kohde-etuuden arvosta. Tämä kuvastaa menetelmän ajatusta siitä, että osingot ovat "varmaa" tuloa. Esimerkiksi eurooppalaisen osto-option hintaa laskettaessa Blackin ja Scholesin hinnoittelukaava muuttuu tässä tapauksessa muotoon

$$c = (S - D) \Phi(d_1) - X e^{-\mu T} \Phi(d_2). \quad (17)$$

3.5.3 Parametrien estimoinnista

Blackin ja Scholesin hinnoittelukaavassa tarvitaan parametreja μ ja σ , jotta option hinta saadaan lasketuksi.

Parametri μ kuvaa sijoittajan odotusta osakkeen arvon kehittymisestä. Sijoittaja vaatii enemmän riskiä sisältävälle sijoitukselle aina korkeampaa tuottoa, joten μ on sitä suurempi mitä riskillisempi sijoitus on kyseessä. Sijoituksen arvon kasvavuus μ on kuitenkin viimekädessä hinnoittelijan oman päätöksen varassa ja sen on oltava oikeassa suhteessa muihin mahdollisiin sijoitusvaihtoehtoihin. Esimerkiksi jos sijoittaja saa riskittömästä sijoituksesta 5 % vuotuisen tuoton, niin hän saattaisi olettaa saavansa osakkeesta 10 % vuotuisen tuoton.

Parametri σ on puolestaan osakkeen arvon suhteellisen muutoksen hajontaa kuvaava parametri. Tämän parametrin arvo riippuu osakkeesta, joten se pitää arvioida ennen option hinnoittelua. Hajontaa σ voidaan arvioida historian perusteella. Estimoinnissa käytetään päivittäisiä, viikottaisia tai kuukausittaisia havaintoja. Mikäli käytetään päivittäisiä havaintoja, on empiirisesti todettu, että tällöin kannattaa ottaa huomioon vain ne päivät, jolloin kauppaa on tehty. Samoin osinkojen jaon vaikutus tulee puhdistaa aineistosta. Tunnettu asia on myös se, että mitä pidemmältä ajanjaksolta havaintoja on sitä tarkempi estimaatti yleensä saadaan. On kuitenkin huomioitava, että olosuhteet saattavat muuttua niin paljon, että kovin vanhat havainnot eivät ole enää käyttökelpoisia. Kirjassaan Hull [1, s. 233] toteaa, että estimoinnissa käytetään usein historiaa, joka on yhtä pitkä kuin on option voimassaoloaika. Eli jos option umpeutumishetki on kahden vuoden kuluttua, käytetään kahden vuoden aineistoa hajonnan määräämiseen. Kun käytettävä aineisto on valittu, voidaan hajonta arvioida esimerkiksi seuraavasti. Merkitään

- $n + 1$: havaintojen lukumäärä,
- S_i : osakkeen arvo hetkellä i ,
- τ : peräkkäisten havaintojen välinen aika vuosina,

ja merkitään lisäksi osakkeen arvon suhteellista muutosta ajanjaksolla τ_i parametrilla u_i

$$u_i = \ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right), \text{ kun } i = 1, \dots, n.$$

Koska nyt $S_i = S_{i-1}e^{u_i}$, on u_i kohde-etuuden arvon kasvavuus ajanjaksolla

i. Parametrin u_i hajonnan σ estimaattoriksi voidaan valita

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (u_i - \bar{u})^2},$$

jossa $\bar{u}$ on keskiarvo arvoista u_i . Koska estimaattori $\hat{\sigma}$ laskettiin ajanjaksolle τ , niin vuotuisen arvonmuutoksen hajonnan estimaattori on

$$\hat{\sigma}^* = \frac{\hat{\sigma}}{\sqrt{\tau}}.$$

Toista mahdollista tapaa arvioida osakkeen arvon suhteellisen muutoksen hajonta kutsutaan *implisiittiseksi hajonnaksi*. Tässä menetelmässä lasketaan markkinoilla havaituista optioiden hinnoista osakkeen arvon suhteellisen muutoksen hajonta. Koska muut hintaan vaikuttavat parametrit ja itse hinta tiedetään voidaan mallin mukainen hajonta estimoida numeerisesti. Näin laskettu hajonta vaihtelee riippuen option toteutushinnasta ja voimassaoloajasta. Hinnoittelussa käytettävä hajonta saadaan lasketuksi eri toteutushinnoista ja voimassaoloajoista estimoitujen hajontojen painotettuna keskiarvona. Hajontoja, jotka on laskettu hajonnalle herkimmistä optioista, tulee painottaa eniten. Esimerkiksi plusoptiosta laskettua hajontaa tulee painottaa enemmän kuin miinusoptiosta laskettua hajontaa, koska plusoption arvo on herkempi hajonnan muutokselle.

Lasketaan esimerkiksi miten hajonta johdetaan osakkeen arvon kehityksen historiasta. Taulukossa 2 on erään osakkeen arvo S_i kahdeltakymmeneltäyhdeeltä peräkkäiseltä kauppapäivältä. Taulukkoon on laskettu termit $u_i = \ln(S_i/S_{i-1})$, joten hajonta kauppapäivässä on

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{19} 0.00288} = 0.01231.$$

Koska vuodessa on noin 252 kauppapäivää on hajonta koko vuodelle

$$\hat{\sigma}^* = \frac{0.0131}{\sqrt{\frac{1}{252}}} = 0.1954.$$

i	S_i	S_i/S_{i-1}	u_i	i	S_i	S_i/S_{i-1}	u_i
0	20.000						
1	20.125	1.00625	0.00623	11	21.000	1.01205	0.01198
2	19.875	0.98758	-0.01250	12	21.125	1.00595	0.00593
3	20.000	1.00629	0.00627	13	20.875	0.98817	-0.01190
4	20.500	1.02500	0.02469	14	20.875	1.00000	0.00000
5	20.250	0.98780	-0.01227	15	21.250	1.01796	0.01780
6	20.875	1.03086	0.03040	16	21.375	1.00588	0.00587
7	20.875	1.00000	0.00000	17	21.375	1.00000	0.00000
8	20.875	1.00000	0.00000	18	21.250	0.99415	-0.00587
9	20.750	0.99401	-0.00601	19	21.750	1.02353	0.02326
10	20.750	1.00000	0.00000	20	22.000	1.01149	0.01143

Taulukko 2. Aineisto josta osakkeen arvon suhteellisen muutoksen hajonta lasketaan. Muuttuja i on kauppapäivä, S_i osakkeen arvo ja $u_i = \ln(S_i/S_{i-1})$.

4 Blackin ja Scholesin mallin herkkyys

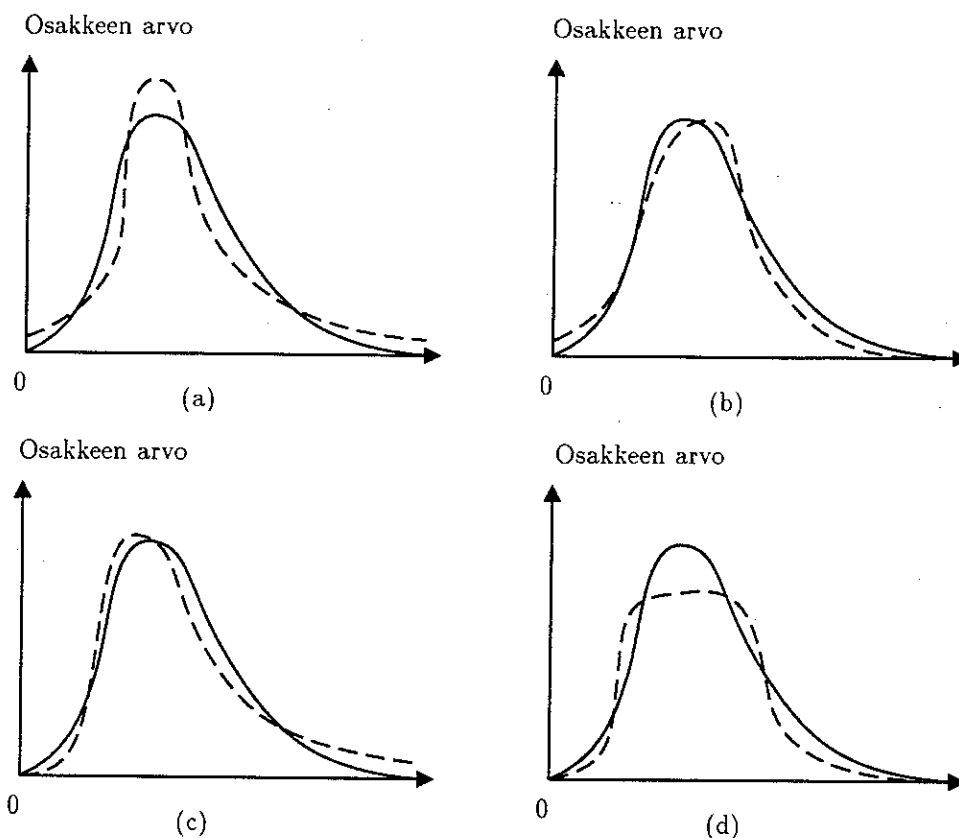
4.1 Oletukset

Tässä luvussa tarkastellaan Blackin ja Scholesin hinnoittelumallin tulosten herkkyyttä tehdyille oletuksille. Ensin tarkastellaan hinnoittelussa saatua tulosta, jossa osakkeen arvon todettiin olevan logaritminormaalisti jakautunut. Tämän jälkeen tarkastellaan hinnoittelumallin toimivuutta katastrofitilanteessa, jossa osakkeen arvo joko nousee tai laskee poikkeuksellisen paljon.

4.1.1 Osakkeen arvon logaritminormaalisuus

Blackin ja Scholesin hinnoittelumallissa osakkeen arvon todettiin olevan logaritminormaalisti jakautunut. Mikäli osakkeen arvon suhteellisen muutoksen prosessi ei olekaan oletusten mukainen, ei osakkeen arvokaan ole aivan logaritminormaalisti jakautunut. Kuvassa 12 on esitetty neljä erilaista vaihtoehtoa miten osakkeen arvon jakauma voi poiketa logaritminormaalijakaumasta, vaikka jakaumilla on sama odotusarvo ja varianssi. Tarkastellaan esimerkiksi osto-optiota, joka on vahva miinusoptyo, eli toteutushinta on paljon korkeampi kuin osakkeen arvo option hinnoitteluhetkellä. Tällöin mahdollisuus, että osakkeen arvo nousee yli toteutushinnan riippuu ainoastaan jakauman oikeasta hännästä, koska optiosta tulee plusoptio ainoastaan jos osakkeen arvo nousee paljon. Näin esimerkiksi kuvan 12a tilanteessa Blackin ja Scholesin hinnoittelukaava aliarvioi osto-option todellisen arvon ja samoin myös kuvan 12c tilanteessa, koska option hinta on odotusarvo option tulevasta tuotoista. Vastaavasti kuvien 12b ja 12d tilanteissa osto-option hinta yliarvioidaan. Tarkastellaan myyntioptiota, joka on vahva plusoptio, eli option perusarvo on suuri. Tässä tilanteessa optiosta tulee miinusoptyo ainoastaan, jos osakkeen arvo nousee paljon ja näin osakkeen arvon muutoksen jakauman oikea häntä on oleellinen. Kuvan 12a tilanteessa Blackin ja Scholesin ylihinnottelee option, koska osakkeen arvolla onkin arvioitua suurempi todennäköisyys nousta paljon.

Käytännössä on havaittu, että osakkeen arvon jakauma on lähimpänä kuvan 12a tilannetta. Tässä jakauman molemmat hännät ovat paksumpia ("flat tails") kuin logaritminormaalijakaumassa.



Kuva 12. Yhtenäinen viiva on logaritminormaalijakauma ja katkoviiva on osakkeen arvon mahdollinen muu jakauma, jolla on sama odotusarvo ja variassi kuin logaritminormaalijakaumalla.

4.1.2 Katastrofin vaikutus

Blackin ja Scholesin mallissa ei ole huomioitu erikseen osakkeen arvon romahtuksen tai poikkeuksellisen suuren arvon nousun mahdollisuutta. Ostettaessa optioita ei tällä olekaan niin suurta vaikutusta, koska maksimitappiot on jo ostohetkellä tiedossa. Ostettaessa myyntioptio toteutushintaan X on samalla poistettu osakkeen tuoton jakaumasta toteutushintaa X suuremmat arvot. Näin myyntioption omistajalle ei ole väliä onko osakkeen arvo umpeutumishetkellä yksi tai tuhat prosenttia toteutushintaa korkeampi, sillä myyntioptio on kuitenkin miinusoptio ja tappio on myyntioption ostohinta p . Toisaalta jos kohde-etuuden arvo romahtaa, saa myyntioption omistaja

voittoa, joka on maksimissaan $X - p$, kun osakkeen arvo on 0. Osto-option tilanteessa on osakkeen tuoton jakaumasta poistettu toteutushintaa X alemmat arvot. Osakkeen arvon noustessa option arvo nousee ja osakkeen arvon laskiessa tappio on korkeintaan option ostohinta c .

Mikäli on asetettu optio, ei tuleville tappioille ole aina mahdollista määrätä tarkkaa ylärajaa. Tällöin on varmaa ainoastaan, että tuotto on maksimissaan option ostajan maksama ostohinta. Mikäli on asetettu myyntioption toteutushintaan X on suurin mahdollinen tappio $X - p$, joka syntyy kun osakkeen arvo putoaa nolnaan. Toisaalta jos on asetettu osto-optio voi tappio olla maksimissaan $S_T - X - c$. Tämä tappio voi nousta suureksikin, mikäli osakkeen arvo nousee huimasti.

Blackin ja Scholesin hinnoittelumallissa oletettiin, että osakkeen arvo on logaritminormaalisti jakautunut. Näin malli sisältää myös mahdollisuuden, että osakkeen arvo putoaa lähelle nolaa tai nousee nopeasti. Suurin ongelma on, miten arvioida hinnoittelussa tarvittava suhteellisen arvon muutoksen varianssi riittävän tarkasti, jotta logaritminormaalijakaumalle saadaan sen oikea muoto. Yksittäisen osakkeen arvon dramaattinen muuttuminen ei kuitenkaan ole niin paha option osapuolille kuin koko pörssin arvon laskeminen tai nouseminen nopeasti. Tällöin tarkastellaan kuitenkin koko sijoitussalkun suojaamista katastrofin varalta, mikä on eri asia kuin yhden option hinnoittelu.

4.2 Parametrit

Tässä luvussa tarkastellaan miten Blackin ja Scholesin hinnoittelumallissa tarvittavat parametrit vaikuttavat option hintaan. Tarkasteltavia parametreja ovat osakkeen arvo, option voimassaoloaika, osakkeen arvon kasvuoletus ja osakkeen arvon suhteellisen muutoksen hajonta. Näistä parametreista mielenkiintoisin on hajonta, koska hajonta on vaikeimmin arvioitavissa oleva parametri. Jatkossa keskitytään ainoastaan eurooppalaisen myyntioption analysointiin, koska hinnoittelukaavat ovat osto- ja myyntioption perusominaisuuksiltaan samanlaiset, ja koska suojaattaessa käytetään pääasiassa myyntioptionia.

Myyntioption hinta lasketaan Blackin ja Scholesin hinnoittelukaavalla

$$p = Xe^{-\mu T} \Phi(-d_2) - S \Phi(-d_1),$$

jossa

$$d_1 = \frac{\ln(S/X) + (\mu + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \quad \text{ja}$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

Kaavan yksinkertaistamiseksi jaetaan myyntioption hinnoittelukaavan molemmat puolet option toteutushinnalla X . Merkitään tätä option hintaa suhteessa option toteutushintaan muuttujalla $\hat{p}$ ja osakkeen arvon suhdetta toteutushintaan muuttujalla R , eli $R = S/X$. Näin hinnoittelukaava muuttuu muotoon

$$\hat{p} = e^{-\mu T} \Phi(-d_2) - R \Phi(-d_1), \quad (18)$$

jossa

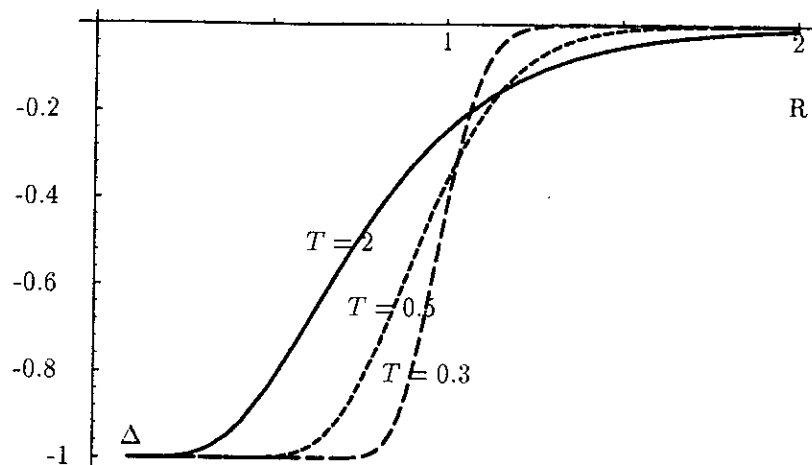
$$d_1 = \frac{\ln(R) + (\mu + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \quad \text{ja} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}.$$

Jatkossa tarkastellaan juuri hinnan $\hat{p}$ herkkyyttä hinnoittelussa tarvittavien parametrien S , T , μ ja σ suhteen. Muuttuja R ilmaisee nyt selvästi onko kyseessä plus- vai miinusoptyio. Mikäli $R < 1$ on optio plusoptio, jos taas $R > 1$ on optio miinusoptyio ja lisäksi jos $R = 1$ kutsutaan optiota tasaoptyioksi.

4.2.1 Osakkeen arvon ja option toteutushinnan suhde

Tarkastellaan ensin miten osakkeen arvon ja option toteutushinnan suhteen muutos vaikuttaa option arvoon. Oletetaan, että option toteutushinta pysyy vakiona ja ainoastaan osakkeen arvo muuttuu. Kuten taulukosta 1 sivulla 16 havaittiin, on pääsääntö eurooppalaisen myyntioption kohdalla, että mitä suurempi on arvo R , $R = S/X$, sitä pienempi on hinta $\hat{p}$. Lasketaan seuraavaksi myyntioption hinnan $\hat{p}$ osittaisderivaatta Δ muuttujan R suhteen:

$$\Delta = \frac{\partial \hat{p}}{\partial R} = \Phi(d_1) - 1. \quad (19)$$



Kuva 13. Kuvassa on esitetty osakkeen arvon ja myyntioption toteutushinnan suhteen R vaikutus myyntioption arvoon. Funktio Δ on myyntioption hinnan derivaatta muuttujan R suhteen ja eri käyrät kuvaavat option eri voimassaoloaikoja. Parametrien arvot ovat: $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $T = 2, 0.5, 0.1$.

Tarkasteltaessa osittaisderivaattaa (19) havaitaan, että mikäli $R \rightarrow \infty$, eli option toteutushinta on paljon alhaisempi kuin osakkeen arvo, niin Δ lähestyy arvoa 0. Tämä on luonnollista, koska myyntioptio on tällöin vahva minusoptio ja sellaisessa tilanteessa ei pieni muutos osakkeen arvossa vaikuta oleellisesti myyntioption arvoon. Vastaavasti, jos $R \rightarrow 0$, eli option toteutushinta on paljon suurempi kuin osakkeen arvo, on Δ lähellä arvoa -1 . Näin pienikin osakkeen arvonnousu vaikuttaa heti option arvoa alentavasti, kun myyntioptio on vahva plusoptio. Kuvassa 13 on kolme eri funktiota Δ muuttujan R suhteen ($0 \leq R \leq 2$). Käyrät vastaavat optioita, joiden parametrit poikkeavat toisistaan ainoastaan voimassaoloajan suhteen.

Taulukkoon 3 on laskettu muutamia myyntioption hintoja ja option hinnan herkkyyys osakkeen arvon muuttumiselle. Taulukosta havaitaan, että tasaoption ($R = 1$) tapauksessa option hinta on 0.0603 eli 6.0 % osakkeen arvosta ja osakkeen arvon muutos vaikuttaa -0.3662 -kertaisesti myyntioption hintaan. Lisäksi on laskettu minkä verran option hinta suhteellisesti muuttuu, kun osakkeen arvo nousee tai laskee 1 tai 2 prosenttia. Esimerkiksi, jos osakkeen arvo alenee 2 %, nousee option arvo lähes 13 %, eli option suh-

S	$\hat{p}(S)$	$\frac{\hat{p}(S) - \hat{p}(1)}{\hat{p}(1)}$	$\Delta(S)$
0.98	0.0680	0.1275	-0.4026
0.99	0.0640	0.0622	-0.3842
1.00	0.0603	0.0000	-0.3662
1.01	0.0567	-0.0593	-0.3488
1.02	0.0533	-0.1157	-0.3317

Taulukko 3. Myyntioption hinnan $\hat{p}$ muuttuminen, kun osakkeen arvo S muuttuu. Muiden parametrien arvot ovat: $X = 1.00$, $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $T = 0.5$.

teellinen hinta heilahtelee enemmän kuin osakkeen arvo. Näin huomataan, että kun osakkeen arvo päivän aikana saattaa vaihdella useita prosentteja, voi option hinta samalla muuttua jopa 20 prosenttia.

4.2.2 Voimassaoloaika

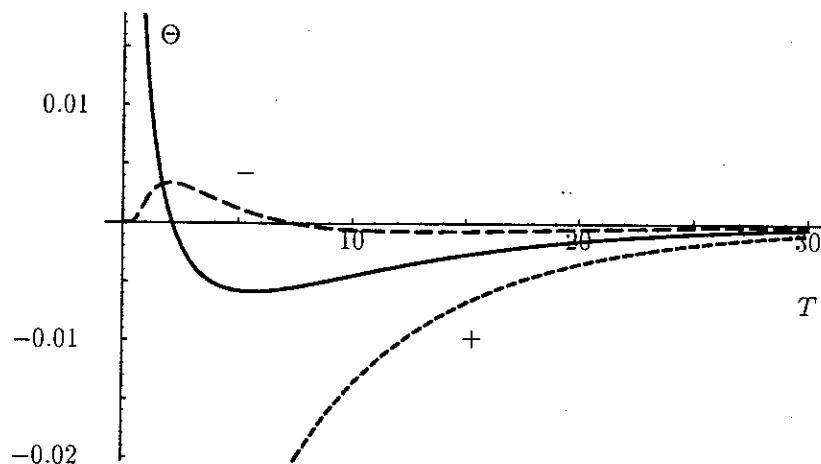
Tarkastellaan seuraavaksi miten option voimassaoloaika vaikuttaa myyntioption hintaan. Sivun 16 taulukon 1 mukaan eurooppalaisessa myyntioptiossa ei voida yleisesti sanoa minkälainen vaikutus voimassaoloajan muuttumisella on option hintaan. Tällöin todettiin, että voimassaoloajan muutoksen suuntaan vaikuttavat muiden muuttujien arvot. Myyntioption hinnan $\hat{p}$ osittaisderivaatta voimassaoloajan T suhteen on

$$\Theta = \frac{\partial \hat{p}}{\partial T} = e^{-rT} \left(\frac{\sigma \phi(-d_2)}{2\sqrt{T}} - r \Phi(-d_2) \right), \quad (20)$$

jossa

$$\phi(x) = \frac{\partial \Phi(x)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Kuvasta 14 havaitaan, että miinusooption tapauksessa option hinta nousee aluksi, kun voimassaoloaika kasvaa, mutta alkaa laskea kun voimassaoloaika kasvaa lisää. Toisaalta mikäli optio on riittävän vahva plusoptio, alenee option hinta aina, kun option voimassaoloaika kasvaa. Tämä on luonnollista, koska osakkeen arvon kehitys on positiivinen ja voimassaoloajan kasvaessa kasvaa



Kuva 14. Kuvassa on esitetty option voimassaoloajan vaikutus myyntioption arvoon. Funktio Θ on myyntioption hinnan derivaatta voimassaoloajan T suhteen. Käyrät kuvaavat plus- (+), tasa- ja miinusoptiota (-). Muiden parametrien arvot ovat $\mu = 0.1$ ja $\sigma = 0.3$.

todennäköisyys, että plusoptiosta tulee miinusoptio. Umpeutumishetki on kuitenkin yleensä tiedossa jo etukäteen, joten siksi tällä ei ole niin suurta merkitystä.

4.2.3 Kasvuoletus

Myyntioption hinnan herkkyyttä osakkeen tuottovaatimukselle μ Blackin ja Scholesin hinnoittelumallissa voidaan alustavasti tarkastella sivun 16 taulukon 1 avulla. Taulukon 1 perusteella havaitaan, että mitä suurempi on tuottovaatimus sitä alhaisempi on myyntioption arvo. Lasketaan seuraavaksi myyntioption $\hat{p}$ osittaisderivaatta tuottovaatimuksen μ suhteen

$$\rho = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \mu} = -T e^{-rT} \Phi(-d_2). \quad (21)$$

Osakkeen arvon muutosta kuvaava parametri μ on yleensä annettu etukäteen, eikä sitä estimoida aineistosta. Kuitenkin tämän parametrin valinnalla on tärkeä merkitys option hintaan, koska jos oletetaan että osakkeen arvon kehitys kiihtyy, seuraa tästä, että optiosta tulee todennäköisemmin miinusoptio. Taulukkoon 4 on laskettu myyntioption arvoja, kun osakkeen

μ	$\hat{p}(\mu)$	$\frac{\hat{p}(\mu) - \hat{p}(0.10)}{\hat{p}(0.10)}$	$\rho(\mu)$
0.08	0.0647	0.0726	-0.2244
0.09	0.0625	0.0358	-0.2188
0.10	0.0603	0.0000	-0.2133
0.11	0.0582	-0.0349	-0.2078
0.12	0.0561	-0.0689	-0.2024

Taulukko 4. Myyntioption hinnan $\hat{p}$ muuttuminen, kun osakkeen arvon kasvuoletus μ muuttuu. Muiden parametrien arvot ovat: $R = 1$, $\sigma = 0.3$, $T = 0.5$.

σ	Tasaoptio, $R = 1$			Miinusoptio, $R = 2$		
	$\hat{p}(\sigma)$	$\frac{\hat{p}(\sigma) - \hat{p}(0.3)}{\hat{p}(0.3)}$	$\Lambda(\sigma)$	$\hat{p}(\sigma)$	$\frac{\hat{p}(\sigma) - \hat{p}(0.3)}{\hat{p}(0.3)}$	$\Lambda(\sigma)$
0.26	0.0497	-0.1759	0.2640	$1.5 \cdot 10^{-6}$	-0.9110	0.0001
0.28	0.0550	-0.0881	0.2651	$5.6 \cdot 10^{-6}$	-0.6647	0.0003
0.30	0.0603	0.0000	0.2661	$1.7 \cdot 10^{-5}$	0.0000	0.0008
0.32	0.0656	0.0884	0.2668	$4.2 \cdot 10^{-5}$	1.4942	0.0018
0.34	0.0710	0.1770	0.2673	$9.1 \cdot 10^{-5}$	4.4111	0.0033

Taulukko 5. Myyntioption hinnan $\hat{p}$ muuttuminen, kun osakkeen arvon suhteellisen muutoksen hajonta σ muuttuu. Muiden parametrien arvot ovat $\sigma = 0.3$ ja $T = 0.5$.

arvon oletettua kehitystä kuvaava parametrin μ arvo on välillä 0.08 – 0.12 ja muuiden parametrien arvot ovat $R = 1$, $\sigma = 0.3$ ja $T = 0.5$. Taulukosta 4 huomataan, että yhden prosenttiyksikön muutos osakkeen tuottovaatimuksessa muuttaa option hintaa yli 3 %, kun tarkastellaan tasaoptiota. Toisaalta osakkeiden tuottovaatimukset eivät muutu kovin nopeasti, ja optiot ovat yleensä lyhytaikaisia, joten tuottovaatimuksen muutos option voimassaoloaikana ei yleensä ole ongelma.

4.2.4 Hajonta

Hajontaparametrin σ herkkyyden tarkastelu on mielenkiintoisinta, koska se on ainoa parametri, joka estimoidaan. Sivun 16 taulukon 1 mukaan hajonnan kasvaminen kasvattaa myyntioption arvoa. Arvo nousee, koska myyntioption omistajalle on sitä edullisempaa mitä enemmän osakkeen arvo alenee alle option toteutushinnan. Toisaalta toteutushintaa korkeammilla osakkeen arvoilla option perusarvo on aina 0. Lasketaan myyntioption osittaisderivaatta hajonnan suhteen

$$\Lambda = \frac{\partial \hat{p}}{\partial \sigma} = \sqrt{T} e^{-rT} \phi(-d_2). \quad (22)$$

Osittaisderivaatasta havaitaan, että hajonnan kasvaminen nostaa aina option hintaa. Taulukkoon 5 on laskettu tasaooption ja miinusooption arvoja. Taulukosta havaitaan, että hajonnan vaikutus option hintaan on paljon suurempi tasaoptiolla kuin miinusoptiolla. Tämä johtuu siitä, että tasaooption tapauksessa juuri hajonta saattaa helposti muuttaa option plusoptioksi. Pelkkä heilahtelu ei muuta vahvaa miinusoptiota plusoptioksi, vaan ennemmin koko osakkeen arvon kehityksen on muututtava negatiiviseksi. Lisäksi taulukosta 5 huomataan, että pienikin hajonnan muutos vaikuttaa merkittävästi tasaooption hintaan. Esimerkiksi jos hajonta muuttuu arvosta 0.30 arvoon 0.34 kasvaa option arvo 18 %. Miinusoptiolla hajonnan muutos vaikuttaa option arvoon vähän, mutta option arvon suhteellinen muutos on suuri, koska option arvo on niin alhainen.

Palataan sivulla 37 olevaan esimerkkiin, jossa tilastoaineistosta johdettiin osakkeen arvon suhteellisen muutoksen hajonta. Muutetaan sivun 37 taulukossa 2 kauppapäivän 7 osakkeen uudeksi arvoksi 20.5, jolloin uudeksi estimoiduksi hajonnaksi saadaan 0.2165, joka eroaa 0.0210 alkuperäisestä hajonnasta. Näin tämä muutos hajonnassa vaikuttaa noin 10 % option hintaan. Muutetaan vielä alkuperäisestä taulukosta 2 kauppapäivän 17 osakkeen uudeksi arvoksi 20.5, jolloin uudeksi hajonnaksi saadaan 0.2793, joka eroaa jo 0.0840 alkuperäisestä tuloksesta. Tällaisella hajontojen muutoksilla optioille saadaan jo aivan erisuuruisia hintoja.

5 STM:n määräyksiä optioista

Tässä luvussa käydään läpi STM:n määräys- ja ohjekokoelman [4] kohtia, joissa on optioita koskevia toimenpiteitä. Ohjeita on annettu sijoitussuunnitelman laatimiseen, option suojaavuuden määrittelymiseen, optioiden merkitsemiseen tuloslaskelmaan ja taseeseen, optioiden kelpoisuudesta vastuuvelan katteeseen sekä optioiden käytöstä vakavaraisuuslaskelmassa.

5.1 Johdannaiset sijoitussuunnitelmassa

Vakuutusyhtiöllä pitää olla johdannaisten käytöstä selkeät kirjalliset ohjeet, jotka ovat yhteensopivat yhtiön sijoitussuunnitelman kanssa. Näitä ohjeita kutsutaan *johdannaistoiminnan periaatteiksi*. Johdannaistoiminnan periaatteiden pitää sisältää ohjeet ainakin seuraaviin asioihin:

- Minkälaisiin tarkoituksiin johdannaisia voidaan käyttää vahinko- ja henkivakuutusyhtiöissä. STM on rajoittanut eläkevakuutusyhtiöiden johdannaisten käytön ainoastaan suojaamistarkoituksessa hankittuihin johdannaisiin.
- Minkä tyyppisiä johdannaisia voidaan käyttää.
- Mitkä ovat hyväksyttävät johdannaistrategiat.
- Mitkä ovat hyväksyttävät vastapuolet.
- Hyväksyttävät riskilimitit.
- Mahdolliset muut riskinoton rajoitteet.

Tämän lisäksi on huolehdittava siitä, että johdannaisista aiheutuvat riskit yhdessä muiden sijoitusriskien kanssa eivät ylitä sijoitussuunnitelmassa vahvistettuja rajoja.

STM:n määräys- ja ohjekokoelmassa on lisäksi vaatimukset sille, miten vakuutusyhtiön on hoidettava johdannaisiin liittyviä käytännön toimenpiteitä. Vakuutusyhtiöllä pitää olla riittävä johdannaisten seurantajärjestelmä, jolla voidaan seurata johdannaisista aiheutuvia riskejä. Ohjeissa määrätään

myös, että johdannaisten solmiminen ja valvominen on oltava eri henkilöiden vastuulla. Johdannaisten käytön asianmukaisuudesta on vastuussa yhtiön hallitus sekä toimitusjohtaja. He vastaavat toimintojen delegoinnista, henkilöiden auktorisoinnista sekä siitä, että yhtiössä on riittävä tietämys ja kokemus johdannaisista sekä niihin liittyvistä riskeistä. Sisäisen tarkastuksen on säännöllisesti tarkastettava koko johdannaisten riskienhallintajärjestelmä ja saatava esteettä kaikki tarvittava materiaali. Lisäksi ennen johdannaisten solmimista on vakuutusyhtiöllä oltava niiden kirjanpidon osalta tarpeellinen ohjeistus.

5.2 Suojaavat johdannaiset

Johdannaiset voidaan jakaa *suojaaviin* ja *ei-suojaaviin* johdannaisiin. STM:n määräys- ja ohjekokoelman mukaan vakuutusyhtiön pitää eritellä johdannaiset suojaviin ja ei-suojaaviin johdannaisiin, ja lisäksi työeläkeyhtiö saa hankkia ainoastaan suojavia johdannaisia. Jokaisen suojavan johdannaisten käyttötarkoitus on määriteltävä sekä dokumentoitava sopimusta tehtäessä. Mikäli näin ei tehdä, on johdannaista pidettävä ei-suojaavana. Jokaisen suojavan johdannaisten osalta on voitava eritellä se, mitä kohdetta ja mitä riskiä se suojaa. Näiden erittelyjen on oltava sijoitusten käsittelyä toimintapääomassa, vastuuvelan katteessa sekä tilinpäätöksen liitetiedoissa. Jotta johdannainen olisi suojava, pitää sen täyttää muutamia ehtoja:

- Johdannaisten arvon ja suojattavan kohteen arvojen muutosten välillä on oltava riittävä negatiivinen korrelaatio.
- Johdannaisten kohde-etuuden arvon on vastattava suojattavan kohteen arvoa.

STM:n määräys- ja ohjekokoelman mukaan korrelaation pitää olla pienempi kuin -0.8 , jotta johdannaista voidaan pitää suojavana. Mikäli suojaus ei ole riittävän tehokasta pitää johdannainen muuttua ei-suojaavaksi. Erityisesti on huolehdittava siitä, että arvio korrelaatiosta on luotettava. Korrelaation luotettavuuden kannalta on hyväksi mikäli suojattava erä ja suojavan johdannaisten kohde-etuus ovat mahdollisimman samanlaiset.

Suojaavan johdannaisen täytyy täyttää korrelaatiovaatimuksen lisäksi myös valuuttamääräinen vaatimus. Suojaavan johdannaisen kohde-etuuksien pääomien yhteismäärä ei saa merkittävästi ylittää sopimuksella suojattujen erien yhteismäärää. Johdannaisen käsittely on ylittävältä osuudelta muutettava ei-suojaamistarkoituksessa hankitun johdannaisen kaltaiseksi.

5.3 Optiot kirjanpidossa

Option ostohetkellä kirjataan optiosta maksettu hinta maksettujen ennakkomaksujen kaltaisiksi varoiksi. Vastaavasti option myynnistä saatu hinta kirjataan saatujen ennakkomaksujen kaltaisiksi veloiksi. Taseeseen kirjattavassa hinnassa pitää ottaa huomioon optioon välittömästi liittyvät palkkiot ja kulut.

Optio suljetaan, kun hankitaan optio, jolla alkuperäisen option tuotto tai kulu varmistetaan lopulliseksi ennen umpeutumispäivää. Suljettaessa ostettu optio, kirjataan alkuperäisestä optiosta maksetun, aikaisemmilla tilikausilla arvonmuutoksilla oikaistun hinnan ja sulkemissoptiosta saadun hinnan erotus tuotoksi tai kuluksi sille tilikaudelle, jolloin optio suljetaan. Vastaavasti suljettaessa myyty optio kirjataan tuotoksi tai kuluksi saadun, aikaisemmillä tilikausilla kirjatuilla arvonmuutoksilla oikaistun hinnan ja vastakkaisesta optiosta maksetun hinnan erotus.

Optio raukeaa mikäli option ostaja ei käytä optio-oikeuttaan umpeutumispäivään mennessä. Tällöin option ostaja kirjaa maksamansa hinnan, oikaistuna aikaisemmilla tilikausilla tehdyillä arvonmuutoksilla, kuluksi. Option myyjä kirjaa saamansa hinnan, oikaistuna aikaisemmilla tilikausilla tehdyillä arvonmuutoksilla, tuotoksi. Kirjaukset tehdään sille tilikaudelle, jolloin raukeaminen tapahtuu.

Optio toteutuu, mikäli option ostaja käyttää optio-oikeutensa. Tällöin selviää optiosta saatava voitto tai tappio. Optiosta maksettu tai saatu hinta, oikaistuna aikaisemmilla tilikausilla tehdyillä arvonmuutoksilla, kirjataan tällöin tuotoksi tai kuluksi sille tilikaudelle, jolloin optio toteutetaan. Mikäli optio toteutetaan ostamalla tai myymällä kohde-etuus, merkitään maksettu tai saatu hinta kohde-etuuden hankintahinnan lisäykseksi tai vähennykseksi.

5.4 Optiot tilinpäätöksessä

Option käsittely tilinpäätöksessä riippuu siitä, onko optio suojaava vai ei-suojaava. Pääsääntönä on, että suojaavaan optioon kirjataan vastakkaisia arvonmuutoksia kuin suojattavaan tase-erään ja ei-suojaavaan optioon kirjataan ainoastaan arvonalennuksia. Tilinpäätöksessä tarkastellaan option käypääarvoa tilinpäätöshetkellä. Tällaisena voidaan käyttää joko option markkina-arvoa tai sulkemishintaa.

5.4.1 Suojaava optio

Suojaamistarkoituksessa solmituista optioista voidaan tilinpäätöksessä kirjata tuotoksi korkeintaan määrä, joka vastaa suojattavasta kohteesta tilivuodelle kuluiksi kirjattua määrää. Suojaamistarkoituksessa ostetusta optiosta voidaan kuitenkin kirjata tuotoksi enintään option tilinpäätöshetken käyvän arvon ja sitä alemman hankintahinnan erotus. Vastaavasti voidaan suojaamistarkoituksessa myydystä optiosta kirjata tuotoksi enintään saadun hinnan ja sitä korkeamman tilinpäätöshetken käyvän arvon erotus.

Mikäli suojattavasta kohteesta kirjataan tilinpäätökseen arvostustuottoa, kirjataan suojaamistarkoituksessa ostetusta optiosta kulua. Tämän kulun määrä on optiosta maksetun hinnan kirjanpitoarvon ja sitä alemman tilinpäätöshetken käyvä narvon erotuksesta määrä, joka vastaa suojattavasta kohteesta tuotoksi kirjattua määrää. Kuluksi kirjataan myös määrä, jolla suojaavan option arvonlasku ylittää suojattavasta kohteesta tuotoksi kirjatun määrän. Tätä ylitystä vastaa arvonalennus perutaan, mikäli se osoittautuu aiheettomaksi seuraavassa tilinpäätöksessä. Vastaavasti toimitaan suojaamistarkoituksessa myydyn option tapauksessa.

Suojaamistarkoituksessa tehdystä optiosta ei kirjata arvostustuottoa tai -kulua, mikäli suojattavasta kohteesta ei kirjata tilinpäätöksessä arvonmuutosta tai jos suojattava kohde on taseen ulkopuolinen erä. Jos kuitenkin option negatiivinen arvonmuutos ylittää suojattavien kohteiden positiivisen arvonmuutoksen, kirjataan ylittävä osuus kuluiksi. Ylitystä vastaava arvonalennus perutaan, mikäli se osoittautuu aiheettomaksi seuraavassa tilinpäätöksessä.

5.4.2 Ei-suojaava optio

Option ostaja kirjaa tilinpäätökseen kuluksi hankintahinnan ja sitä alemman tilinpäätöshetken käyvän arvon erotuksen. Vastaavasti option myyjä kirjaa tilinpäätökseen kuluksi saadun hinnan ja sitä korkeamman tilinpäätöshetken käyvän arvon erotuksen. Realisoitumattomia voittoja ei kirjata, vaan voitot kirjataan vasta kun optio suljetaan, raukeaa tai toteutetaan.

5.5 Optiot vastuuvelan katteena

Optio ei yksinään kelpaa vastuuvelan katteeseen. Vastuuvelan katteessa voidaan käyttää ainoastaan sellaista suojaavaa optiota, joka suojaa jotain vastuuvelan kateomaisuutta arvonalenemista vastaan. Option pitää lisäksi olla kohdistettavissa johonkin katekelpoiseen omaisuuserään. Poikkeuksen tästä tekee optio, joka on sidottu johonkin indeksiin, mikäli suojattavan salkun rakenne vastaa tätä indeksiä. Omaisuuserän katearvo määritellään tällöin ottamalla huomioon option käypä arvo tilinpäätöshetkellä.

Jotta optio voidaan ottaa huomioon vastuuvelan katteessa, pitää sen olla tehty STM:n tarkoittamilla *säännellyillä markkinoilla* tai niihin rinnastettavilla markkinoilla. Katelaskelmien liitteeksi pitää liittää selvitys kateomaisuuteen luetuista optioista ja niiden vaikutuksista vastuuvelan katteena olevan omaisuuden arvoon.

5.6 Optiot vakavaraisuuslaskelmassa

Vakuutusyhtiön vakavaraisuuspääoman vähimmäismäärää laskettaessa lasketaan erikseen vakuutusteknisistä- ja sijoitusteknisistä riskeistä aiheutuvat vakavaraisuuspääoman alarajat. Sijoitusteknisistä riskeistä aiheutuvan vakavaraisuuspääoman laskennassa voidaan riskiä pienentää suojaavilla johdannaisilla. Laskennassa mukaan otettavat sijoitukset jaetaan luokkiin, joille on määrätty tuoton odotusarvo ja hajonta. Luokka, johon osakkeet kuuluvat, jaetaan lisäksi kolmeen ryhmään, joista yksi on osakkeet, jotka on suojattu suojaavilla johdannaisilla. Tämän ryhmän tuoton odotusarvo ja hajonta voidaan arvioida itse, mutta odotusarvolle ja hajonnalle pitää hakea sosiaali- ja terveystieteiden ministeriön hyväksyntä. Lisäksi ryhmän tuoton hajonta ei saa olla

alle 0.021.

Kirjallisuutta

- [1] Hull John C: *Options, Futures, and Other Derivatives* Third edition, Prentice-Hall International, Inc, New Jersey, 1997.
- [2] Neftci Salih N: *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives*, Academic Press, San Diego, 1996.
- [3] Puttonen Vesa, Valtonen Erik: *Johdannaismarkkinat*, WSOY, Porvoo, 1996.
- [4] *STM:n määräys- ja ohjekokoelma vakuutusyhtiöille* Dnro 58/021/97.

