

Pirkko Welin

***OPTIMAALISEN OMAPIDÄTYKSEN
MÄÄRÄÄMINEN
EXCESS OF LOSS - JA SURPLUS-
JÄLLEENVAKUUTUKSESSA***



SHV-HARJOITUSTYÖ

16.11.1993

ABSTRACT

Welin, P. (1993) Finding an Optimal Retention Level in Excess of Loss and Surplus Reinsurance.

Selecting the retention level is an important question in reinsurance. Several risk theoretical methods have been suggested in the actuarial literature for this purpose. This paper reviews a few of these approaches, namely the methods given by Beard - Pentikäinen - Pesonen, Rantala, Straub, Amsler, Waters, Centeno and Zecchin. Considerations are restricted to excess of loss and surplus reinsurance. The theories are presented in a unified notation and the methods of Straub and Amsler are further developed in this paper.

In the second part of the paper the performance of some of these methods is evaluated in a simulation study. Simulation data are generated using the Monte Carlo method and the optimal retention level, according to the optimality criteria that has been selected, is calculated both according to above mentioned methods and directly from the data.

ABSTRACT	1
1. JOHDANTO	2
2. OPTIMAALISEN OMAPIDÄTYKSEN MÄÄRÄÄMINEN	3
2.1 YLEISTÄ	3
2.2 MERKINNÄT JA OLETUKSET	5
2.2.1 YLEISTÄ	5
2.2.2 VAHINGOT	5
2.2.3 MAKSUT, TULOS JA RISKIPÄÄOMA	6
2.2.4 JÄLLEENVAKUUTUS	7
2.2.5 MUUT MERKINNÄT	9
2.3 CRAMÈRIN EPÄYHTÄLÖ	10
2.4 BEARD - PENTIKÄINEN - PESOSEN OMAPIDÄTYSSÄÄNNÖT	12
2.5 SOLVENSSITYÖRYHMÄN OMAPIDÄTYSSÄÄNTÖ	15
2.6 STRAUBIN OMAPIDÄTYSSÄÄNNÖT	18
2.6.1 OLETUKSET	18
2.6.2 NORMAALIJAKAUMAOLETUS	18
2.6.3 TAYLORIN KEHITELMÄ	24
2.6.4 VAKUUTUSMÄÄRÄN JA VAHINKOASTEEN RIIPPUVUUS	25
2.7 AMSLERIN OMAPIDÄTYSSÄÄNTÖ	26
2.7.1 OLETUKSET	26
2.7.2 QUOTA SHARE - JA EXCESS OF LOSS -JÄLLEENVAKUUTUS	26
2.7.3 SURPLUS-JÄLLEENVAKUUTUS	28
2.8 WATERSIN OMAPIDÄTYSSÄÄNTÖ	30
2.9 CENTENON OMAPIDÄTYSSÄÄNTÖ	34
2.10 ZECCHININ OMAPIDÄTYSSÄÄNNÖT	37
2.10.1 OLETUKSET	37
2.10.2 SUHTEELLISTEN OMAPIDÄTYSTEN MÄÄRÄÄMINEN	38
2.10.3 ABSOLUUTTISTEN OMAPIDÄTYSTEN MÄÄRÄÄMINEN UTILITEETTIFUNKTION AVULLA	40
3. SIMULOINTITUTKIMUKSEN TULOKSET	43
3.1 YLEISTÄ	43

3.2	SIMULOINNIN KÄYTETYT PARAMETRIT JA MENETELMÄT	44
3.2.1	VAHINGOJEN LUKUMÄÄRÄ	44
3.2.2	VAKUUTUSMÄÄRÄ	45
3.2.3	VAHINKOASTE	45
3.2.4	VARMUUSLISÄ JA RISKIPÄÄOMA	46
3.3	GENEROIDUN AINEISTON KUVAUS	47
3.3.1	VAHINGOJEN LUKUMÄÄRÄ	47
3.3.2	YKSITTÄISVAHINKO	48
3.3.3	KOKONAISVAHINKOMENO	49
3.4	OMAPIDÄTYSMÄÄRÄN LASKEMINEN	51
3.4.1	YLEISTÄ	51
3.4.2	BEARD - PENTIKÄINEN - PESONEN	51
3.4.3	SOLVENSSITYÖRYHMÄ	54
3.4.4	STRAUB	54
3.4.5	AMSLER	57
3.4.6	WATERS	58
3.5	SIMULOINTIAINEISTOSTA LASKETTU OMAPIDÄTYSMÄÄRÄ	60
3.6	MENETELMIEN VERTAILU JA JOHTOPÄÄTÖKSET	63
3.6.1	YLEISTÄ	63
3.6.2	YHDEN VUODEN TARKASTELUT	63
3.6.3	ÄÄRETTÖMÄN AIKAVÄLIN TARKASTELUT	64
3.6.4	YHDEN VUODEN JA ÄÄRETTÖMÄN AIKAVÄLIN TARKASTELUJEN VERTAILUA	65
3.7	SIMULOINNIN KÄYTTÖ OPTIMAALISTA OMAPIDÄTYSTÄ ETSITTÄESSÄ	67

LIITE 1 TEOLLISUUSPALOVAKUUTUS, VAHINGOITTUNEIDEN RISKEIN VAKUUTUSMÄÄRÄT JA VAHINKOASTEEN KAKSI ENSIMMÄISTÄ ORIGOMOMENTTIA PERUSTUEN VAKUUTUSALAN TILASTOKESKUKSEN PALOVAHINGOJEN TILASTOAINEISTOON VUOSILTA 1973 - 1978 SEKÄ VAHINKOASTEEN MOMENTTEJA VASTAAVAN BETA-JAKAUMAN PARAMETRIT α JA β .

LIITE 2 SATUNNAISLUKUGENERAATTORI BETA-JAKAUMALLE $\text{Beta}(\alpha, \beta)$, ALGORITMI B1.

LIITE 3 KUVAT L3.1, L3.2 JA L3.3.

KIRJALLISUUSVIITTEET

KIITOKSET

1. JOHDANTO

Omapidätysmäärän valitsemisesta on sanottu, että se on vakuutusjohdon vaikein ja vastuullisin tehtävä [GER82]. Tarkoitusta varten ehdotetuista matemaattisista ja tieteellis-teoreettisista ratkaisuisista on todettu, että ne ovat enintään suuntaa-antavia, eikä niillä ole käytännön vakuutustoiminnassa paljoakaan merkitystä [BEU78].

Gerathewohl toteaa, että vaikka omapidätyksistä päätetäänkin yleensä lähinnä intuition ja harkintaan perustuen - eikä vähiten siksi että formaalimpaan tarkasteluun tarvittavaa tilastoaineistoa ei ole käytettävissä - on näiden päätösten takana yleensä kuitenkin samanlainen järkeily kuin silloin, kun omapidätyksiä tarkastellaan vakuutusmatematiikan näkökulmasta. Omapidätyksen valintaan vaikuttavia tekijöitä ovat käytettävissä oleva pääoma, vakuutusmaksutaso (eli kuinka paljon varmuuslisää maksuissa on) ja vahinkostruktuuri [GER82]. Mitä enemmän pääomaa vakuutusyhtiöllä on käytettävissä, sitä enemmän vakuutusliikkeestä voidaan pitää omalla vastuulla. Samoin, mitä korkeampi maksutaso on, sitä korkeampi omapidätys voidaan valita. Lukuisista pienistä vahingoista koostuva liike edellyttää toisenlaista jälleenvakuutusratkaisua kuin muutamasta hyvin eri kokoisesta vahingosta koostuva liike. Kun näihin tekijöihin lisätään vielä riskinottohalukkuus, niin saadaankin kokoon ne parametrit, joiden vaikutusta omapidätykseen seuraavissa luvuissa tutkitaan.

Luvussa 2 esitellään joitakin omapidätysten määrittämiseen ehdotettuja riskiteoreettisia malleja. Luvussa 3 generoidaan Monte Carlo -periaatteella simulointiaineisto, jonka avulla kokeillaan, millaisia omapidätyksiä nämä mallit tuottavat "käytännössä". Tämän lisäksi omapidätysmäärä approksimoidaan aineistosta suoraan, ja näin saatua tulosta verrataan mallien antamiin arvoihin. Tässä työssä ei tulla antamaan kaikenkattavaa ratkaisua omapidätyksen valintaongelmaan, mutta luku 3 on esimerkki siitä, miten simulointitutkimusta voitaisiin käyttää apuna omapidätystä määrättäessä.

2. OPTIMAALISEN OMAPIDÄTYKSEN MÄÄRÄÄMINEN

2.1 Yleistä

Tässä luvussa tullaan esittelemään lyhyesti optimaalisten omapidätysmäärien laskemiseksi johdettuja riskiteoriaan pohjautuvia menetelmiä. Mukaan on otettu Beard - Pentikäinen - Pesosen [BPP84], solvenssityöryhmän [RAN82], Straubin [STR78][STR88], Amslerin [AMS84], Watersin [WAT79] [WAT83], Centenon [CEN91] ja Zecchinin [ZEC87] ehdottamat ratkaisut.

Suurin osa menetelmistä käsittelee omapidätyksen laskemista excess of loss - jälleenvakuutuksessa johtuen tämän jälleenvakuutusmuodon riskiteoreettisesta selkeydestä. Excess of loss -jälleenvakuutuksessa voidaan tarkastella joko yhteisen omapidätyksen etsimistä koko portfoliolle - kohdat 2.4 (Beard et al.), 2.5 (solvenssityöryhmä), 2.6 (Straub) ja 2.7 (Amsler) - tai omapidätyksen etsimistä joka riskille erikseen - kohdat 2.8 (Waters), 2.9 (Centeno) ja 2.10 (Zecchin). Beard et al. ja Straub tarkastelevat myös sitä, miten omapidätykset määrätään silloin, kun portfolio on jaettu osiin (esimerkiksi osastoittain). Tällöin ratkaisu etsitään käyttämällä hyväksi Lagrangen kertoimia. Tässä tutkielmassa ei kuitenkaan paneuduta osastokohtaiseen problematiikkaan.

Osassa lähteenä käytetyistä artikkeleista on esitelty omapidätyksen laskeminen quota share ja stop loss -tapauksessa. Tässä tutkielmassa keskitytään kuitenkin lähinnä surplus ja excess of loss -jälleenvakuutusmuotoihin. Quota share -jälleenvakuutuksen tulokset esitellään vain silloin, kun ne selventävät surplus ja excess of loss -tapauksessa käytettyjä menetelmiä.

Beard et al. ja solvenssityöryhmän julkaisuissa todetaan, että excess of loss - jälleenvakuutukselle johdettuja omapidätysmääriä voidaan käyttää suuntaa-antavina approksimaatioina myös surplus-jälleenvakuutuksessa. Vain Straubin artikkeleissa tutkitaan suoraan sitä, miten omapidätysmäärät tulisi valita surplus-jälleenvakuutuksessa (kohta 2.6). Surplus-jälleenvakuutus on selvästi hankalampi käsitellä kuin muut jälleenvakuutusmuodot. Siinä ei riitä, että tun-

netaan vahinkojakaumat, vaan näiden lisäksi tarkasteluissa joudutaan otta-
maan huomioon myös, millä perusteella vahingoittunut riski on jaettu sedentin
ja jälleenvakuuttajan kesken. Perusteena voi olla esimerkiksi riskin vakuutus-
määrä tai EML-arvio. Kutsutaan sitä jatkossa vakuutusmääräksi ja oletetaan,
että vahingon määrä ei koskaan ylitä vakuutusmäärää. Straub jakaa yksittäi-
sen vahingon osatekijöihin siten, että vahingon määrä kirjoitetaan vakuutus-
määrän ja vahinkoasteen tulona. Hän olettaa lisäksi, että nämä tekijät ovat
toisistaan riippumattomat (alakohdat 2.6.2 ja 2.6.3). Alakohdassa 2.6.4 tut-
kitaan, miten riippumattomuusoletuksesta luopuminen vaikuttaa laskusään-
töihin. Kohdassa 2.7 yleistetään Amslerin excess of loss -jälleenvakuutusta
koskevat tulokset koskemaan myös surplus-jälleenvakuutusta.

Ehdotetuissa omapidätysmäärien laskusäännöissä käytetään useita eri opti-
mointikriteerejä. Beard et al. lähestymistavassa (kohta 2.4) etsitään valittua
vuoden vararikkotodennäköisyyttä vastaavat omapidätykset. Kohdassa 2.5
solvenssityöryhmä pyrkii löytämään sellaisen omapidätysmäärän, jolla koko
liikkeen varmuuslisän tarve minimoituu. Straub (2.6) ja Amsler (2.7) etsivät
omapidätystä, jolla äärettömän aikavälin vararikkotodennäköisyys on valitun
suuruinen vakio. Myös Waters (2.8) ja Centeno (2.9) tarkastelevat äärettö-
män aikavälin vararikkotodennäköisyyttä. Heillä tavoitteena on minimoida
tämä todennäköisyys. Zecchin (2.10) lähtee liikkeelle yksinkertaisesta opti-
mointiongelmasta, eli omapidätykset tulee valita siten, että omalla vastuulla
olevan tuloksen varianssi minimoituu (2.10.2). Zecchin tutkii myös utiliteetti-
funktion hyväksikäyttöä omapidätysten määräämisessä (2.10.3).

Seuraavissa kohdissa omapidätysten määräämistavoista esitetään lähinnä vain
pääperiaatteet. Yksityiskohtaiset kaavojen ja laskualgoritmien johtamiset sekä
lauseiden todistukset on pääsääntöisesti jätetty pois. Tavoitteena on antaa
yleiskuva siitä, millä oletuksin ja miten edeten laskusääntöihin on päädytty.
Yksityiskohtien osalta viitataan lähteisiin.

Ennen varsinaisia menetelmiä esitellään aluksi käytettävät merkinnät ja tehtä-
vät oletukset (2.2). Kohdassa 2.3 esitetään lyhyesti niin sanottu Cramérin
epäyhtälö, johon tullaan viittamaan usean menetelmän yhteydessä. Ne las-
kukaavat ja algoritmit, joita tullaan kokeilemaan simulointiosuudessa luvussa
3, on numeroitu.

2.2 Merkinnot ja oletukset

2.2.1 Yleistä

Koska omapidätysmäärien määräämissäännöt on koottu useammasta eri lähteestä, on niissä käytetty hyvin kirjavia merkintätapoja. Malleja varten tehdyt oletukset poikkeavat myös jonkin verran toisistaan. Jotta menetelmiä voitaisiin paremmin vertailla keskenään ja jotta niiden kokeileminen luvussa 3 olisi mahdollista, on ne seuraavassa pyritty esittämään mahdollisimman yhtenäisin merkinnoin ja oletuksin, pääasiassa käyttäen kirjan Beard - Pentikäinen - Pesonen merkintöjä. Näistä merkinnoista poiketaan silloin, kun niitä käyttäen syntyisi merkintöjen päällekkäisyyttä. Toinen poikkeama on se tapa, millä koko liikkeen, jälleenvakuuttajan ja omalla vastuulla olevat suuret erotetaan toisistaan. Esitellään seuraavassa valitut merkinnot.

2.2.2 Vahingot

Vahinkoja koskien käytetään seuraavia merkintöjä

k	vuoden vahinkojen lukumäärä
$Z \sim S(z)$	yksittäisen vahingon määrä
$X \sim F(x)$	vuoden vahinkomeno yhteensä
H	vahinkojen lukumäärään vaikuttava struktuurimuuttuja.

Kaikki yllä mainitut suuret ovat satunnaismuuttujia. Jatkossa oletetaan aina, että vahinkojen lukumäärä k ja yksittäinen vahinkomäärä Z ovat stokastisesti riippumattomia. Lisäksi oletetaan, että yksittäiset vahingot ovat keskenään riippumattomia ja samoin jakautuneita, ja niiden jakaumaa merkitään S :llä. Vuoden vahinkomeno on vuoden yksittäisvahinkojen summa. Merkitään lisäksi

$$n = E(k)$$

$$P = E(X) = n E(Z).$$

Vahinkojen lukumäärän oletetaan yleensä (ellei toisin mainita) noudattavan Poisson-jakaumaa, jolloin

$$\text{Var}(k) = n \quad \text{ja} \quad \text{Var}(X) = n E(Z^2).$$

Kohdissa 2.4, 2.5 ja 2.7 mainitaan struktuurimuuttuja H . Se esiintyy vain Poisson-jakautuneen vahinkolukumäärän yhteydessä. Struktuurimuuttujalla on seuraavat ominaisuudet

$$E(H) = 1 \quad \text{ja} \quad E(k|H=h) = nh.$$

Kohdassa 2.6 käytetään lisäksi seuraavia merkintöjä

$$Q \sim W(q) \quad \text{vahingoittuneen riskin vakuutusmäärä (tai EML) ,}$$

$$C \sim G(c) \quad \text{vahinkoaste}$$

ja

$$Z|q \sim V(z|q) \quad \text{yksittäisen vahingon määrä}$$

ehdolla, että $Q = q$.

Q on se riskikohtainen arvo, jonka perusteella riski jaetaan sedentin ja jälleenvakuuttajan kesken surplus-jälleenvakuutuksessa.

2.2.3 Maksut, tulos ja riskipääoma

Vuoden maksutuloa merkitään B :llä. Tämä määritellään

$$B = (1 + \lambda)P, \quad \text{missä } \lambda \text{ on varmuuskerroin,}$$

toisin sanoen B on varmuuslisällä kuormitettu riskimaksu. Maksutulo ei siis sisällä liikekuluja, vaan oletetaan, että liikekulut on valmiiksi erotettu maksuisista. Koko liikkeen varmuuskertoimen λ oletetaan yleensä olevan vakio. Varmuuslisän määrää merkitään

$$\Lambda = \lambda P.$$

Riskiliikkeen tulos määritellään

$$Y = B - X.$$

Käytettävissä olevaa riskipääomaa merkitään U :lla. Sitä käytetään yleensä silloin, kun puhutaan vararikkotodennäköisyydestä. Tällöin katsotaan, että vararikko tapahtuu, kun

$$U + Y = U + B - X < 0.$$

U :n ei välttämättä tarvitse olla koko riskipääoma, vaan se voidaan määritellä vapaammin. Tulkitaan U samalla tavalla kuin kirjassa Beard et al., eli U on se osa riskipääomasta, jonka yhtiö enimmillään on valmis menettämään satunnaisvaihtelun seurauksena. Varovainen lähestymistapa on, että U muodostuu pelkästään piilovarauksista [BPP84].

2.2.4 Jälleenvakuutus

Kuten tähänkin asti eri jälleenvakuutusmuotoja kutsutaan niiden englanninkielisillä nimillä. Toisin sanoen osamäärävakuutuksesta käytetään nimeä quota share, ylitejälleenvakuutuksesta surplus, yksittäisylivahinkojälleenvakuutuksesta excess of loss ja kokonaisylivahinkojälleenvakuutuksesta nimeä stop loss.

Merkitään sedentin omapidätysmäärää surplus- ja excess of loss -jälleenvakuutuksissa M :llä. Quota share -jälleenvakuutuksessa sedentin omapidätysosuutta merkitään α :lla, jolloin sedentti pitää jokaisesta riskistä omalla vastuulla $\alpha \cdot 100\%$.

Sedentin ja jälleenvakuuttajan suuret erotetaan toisistaan alaindeksillä. Indeksillä "o" merkitään sedentin omalla vastuulla olevia suureita ja indeksillä "r" jälleenvakuuttajan suureita. Esimerkiksi

$$X = X_o + X_r,$$

missä siis X on vuoden kokonaisvahinkomeno, X_o on sedentin oma osuus ja X_r on jälleenvakuuttajan osuus siitä.

Jälleenvakuutusmaksua merkitään

$$B_r = (1 + \lambda_r) P_r,$$

missä P_r on luonnollisestikin jälleenvakuuttajan riskimaksu $P_r = E(X_r)$ ja λ_r on jälleenvakuuttajan varmuuskerroin. Termit B_o ja λ_o määritellään vastaavasti.

Näille on voimassa yhtälö

$$B = B_o + B_r.$$

Esiteltävissä tarkasteluissa on olennaisia eroja kertoimen λ_r määrittelyn suhteen. Quota share -jälleenvakuutuksessa oletetaan yleensä, että koko liikkeen varmuuslisä Λ jaetaan sedentin ja jälleenvakuuttajan kesken samassa suhteessa kuin riskitkin, eli tällöin $\lambda_r = \lambda_o = \lambda$ on vakio. Surplus-jälleenvakuutusta tarkastellaan vain Straubin menetelmässä kohdassa 2.6. Tällöin oletetaan joko, että λ_r on jälleenvakuuttajan kanssa sovittu vakio tai että $\lambda_r = \lambda$.

Excess of loss -jälleenvakuutuksessa varmuuskertoimen voidaan ajatella muodostuvan neljällä eri tavalla:

1. $\lambda_r = \lambda$ (Straub),
2. λ_r on vakio, ei välttämättä sama kuin λ
(solvenssityöryhmä, Straub, Waters, Zecchin),
3. λ_r lasketaan koko liikkeen ja omalla vastuulla olevan liikkeen varmuuslisien avulla
(Beard et al., Amsler) tai
4. λ_r on omapidätysmäärästä M riippuva funktio
(Rantala, Amsler, Centeno).

Omapidätysmäärän kasvattaminen excess of loss -jälleenvakuutuksessa johtaa siihen, että jälleenvakuuttajan osuus liikkeestä muuttuu epävakaammaksi (vahinkomenon varianssi kasvaa), jolloin jälleenvakuuttajalla on tarve kasvattaa myös varmuuslisäänsä [GER82]. Rantala mainitsee tämän riippuvuuden, mutta ei anna λ_r :lle mitään funktiomuotoa. Amsler olettaa, että λ_r lasketaan

koko liikkeen varmuuslisästä omalla vastuulla olevan liikkeen ja koko liikkeen vahinkomenon varianssien avulla. Centeno olettaa taas, että varmuuskerroin λ_i on $M:n$ suhteen portaittain kasvava funktio.

On syytä huomata, että jälleenvakuutusmaksu B_i on se palkkioilla ja voittosuuksilla vähennetty maksu, jonka jälleenvakuuttaja saa sedentiltä. Jos sedentti saa voittoa esimerkiksi siitä johtuen, että jälleenvakuutuslaskio on suurempi kuin vastaavat liikekulut, niin tämä poikkeama vaikuttaa sekä jälleenvakuuttajan että sedentin varmuuskertoimeen. Varmuuskerroin ei ole välttämättä aina positiivinen.

2.2.5 Muut merkinnät

Kussakin kohdassa tullaan ottamaan tarpeen mukaan käyttöön lisää merkintöjä. Lisäksi joka kohdassa kerrotaan, mitä oletuksia mallille tehdään.

2.3 Cramèrin epäyhtälö

Useat seuraavissa kohdissa esiteltävät omavastuun määräämissäännöt perustuvat tavalla tai toisella niin sanottuun Cramèrin epäyhtälöön. Esitellään se seuraavassa lyhyesti.

Cramèrin epäyhtälö antaa ylärajan äärettömän aikavälin vararikkotodennäköisyydelle. Tarkastellaan säännöllisin väliajoin riskiliikkeen tuloksen muodostamaa riskiprosessia. Riskiprosessin tila hetkellä t määritellään

$$U(t) = U + \sum_{j=1}^t Y(j),$$

missä U on riskipääoma tarkastelujakson alussa ja

$$Y(t) = B - X(t)$$

on aikavälillä $(t-1, t]$ kertynyt voitto (tappio). B on varmuuslisällä kuormitettu riskimaksu $B = (1 + \lambda)P$, missä $\lambda > 0$ ja P ja λ ovat vakioita (t :stä riippumattomia). Muuttujat $X(t)$ oletetaan keskenään riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi siten, että $E[X(t)] = P$. Äärettömän aikavälin vararikkotodennäköisyydellä tarkoitetaan todennäköisyyttä

$$\psi(U) = P\{U(t) < 0 \text{ jollakin } t=1, 2, \dots\}.$$

Tällöin $\Psi(U)$:lle on voimassa

$$\psi(U) \leq e^{-RU},$$

missä R on yhtälön

$$M_{Y(t)}(-R) = E(e^{-RY(t)}) = 1$$

yksikäsitteinen positiivinen ratkaisu. Merkintä $M_{Y(t)}(-R)$ tarkoittaa muuttujan $Y(t)$ momenttigeneroivan funktion arvoa pisteessä $-R$.

Silloin kun kyseessä on yhdistetty Poisson -prosessi, R :n määrittelevä yhtälö voidaan kirjoittaa myös

$$M_{Y(t)}(-R) = E[e^{-R(B-X)}] = e^{-RB} E[e^{RX}] = e^{-RB} M_X(R)$$

$$= e^{-RB} \cdot e^{n(M_z(R) - 1)} = 1$$

eli

$$RB - n \left[\int_0^\infty e^{Rz} dS(z) - 1 \right] = 0.$$

Tätä esitysmuotoa tullaan käyttämään kohdissa 2.8 ja 2.9.

2.4 Beard - Pentikäinen - Pesosen omapidätyssäännöt

Kirjassa Beard et al. johdetaan omapidätyssäännöt suoraan yhden vuoden vararikkotodennäköisyyden määritelmästä [BPP84]. Tarkasteluissa oletetaan, että omalla vastuulla olevan kokonaisvahinkomenon jakaumaa voidaan approksimoida joko normaalijakaumalla tai NP-approksimaatiolla. Vahinkojen lukumäärän oletetaan noudattavan joko painotettua tai painottamatonta Poisson-jakaumaa.

Merkitään U :lla sitä alkupääomaa, jonka alittaminen merkitsee vararikkoa. Tällöin yhden vuoden vararikkotodennäköisyys määritellään

$$\varepsilon = P\{U + Y_o < 0\} = P\{U + B_o - X_o < 0\} = 1 - P\{X_o < U + B_o\}.$$

Jos oletetaan, että X_o noudattaa normaalijakaumaa, niin tästä saadaan ratkaistua

$$U = E(X_o) - B_o + y_\varepsilon \sqrt{\text{Var}(X_o)} = -\lambda_o P_o + y_\varepsilon \sqrt{\text{Var}(X_o)}, \quad (2.1)$$

missä y_ε toteuttaa yhtälön $\varepsilon = 1 - N(y_\varepsilon)$. Merkintä $N(\cdot)$ tarkoittaa normeeratun normaalijakauman kertymäfunktia. NP-approksimaatiota käytettäessä lauseke saa muodon

$$U = -\lambda_o P_o + \left[y_\varepsilon + \frac{\gamma_{X_o}}{6} (y_\varepsilon^2 - 1) \right] \sqrt{\text{Var}(X_o)}, \quad (2.2)$$

missä

$$\gamma_{X_o} = \frac{E[X_o - E(X_o)]^3}{\sqrt{\text{Var}(X_o)}^3} = \frac{E(Z_o^3)}{[E(Z_o^2)]^{3/2} \sqrt{n}}$$

on X_o :n vinous. Silloin kun vahinkolukumäärä noudattaa painotettua Poisson-jakaumaa, X_o :n varianssi ja vinous kirjoitetaan struktuurimuuttujan, vahinkolukumäärän ja yksittäisvahingon jakauman parametrien avulla. Pitäydytään tässä kuitenkin painottamattomassa Poisson-tapauksessa. Kirjassa Beard et al. näitä U :n lausekkeita kutsutaan perusyhtälöksi (*basic equation*) - sen eri esitysmuodoiksi.

Kirjassa ehdotetaan kahta perusyhtälöön perustuvaa omapidätyksen määrittämistä. Ensimmäinen tapa on etsiä suoraan kokeilemalla (tai numeerisesti ratkaisemalla) se omapidätys M , jolla valittu U :n perusyhtälö toteutuu. Lisäksi

todetaan, että riittää ratkaista ongelma excess of loss -tapauksessa. Näin saatua omapidätysmäärää käytetään omapidätyksen approksimaationa myös surplus-jälleenvakuutukselle. Tällä tavalla ratkaisemalla löydetään M :lle maksimi, toisin sanoen suurin sellainen omapidätysmäärä, jolla vararikkotodennäköisyys on enintään ε .

Toiseksi tavaksi kirjassa johdetaan ns. "jakaumasta riippumaton" omapidätys sääntö, ja siitä yksinkertaistettu "peukalosääntö". Jakaumasta riippumattomuus tarkoittaa tässä sitä, että kokonaisvahinkomenon jakauma oletetaan edelleen normaaliseksi tai NP-approksimaatioksi, mutta sen parametreja $\text{Var}(X_o)$ ja γ_{X_o} ei tarvitse tuntea.

Ratkaisua varten todetaan ensin, että perusyhtälölle voidaan kirjoittaa yläraja-arvio, kun havaitaan että

$$E(Z_o^i) = \int_0^M z^i dS_M(z) + M^i (1 - S(M))$$

$$\leq M \left[\int_0^M z^{i-1} dS(z) + M^{i-1} (1 - S(M)) \right] = ME(Z_o^{i-1}),$$

jolloin

$$U \leq -\lambda_o P_o + [y_e + \frac{ME(Z_o^2)}{6 [E(Z_o^2)]^{3/2} \sqrt{n}} (y_e^2 - 1)] \sqrt{nE(Z_o^2)}$$

$$\leq -\lambda_o P_o + y_e \sqrt{MP_o} + \frac{M}{6} (y_e^2 - 1).$$

Tämän approksimaation pääasiallisin virhetekijä on

$$K = \frac{\sqrt{\text{Var}(X_o)}}{\sqrt{P_o M}} = \sqrt{\frac{nE(Z_o^2)}{nE(Z_o) M}} = \sqrt{\frac{E(Z_o^2)}{E(Z_o) M}}.$$

Beard et al. mukaan käytännön esimerkit viittaavat siihen, että K on yleensä välillä 0.5 - 0.8 ja että arvoa $K \approx 0.6$ voidaan käyttää K :n estimaattina. Approksimoidaan nyt perusyhtälöä siten, että jätetään ensinnäkin vinouden sisältävä termi kokonaan pois (mikä tarkoittaa itse asiassa paluuta normaalisuus-

oletukseen) ja sijoitetaan X_o :n hajonnan tilalle yllä olevasta ylärajasta saatava K :lla korjattu hajonnan lauseke. Tällöin päädytään approksimaatioon

$$U = -\lambda_o P_o + y_e \sqrt{K^2 M P_o}, \quad (2.3)$$

josta voidaan ratkaista

$$M = \frac{[U^2 + 2\lambda_o U P_o + \lambda_o^2 P_o^2]}{K^2 y_e^2 P_o}.$$

Tämä M :n lauseke on sikäli ongelmallinen, että omapidätys M sisältyy implisiittisesti myös yhtälön oikealla puolella oleviin tekijöihin P_o ja λ_o . Kirjassa Beard et al. menetellään siten, että oletetaan ensinnäkin, että kerroin λ_o on vakio. Sen jälkeen etsitään se alkupääoman ja riskimaksun suhde, jolla omapidätyksen ja alkupääoman suhde minimoituu. Näin menetellen sekä selittävä että selitettävä muuttuja riippuvat alkupääomasta U ja omapidätyksestä M . Kirjoitetaan siis M :n lauseke uusien muuttujien $w = M/U$ ja $u = U/P_o$ avulla, jolloin saadaan

$$w = \frac{1}{K^2 y_e^2} \left(u + 2\lambda_o + \frac{\lambda_o^2}{u} \right).$$

Kyseessä on hyperbolinen funktio, joka saavuttaa miniminsä pisteessä

$$(u, w) = \left(\lambda_o, \frac{4\lambda_o}{K^2 y_e^2} \right).$$

Tästä w :n minimistä saadaan yllämainitun kriteerin täyttävä alaraja-arvio omapidätykselle. Käytetään sitä nyrkkisääntönä M :n suuruusluokan määrittämiseksi seuraavasti

$$M = w_{\min} \cdot U = \frac{4}{K^2 y_e^2} \lambda_o U \approx \lambda_o U. \quad (2.4)$$

Jälkimmäistä likiarvoa voidaan käyttää, jos valittu vararikkotodennäköisyys ε on enintään suuruusluokkaa 0.001.

2.5 Solvenssityöryhmän omapidätysääntö

Solvenssityöryhmän raportissa pyritään etsimään sellainen omapidätysmäärä M , että koko liikkeessä tarvittava varmuuslisä $\Lambda = \Lambda(M)$ on mahdollisimman pieni [RAN82]. Raportissa todetaan, että vakuutusyhtiöt voidaan jakaa kolmeen tyyppiluokkaan a, b ja c. Luokassa a varmuuslisän tarve kasvaa, kun omapidätysmäärää nostetaan. Tähän luokkaan kuuluvat yhtiöt, joissa riskien lukumäärä on pieni ja riskikoko mahdollisesti suuri. Luokkaan b kuuluvat ne yhtiöt, missä riskit ovat pieniä ja niiden lukumäärä on suuri. Tällöin varmuuslisän tarve pienenee M :n kasvaessa, ja optimitilanne on se, että jälleenvakuutusta ei oteta lainkaan. Tavallisin tapaus on luokka c, joka on yhdistelmä näistä kahdesta. Portfolio koostuu kohtalaisen suurista riskeistä ja suuresta määrästä pieniä riskejä. Tässä tapauksessa varmuuslisän tarve pienenee omapidätystä kasvatettaessa, kun M on suhteellisen pieni, mutta M :n kasvaessa edelleen varmuuslisän tarve alkaa taas kasvaa. Tämä tarkoittaa sitä, että on olemassa optimaalinen omapidätysmäärä M , jolla varmuuslisän tarve minimoituu. Raportissa etsitään laskutapa tälle M :lle. Esitellään seuraavassa ne pääperiaatteet, joiden avulla M :lle etsitään optimiarvoa. Yksityiskohtien osalta viitataan lähteeseen [RAN82].

Koko liikkeen varmuuslisän määrän katsotaan muodostuvan kahdesta osasta seuraavasti

$$\Lambda = \Lambda_o + \Lambda_r = \lambda_o P_o + \lambda_r P_r ,$$

missä kaikki termit riippuvat M :stä. Jälleenvakuutusmuodoksi oletetaan excess of loss. Tällöin varmuuskerroin λ_r on tyypillisesti omapidätyksen suhteen kasvava funktio, varsinkin silloin kun M on suuri. Tarkasteluissa oletetaan kuitenkin, että λ_r on vakio ($= 0.20$).

Tarvittava omalla vastuulla oleva varmuuslisä λ_o määritellään seuraavasti. λ_o tulee valita siten, että suhteellisen solvenssimarginaalin $u(t)$ (joka on solvenssimarginaalin $U(t)$ ja maksutulon $B(t)$ suhde ajanhetkellä t) muodostama stokastinen viuhka pysyy solvenssimarginaalin alarajan u_o ja tavoitevyöhykkeen ylärajan u_2 välissä kaikilla t :n arvoilla [RAN82]. Tämä ehto toteutuu, olettaen että alaraja $u_o = 0$, kun

$$\lim_{t \rightarrow \infty} E[u(t)] = \frac{\lambda_0}{(1-r_{rn})} = 1/2 u_2,$$

missä r_m raportissa määritelty ns. vuotuinen suhteellinen korkokerroin, ja u_2 lasketaan siten, että u_0 ja u_2 muodostavat 99 % luottamusvälin stokastiselle viuhkalle tarkasteluvuonna.

Ratkaistaan yllä olevasta yhtälöstä λ_0 ja kirjoitetaan u_2 :n tilalle sen määrittelevä lauseke. Tällöin koko liikkeen varmuuslisälle saadaan seuraavanlainen laskukaava

$$\Lambda = \lambda_r P_r + H_1 P_0 + \sqrt{H_2 n E(Z_0^2) + H_3 \text{Var}(H) P_0^2},$$

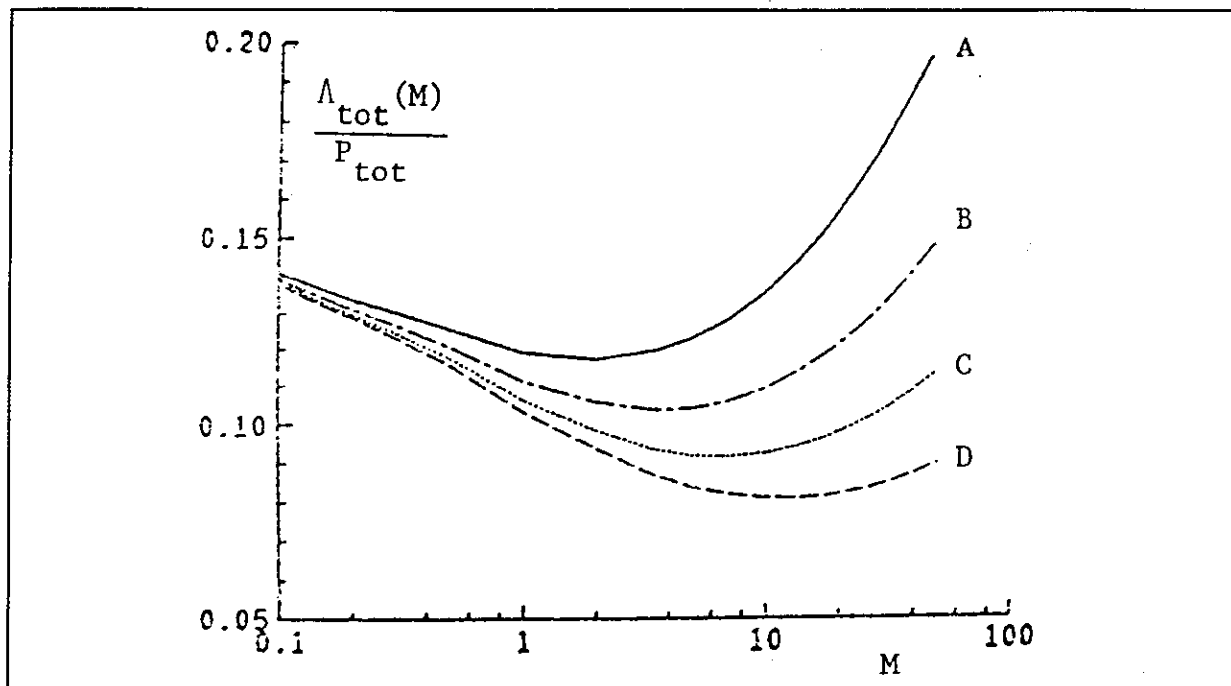
missä H_i ($i = 1, 2, 3$) ovat raportissa määritellyjä korkotekijöistä, kasvukertomista, inflaatiosta, kausivaihtelusta ja valitusta luottamusvälistä riippuvia vakioita. H on vahinkojen lukumäärään vaikuttava struktuurimuuttuja. Termit λ_r , P_r , P_0 ja $E(Z_0^2)$ riippuvat omapidätyksestä M .

Raportissa yllä olevaan kaavaan sijoitetaan suomalaisista vahinkovakuutusyhtiöistä vuosilta 1964 - 1979 kerätystä aineistosta lasketut parametrien arvot sekä korkotasoa, kasvua, inflaatiota ja kausivaihtelua koskevat oletusarvot (jolloin $H_1 = 0.0235$, $H_2 = 0.2585$ ja $H_3 = 0.2003$). Tämän jälkeen M :n (tai $M/P:n$) ja kaavasta saatavan $\Lambda = \Lambda/P$ välinen riippuvuus esitetään graafisesti ns. standardiyhtiöllä (kuvat 2.1 ja 2.2).

Kuvista tehdään se johtopäätös, että optimaalinen omapidätysmäärä on yleensä suuruusluokkaa 2 - 4 % koko liikkeen riskimaksuista. Tästä havainnosta johdetaan tasoitusvastuun ylärajalaskelmassa käytettävä M :n lauseke

$$\bar{M} = 0.04 \cdot (\bar{B}_{tot} + V_{tot}(t-1) - V_{tot}(t)), \quad (2.5)$$

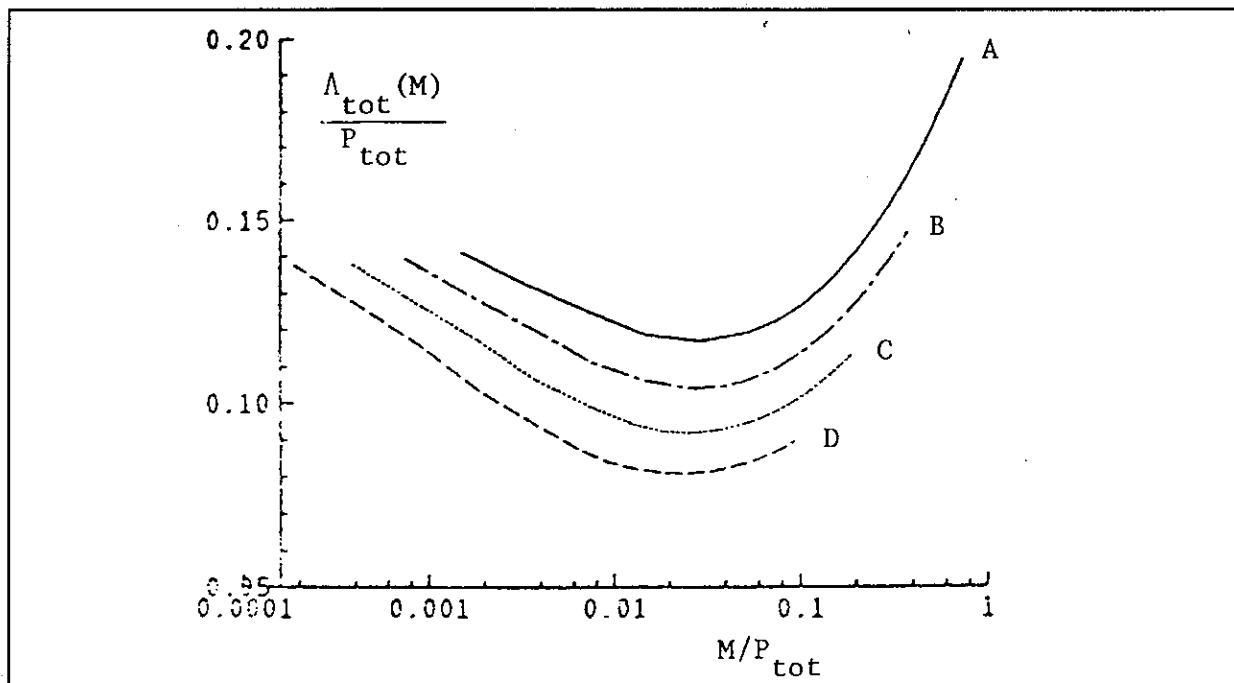
toisin sanoen 4% tarkasteluvuoden koko liikkeen vakuutusmaksutuotosta. Raportissa todetaan lisäksi, että M ei koskaan saisi olla suurempi kuin puolet solvenssimarginaalista (ts. $U \geq 2M$).



Kuva 2.1 Varmuuslisän tarve standardiyhtiöllä [RAN82].

$$\Lambda_{tot}(M) \equiv \Lambda = \Lambda_o + \Lambda_r ; P_{tot} \equiv P .$$

Standardiyhtiöt	A:	$n = 5\,000$	$P = 67.5$ Mmk
	B:	$n = 10\,000$	$P = 135$ Mmk
	C:	$n = 20\,000$	$P = 270$ Mmk
	D:	$n = 40\,000$	$P = 540$ Mmk



Kuva 2.2 Varmuuslisän tarve standardiyhtiöllä [RAN82].

2.6 Straubin omapidätyssäännöt

2.6.1 Oletukset

Straub johtaa artikkelissaan [STR78] ja kirjassaan [STR88] lausekkeet omapidätyksen määrittämistä varten quota share, surplus, excess of loss ja stop loss -jälleenvakuutuksessa. Hän rajoittaa tarkastelunsa vahinkovakuutusliikeseen, ja olettaa, että vahinkojen lukumäärä Poisson-jakautunut. Omapidätysmäärän määrittämisen tavoitteeksi asetetaan omalla vastuulla oleva vakuutusliikkeen tuloksen tasoittaminen jälleenvakuutuksen avulla. Tarkastelut perustuvat Cramèrin epäyhtälöön.

Straub olettaa surplus-jälleenvakuutusta käsitellessään, että vahinkoaste on riippumaton vakuutusmäärästä. Viimeksimainittu oletus ei välttämättä ole käytännössä voimassa [HEI81]. Alakohdissa 2.6.2 ja 2.6.3 esitellään Straubin tulokset, jotka on johdettu riippumattomuusoletuksen ollessa voimassa. Kohdassa 2.6.4 katsotaan, miten oletuksesta luopuminen vaikuttaa Straubin laskukaavoihin. Stop Loss -jälleenvakuutuksen tulokset jätetään seuraavassa tarkastelun ulkopuolelle.

2.6.2 Normaalijakaumaoletus

Tarkastellaan sedentin omalla vastuulla olevaa liikettä. Cramèrin epäyhtälön mukaisesti äärettömän aikavälin vararikkotodennäköisyydelle $\Psi(U)$ on voimassa

$$\Psi(U) \leq e^{-RU},$$

missä U on käytettävissä oleva riskipääoma tarkastelukauden alussa ja R on yhtälön

$$M_{Y_0}(-R) = E(e^{-RY_0}) = 1$$

yksikäsitteinen positiivinen ratkaisu. $M_{Y_0}(\cdot)$ on omalla vastuulla olevan

voiton Y_0 :n momenttigeneroiva funktio. Koska malli oletetaan stationaarisek-

si, voidaan Cramèrin epäyhtälössä jättää kirjoittamatta ajankohdan ilmoittava parametri t . Kirjassaan [STR87] Straub approksimoi tätä normaalijakauman momenttigeneroivalla funktiolla

$$M_{Y_o}(-R) \approx e^{-E(Y_o)R} e^{\frac{1}{2} \text{Var}(Y_o) R^2} = 1.$$

Tästä voidaan R ratkaista helposti

$$R = \frac{2E(Y_o)}{\text{Var}(Y_o)}.$$

Valitaan vararikkotodennäköisyydeksi ε . Kirjoittamalla Cramèrin epäyhtälössä yhtäsuuruus

$$\varepsilon = \Psi(U) = e^{-RU}$$

saadaan

$$R = \frac{-\ln \varepsilon}{U}.$$

Asettamalla nyt yllä annetut kaksi R :n lauseketta yhtäsuuriksi ja korvaamalla $\text{Var}(Y_o)$ identtisellä suurella $\text{Var}(X_o)$, päädytään yhtälöön

$$\frac{-\ln \varepsilon}{2U} = \frac{E(Y_o)}{\text{Var}(X_o)}. \quad (2.6)$$

Jakamalla vielä yhtälön molemmat puolet $E(X)$:llä ja kertomalla ne $\text{Var}(X)$:llä päästään Straubin perusyhtälöön

$$\pi = \frac{E(X)}{U} v(X) \left(-\frac{\ln \varepsilon}{2} \right) = \frac{E(Y_o) / E(X)}{\text{Var}(X_o) / \text{Var}(X)},$$

missä $v(X) = \text{Var}(X) / [E(X)]^2$.

Perusyhtälön oikea puoli riippuu jälleenvakuutuksesta ja siten myös omapidätyksestä M , kun taas vasen puoli on jälleenvakuutuksesta riippumaton (merkitään sitä π :lla). Straub kutsuu π :ta jälleenvakuutustarpeeksi (*need for reinsurance protection*), ja antaa yhtälön muille osatekijöille seuraavat tulkin-

$U / E(X)$

riskipääoma $E(X)$:n ilmoittamassa raha-

yksikössä ($E(X)$:llä normeerattuna)

$v(X)$

X :n variaatiokertoimen neliö

$(-\ln \varepsilon / 2)$

riskinottohalukkuus

$E(Y_o) / E(X)$

odotettu tulos $E(X)$:llä normeerattuna

$\text{Var}(X_o) / \text{Var}(X)$

mittari jälleenvakuutusratkaisun tehokkuudelle.

Perusyhtälöä voidaan käyttää optimaalisen omapidätyksen määrittämiseen siten, että etsitään kussakin jälleenvakuutusmuodossa se omapidätysmäärä M , jolla yhtälö on voimassa.

Tarkastellaan aluksi yksinkertaisinta tapausta eli quota share -jälleenvakuutusta. Merkitään α :lla omapidätysosuutta, toisin sanoen sedentti pitää omalla vastuulla jokaisesta riskistä $\alpha \cdot 100\%$ ja loput $(1-\alpha) \cdot 100\%$ jälleenvakuutetaan. Tällöin

$$E(X_o) = \alpha E(X), E(X_r) = (1-\alpha)E(X) \text{ ja } \text{Var}(X_o) = \alpha^2 \text{Var}(X) .$$

Sijoittamalla nämä arvot perusyhtälön oikealle puolelle ja käyttämällä $E(Y_o)$:n esitysmuotoa

$$\begin{aligned} E(Y_o) &= E(B - B_r - X_o) \\ &= (1+\lambda)E(X) - (1+\lambda_r)E(X_r) - E(X_o) \\ &= \lambda E(X_o) + (\lambda - \lambda_r)E(X_r) \end{aligned}$$

saadaan tulokseksi

$$\pi = \frac{\lambda \alpha + (\lambda - \lambda_r)(1-\alpha)}{\alpha^2} = \frac{\lambda_r \alpha + (\lambda - \lambda_r)}{\alpha^2} .$$

Tästä voidaan ratkaista

$$\alpha_{1,2} = \frac{\lambda_r \pm \sqrt{\lambda_r^2 + 4\pi(\lambda - \lambda_r)}}{2\pi}.$$

Ratkaisuista α_1 ja α_2 valitaan "+"-merkkinen vaihtoehto, sillä erotuksen $(\lambda - \lambda_r)$ kasvun tulisi johtaa myös omapidätyksen lisäämiseen eikä päinvastoin. Siinä erikoistapauksessa, että jälleenvakuuttajan varmuuslisä on täsmälleen sama kuin koko liikkeessä eli $\lambda = \lambda_r$, ratkaisu on yksinkertaisesti

$$\alpha = \frac{\lambda}{\pi} = \frac{\frac{U}{E(X)} \cdot \left(-\frac{2}{\ln \varepsilon}\right) \cdot \lambda}{v(X)}.$$

Tälle lausekkeelle on helppo antaa myös heuristinen tulkinta. Straub kutsuu maallikon omapidätyskaavaksi seuraavaa osamäärää

$$\text{omapidätys} = \frac{\text{pääoma} \times \text{riskinottohalukkuus} \times \text{varmuuslisä}}{\text{vakuutusliikkeen tasapainottomuus}}.$$

Yllä olevassa α :n kaavassa on onnistuttu kvantifioimaan nämä tekijät.

Surplus-jälleenvakuutuksessa perusyhtälö johtaa jo monimutkaisempiin lausekkeisiin. Koska vahinkojen lukumäärä oletettiin Poisson-jakautuneeksi, voidaan kirjoittaa

$$E(X_o) = nE(Z_o), \text{ Var}(X_o) = nE(Z_o^2).$$

Oletetaan aluksi, että vahinkoaste $C \sim G(c)$ on riippumaton vakuutusmäärästä $Q \sim W(q)$. Tällöin

$$E(Z^i) = E(Q^i)E(C^i), i = 1, 2, \dots$$

Omalla vastuulla olevan yksittäivahingon i . origomomentti saadaan laskettua seuraavasti

$$E(Z_o^i) = \int_0^\infty z^i \int_0^M g\left(\frac{z}{Q}\right) dW(q) \frac{dz}{Q} + \int_0^\infty z^i g\left(\frac{z}{M}\right) [1 - W(M)] \frac{dz}{M}$$

Straub ottaa käyttöön merkinnän $W^{(i)}(M)$, jonka avulla hän kirjoittaa yllä ole-

van odotusarvon

$$E(Z_o^i) = E(Z^i) W^{(i)}(M),$$

toisin sanoen $W^{(i)}(M)$ on vahingoittuneiden riskien omalla vastuulla olevan vakuutusmäärän i . origomomentin (omapidätysmäärän ollessa M) suhde koko liikkeen vakuutusmäärän i . origomomenttiin. Näitä merkintöjä hyväksikäyttäen voidaan kirjoittaa

$$E(X_o) = E(X)W^{(1)}(M) \text{ ja } \text{Var}(X_o) = \text{Var}(X)W^{(2)}(M).$$

Surplus-tapauksessa Straubin perusyhtälö saa muodon (kun muistetaan, että $E(X_r) = E(X) - E(X_o)$)

$$\pi = \frac{E(Y_o) / E(X)}{\text{Var}(X_o) / \text{Var}(X)} = \frac{\lambda_r W^{(1)}(M) + (\lambda - \lambda_r)}{W^{(2)}(M)}.$$

Toisin kuin quota sharen ollessa kyseessä, omapidätykselle ei yleensä saada tästä yhtälöstä suljetussa muodossa olevaa ratkaisua. Sama pätee myös excess of loss -tapauksessa.

Excess of loss -jälleenvakuutuksessa menetellään samoin kuin yllä surplus-jälleenvakuutuksessa, eli kirjoitetaan

$$E(Z_o^i) = \int_0^M z^i dS(z) + M^i [1 - S(M)] = E(Z^i) S^{(i)}(M).$$

Tässä $S^{(i)}$ määritellään vastaavasti kuin $W^{(i)}(M)$, eli $S^{(i)}(M)$ on osamäärä, jonka muodostavat osoittajassa yksittäisvahingon omalla vastuulla olevan osuuden i . origomomentti omavastuun ollessa M ja nimittäjässä koko vahingon i . origomomentti. Aivan kuten surplus-tapauksessa, saadaan

$$E(X_o) = E(X)S^{(1)}(M) \text{ ja } \text{Var}(X_o) = \text{Var}(X)S^{(2)}(M) \text{ ja}$$

$$\pi = \frac{\lambda_r S^{(1)}(M) + (\lambda - \lambda_r)}{S^{(2)}(M)}.$$

Sen sijaan, että omapidätys etsittäisiin suoraan edellä annettujen perusyhtälöi-

den avulla, Straub ehdottaa seuraavanlaista menettelyä. Todetaan ensin, että Surplus- ja excess of loss-tilanteissa saadut perusyhtälöt muistuttavat quota sharen perusyhtälöä. Termien α ja α^2 tilalla on surplusissa termit $W^{(1)}(M)$ ja $W^{(2)}(M)$ sekä excess of lossissa termit $S^{(1)}(M)$ ja $S^{(2)}(M)$. Straub tekee yksinkertaistavat oletukset $\lambda_i \approx \lambda$ ja $W^{(2)}(M) \approx [W^{(1)}(M)]^2$ ja $S^{(2)}(M) \approx [S^{(1)}(M)]^2$. Jälkimmäisille likiarvoille annetaan perusteluksi se, että $W^{(i)}(M)$ ja $S^{(i)}(M)$, $i = 1, 2$, ovat välillä $[0, 1]$ olevia ei-väheneviä funktioita ja niille on voimassa $W^{(2)}(M) \leq W^{(1)}(M)$ ja $S^{(2)}(M) \leq S^{(1)}(M)$. Straub toteaa, että likiarvo on realistinen ainakin silloin, kun omapidätysmäärä M on korkea.

Näiden yksinkertaistusten jälkeen perusyhtälö on kaikissa jälleenvakuutusmuodoissa rakenteeltaan samanlainen. Kussakin yhtälössä on yksi (tuntematon) omapidätysmäärästä riippuva termi (α , $W^{(1)}(M)$ tai $S^{(1)}(M)$), jolle saadaan perusyhtälöstä ratkaisuksi sama lauseke. Siispä Straub antaa seuraavan nyrkisäännön omapidätyksen määrittämiseksi eri vakuutuslajeissa.

Ratkaistaan ensin omapidätysaste α quota share-kaavasta

$$\alpha = \frac{\lambda}{\pi}.$$

Tämän jälkeen etsitään kokeilemalla se omapidätysmäärä M , jolla surplus-jälleenvakuutuksessa

$$W^{(1)}(M) = \frac{\text{keskimääräinen nettovakuutusmäärä}}{\text{keskimääräinen bruttovakuutusmäärä}} = \alpha$$

ja excess of loss -jälleenvakuutuksessa

$$S^{(1)}(M) = \frac{\text{keskimääräinen nettovahinko}}{\text{keskimääräinen bruttovahinko}} = \alpha. \quad (2.7)$$

Omapidätysmäärä M voitaisiin ratkaista kokeilemalla myös suoraan perusyhtälöstä. On yksinkertaista osoittaa derivoimalla, että π on kaikissa kolmessa vakuutusmuodossa M :n suhteen vähenevä funktio, jos kerroin λ_i on positiivinen (tai kasvava, jos λ_i on negatiivinen), joten M :n löytäminen kokeilemalla ei tuota ongelmia.

2.6.3 Taylorin kehitemä

Straub on hahmotellut lähes samanlaisen ratkaisumallin omapidätyksen määrittämiseksi jo vuonna 1978 ilmestyneessä artikkelissaan [STR78]. Ainoa oleellinen ero edellisen luvun tarkasteluihin on se, että momenttigeneroivaa funktiota $M_{Y_o}(\cdot)$ ei approksimoida normaalijakauman momenttigeneroivalla funktiolla, vaan Taylorin kehitelmällä, tarkemmin sanoen sen kolmella ensimmäisellä termillä

$$M_{Y_o}(-R) = E(e^{-RY_o}) \approx E(1 - RY_o + \frac{R^2}{2} Y_o^2) = 1.$$

Ratkaisemalla tästä R saadaan

$$R = \frac{2E(Y_o)}{E(Y_o^2)} = \frac{2E(Y_o)}{\text{Var}(X_o) + E^2(Y_o)}.$$

Perusyhtälö saa nyt muodon

$$\pi = \frac{E(X)}{U} v(X) \left(-\frac{\ln e}{2} \right) = \frac{E(Y_o)/E(X)}{[\text{Var}(X_o) + E^2(Y_o)]/\text{Var}(X)}.$$

Quota share -tapauksessa, tämä voidaan kirjoittaa

$$\pi = \frac{\lambda_x \alpha + (\lambda - \lambda_x)}{[\alpha^2 \text{Var}(X) + (\lambda_x \alpha + (\lambda - \lambda_x))^2 E^2(X)] / \text{Var}(X)},$$

josta ratkaisemalla (kun $\lambda = \lambda_r$)

$$\alpha = \frac{\frac{U}{E(X)} \cdot \left(-\frac{2}{\ln e} \right) \cdot \lambda}{v(X) + \lambda^2}.$$

Tämän jälkeen Straub etenee edellisessä luvussa kuvatulla tavalla, eli hän toteaa ensin että surplus- ja excess of loss -jälleenvakuutuksille voidaan löytää yksinkertaistavien oletusten jälkeen samankaltaiset π :n lausekkeet, niissä on vain edellisessä luvussa määritellyt $W^{(0)}(M)$ - ja $S^{(0)}(M)$ -termit α :jen tilalla. Niinpä ratkaistaan α quota share -tapauksesta ja etsitään sen jälkeen se omapidätysmäärä M , jolla surplus-jälleenvakuutuksessa $W^{(1)}(M) = \alpha$ tai excess of loss -jälleenvakuutuksessa $S^{(1)}(M) = \alpha$.

2.6.4 Vakuutusmäärän ja vahinkoasteen riippuvuus

Kuten alakohdassa 2.6.1 todettiin vakuutusmäärän Q ja vahinkoasteen C riippumattomuus ei käytännössä ole välttämättä kovin realistinen oletus [HEI81]. Jos tästä oletuksesta luovutaan, se vaikuttaa Straubin omapidätyslaskelmissa funktion $W^{(i)}(M)$ määrittelyyn. Ilman riippumattomuusoletusta

$$E(Z_o^i) = \int_0^M \int_0^q z^i dV(z|q) dW(q) + \int_M^\infty \int_0^q \left(\frac{zM}{q}\right)^i dV(z|q) dW(q)$$

$$= \int_0^M q^i \int_0^q \left(\frac{z}{q}\right)^i dV(z|q) dW(q) + M^i \int_M^\infty \int_0^q \left(\frac{z}{q}\right)^i dV(z|q) dW(q)$$

$$= \int_0^M q^i b_i(q) dW(q) + M^i \int_M^\infty b_i(q) dW(q),$$

missä

$$b_i(q) = \int_0^1 c^i dG(c|q)$$

on vahinkoasteen C ehdollinen i . origomomentti, ehdolla että vakuutusmäärä $Q = q$ [BPP84]. Merkinnällä $V(Z|q)$ tarkoitetaan yksittäisvahingon jakaumaa ehdolla, että vakuutusmäärä $Q = q$ ja merkinnällä $G(C|q)$ vastaavaa vahinkoasteen ehdollista jakaumaa. Kuten Heiskanen toteaa, momenttien $b_i(q)$ estimointi onnistuu, kunhan käytettävissä on sopiva vakuutus- ja vahinkomäärien luokiteltu aineisto [HEI81].

Haluttaessa käyttää Straubin nyrkkisääntöä omapidätykselle surplus-jälleenvakuutuksessa voidaan tietenkin kirjoittaa

$$E(Z^i) \doteq E(Z_o^i) W^{(i)}(M),$$

missä $W^{(i)}(M)$ on yksinkertaisesti $E(Z_o^i)/E(Z^i)$ (kuten excess of loss -jälleenvakuutuksessa tehtiin). Tämän jälkeen edetään samoin kuin alakohdassa 2.6.2.

2.7 Amslerin omapidätysääntö

2.7.1 Oletukset

Amslerin lähestymistapa omapidätysten määrittämiseen on hyvin pitkälle samanlainen kuin Straubin [AMS84]. Häinkin lähtee liikkeelle Cramèrin epäyhtälöstä (tai ruotsalaisen koulukunnan kaavasta, kuten Amsler sitä kutsuu). Olennaisin ero Straubin tarkasteluihin on, että Amsler ei korvaa tekijän R määrittelyssä tarvittavaa momenttigeneroivaa funktiota approksimaatiolla. Sen sijaan esimerkeissään hän olettaa, että tunnetaan joko kokonaisvahinkomenon jakauma (gamma) tai yksittäisvahingon jakauma (Pareto).

Amsler johtaa omapidätyskaavat erikseen tilanteille, joissa vahinkolukumäärä noudattaa Poisson- ja painotettua Poisson-jakaumaa. Amslerin artikkelissa tutkitaan vain quota share-, excess of loss - ja stop loss -jälleenvakuutusmuotoja. Esitetään seuraavassa ratkaisut quota share- ja excess of loss -tilanteissa. Lopuksi yleistetään tulokset koskemaan myös surplus-jälleenvakuutusta.

2.7.2 Quota share- ja excess of loss -jälleenvakuutus

Valitaan vararikkotodennäköisyydeksi ε . Cramèrin epäyhtälön mukaan

$$\Psi(U) \leq \varepsilon = e^{-RU},$$

missä

$$M_{Y_0}(-R) = E(e^{-RY_0}) = E[e^{-R(B_0 - X_0)}] = e^{-R(B_0)} M_{X_0}(R) = 1.$$

B_0 on varmuuslisällä kuormitettu riskimaksu $B_0 = (1 + \lambda_0)P_0$. Amsler käyttää artikkelissaan momenttigeneroivan funktion asemasta sen logaritmia, joka on usein helpommin käsiteltävissä. Merkitään log-momenttigeneroivaa funktiota $L_X(\cdot) = \ln M_X(\cdot)$, jolloin yllä oleva yhtälö voidaan korvata yhtälöllä

$$-RB_0 + L_{X_0}(R) = 0.$$

Kuten Straubin ratkaisussa, R :n paikalle sijoitetaan tässäkin sen vararikkotodennäköisyyttä ε vastaava arvo, jolloin saadaan

$$\left(\frac{\ln \epsilon}{U}\right) B_o + L_{x_o} \left(\frac{-\ln \epsilon}{U}\right) = 0.$$

Amsler kutsuu tätä yhtälöä tasapainoyhtälöksi (*équation d'équilibre aléatoire*). Silloin, kun vahinkolukumäärä noudattaa painotettua Poisson-jakaumaa, tämä lauseke saa muodon

$$\left(\frac{\ln \epsilon}{U}\right) B_o + L_H \{ L_k [L_{z_o} \left(\frac{-\ln \epsilon}{U}\right)] \} = 0,$$

missä H on vahinkolukumäärän struktuurimuuttuja, k on vahinkolukumäärä [k ehdolla (H = h) ~ Poisson(nh)] ja Z_o on omalla vastuulla oleva yksittäisvahinko.

Quota share-jälleenvakuutuksessa omalla vastuulla olevan konaisvahinkomenon log-momenttigeneroiva funktio saadaan koko liikkeen vastaavasta funktiosta yksinkertaisesti

$$L_{x_o}(R) = L_X(\alpha R),$$

kun α on omapidätysosuus. Silloinkin, kun log-momenttigeneroivan funktion arvoa ei pystytä ratkaisemaan suljetussa muodossa, se voidaan laskea numeerisesti suoraan L_X:n määritelmästä

$$L_X(\alpha R) = \ln \int e^{\alpha R x} dF(x) = \ln \int e^{-\alpha \left(\frac{\ln \epsilon}{U}\right) x} dF(x).$$

Excess of loss -jälleenvakuutuksen osalta Amsler tarkastelee vain painotettua Poisson-tapausta. Amslerin tarkastelun voi tietenkin yleistää koskemaan myös tavallista yhdistettyä Poisson-muuttujaa jättämällä struktuurimuuttuja H pois kaavoista. Tällöin tasapainoyhtälö on

$$\left(\frac{\ln \epsilon}{U}\right) B_o + L_k [L_{z_o} \left(\frac{-\ln \epsilon}{U}\right)] = 0. \quad (2.8)$$

Kummassakin tapauksessa Poisson-muuttujan log-momenttigeneroiva funktio on

$$L_k(s) = n(e^s - 1),$$

ja yksittäisvahingon log-momenttigeneroiva funktio lasketaan

$$L_{z_o} \left(\frac{-\ln \epsilon}{U}\right) = \ln \left[\int_0^M e^{-\left(\frac{\ln \epsilon}{U}\right) z} dS(z) + e^{-\left(\frac{\ln \epsilon}{U}\right) M} (1 - S(M)) \right].$$

On syytä huomata, että L-funktio ei ole ainoa, joka riippuu omapidätysmäärästä. Myös maksutulo B_o muuttuu jälleenvakuutusratkaisun mukana. Amsler jakaa maksutulon osiin

$$B_o = (1 + \lambda_o) P_o = P_o + \Lambda_o.$$

Amsler olettaa, että omalla vastuulla olevan liikkeen varmuuslisä lasketaan koko liikkeen varmuuslisästä

$$\Lambda_o = \sqrt{\frac{\text{Var}(X_o)}{\text{Var}(X)}} \Lambda \doteq \beta_1 \Lambda.$$

Hän lähtee oletuksesta, että sedentti valitsee ensin omalla vastuulla olevan liikkeen varmuuslisän, ja loput varmuuslisästä siirretään jälleenvakuuttajalle. Straubin lähestymistapa oli taas, että omalla vastuulla oleva varmuuslisä lasketaan koko liikkeen varmuuslisän ja jälleenvakuuttajan varmuuslisän erotuksena. Amslerin merkintöjä käyttäen voidaan tietenkin tässäkin tapauksessa kirjoittaa esimerkiksi

$$\begin{aligned} \Lambda_o &= \lambda P - \lambda_r P_r = \lambda P - \sqrt{\frac{\text{Var}(X_r)}{\text{Var}(X)}} \lambda P_r \\ &= \left(1 - \sqrt{\frac{\text{Var}(X_r)}{\text{Var}(X)}} \frac{P_r}{P}\right) \lambda P \doteq \beta_2 \Lambda. \end{aligned}$$

Nyt kun kaikille omapidätysyhtälön termeille on saatu lausekkeet, edetään samoin kuin Straubin ratkaisussa, eli etsitään kokeilemalla se omapidätysmäärä M , joka toteuttaa tasapainoyhtälön. Amslerin antamissa esimerkeissä (stop loss ja excess of loss) yhtälö sai sitä suurempia arvoja, mitä suurempi M oli.

2.7.3 Surplus-jälleenvakuutus

Amslerin tulokset voidaan yleistää koskemaan myös surplus-jälleenvakuutusta. Oletetaan, että vahinkomeno noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa. Tällöin voidaan käyttää samaa tasapainoyhtälöä kuin excess of loss -tapauksessa. Yksittäisvahingon log-momenttigeneroivafunktio saadaan surplus-jälleenvakuutuksessa laskettua

$$L_{z_0}(-\frac{\ln \epsilon}{U}) = \ln \left[\int_0^M \int_0^q e^{-\frac{(\ln \epsilon)}{U} z} dV(z|q) dW(q) + \int_M^\infty \int_0^q e^{-\frac{(\ln \epsilon)}{U} \cdot \frac{zM}{q}} dV(z|q) dW(q) \right],$$

missä $V(z|q)$ on vahingoittuneiden riskien yksittäisvahingon jakauma ehdolla, että vakuutusmäärä $Q = q$ ja W on vahingoittuneiden riskien vakuutusmääräen jakauma. Edetään tämän jälkeen samoin kuin excess of loss -jälleenvakuutuksessa, eli etsitään kokeilemalla se omapidätysmäärä M , jolla tasapainoyhtälö toteutuu.

2.8 Watersin omapidätysääntö

Waters johtaa artikkelissaan [WAT79] laskutavan optimaalisille omapidätysmäärille excess of loss -jälleenvakuutuksessa silloin, kun portfolio koostuu riskeistä, jotka kukin jälleenvakuutetaan erikseen. Kriteerinä on löytää sellaiset omapidätysmäärät, joilla sedentin äärettömän aikavälin vararikkotodennäköisyys minimoituu. Tämä saadaan aikaan maksimoimalla Cramèrin epäyhtälössä kerroin R omapidätysmäärien suhteen. Koska tiedetään, että vararikkotodennäköisyys on enintään (ja usein lähellä arvoa) e^{-RU} , niin R :n maksimoiminen johtaa samalla vararikkotodennäköisyyden minimoitumiseen. Esimerkiksi silloin, kun omalla vastuulla oleva vuoden vahinkomeno X_o noudattaa normaalijakaumaa kerroin $R = R(M)$ voidaan ratkaista

$$R(M) = 2 [B_o - E(X_o)] / \text{Var}(X_o) .$$

Tässä erikoistapauksessa on helppo nähdä, että $R(M)$:n kasvattaminen johtaa samalla myös vararikkotodennäköisyyden pienenemiseen [WAT83].

Oletetaan, että portfolio muodostuu N riippumattomasta riskistä. Käytetään samoja merkintöjä kuin edellisissäkin luvuissa sillä erotuksella, että ilmoitetaan indeksillä, mihin riskiin kukin suure liittyy. Oletetaan, että riskin i vahingot noudattavat yhdistettyä Poisson-jakaumaa siten, että vahinkojen lukumäärän odotusarvo on n_i ja yksittäisen vahingon Z_i jakauma on S_i . Riskistä saatava maksutulo on B_i , ja koko portfolion maksutulo $B = \sum B_i$. Merkitään riskin i omapidätysmäärää M_i :llä.

Oletetaan, että jälleenvakuutusmaksu lasketaan odotusarvoperiaatteella, toisin sanoen

$$B_{xi} = (1 + \lambda_{xi}) n_i \int_{M_i}^{\infty} (z - M_i) dS_i(z) ,$$

missä riskin i jälleenvakuuttajan varmuuskerroin λ_i on positiivinen vakio.

Merkitään kaikkien riskien jälleenvakuutusmaksujen summaa B_i :llä. Tehdään lisäksi seuraavat oletukset

$$1. S_i(0) = 0$$

$$2. dS_i(z)/dz \text{ on olemassa ja on jatkuva}$$

$$3. \int_0^{\infty} z^2 e^z dS_i(z) < \infty$$

$$4. B > \sum_{i=1}^N n_i E(Z_i),$$

$$5. B < \sum_{i=1}^N (1 + \lambda_{ri}) n_i E(Z_i).$$

Ehdon 4 mukaan myös kokonaismaksutuloon sisältyy positiivinen varmuuslisa, ja ehdon 5 mukaan sedentti ei voi siirtää koko vakuutuskantaansa jälleenvakuuttajalle saaden siitä voittoa. Ehto 3 on näistä kaikista rajoittavin, mutta se on voimassa esimerkiksi silloin, kun $S_i(z) = 1$ jollakin $z < \infty$.

Waters määrittelee seuraavat joukot

$$\Delta = \{ M = (M_1, \dots, M_N) \in (0, \infty)^N \mid (B - B_r) - E(X_o) > 0 \},$$

$$\Delta' = \{ M = (M_1, \dots, M_N) \in [0, \infty]^N \mid (B - B_r) - E(X_o) \geq 0 \}.$$

$M_i = 0$ tarkoittaa, että riski jälleenvakuutetaan kokonaan ja $M_i = \infty$ että riski pidetään kokonaan omalla vastuulla. Omalla vastuulla oleva koko portfolion riskimaksu saadaan tavanomaiseen tapaan

$$E(X_o) = \sum_{i=1}^N n_i \left[\int_0^{M_i} z dS_i(z) + M_i (1 - S_i(M_i)) \right].$$

Määritellään nyt funktio

$$G(M, R) = R(B - B_r) - \sum_{i=1}^N n_i \left[\int_0^{M_i} e^{Rz} dS_i(z) + e^{RM_i} (1 - S_i(M_i)) - 1 \right].$$

Tällöin Cramèrin epäyhtälössä esiintyvä kertoimen R määrittelevä yhtälö voidaan kirjoittaa G :n avulla $G(M, R) = 0$. Tehtävänä on löytää sellainen vektori M , joka maksimoi kertoimen $R = R(M)$ ehdolla $G(M, R(M)) = 0$. Waters osoittaa, että

$$G(M^*, 1/\delta^*) = 0, \quad (2.9)$$

missä

$$M^* = [\delta^* \ln(1 + \lambda_{r1}), \dots, \delta^* \ln(1 + \lambda_{rN})]$$

ja δ^* on yhtälön

$$\begin{aligned} H(\delta) = & B + \delta \sum_{i=1}^N n_i - \sum_{i=1}^N (1 + \lambda_{ri}) n_i \\ & \times \left[\int_{\delta \ln(1 + \lambda_{ri})}^{\infty} z dS_i(z) - \delta \ln(1 + \lambda_{ri}) (1 - S_i(\delta \ln(1 + \lambda_{ri}))) \right] \\ & - \sum_{i=1}^N n_i \left[\int_0^{\delta \ln(1 + \lambda_{ri})} \delta e^{z/\delta} dS_i(z) + \delta (1 + \lambda_{ri}) (1 - S_i(\delta \ln(1 + \lambda_{ri}))) \right] = 0 \end{aligned}$$

yksikäsitteinen positiivinen ratkaisu. Tämän jälkeen Waters todistaa kaksi lausetta. Esitetään ne tässä ilman todistuksia.

Lause 1. Jos $S_i(z) < 1$, kun $z < \infty$ ja $i = 1, \dots, N$, niin R :llä on yksikäsitteinen maksimi joukossa Δ , ja tämä saavutetaan pisteessä M^* . Tällöin $R(M) < R(M^*)$, kaikilla $M \in \Delta'$ ja $M \neq M^*$.

Kuten Waters toteaa, lauseessa 1 oleva S_i :tä koskeva ehto on varsin rajoittava, eikä käytännössä kovin luonteva. Jos tästä oletuksesta luovutaan, niin saadaan edellistä lausetta heikompi tulos.

Lause 2. $R(M) \leq R(M^*)$ kaikilla $M \in \Delta'$.

Näiden lauseiden mukaisesti optimaaliset omapidätysmäärät $M^* = (M_1^*, \dots, M_N^*)$ voidaan nyt laskea $M_i^* = \delta^* \ln(1 + \lambda_{ri})$, missä δ^* on yhtälön $H(\delta) = 0$ yksikäsitteinen positiivinen ratkaisu. Tämän menettelyn heikkoutena ovat ne rajoittavat oletukset, joita jouduttiin tekemään vahinkojakaumasta ja maksutuloista. Saatu tulos, että omapidätys riippuu jälleenvakuuttajan varmuusker-toimesta, joka oletetaan vakioksi, ei myöskään ole excess of loss -jälleenvakuutuksessa kovin realistinen. Kuten luvussa 2 todettiin jälleenvakuuttajan

varmuuskertoimen tarve kasvaa yleensä omapidätystä korotettaessa.

Artikkelissaan [WAT83] Waters tutkii sitä, voidaanko R :lle löytää yksikäsitteinen maksimi myös, jos osasta yllä esitettyjä oletuksia luovutaan. Hän osoittaa, että quota share -jälleenvakuutuksessa, kun tarkastellaan yhtä riskiä, maksimointi onnistuu lievemmin, lähinnä maksujen määräämistä koskevin, oletuksin. Vuoden vahinkomenon ei tässä tapauksessa tarvitse noudattaa yhdistettyä Poisson-jakaumaa. Esimerkiksi silloin, kun jälleenvakuutusmaksut lasketaan odotusarvo-, keskihajonta-, varianssi- tai eksponentti-periaatteella, saadaan $R(M)$:lle yksikäsitteinen maksimi.

Sen sijaan excess of loss -tilanteessa oletuksien lieventäminen ei onnistu.

2.9 Centenon omapidätyssääntö

Centeno yleistää artikkelissa Watersin omapidätyssäännön tilanteeseen, jossa jälleenvakuuttajan varmuuskerroin kasvaa portaittain omapidätystä kasvatettaessa [CEN91]. Tarkastellaan yhden riskin excess of loss -jälleenvakuutusta. Tehdään yhtä riskiä koskien vastaavat oletukset 1 - 5 kuin kohdassa 2.8. Ehdon 3 asemasta kirjoitetaan kuitenkin

3'. $M_Z(s) = E(e^{sZ})$ on olemassa välillä $(-\infty, V)$, missä $0 < V \leq \infty$ ja

$$\lim_{s \rightarrow V} E(e^{sZ}) = +\infty.$$

Oletetaan vielä lisäksi, että $S(z) < 1$ kaikilla $z < \infty$. Riskin vuoden vahinkomenon oletetaan tässäkin noudattavan yhdistettyä Poisson -jakaumaa vahinkojen lukumäärän odotusarvon ollessa n ja yksittäisen vahingon jakauman S . Jälleenvakuutusmaksu lasketaan seuraavasti

$$B_r = (1 + \lambda_r(M)) n \int_M^\infty (z - M) dS(z),$$

missä $\lambda_r(M)$ on omapidätysmäärän suhteen portaittain kasvava siten, että $\lambda_r(M) = \lambda_j$ kun $m_j < M \leq m_{j+1}$, missä $m_j < m_{j+1}$, $j = 0, 1, \dots, J$ ja $m_0 = 0$ ja $m_{J+1} = +\infty$.

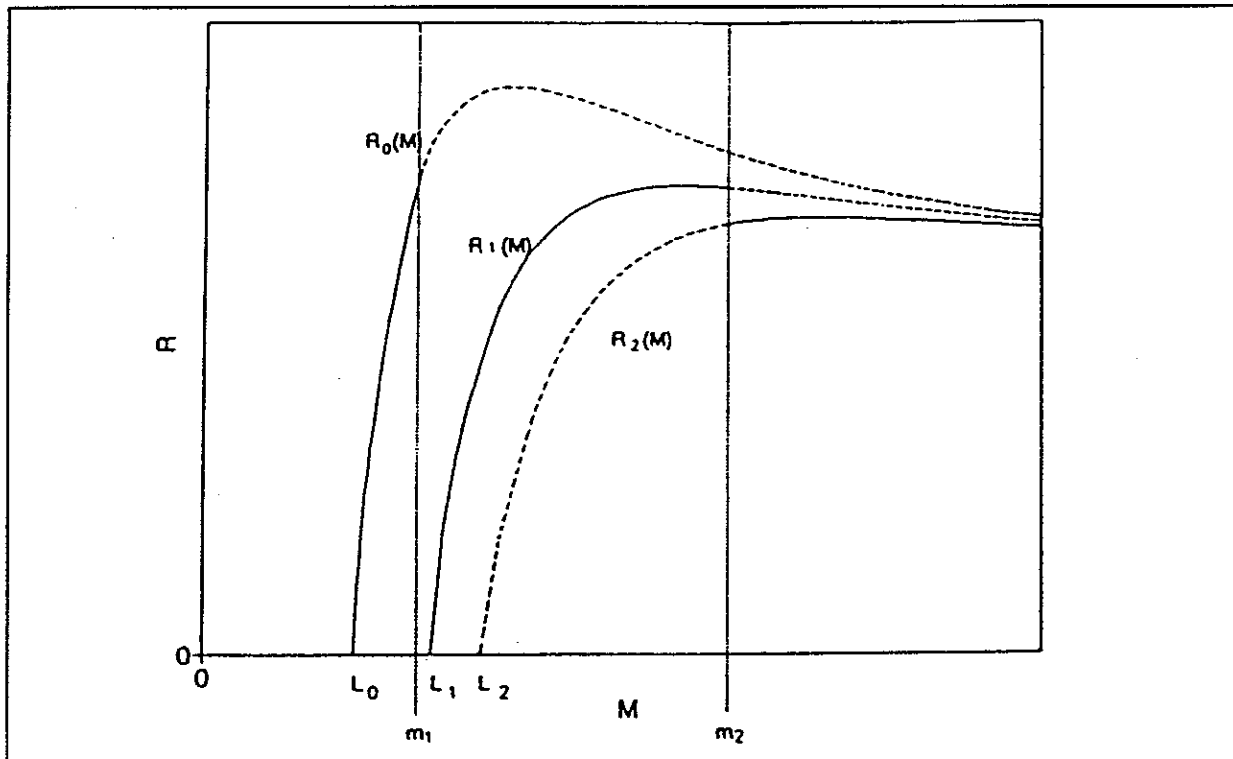
Määritellään funktio G samalla tavalla kuin edellisessäkin kohdassa

$$G(M, R) = R(B - B_r) - n \left[\int_0^M e^{Rz} dS(z) + e^{RM} (1 - S(M)) \right] + n.$$

Kuten Watersin ratkaisussa, tässäkin pyritään maksimoimaan $R = R(M)$ ehdolla $G(M, R) = 0$. Waters osoitti, että silloin kun $\lambda_r(M) = \lambda_r$ on vakio (riskien lukumäärä $N = 1$), niin $R(M)$:llä on olemassa yksikäsitteinen maksimi [WAT79]. Nyt kun $\lambda_r(M)$ on portaittain kasvava funktio, niin $R(M)$:lle löydetään ehdon $G(M, R) = 0$ toteuttava yksikäsitteinen maksimi jokaisella $\lambda_r(M) = \lambda_j$, $j = 0, 1, \dots, J$. Tämä maksimikohta ei kuitenkaan ole aina sillä välillä, millä λ_j on määritelty eli $m_j < M \leq m_{j+1}$.

Merkitään λ_j :tä vastaavaa yhtälön $G(M, R) = 0$ toteuttavaa M :n funktiota $R(M)$

$= R_j(M)$. Olkoon $R_j(M)$:n maksimoiva omapidätysmäärä $M^{(j)}$. Centeno osoittaa, että $M^{(0)} < M^{(1)} < \dots < M^{(J)}$ ja että $R_j(M)$:n positiivisilla arvoilla käyrät $R_j(M)$ ($j = 0, \dots, J$) eivät leikkaa toisiaan. Lisäksi on olemassa ainakin yksi sellainen j , jolla $m_j < M^{(j)} \leq m_{j+1}$. $R(M)$:n maksimoiva omapidätysmäärä on nyt joko joku pisteistä $M^{(0)}, M^{(1)}, \dots, M^{(J)}$ tai joku pisteistä $m_1, m_2, \dots, m_J$ (kuva 2.3).



Kuva 2.3 Esimerkki $R_j(M)$ -funktioista. Funktioiden positiiviset arvot on esitetty yhtenäisellä viivalla määrittelyalueellaan ja katkoviivalla muulloin. $R_j(M)$ on positiivinen, kun $M > L_j$, ja saavuttaa maksiminsa joko välillä (m_j, m_{j+1}) tai pisteessä m_{j+1} . Koko funktion $R(M)$ maksimoi se omapidätysmäärä M , jolla saavutetaan suurin paikallinen maksimi.

Centeno ehdottaa seuraavaa laskualgoritmia optimaalisen omapidätysmäärän löytämiseksi.

Vaihe 0. Aseta $j = 0$, $R^+ = 0$ ja $M^+ = 0$.

Vaihe 1. Olkoon $R^{(j)}$ yhtälön $G(1/R \ln(1 + \lambda_j), R) = 0$ yksikäsitteinen positiivinen ratkaisu ja olkoon $M^{(j)} = 1/R^{(j)} \ln(1 + \lambda_j)$.

Jos $R^{(j)} \leq R^+$

niin $M^* = M^+$, $R^* = R^+$ ja siirry vaiheeseen 3.

(Silloin kun $R^{(j)} = R^+$ ja $m_j < M^{(j)} \leq m_{j+1}$, niin sekä $M^{(j)}$ että M^+ ovat optimeja.)

Jos $R^{(j)} > R^+$

niin

jos $m_j < M^{(j)} \leq m_{j+1}$

niin $M^* = M^{(j)}$, $R^* = R^{(j)}$ ja siirry vaiheeseen 3;

jos $M^{(j)} \notin (m_j, m_{j+1}]$

niin ratkaise $R(m_{j+1})$ yhtälöstä $G(m_{j+1}, R(m_{j+1}))$;

jos $R(m_{j+1}) > R^+$

niin $M^* = m_{j+1}$ ja $R^* = R(m_{j+1})$.

Vaihe 2. Aseta $j = j + 1$ ja siirry vaiheeseen 1.

Vaihe 3. Loppu.

Optimiomapidätysmäärä on nyt M^* .

2.10 Zecchinin omapidätysäännöt

2.10.1 Oletukset

Myös Zecchin tutkii artikkelissaan sitä, miten optimaaliset omapidätysmäärät määrätään, kun portfolion kukin riski jälleenvakuutetaan erikseen excess of loss -jälleenvakuutuksella [ZEC87]. Hänen tarkastelemansa tilanne poikkeaa kuitenkin edellisissä kohdissa esitetyistä sikäli, että hän olettaa, että jokaisella riskillä on yksittäisiä vahinkoja rajoittava yläraja, eräänlainen vahinkokohtainen korvauskatto. Merkitään i :n riskin vahingon ylärajaa T_i :llä. Käytetään muilta osin samanlaisia merkintöjä kuin kohdassa 2.8, eli ilmoitetaan indeksillä i , mihin riskiin kukin suure liittyy.

Tarkastellaan omalla vastuulla olevan koko liikkeen tulosta Y_o . Se saadaan lausekkeesta

$$Y_o = \sum_{i=1}^N (B_i - B_{ri} - X_{oi}) ,$$

missä X_{oi} on i :n riskin omalla vastuulla oleva vuoden korvausmeno (kun yksittäiset vahingot ovat ylhäältä rajoitettuja T_i :llä). Olkoon riskin i maksutulo muotoa $B_i = E(X_i) + \Lambda_i$, missä Λ_i on i :n riskin varmuuslisän määrä, sekä jälleenvakuutusmaksu $B_{ri} = (1 + \lambda_{ri})[E(X_i) - E(X_{oi})]$, missä λ_{ri} on jälleenvakuuttajan varmuuskerroin. Omalla vastuulla olevan tuloksen odotusarvo voidaan nyt kirjoittaa

$$\begin{aligned} E(Y_o) &= \sum_{i=1}^N [E(X_i) + \Lambda_i - (1 + \lambda_{ri})(E(X_i) - E(X_{oi})) - E(X_{oi})] \\ &= \Lambda - \Lambda_{(1)} + \sum_{i=1}^N \lambda_{ri} E(X_{oi}) , \end{aligned}$$

missä on otettu käyttöön merkintä

$$\Lambda_{(1)} = \sum_{i=1}^N \lambda_{ri} E(X_i) .$$

Omalla vastuulla olevan tuloksen varianssi on puolestaan $\text{Var}(Y_o) = \sum \text{Var}(X_{oi})$.

Oletetaan, että riskin i vahingot ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita ja

että vahinkojen lukumäärä k_i ja yksittäisvahinko Z_i ovat lisäksi keskenään riippumattomia satunnaismuuttujia. Yksittäisvahingon jakauman S_i oletetaan olevan jatkuva ja aidosti kasvava välillä $0 \leq Z_i \leq T_i$. Sen sijaan vahinkolukumäärän jakaumasta ei tehdä mitään erityisiä oletuksia (sen ei siis tarvitse olla Poisson-jakautunut). Tällöin voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned} E(Y_o) &= \Lambda - \Lambda_{(1)} + \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} E(k_i) E(Z_{oi}) \\ &= \Lambda - \Lambda_{(1)} + \sum_{i=1}^N \lambda_{xi} E(k_i) \left[\int_0^{M_i} z dS_i(z) + M_i (1 - S_i(M_i)) \right] \end{aligned}$$

ja

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_o) &= \sum_{i=1}^N [E(k_i) \text{Var}(Z_{oi}) + \text{Var}(k_i) E^2(Z_{oi})] \\ &= \sum_{i=1}^N \{E(k_i) \left[\left(\int_0^{M_i} z^2 dS_i(z) + M_i^2 (1 - S_i(M_i)) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\int_0^{M_i} z dS_i(z) + M_i (1 - S_i(M_i)) \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. + \text{Var}(k_i) \left[\int_0^{M_i} z dS_i(z) + M_i (1 - S_i(M_i)) \right]^2 \right\}. \end{aligned}$$

2.10.2 Suhteellisten omapidätysten määrääminen

Zecchin etsii omapidätysmäärät M_i ratkaisuna seuraavaan optimointiongelmaan.

Minimoi $\text{Var}(Y_o)$

ehdolla $E(Y_o) = A$, $0 \leq M_i \leq T_i$, $i = 1, \dots, N$.

Tulostavoite A on aina välillä $[\Lambda - \Lambda_{(1)}, \Lambda]$. Silloin, kun portfolio siirretään jälleenvakuuttajalle kokonaan, $A = (\Lambda - \Lambda_{(1)})$ ja silloin, kun jälleenvakuutusta ei

oteta lainkaan $A = \Lambda$. Seuraavassa tarkastelussa oletetaan, että $\Lambda - \Lambda_{(1)} < A < \Lambda$. Ratkaisuksi saatavat omapidätysmäärät M_i riippuvat luonnollisestikin valitusta tulostavoitteesta A . Tämän vuoksi ongelman ratkaisua kutsutaan suhteelliseksi ratkaisuksi.

Zecchin soveltaa yllä olevaan optimointiongelmaan Kuhn-Tuckerin ehtoja. Ongelmalla on olemassa yksikäsitteinen ratkaisu ja voidaan osoittaa, että se saadaan silloin, kun seuraavat ehdot toteutuvat

$$M_i = T_i, \text{ kun } i=1, \dots, I-1,$$

$$M_i = \tau_i^{-1}(\delta), \text{ kun } i=I, \dots, N,$$

$$\Lambda - \sum_{i=I}^N \{ \lambda_{ri} E(X_i) - \lambda_{ri} E(k_i) [\int_0^{\tau_i^{-1}(\delta)} z dS_i(z) + \tau_i^{-1}(\delta) (1 - S_i(\tau_i^{-1}(\delta)))] \} = A \text{ ja}$$

$$\tau_{I-1}(T_{I-1}) \leq \delta < \tau_I(T_I), \quad I \in \{1, 2, \dots, N\} \text{ on yksikäsitteinen,}$$

missä

$$\tau_i(M_i) = \frac{1}{\lambda_{ri}} \left\{ M_i + \frac{\text{Var}(k_i) - E(k_i)}{E(k_i)} \left[\int_0^{M_i} z dS_i(z) + M_i (1 - S_i(M_i)) \right] \right\}$$

ja indeksit $i = 1, 2, \dots, N$ on järjestetty siten, että

$$\tau_i(T_i) \leq \tau_{i+1}(T_{i+1}), \quad i=1, 2, \dots, N-1.$$

Termi δ on niin sanottu Kuhn-Tuckerin kerroin. Näistä ehdoista nähdään, että koko portfoliossa on $I-1$ sellaista riskiä, jotka pidetään kokonaan omalla vastuulla, ja loput $N-I+1$ riskiä jälleenvakuutetaan osittain.

Ratkaisun löytäminen suoraan yllä annettujen ehtojen avulla ei ole kovin yksinkertainen tehtävä. Zecchin ehdottaa, että optimaaliset omapidätysmäärät M_i lasketaan seuraavaa algoritmia hyväksi käyttäen. Merkitään aluksi

$$\Phi_j(\delta) = \Lambda - \sum_{i=j}^N \{ \lambda_{xi} E(X_i) - \lambda_{xi} E(k_i) [\int_0^{\tau_i^{-1}(\delta)} z dS_i(z) + \tau_i^{-1}(\delta) (1 - S_i(\tau_i^{-1}(\delta)))] \}.$$

Vaihe 1. Laske lausekkeet $\Phi_i(\tau_i(T_i))$, $i = 1, 2, \dots$ kunnes löydät sellaisen $i = I$, että

$$\Phi_{I-1}(\tau_{I-1}(T_{I-1})) \leq A \text{ ja } \Phi_I(\tau_I(T_I)) > A.$$

Vaihe 2. Etsi yhtälön $\Phi_i(\delta) = A$ yksikäsitteinen ratkaisu δ^* välillä $[\tau_{I-1}(T_{I-1}), \tau_I(T_I)]$.

Vaihe 3. Laske $M_i^* = T_i$, $i = 1, \dots, I-1$ ja $M_i^* = \tau_i^{-1}(\delta^*)$, $i = I, \dots, N$.

Vaihe 4. Loppu.

Jos vahinkojen lukumäärä oletetaan Poisson-jakautuneeksi, yllä olevat lausekkeet yksinkertaistuvat huomattavasti. Tällöin omalla vastuulla olevan tuloksen varianssi on $\text{Var}(Y_o) = \sum n_i E(Z_i^2)$, ja lauseke $\tau_i(\cdot)$ on yksinkertaisesti

$$\tau_i(M_i) = \frac{M_i}{\lambda_{xi}}.$$

Tästä lausekkeesta nähdään, että niissä riskeissä, jotka jälleenvakuutetaan, $M_i^* = \tau_i^{-1}(\delta^*) = \lambda_{xi} \delta^*$, toisin sanoen optimaalinen omapidätysmäärä on riippuu suoraan jälleenvakuuttajan varmuuskertoimesta. Vastaavanlaisen tulokseenhan päädyttiin myös Watersin ja Centenon tarkasteluissa sekä BPP:n ja Straubin tarkasteluissa silloin, kun jälleenvakuuttajan varmuuskerroin oli sama kuin koko liikkeessä.

2.10.3 Absoluuttisten omapidätysten määrääminen utiliteettifunktion avulla

Zecchin etsii optimaaliset omapidätysmäärät myös käyttäen hyväksi sedentin tuloksen (voiton) utiliteettifunktiota. Oletetaan, että utiliteetti G_U on seuraa-

vanlainen kvadraattinen funktio (U on käytettävissä oleva riskipääoma)

$$G_U(y) = y - (y^2/2B) \quad , \quad \text{missä } y \leq B$$

ja $1/B$ on riskin karttamisaste (*risk aversion in U*). Utiliteetin odotusarvo on

$$E[G_U(Y_o)] = E(Y_o) - \frac{1}{2B} [E^2(Y_o) + \text{Var}(Y_o)] .$$

Tehtävänä on nyt maksimoida utiliteetin odotusarvo. Optimointi voidaan tehdä joko yhdellä kertaa ratkaisemalla

$$\max_{\substack{0 \leq M_i \leq T_i \\ i=1, \dots, N}} E[G_U(Y_o)]$$

tai kahdessa vaiheessa

$$\max_A \max_{\substack{\text{ehdolla } E(Y_o)=A \\ 0 \leq M_i \leq T_i \\ i=1, \dots, N}} E[G_U(Y_o)] ,$$

toisin sanoen ratkaisemalla ensin suhteelliset omapidätysmäärät, jotka riippuvat A :sta, ja sen jälkeen laskemalla absoluuttiset omapidätysmäärät etsimällä optimaalinen A utiliteetin odotusarvoa kriteerinä käyttäen. Kaksivaiheisessa optimoinnissa havaitaan, että utiliteetin odotusarvon minimoiminen ehdolla, että $E(Y_o) = A$ (vakio), on itse asiassa sama asia kuin minimoida $\text{Var}(Y_o)$ ehdolla $E(Y_o) = A$. Optimoinnin ensimmäinen vaihe on siis sama kuin alakohdassa 4.8.2 esitetty optimointiongelma.

Merkitään ensimmäisen, suhteellisen optimointiongelman ratkaisua $M^*(A) = (M_1^*(A), \dots, M_N^*(A))$. Toisessa vaiheessa optimoitava utiliteettifunktio on

$$\begin{aligned} E[G_U(Y_o)] = & A - \frac{1}{2B} \left(A^2 + \sum_{i=1}^N \left\{ E(k_i) \left[\int_0^{M_i^*(A)} z^2 dS_i(z) + (M_i^*(A))^2 (1 - S_i(M_i^*(A))) \right] \right. \right. \\ & \left. \left. + [\text{Var}(k_i) - E(k_i)] \left[\int_0^{M_i^*(A)} z dS_i(z) + M_i^*(A) (1 - S_i(M_i^*(A))) \right]^2 \right\} \right) . \end{aligned}$$

Zecchin päättyy seuraavaan ratkaisualgoritmiin optimaalisen A^* :n ja optimaalisten omapidätysmäärien M^* löytämiseksi.

Merkitään

$$\chi_i = \Phi_{i+1}(\tau_i(T_i)) + \tau_i(T_i).$$

Vaihe 1. Jos $B = \Lambda - \Lambda_{(1)}$, niin $M^* = (0, \dots, 0)$ ja siirry vaiheeseen 5.
Muussa tapauksessa laske χ_N .

Jos $B \geq \chi_N$, niin $M^* = (T_1, \dots, T_N)$ ja siirry vaiheeseen 5.
(Huomaa, että suhteellisessa optimoinnissa riskien indeksit on järjestetty edellisessä alakohdassa kuvatulla tavalla.)

Vaihe 2. Etsi sellainen indeksi I , jolla

$$1 - \frac{1}{B} [\Phi_I(\tau_{I-1}(T_{I-1})) + \tau_{I-1}(T_{I-1})] \geq 0 \quad \text{ja}$$

$$1 - \frac{1}{B} [\Phi_{I+1}(\tau_I(T_I)) + \tau_I(T_I)] < 0.$$

Vaihe 3. Ratkaise A yhtälöstä

$$\Phi_I(B-A) = A.$$

Merkitään yksikäsitteistä ratkaisua A^* .

Vaihe 4. $M_i^* = T_i$, $i = 1, \dots, I-1$,

$$M_i^* = \tau_i^{-1}(\Phi_i^{-1}(A^*)) \quad , i = I, \dots, N.$$

Vaihe 5. Loppu.

3. SIMULOINTITUTKIMUKSEN TULOKSET

3.1 Yleistä

Tässä luvussa esitellään simulointitutkimuksessa saadut tulokset. Simuloinnin avulla vertaillaan joitakin edellisessä luvussa annettuja optimaalisen omapidätysmäärän laskemistapoja siten, että generoidaan ensin Monte Carlo -menetelmällä vahinkoaineisto, ja evaluoidaan sen jälkeen tarvittavat lausekkeet tästä aineistosta. Aineiston generoinnissa käytetään lähtökohtana Heiskasen esitelmää teollisuuspalovakuutusaineistoa [HEI81]. Heiskasen antamista liitetiedoista käytetään hyväksi vakuutusmääräluokitusta, näissä luokissa laskettua vahingoittuneiden riskien vakuutusmäärän Q jakaumaa ja vahinkoasteen C kahta ensimmäistä origomomenttia (ks. liite 1).

Aineisto muodostetaan siten, että generoidaan ensin kussakin vakuutusmääräluokassa vahinkojen lukumäärä ja sen jälkeen tämän ilmoittama määrä vakuutusmäärä - vahinkoaste -pareja. Näiden avulla lasketaan sitten yksittäiset vahingot. Toistojen lukumääräksi simuloinnissa valitaan 5 000. Simuloinnit toteutetaan APL-ohjelmointikielellä. APL:ssä on käytettävissä satunnaislukugeneraattori, joka tuottaa välillä $(0, 1)$ tasaisesti jakautuneita satunnaislukuja.

Simuloinnin lähtökohtana olevan mallin parametrit ja satunnaislukujen generoinnissa käytetyt menetelmät esitellään kohdassa 3.2. Kohdassa 3.3 kuvailaan generoitua aineistoa ja kohdassa 3.4 esitetään sitten eri menetelmillä saadut omapidätysmäärät. Vertailun vuoksi approksimoidaan optimaalinen omapidätys myös suoraan simulointiaineistosta. Kohdassa 3.5 esitetään nämä tulokset ja kohdassa 3.6 verrataan niitä eri menetelmillä saatuihin omapidätyksiin. Simuloinnin käyttöä jälleenvakuutusratkaisujen vertailussa pohditaan yleisemmin kohdassa 3.7.

3.2 Simuloinnissa käytetyt parametrit ja menetelmät

3.2.1 Vahinkojen lukumäärä

Vuoden vahinkojen lukumäärän odotusarvoksi valitaan 300 [HEI81]. Vahinkojen lukumäärien odotusarvot vakuutusmääräluokittain saadaan täten kertomalla liitteen 1 mukaiset vakuutusmääräjakauman luvut 300:lla. Oletetaan, että luokkakohtaiset vahinkojen lukumäärät ovat keskenään riippumattomia ja Poisson-jakautuneita.

Poisson-satunnaismuuttujat generoidaan käyttämällä yksinkertaista, Poisson-kertymäfunktioon perustuvaa algoritmia [BPP84]. Merkitään n :llä generoitavan Poisson-jakauman odotusarvoa ja $Poi(k)$ Poisson-kertymäfunktion arvoa pisteessä k . Generointi suoritetaan seuraavasti

- | | |
|----------|---|
| Vaihe 1. | Generoi tasan jakautunut satunnaisluku r väliltä $(0,1)$. |
| Vaihe 2. | Aseta $i = n$ pyöristettynä ylöspäin lähimpään kokonaislukuun. |
| Vaihe 3. | Jos $r \leq Poi(i+1)$,
niin siirry vaiheeseen 4
muuten siirry vaiheeseen 5. |
| Vaihe 4. | Jos $r \leq Poi(i)$,
niin $i = i - 1$,
jos $i = 0$,
niin siirry vaiheeseen 6
muuten siirry vaiheeseen 4
muuten siirry vaiheeseen 6. |
| Vaihe 5. | Jos $r > Poi(i+1)$,
niin $i = i + 1$
siirry vaiheeseen 5
muuten siirry vaiheeseen 6. |
| Vaihe 6. | Poisson(n)-jakautunut satunnaisluku = i .
Loppu. |

Tässä algoritmissa aloitetaan Poisson-satunnaismuuttujan etsiminen jakauman odotusarvon läheltä eikä jakauman alusta ($i = 0$). Tällä tavoin generointi saadaan huomattavasti nopeammaksi.

3.2.2 Vakuutusmäärä

Vakuutusmäärän oletetaan jakautuneen tasaisesti kussakin vakuutusmääräluokassa. Pienin mahdollinen vakuutusmäärä on 1 000 mk.

3.2.3 Vahinkoaste

Vahinkoasteen C oletetaan olevan vakuutusmääräluokittain Beta-jakautunut [HEI81]. Beta-jakauman tiheysfunktio on muotoa

$$g(c; \alpha, \beta) = \frac{c^{\alpha-1} (1-c)^{\beta-1}}{B(\alpha, \beta)}, \text{ kun } 0 < c < 1$$

$$= 0, \text{ muulloin,}$$

missä

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 u^{\alpha-1} (1-u)^{\beta-1} du,$$

ja jakauman odotusarvo ja varianssi ovat

$$E(C) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \quad \text{ja} \quad \text{Var}(C) = \frac{\alpha\beta}{(\alpha+\beta)^2(\alpha+\beta+1)}.$$

Beta-jakaumien parametrit α ja β estimoidaan momenttimenetelmällä Heiskanen antamista vakuutusmääräluokakohtaisista origomomenteista $E(C)$ ja $E(C^2)$. Parametreille saadaan seuraavat estimaattorit

$$\alpha = \frac{E(C) [E(C) - E(C^2)]}{E(C^2) - [E(C)]^2}$$

ja

$$\beta = \frac{[1 - E(C)] [E(C) - E(C^2)]}{E(C^2) - [E(C)]^2}.$$

Liitteessä 1 on annettu näin lasketut α - ja β -arvot. Suurin osa parametripaareista on sellaisia, joissa α on ykköstä pienempi ja β ykköstä suurempi. Tämä tarkoittaa sitä, että vastaava Beta-tiheysfunktio on kovera, kasvava funktio, joka saa suurimmat arvonsa ykkösen lähellä.

Beta-jakautuneet satunnaisluvut generoidaan käyttäen liitteessä 2 esitettyä B1-generaattoria [DAG88].

3.2.4 Varmuuslisä ja riskipääoma

Koko liikkeen varmuuskertoimeksi valitaan 0.04 (vrt. esimerkiksi [BPP84]).

Useissa tutkittavista menetelmistä oletetaan jälleenvakuuttajan varmuuskertoimen olevan sama kuin koko liikkeessä. Jotta tulokset olisivat vertailukelpoisia, lasketaan kaikki lausekkeet näillä oletuksilla. Niissä lausekkeissa, joissa λ_o lle ei aseteta rajoituksia, kokeillaan myös, mitä omapidätyksestä riippuva varmuuskerroin vaikuttaa tuloksiin. Tällöin käytetään Amslerin ehdottamaa varmuuslisän Λ_o laskukaavaa

$$\Lambda_o = \sqrt{\frac{\text{Var}(X_o)}{\text{Var}(X)}} \lambda_P ,$$

jolloin

$$\lambda_o = \frac{\Lambda_o}{P_o} ,$$

ja jälleenvakuuttajan varmuuslisä ja varmuuskerroin voidaan laskea tämän avulla

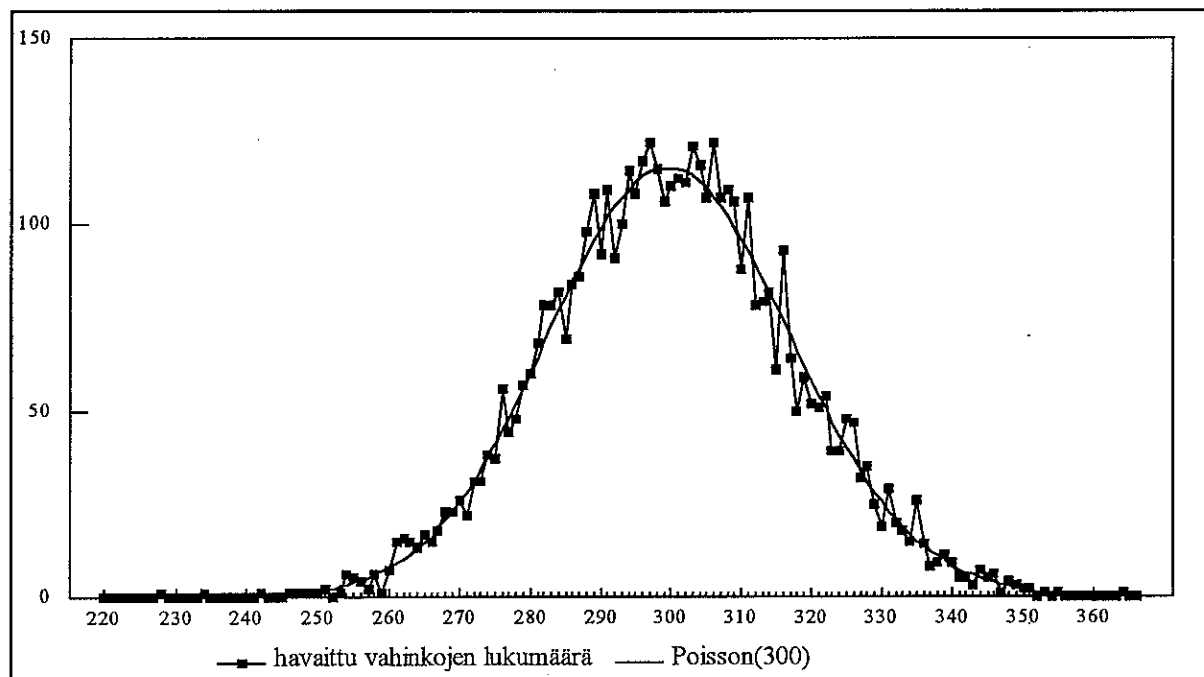
$$\Lambda_r = \Lambda - \Lambda_o = \left(1 - \sqrt{\frac{\text{Var}(X_o)}{\text{Var}(X)}}\right) \lambda_P ; \quad \lambda_r = \frac{\Lambda_r}{P_r} .$$

Useimmissa menetelmissä tulokset annetaan esittämällä omapidätyksen ja riskipääoman välinen riippuvuus. Niissä laskutavoissa, joissa riskipääoma pitää valita etukäteen, tarkastellaan riskipääomaa U , joka on noin 1/4, 1/2 tai noin 1/1 riskimaksusta.

3.3 Generoidun aineiston kuvaus

3.3.1 Vahinkojen lukumäärä

Vahinkojen kokonaislukumäärä yhdessä simulointitoistossa muodostuu vakuutusmääräluokittain generoitujen Poisson-jakautuneiden vahinkojen lukumäärien summana. Tunnetusti Poisson-jakautuneiden satunnaismuuttujien summa noudattaa myös Poisson-jakaumaa, jakauman odotusarvon ollessa summattavien satunnaismuuttujien odotusarvojen summa. Tämän periaatteen mukaan, vahinkojen lukumäärän tulisi olla Poisson(300)-jakautunut. Simuloinneissa saatiin vahinkolukumäärän keskiarvoksi 299.8154, joka on varsin lähellä teoreettista odotusarvoa. Kuvassa 3.1 on esitetty 5 000 toistossa havaittu vahinkolukumäärän jakauma ja vastaava teoreettinen Poisson(300)-jakauma.



Kuva 3.1 Kokonaisvahinkolukumäärä; havaitut ja teoreettiset frekvenssit 5 000 toistossa.

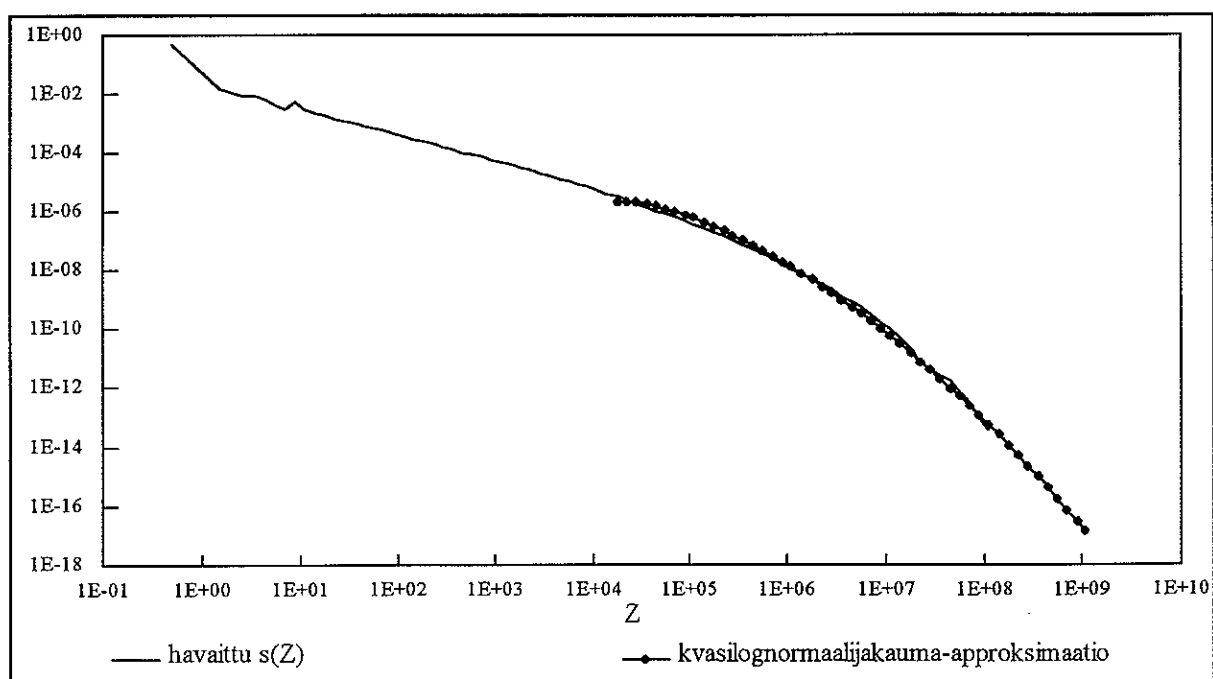
3.3.2 Yksittäisvahinko

Yksittäisvahinko lasketaan satunnaislukuparin vakuutusmäärä - vahinkoaste tulona. Tulokseksi saadaan vahinkomuuttuja, jonka jakauma on hyvin vino. Noin 44 prosenttia generoiduista vahingoista on alle 1 mk. Suurin havaittu yksittäisvahinko on noin 110 Mmk.

Osoittautuu, että yksittäisvahingon jakauman häntää voidaan approksimoida varsin hyvin kvasilognormaalijakaumalla. Kvasilognormaalihäntäjakauman kertymäfunktio, kun hännän alkupiste on z_1 , on

$$\begin{aligned} S_1(z) &= 1 - (z / z_1)^{\alpha + \beta \ln(z)} & , \text{ kun } z \geq z_1 \geq 0 \\ &= 0 & , \text{ muulloin.} \end{aligned}$$

Parametrit α ja β estimoidaan sovittamalla paraabeli pienimmän neliösumman menetelmällä havaittuihin arvoihin $\ln[1-S(z)]$, $z \geq z_1$ [SAV88]. Kun z_1 :ksi valitaan 16 000 mk, pienimmän neliösumman sovituksessa päästään yli 0.99 suuruiseen yhteiskorrelaatiokertoimeen. Kuvassa 3.2 on esitetty havaittu yksittäisvahingon jakauma ja sen häntään sovitettu kvasilognormaalijakauma.



Kuva 3.2 Yksittäisvahinko; havaittu jakauma ja sen häntään sovitettu kvasilognormaalijakauma-approksimaatio.

3.3.3 Kokonaisvahinkomeno

Simuloinneissa havaittu kokonaisvahinkomenon jakauma on myös hyvin vino ($\text{vinous} > 2.3$). Koska osa optimaalisen omapidätyksen laskemiseksi esitetyistä malleista perustuu normaalijakaumaan, NP-approksimaatioon tai näitä lähellä oleviin jakaumaoletuksiin, kokeillaan seuraavaksi, miten hyvin NP-approksimaatio sopii havaittuun kokonaisvahinkomenon jakaumaan.

NP-approksimaatio lasketaan seuraavasti [BPP84]. Merkitään ensin x :llä normeerattuja vahinkomääriä

$$x = [X - \hat{E}(X)] / [\hat{V}\text{ar}(X)]^{1/2},$$

missä $\hat{E}(X)$ tarkoittaa kokonaisvahingon odotusarvon estimaattia (havaittu keskiarvo) ja $\hat{V}\text{ar}(X)$ varianssin estimaattia (havaittu varianssi). Merkitään lisäksi

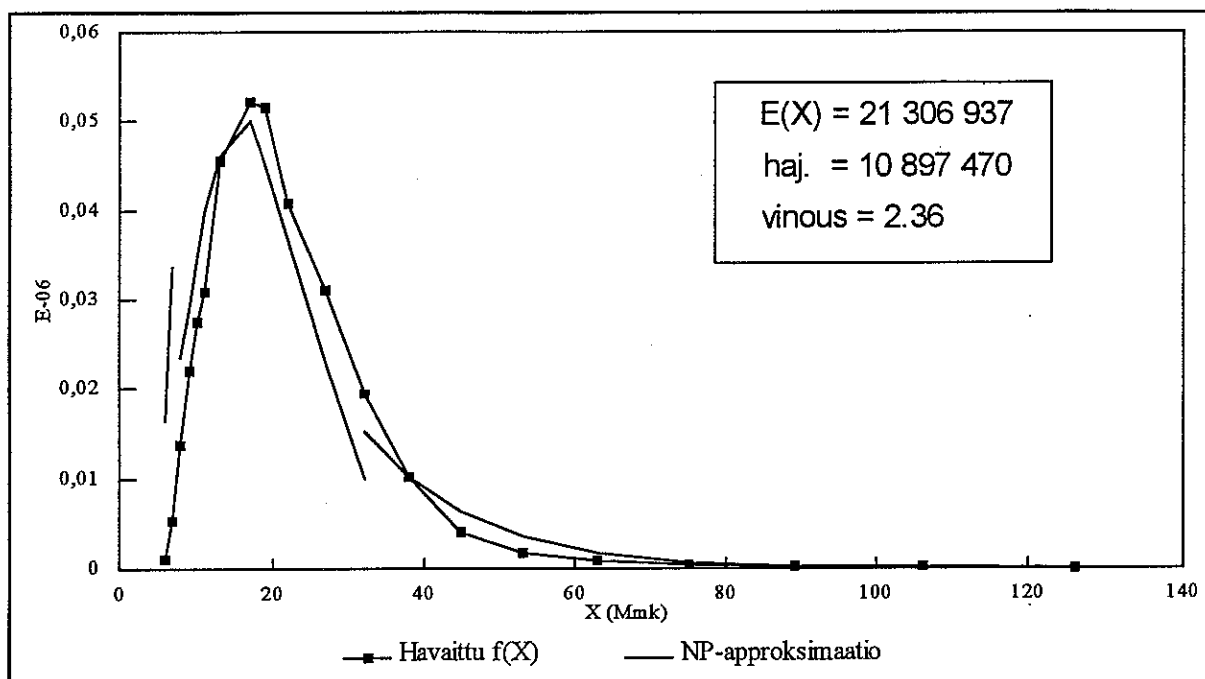
$$g = \gamma_x / 6 \text{ ja } x_0 = -(7/4)^{1/2}.$$

Kirjoitetaan

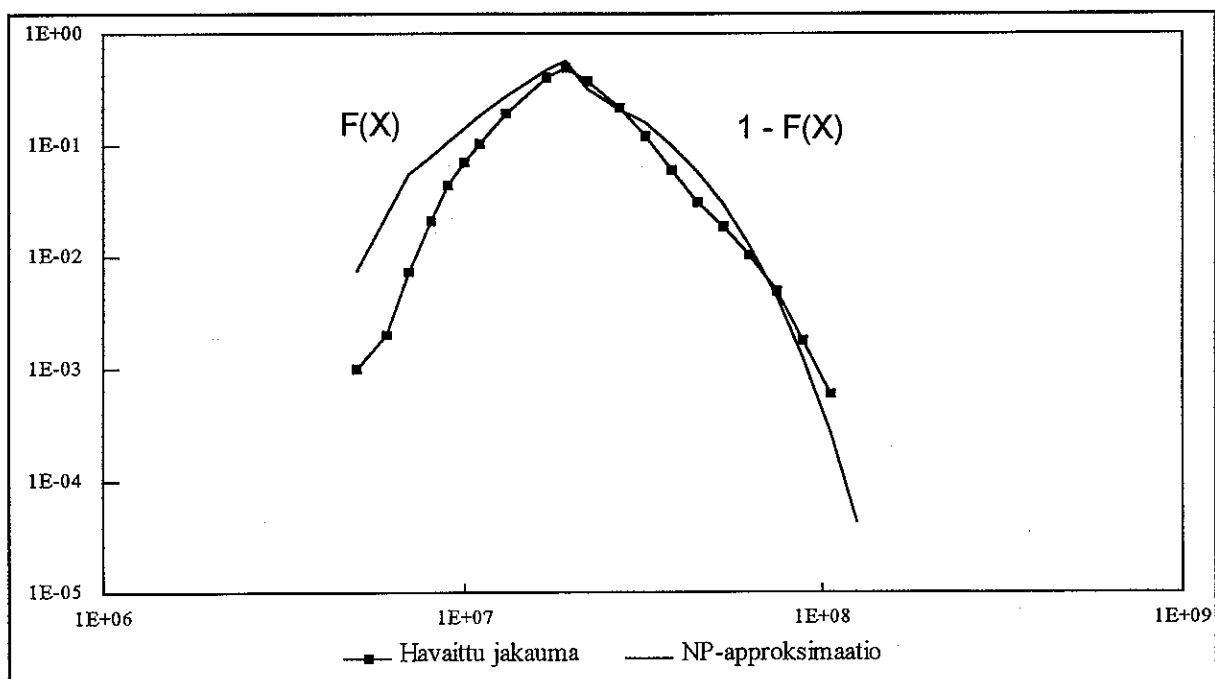
$$\begin{aligned} y &= \sqrt{1 + \frac{1}{4g^2} + \frac{x}{g}} - \frac{1}{2g}, \text{ kun } x \geq 1, \\ &= x - g(x^2 - 1) + g^2(4x^3 - 7x) \times [x_0 \geq x], \text{ kun } x < 1, \\ &\text{missä } [x_0 \geq x] = 1, \text{ kun } x_0 \geq x, \text{ ja } = 0 \text{ muulloin.} \end{aligned}$$

Tällöin NP-approksimaatio on $F(X) \approx N(y)$.

Kuvissa 3.3 ja 3.4 on esitetty havaittu kokonaisvahinkomenon jakauma ja sitä vastaava NP-approksimaatio. Approksimaatiolla on kaksi epäjatkuvuuskohtaa määrittelynsä mukaisesti. Kuvista nähdään, että NP-approksimaatio ei ole kovin onnistunut valinta. Tämä johtuu vahinkojakauman suuresta vinoudesta.



Kuva 3.3 Kokonaisvahinkomäärän X havaittu jakauma ja sitä vastaava NP-approksimaatio.



Kuva 3.4 NP-approksimaation tarkkuus.

3.4 Omapidätysmäärän laskeminen

3.4.1 Yleistä

Generoidusta aineistosta laskettiin optimaaliset omapidätysmäärät muutamalla edellisessä luvussa esitetyllä menetelmällä, nimittäin Beard - Pentikäinen - Pesosen, solvenssityöryhmän, Straubin, Amslerin ja Watersin tapaan. Jälleenvakuutusmuodoista pitäyduttiin excess of loss -jälleenvakuutuksessa. Ko-keiltavat menetelmät ja lausekkeet on luvussa 2 numeroitu, ja jatkossa niihin viitataan näillä numeroilla.

Koska simuloitaessa käytettävissä ei ole pelkästään yksi tai useampi otos oletetusta populaatiosta, vaan (tietyllä tarkkuudella) koko populaatio, voidaan jatkossa tarkastella sellaisiakin lausekkeitä, joita käytännön tilanteessa saate- taan vain karkeasti approksimoida. Näin ollen joistakin menetelmistä esite- tään paitsi ehdotettu approksimaatio omapidätykselle, niin myöskin omapidä- tys, johon taustalla olevan teorian suoraan soveltaminen johtaa.

3.4.2 Beard - Pentikäinen - Pesonen

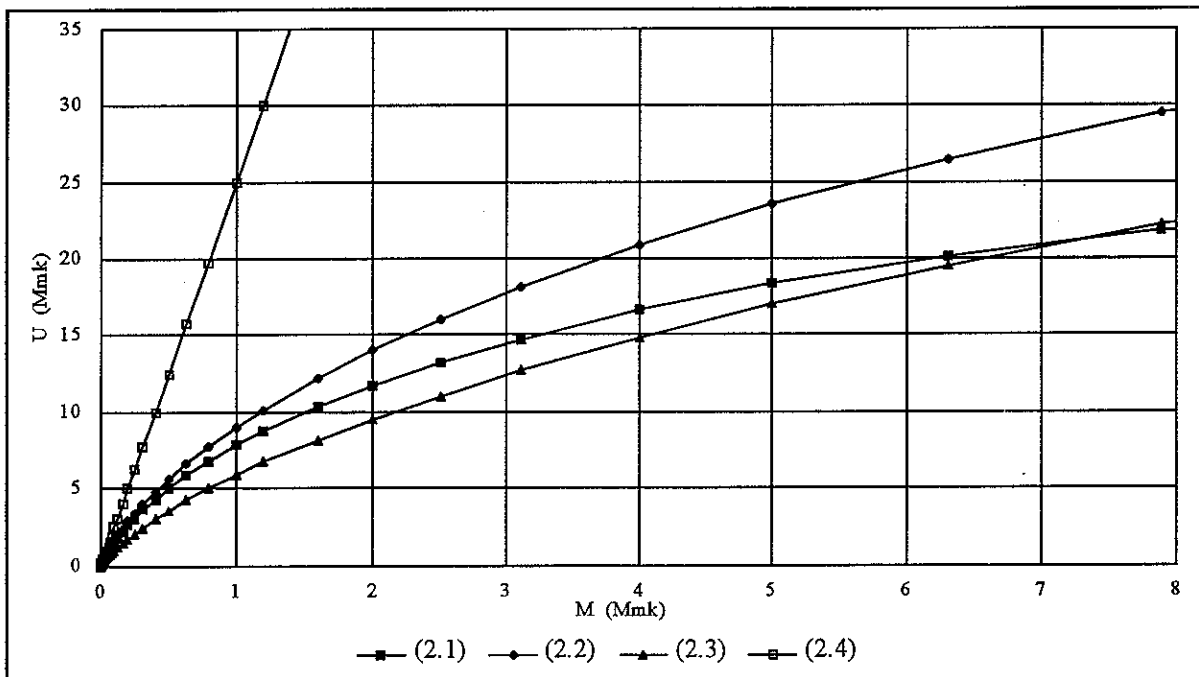
Beard et al. etsivät omapidätysmäärää M , jolla yhden vuoden tuhon todennä- köisyys on valitun suuruinen. Jakaumasta riippumattomassa approksimaa- tiossaan he sitten luopuvat tästä vaatimuksesta ja etsivät eräänlaisen alarajan omapidätykselle. Kohdassa 2.4 on aluksi esitetty normaalijakaumaoletukseen perustuva M :n määrittelevä perusyhtälö (2.1) sekä vastaava NP-approksimaa- tioon perustuva yhtälö (2.2). Kun jälkimmäisestä johdetaan jakaumasta riip- pumatonta ratkaisua, päädytään yhtälöön (2.3). Tästä muodosta johdetaan muuttujien vaihdon avulla vielä hyperbolinen funktio, josta ratkaistaan alaraja- arvio, niin sanottu peukalosääntö, M :lle (2.4).

Kaikki nämä kaavat ovat tai voidaan esittää muodossa, jossa yhtälön vasem- malla puolella on riskipääoma U ja oikealla puolella omapidätyksestä M riippu- via tekijöitä. Kirjoittamalla kaava (2.4) tähän muotoon, saadaan

$$U \approx \frac{M}{\lambda_0} , \text{ kun } \varepsilon \leq 0.001 ,$$

$$= \frac{K^2 y_\varepsilon^2}{4 \lambda_0^2} M , \text{ kun } \varepsilon > 0.001 .$$

Kuvassa 3.5 on esitetty näitä neljää lauseketta vastaavat kuvaajat väliä, joka vastaa riskipääoman U arvoja 0 - 20 Mmk. Varmuuskertoimeksi on valittu $\lambda_0 = \lambda = 0.04$ ja tuhon todennäköisyydeksi $\varepsilon = 0.001$. Liitteessä 3 on annettu vastaavat kuvaajat koko määrittelyalueellaan (kuva L3.1), kuvaajat joissa $\varepsilon = 0.01$ (kuva L3.2) ja kuvaajat, joissa varmuuskerroin on alakohdassa 3.2.4 esitetty omapidätyksestä riippuva funktio (kuva L3.3).



Kuva 3.5 Omapidätyksen määrittäminen Beard et al. mukaan.

$$\lambda_0 = 0.04 \quad \varepsilon = 0.001$$

(2.1) perusyhtälö, normaalijakauma

(2.2) perusyhtälö, NP-kaava

(2.3) perusyhtälö, jakaumasta riippumaton

(2.4) peukalosääntö, alaraja.

Kuvasta nähdään, että alaraja-arvio (2.4) johtaa aivan toista suuruusluokkaa oleviin omapidätysmääriin kuin perusyhtälöön suoraan tukeutuvat mallit. Viinouden huomioon ottava NP-approksimaatio johtaa odotetusti perusyhtälöistä konservatiisimpiin omapidätysmääriin.

Tarkasteluvälillä yhtälö (2.3) antaa suurempia omapidätyksiä kuin (2.1). Sekä yhtälössä (2.1) että (2.3) vinoustermi on jätetty pois. Yhtälöt poikkeavat toisistaan vain siinä, että yhtälössä (2.1) esiintyvä X_0 :n varianssi on (2.3):ssa korvattu jakaumasta riippumattomalla approksimaatiolla K^2MP_0 , missä K on Beard et al. ehdotuksen mukaisesti valittu vakioksi 0.6. Tarkasteluvälillä kohdassa 2.4 esitelty muuttuja K on M :n suhteen vähenevä funktio ja se saa arvoja 0.59 - 1.00 (kuvaajat leikkaavat pisteessä, jossa $K = 0.6$). Beard et al. mainitsevat tyypilliset K :n arvot 0.5 - 0.8 vastaavat simulointiaineistossa omapidätysmääriä 770 000 - 14 600 000.

Taulukossa 3.1 on esimerkkejä eri oletuksilla lasketuista optimaalisista omapidätyksistä.

Taulukko 3.1 Optimaaliset omapidätysmäärät (tmk) eri taustaoletuksilla Beard et al. mukaan.

ϵ	U	λ_0	(2.1)	(2.2)	(2.3)	(2.4)
0.001	5 Mmk	0.04	495	421	792	200
		$\lambda(M)$	464	397	740	
	10 Mmk	0.04	1 515	1 173	2 165	400
		$\lambda(M)$	1 446	1 125	2 071	
	20 Mmk	0.04	6 210	3 704	6 585	800
		$\lambda(M)$	6 037	3 616	6 450	
0.01	5 Mmk	0.04	791	688	1 227	411
		$\lambda(M)$	732	639	1 135	
	10 Mmk	0,04	2 616	2 054	3 456	821
		$\lambda(M)$	2 472	1 957	3 208	
	20 Mmk	0,04	17 825	7 754	11 044	1 643
		$\lambda(M)$	17 163	7 576	10 443	

Merkintä $\lambda(M)$ tarkoittaa alakohdassa 3.2.4 määriteltyä M :stä riippuvaa varmuuskerrointa. Taulukosta havaitaan, että varmuuskertoimen valinta ei simulointiaineistossa vaikuta tuloksiin olennaisesti. Sen sijaan omapidätysmäärä riippuu selvästikin kaikista muista tekijöistä, eli tuhon todennäköisyydestä, ris-

kipääomasta ja valitusta laskukaavasta.

Käytäntöön soveltamisen kannalta yhtälöt (2.1) - (2.4) eroavat toisistaan siinä, mitä tekijöitä oletetaan ennalta tunnetuksi. Seuraavassa taulukossa on yhteenveto tarvittavista suureista.

Taulukko 3.2 Omapidätysten laskemiseen tarvittavat tiedot Beard et al. mukaan.

(2.1)	(2.2)	(2.3)	(2.4)
λ_o	λ_o	λ_o	λ_o
P_o	P_o	P_o	
$\text{Var}(X_o)$	$\text{Var}(X_o)$		
	Y_{Xo}		

Silloin, kun vahinkojen lukumäärä on Poisson-jakautunut riittää, että tunnetaan yksittäisvahingon jakauma. Tämän avulla pystytään laskemaan kaikki taulukossa 3.2 mainitut tekijät. Jos jakaumaa ei tunneta, niin vain jakaumasta riippumaton laskukaava (2.4) ja mahdollisesti (2.3) pystytään evaluoimaan.

3.4.3 Solvenssityöryhmä

Solvenssityöryhmän ehdotus optimaaliseksi omapidätysmääräksi on 4% koko liikkeen vakuutusmaksutuotosta (yhtälö 2.5). Simulointiaineistossa 4% mak-
sutulosta johtaa omapidätykseen $M \approx 886$ tmk.

3.4.4 Straub

Kuten Beard et al. tapauksessa esitetään Straubinkin kohdalla sekä alkuperäisestä teoreettisesta mallista ratkaistu omapidätys että Straubin sille johtama approksimaatio. Teoriassaan Straub etsii omapidätystä, joka vastaa annettua äärettömän aikavälin tuhon todennäköisyyden yläraja-arviota. Hän päätyy yhtälöön (2.6), joka voidaan kirjoittaa myös muodossa

$$U = \frac{-\ln \varepsilon \operatorname{Var}(X_o)}{2E(Y_o)} = \frac{-\ln \varepsilon E(Z_o^2)}{2\lambda_o E(Z_o)} .$$

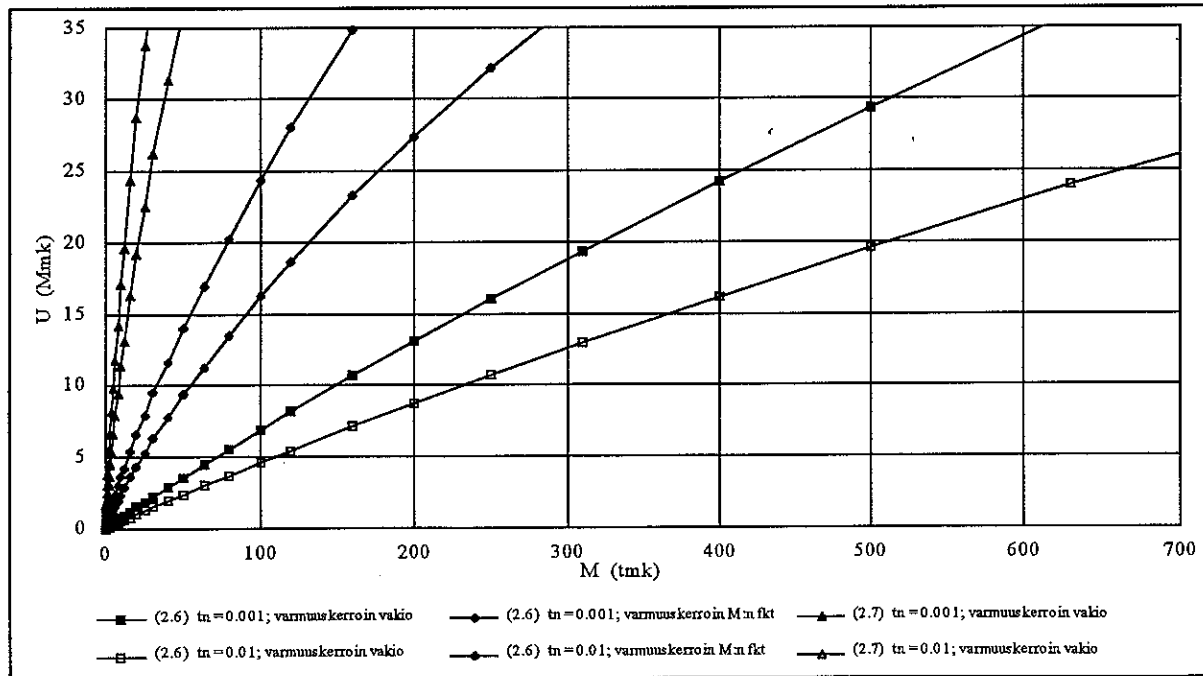
Straub ehdottaa, että omapidätys ratkaistaan excess of loss -jälleenvakuutusta käyttäessä yhtälöstä (2.7)

$$S^{(1)}(M) = \frac{E(Z_o)}{E(Z)} \approx \alpha = \frac{\frac{U}{E(X)} \left(-\frac{2}{\ln \varepsilon}\right) \lambda}{\operatorname{Var}(X) / [E(X)]^2} .$$

Siirtämällä tässäkin U yhtälön vasemmalle puolelle (ja käyttämällä hyväksi tietoa, että vahinkojen lukumäärä on Poisson-jakautunut) saadaan

$$U = \frac{-\ln \varepsilon E(Z_o) E(Z^2)}{2 \lambda [E(Z)]^2} .$$

Kuvassa 3.6 on esitetty näiden kahden lausekkeen arvot väliltä, joka vastaa riskipääomia 0 - 20 Mmk. Varmuuskertoimena λ_o on käytetty sekä vakiota 0.04 että alakohdassa 3.2.4 määriteltyä M:n funktiota. Liitteen 3 kuvassa L3.4 kuvaajat on esitetty koko määrittelyalueellaan.



Kuva 3.6 Omapidätyksen määrääminen Straubin mukaan.

λ_o = vakio = 0.04 tai M:n funktio, $t_n \equiv \varepsilon$.

(2.6) alkuperäinen malli

(2.7) approksimaatio

Kuvasta nähdään, että Straubin heuristisesti johtama approksimaatio johtaa

selvästi alkuperäisestä mallista poikkeaviin tuloksiin. Myös varmuuskertoimen valinta vaikuttaa tuloksiin olennaisesti. Suuri poikkeama vakiokertoimella lasketuista tuloksista johtuu siitä, että Amslerin ehdottama varmuuskerroin riippuu suoraan omalla vastuulla olevan ja koko liikkeen vahinkomenojen hajoitusten suhteesta. Kuvan 3.6 mukaisilla pienillä omapidätyksillä tämä suhde on simulointiaineistossa pieni, jolloin λ_0 saa niinkin pieniä arvoja kuin 0 - 0.013.

Taulukossa 3.3 on annettu esimerkkejä kaavoilla (2.6) ja (2.7) lasketuista omapidätysmääristä.

Taulukko 3.3 Optimaaliset omapidätysmäärät (tmk) eri taustaoletuksilla Straubin mukaan.

ε	U	λ_0	(2.6)	(2.7)
0.001	5 Mmk	0.04	71	2
		$\lambda(M)$	15	
	10 Mmk	0.04	149	5
		$\lambda(M)$	33	
0.01	5 Mmk	0.04	322	12
		$\lambda(M)$	78	
	10 Mmk	0.04	109	4
		$\lambda(M)$	23	
0.01	10 Mmk	0,04	233	9
		$\lambda(M)$	54	
	20 Mmk	0,04	511	21
		$\lambda(M)$	132	

Kuten edellisen alakohdan mallissa, tässäkin alkuperäinen yhtälö ja sen approksimaatio eroavat toisistaan laskennallisesti vain siinä, onko $\text{Var}(X_0)$, tai yhtäpitävästi $E(Z_0^2)$, käytettävissä vai ei.

3.4.5 Amsler

Amslerin käyttämä omapidätyksen määrittämistapa on pääperiaatteiltaan sama kuin Straubin menetelmä. Kuitenkin sen sijaan, että kehittäisi "jakaumasta riippumatonta" approksimaatiota Straubin tapaan, Amsler olettaa reippaasti, että yksittäisvahingon jakauma on tunnettu.

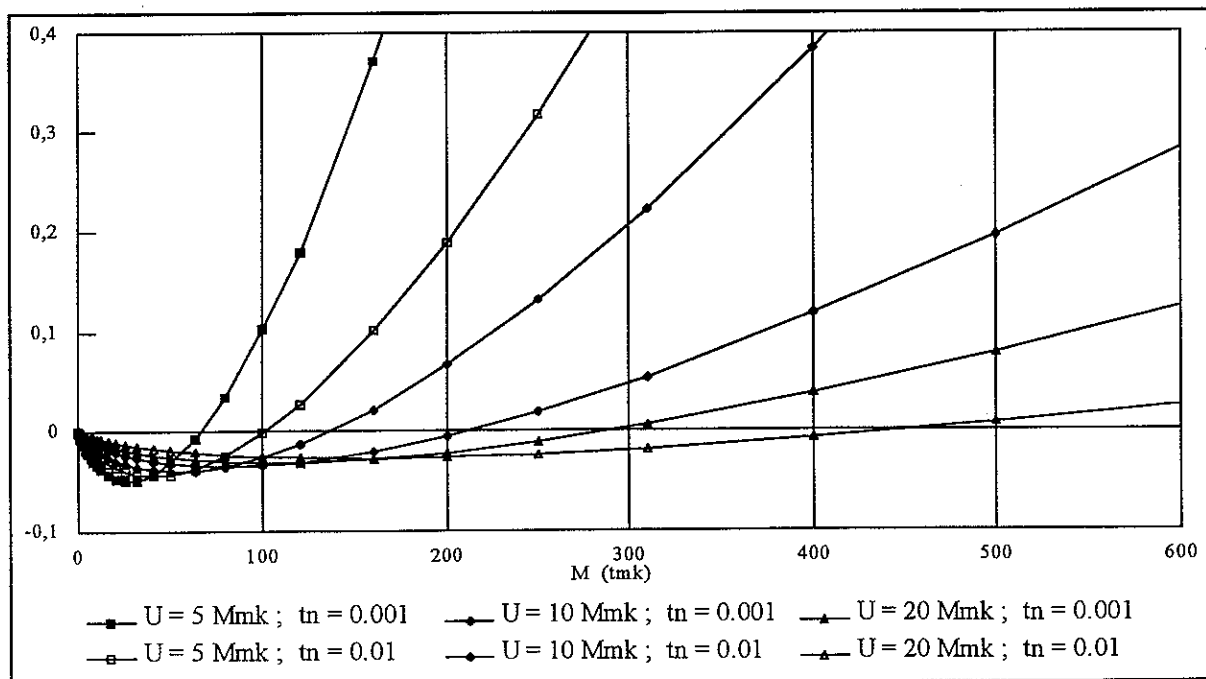
Amsler päätyy yhtälöön (2.8), joka yhdistetyn Poisson-jakauman tapauksessa voidaan kirjoittaa muodossa

$$\left(\frac{\ln \epsilon}{U}\right) B_0 + n \left[e^{L_{Z_0} \left(\frac{-\ln \epsilon}{U} \right)} - 1 \right] = 0$$

eli

$$\left(\frac{\ln \epsilon}{U}\right) B_0 + n \left[M_{Z_0} \left(-\frac{\ln \epsilon}{U} \right) - 1 \right] = 0 ,$$

missä lauseke $M_{Z_0}(\cdot)$ approksimoidaan numeerisesti. Koska riskipääoma U esiintyy yhtälössä myös momenttigeneroivan funktion sisällä, ei edellisten alakohtien mukainen esitystapa ole mahdollinen. Kuvassa 3.7 on piirretty yhtälön (2.8) lauseke M :n funktiona, kun varmuuskerroin on vakio 0.04.



Kuva 3.7 Omapidätyksen määrittäminen Amslerin mukaan (2.8).

$\lambda_0 = 0.04$; $tn \equiv \epsilon$.

Liitteessä 3 on annettu vastaava kuvaaja, kun varmuuskerroin riippuu M :stä (kuva L3.5). Kirjoitetaan vielä tulokset taulukkomuotoon.

Taulukko 3.4 Optimaaliset omapidätysmäärät (tmk) eri taustaoletuksilla Amslerin mukaan.

ε	U	λ_0	(2.8)
0.001	5 Mmk	0.04	65
		$\lambda(M)$	13
	10 Mmk	0.04	135
		$\lambda(M)$	27
	20 Mmk	0.04	286
		$\lambda(M)$	62
0.01	5 Mmk	0.04	100
		$\lambda(M)$	20
	10 Mmk	0,04	209
		$\lambda(M)$	43
	20 Mmk	0,04	443
		$\lambda(M)$	101

Kuten Straubin tapauksessa tässäkin varmuuskertoimen valinta vaikuttaa tuloksiin huomattavasti.

3.4.6 Waters

Waters tarkastelee tilannetta, jossa jokainen riski jälleenvakuutetaan erikseen. Riskeille etsitään sellaiset omapidätykset, että sedentin äärettömän aikavälin tuhon todennäköisyyden yläraja minimoituu. Jokaiselle riskille saadaan siis oma omapidätysmääränsä. Kunkin riskin yksittäisvahingon oletetaan olevan peräisin vahinkoprosessista, jonka jakaumat tunnetaan. Riskit oletetaan toisistaan riippumattomiksi.

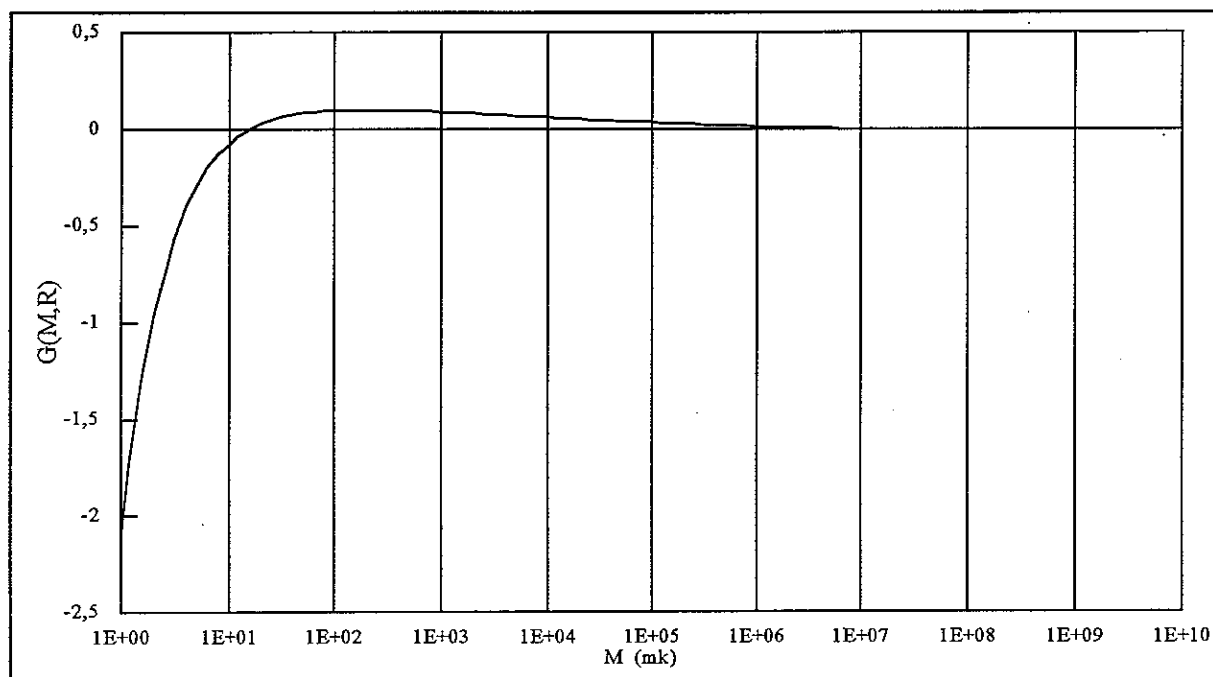
Koska simuloinnissa tarkastellaan pelkästään vahingoista muodostuvaa aineistoa, ei Watersin menetelmän soveltaminen sellaisenaan ole mahdollista.

Yksinkertaistetaan mallia siten, että tarkastellaan vain yhden riskin jälleenvakuuttamista. Etsitään se omapidätysmäärä, jolla äärettömän aikavälin tuhon todennäköisyys minimoituu, kun vahinko on peräisin vahinkoprosessista, jonka vahinkolukumäärän jakauma on Poisson(n) ja yksittäisvahingon jakauma $S(Z)$. Kuten edellistenkin menetelmien kohdalla, jakaumat lasketaan simuloitintaineistosta.

Näillä oletuksilla riskien lukumäärä N on siis yksi, ja Watersin johtama tulos voidaan tiivistää seuraavasti: optimaalinen omapidätys $M^* = \delta^* \ln(1 + \lambda_r)$, missä δ^* on yhtälön $H(\delta) = 0$ yksikäsitteinen positiivinen ratkaisu. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että

$$G(M^*, R^*) = G(M^*, 1/\delta^*) = G(M^*, \ln(1 + \lambda_r)/M^*) = 0.$$

Kuvassa 3.8 on piirretty $G(M, \ln(1 + \lambda_r)/M)$ M :n funktiona.



Kuva 3.8 Omapidätyksen määrääminen Watersin mukaan.

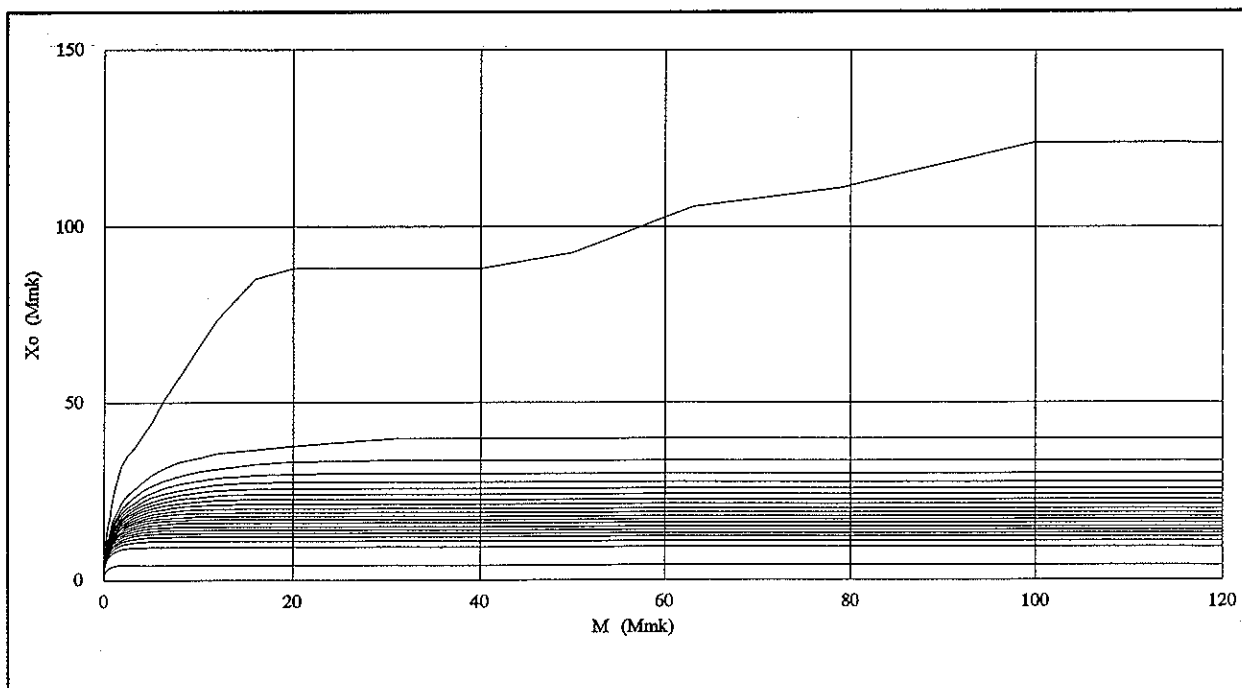
$$\lambda_r = 0.04.$$

Kuvaajasta nähdään, että funktion G ainoa nollakohta saavutetaan M :n arvolla $M \approx 16$ mk.

3.5 Simulointiaineistosta laskettu omapidätysmäärä

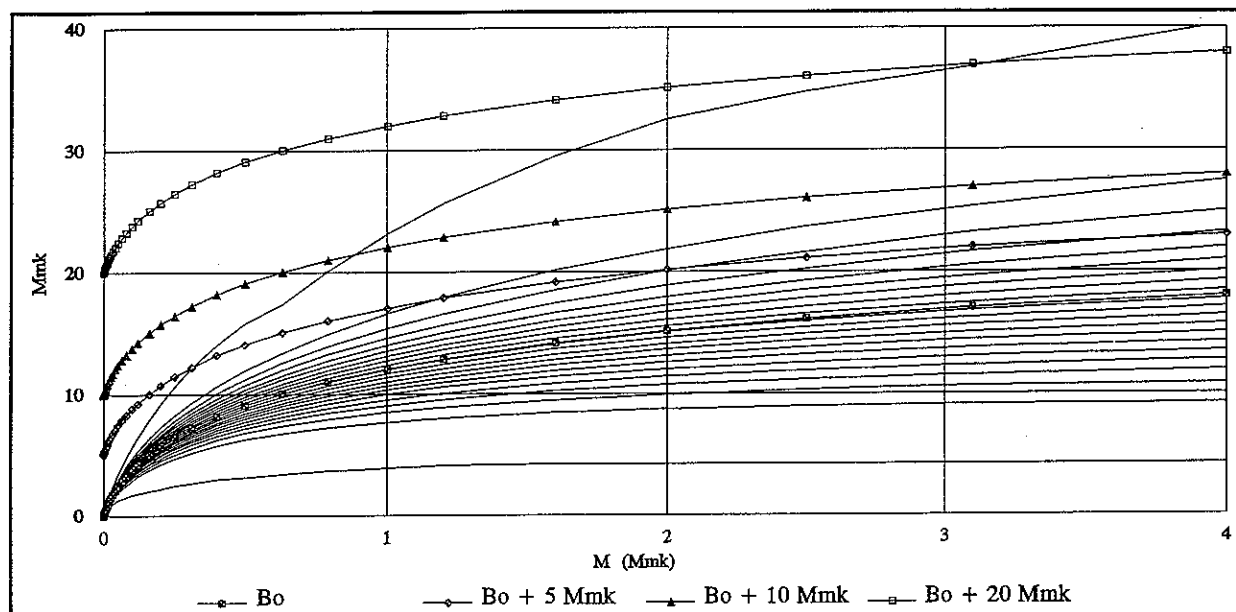
Yritetään seuraavaksi laskea optimaalinen omapidätysmäärä suoraan generoidusta aineistosta. Etsitään simulointiaineistosta ne omapidätysmäärät, joilla 1 ‰ tai 1 % simulaatiotoistoista johtaa vararikkoon. Vararikko määritellään samoin kuin tähänkin asti, eli vararikko tapahtuu, kun omalla vastuulla oleva vahinkomeno ylittää oman osuuden maksutulosta lisättynä riskipääomalla. Tällä tavalla laskien saadaan estimaatti omapidätykselle, jolla yhden vuoden tuhon todennäköisyys on 0.001 tai 0.01. Tarkastelukulma on siis sama kuin Beard - Pentikäinen - Pesosella.

Kuvassa 3.9 on piirretty omalla vastuulla olevan vahinkomenon prosenttiileja eri omapidätysmäärillä 5 prosentin välein. Toisin sanoen alin viiva esittää X_0 :n minimin 5 000 toistossa eri M :n arvoilla, toiseksi alin 5-prosenttiin, seuraava 10-prosenttiin ja niin edelleen. Ylin viiva on luonnollisestikin X_0 :n simulatiotoistoissa havaittu maksimi. Näin saadulla viuhkakuvaajalla pyritään kuvaamaan omalla vastuulla olevan vahinkomenon vaihtelua. Kuvasta nähdään, että vahinkomenon jakauma on hyvin vino. 95 prosentissa toistoista vahinkomeno jää alle 40 Mmk, kun suurin vahinkomeno on noin 125 Mmk (vertaa myös kuvaan 3.3).

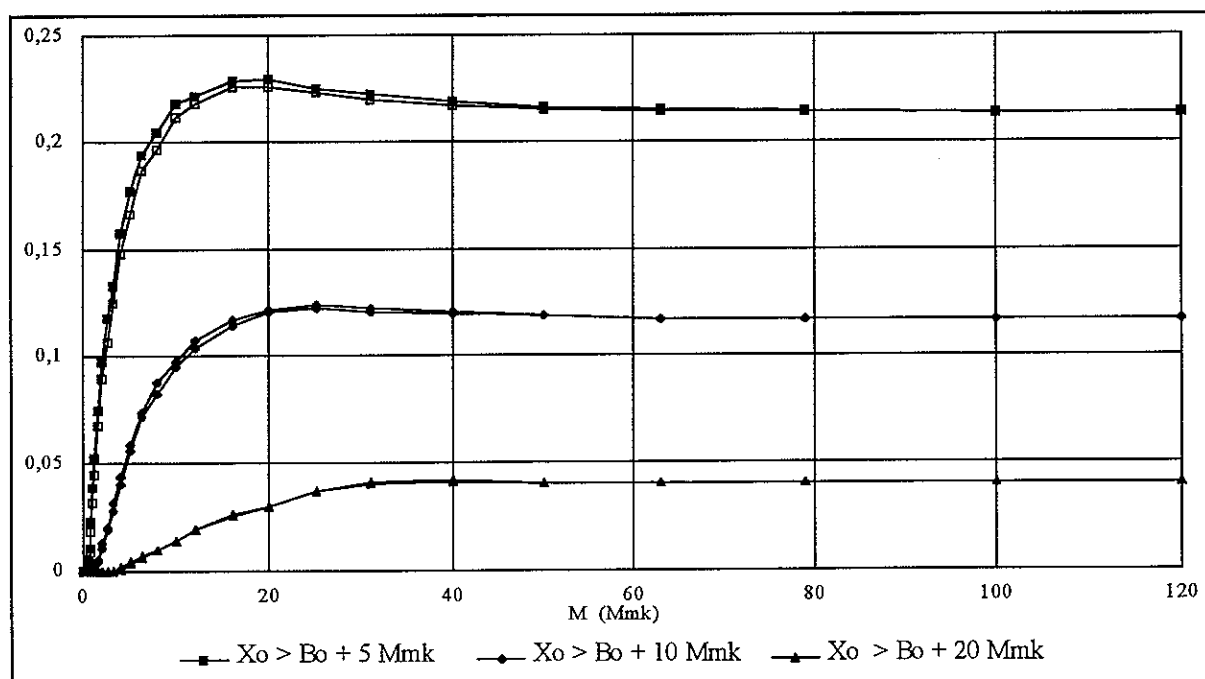


Kuva 3.9 Omalla vastuulla olevan vahinkomenon X_0 prosenttiilit 5 % välein 5 000 simulaatiotoistossa.

Kuvassa 3.10 on esitetty samasta kuvaajasta alkupää ($M \leq 4$ Mmk). Kuvaajaan on lisätty myös käyrät B_0 , $B_0 + 5$ Mmk, $B_0 + 10$ Mmk ja $B_0 + 20$ Mmk. Kuvassa 3.11 näkyvät vararikkojen suhteelliset määrät eri oma-pidätyksillä.



Kuva 3.10 Omalla vastuulla olevan vahinkomenon X_0 prosentitit 5% välein 5 000 simulaatiotoistossa pienillä omapidätyksen M arvoilla sekä omalla vastuulla oleva maksutulo B_0 lisättynä riskipääomilla 0 mk, 5 Mmk, 10 Mmk ja 20 Mmk.



Kuva 3.11 Vararikkojen suhteelliset määrät simulointitutkimuksessa. Käyräpareista ylemmässä λ_0 on M :n funktio ja alemmassa $\lambda_0 = 0.04$.

Taulukossa 3.5 on annettu yhteenveto omapidätysmääristä, jotka johtivat vararikkoon kerran tuhatta ja kerran sataa simulaatiota kohti.

Taulukko 3.5 Simulointiaineistosta suoraan lasketut optimaaliset omapidätysmäärät (tmk) eri taustaoletuksilla.

Vararikkojen lukumäärä	U	λ_0	Optimaalinen M (tmk)
1/1000	5 Mmk	0.04	460
		$\lambda(M)$	385
	10 Mmk	0.04	1 200
		$\lambda(M)$	1 133
	20 Mmk	0.04	4 000
		$\lambda(M)$	3 850
1/100	5 Mmk	0.04	661
		$\lambda(M)$	616
	10 Mmk	0,04	1 974
		$\lambda(M)$	1 863
	20 Mmk	0,04	8 100
		$\lambda(M)$	8 000

3.6 Menetelmien vertailu ja johtopäätökset

3.6.1 Yleistä

Edellisistä kohdista käy selvästi ilmi, että eri malleilla laskien päädytään hyvin erisuuruisiin optimaalisiin omapidätysmääriin. Odotetusti ratkaisevinta on se, mikä optimointikriteeri valitaan, toisin sanoen tarkastellaanko yhden vuoden vai äärettömän aikavälin todennäköisyyksiä. Äärettömän aikavälin vararikkotodennäköisyyksiä käytettäessä (Straub, Amsler) päästään omapidätyksiin, jotka ovat suuruusluokaltaan noin kymmenesosa vastaavista omapidätyksistä yhden vuoden tarkasteluissa (Beard et al.). Kaikkein pienimpään omapidätysmäärään päädyttiin, kun yritettiin minimoida äärettömän aikavälin vararikkotodennäköisyyttä (Waters).

Toinen silmiinpistävä ero syntyi alkuperäisten mallien ja niiden tilalle ehdotettujen approksimaatioiden välille (Beard et al., Straub). Beard et al. toteavatkin kirjassaan, että approksimaatio (2.4) on hyödyllinen enintään joissakin erikoistapauksissa.

Seuraavissa alakohdissa kootaan yhteen edellisessä kohdassa saatuja simulointituloksia ja vertaillaan niitä keskenään.

3.6.2 Yhden vuoden tarkastelut

Kun verrataan taulukossa 3.5 lueteltuja suoraan simulointiaineistosta laskettuja omapidätyksiä taulukon 3.1 Beard et al. mukaisesti laskettuihin vinouden huomioon ottavan NP-perusyhtälön (2.2) tuottamiin omapidätyksiin, niiden havaitaan olevan hyvin lähellä toisiaan. Kuvissa 3.3 ja 3.4 nähtävä vahinkomenon jakauman poikkeaminen NP-approksimaatiosta ei siis ole tulosten kannalta kovin haitallista.

Puhtaaseen normaalijakaumaan perustuva malli (2.1) antaa luonnollisestikin suurempia omapidätyksiä kuin pitäisi. Suhteellinen poikkeama simulointiaineistosta lasketuista omapidätyksistä kasvaa nopeasti riskipääomaa kasvatettaessa. On ehkä yllättävää, että approksimaatio (2.3) antaa riskipääoman

"pienillä" arvoilla huonompia estimaatteja kuin normaalijakaumamalli (2.1). Simulointiaineistossa normaalijakaumamalli johtaa itse asiassa melko hyviin approksimaatioihin, kun riskipääoma on alle 10 Mmk. Liitteen 3 kuvasta L3.1 nähdään, että riskipääoman kasvaessa malli (2.3) toimii paremmin kuin huoleton normaalijakaumamalli.

Yhteenvedona voidaan todeta, että jos yksittäisvahingon jakauma on käytävissä, niin omapidätys kannattaa estimoida käyttäen NP-perusyhtälöä (2.2), muussa tapauksessa suuntaa antavana arviona voitaneen pitää pienempää yhtälöiden (2.1) ja (2.3) perusteella lasketuista omapidätyksistä.

3.6.3 Äärettömän aikavälin tarkastelut

Solvenssityöryhmän tarkastelukulmana oli ääretön aikaväli. Yhtälön (2.5) perusteella laskettu omapidätysmäärä on melko varovainen arvio verrattuna simulointiaineistosta yhden vuoden perusteella laskettuihin omapidätyksiin. Neljän prosentin säännöllä saatu omapidätys vastaa simulointiaineistossa yhden vuoden tarkasteluissa tilannetta, missä riskipääoma on 5 ja 10 miljoonan välillä.

Straubin alkuperäisen mallin (2.6) ja Amslerin menetelmän (2.8) tuottamat omapidätysmäärät ovat hyvin lähellä toisiaan (ks. taulukot 3.3 ja 3.4). Tämä olikin odotettavissa, onhan kummallakin tarkastelujen lähtökohta sama. Se, että Straubin mallilla saadaan jonkin verran korkeampia omapidätysmääriä johtuu siitä, että Straub approksimoi kokonaisvahinkomenon jakaumaa normaalijakaumalla, kun taas Amsler käyttää suoraan tunnetuksi olettamaansa yksittäisvahingon jakaumaa. Straubin edelleen johtama approksimaatio (2.7) poikkeaa kaikkien muiden laskutapojen tuloksista niin paljon, että sen käyttäminen ei liene perusteltua.

Waters ja Centeno tarkastelevat omapidätyksen määräämistä excess of loss - jälleenvakuutuksessa riski kerrallaan. He etsivät omapidätyksiä, joilla äärettömän aikavälin vararikkotodennäköisyyden yläraja-arvio minimoituu. Erona heidän tutkimuksissaan on se, miten jälleenvakuuttajan varmuuskerroin valitaan. Alakohdassa 3.4.6 kokeiltiin Watersin tuloksia (λ on vakio) yhteen riskiin. Toisin sanoen ajateltiin, että riskit ovat siinä mielessä identtisiä, että

jokainen vahinko on peräisin samasta jakaumasta riskistä riippumatta. (Itse asiassa tämä sama oletus tehtiin kaikkien edellä mainittujenkin menetelmien kohdalla.) Näin ollen, etsimällä optimaalinen omapidätys yhdelle esimerkkiriskille löydettiin optimointikriteerin täyttävä yhteinen omapidätys kaikille riskeille.

Täten laskemalla päädyttiin omapidätysmäärään 16 mk, eli laskelmalla ei näytä olevan mitään käytännön merkitystä. Syynä pieneen omapidätykseen on tietenkin osaltaan se, että riskeittäin tapahtuvasta tarkastelusta luovuttiin. Todennäköisesti, jos kullekin riskille määrättäisiin vahinkojakaumat yksitellen, niin esimerkiksi yksittäisvahinkojen jakaumat olisivat siistimpiä kuin koko aineistossa jo siitäkin syystä, että oletuksemme perusteella vahinko ei voi ylittää riskin vakuutusmäärää. Vakuutusmääräjakauma puolestaan oli selvästi oikealle vino (liite 1). Toinen syy epärelevanttiin tulokseen on ilmeisestikin ongelmanasettelussa. Tuntuu käytännön kannalta vieraalta ajatukselta etsiä minimiä äärettömän aikavälin tuhon todennäköisyyden ylärajalle, josta ei edes tiedetä, kuinka lähellä todellista arvoa se on.

3.6.4 Yhden vuoden ja äärettömän aikavälin tarkastelujen vertailua

Yhden vuoden ja äärettömän aikavälin tarkasteluja on mahdotonta laittaa paremmuusjärjestykseen. Riippuu tilanteesta ja riskinottovalmiudesta, kumpaa lähestymistapaa halutaan käyttää. Kuten edellisessä kohdassa osoitettiin, äärettömän aikavälin mallit johtavat, luonnollisestikin, huomattavasti konservatiivisimpiin omapidätyksiin kuin yhden vuoden mallit.

Äärettömän aikavälin mallit näyttivät myös reagoivan yhden vuoden malleja herkemmin varmuuskertoimen valinnalle. Koska varmuuskertoimen määrittäminen ei käytännössä ole aivan yksinkertaista, puoltaa se yhden vuoden tarkastelujen käyttämistä. Riskipääoman suuruus ja tuhon todennäköisyyden valinta vaikuttavat ratkaisevasti omapidätysmäärään kummankin tyyppisissä tarkasteluissa.

Jotta saataisiin jonkinlainen käsitys yhden vuoden ja äärettömän aikavälin tuhon todennäköisyyksien keskinäisistä suhteista, lasketaan vielä, minkä suuria äärettömän aikavälin todennäköisyyksiä yhden vuoden tarkasteluissa

havaitut omapidätykset vastaavat. Oletetaan, että varmuuskerroin on vakio. Tällöin simulointiaineistosta lasketuilla omapidätyksillä Amslerin kaavalla arvioidut äärettömän aikavälin tuhon todennäköisyydet ovat välillä 0.33 - 0.49, kun $\varepsilon = 0.001$ ja välillä 0.45 - 0.64, kun $\varepsilon = 0.01$. Tässä tuhon todennäköisyys kasvaa riskipääoman mukana, toisin sanoen riskipääoman lisäämisen vaikutus tuloksiin on suurempi yhden vuoden tarkasteluissa kuin äärettömällä aikavälillä. Omapidätyksestä riippuvaa varmuuskerrointa käytettäessä vastaavat äärettömän aikavälin todennäköisyydet ovat vieläkin isompia.

3.7 Simuloinnin käyttö optimaalisia omapidätyksiä etsittäessä

Tässä työssä simuloitua aineistoa on käytetty toisaalta siten, että siitä evaluoitiin omapidätysten määräämiseksi ehdotettuja lausekkeita, ja toisaalta siten, että sen avulla laskettiin suoraan, mikä on tiettyä vuoden tuhon todennäköisyyttä vastaava omapidätysmäärä. Kummassakin tapauksessa tarkasteltava malli pidettiin hyvin yksinkertaisena. Toisin sanoen, jälleenvakuutusmuotona oli excess of loss, vakuutuskanta muodostui yhdestä vakuutuslajista, jolle etsittiin yksi yhteinen omapidätysmäärä, ensi- ja jälleenvakuutusmaksut laskettiin teoreettisesti "oikein" ja niin edelleen.

Jos yksinkertaistavista oletuksista joudutaan luopumaan, ongelman tarkastelu käy teoriaan pohjautuvissa malleissa pian hyvin vaikeaksi, jopa mahdottomaksi. Tällaisissa tapauksissa simulointitutkimus osoittaa todelliset etunsa. Kun aineisto on generoitu, voidaan eri parametreja muuttaa, ja simuloidusta "populaatiosta" laskea uutta tilannetta vastaavat omapidätykset. Tällöin esimerkiksi teoreettisesti raskaan surplus-jälleenvakuutuksen tarkastelu onnistuu suhteellisen helposti. Samaten yhden vuoden vararikkotodennäköisyyden asemasta voidaan tarkastella vaikkapa vararikkoa muutaman vuoden ajanjaksolla.

Simulointia onkin käytetty hyväksi jälleenvakuutusratkaisujen tarkastelussa ja vertailussa. Esimerkiksi Kölnische Rück -yhtiössä kehitetty PCR-järjestelmä (Portfolio - Claims - Reinsurance), jota on edelleen kehitetty CARE-järjestelmäksi, on monipuolinen jälleenvakuutussalkkujen analysointiohjelmisto [AND85]. CAREssa simulointi on toteutettu sillä tavoin yksinkertaistaen, että lukuisien toistojen asemasta järjestelmä generoi satunnaisesti vain yhden tyyppillisen esimerkkiotoksen, jonka perusteella erilaisten jälleenvakuutusratkaisujen vaikutuksia tulokseen tutkitaan.

Tässä tutkielmassa on näytetty, kuinka simulointitutkimusta, missä toistoja on useita, voidaan käyttää hyväksi omapidätyksen etsimiseen yksinkertaisessa tilanteessa. Mallia voidaan tietenkin kehittää edelleen lisäämällä siihen parametreja CARE-järjestelmän tapaan. Tällöin sen avulla voitaisiin tutkia monimutkaisempiakin jälleenvakuutusjärjestelyjä, ja simuloimalla voitaisiin selvittää muidenkin tekijöiden kuin varmuuskertoimen, riskipääoman ja vararikkotodennäköisyyden vaikutusta omapidätyksen valintaan.

LIITE 1

TEOLLISUUSPALOVAKUUTUS, VAHINGOITTUNEIDEN RISKIEN VAKUUTUSMÄÄRÄT JA VAHINKOASTEEN KAKSI ENSIMMÄISTÄ ORIGOMOMENTTIA PERUSTUEN VAKUUTUSALAN TILASTOKESKUKSEN PALOVAHINGOJEN TILASTOAINEISTOON VUOSILTA 1973 - 1978 [HEI81] SEKÄ VAHINKOASTEEN MOMENTTEJA VASTAAVAN BETA-JAKAUMAN PARAMETRIT α JA β .

	VAKUUTUS- MÄÄRÄLUOKAN YLÄRAJA	VAKUUTUS- MÄÄRÄN JAKAUMA	E(C)	E(C ²)	α	β
1	10 000	0.02553	2.451E-01	1.481E-01	0.2701	0.8319
2	16 000	0.02413	1.027E-01	4.892E-02	0.1439	1.2576
3	20 000	0.01435	1.323E-01	7.350E-02	0.1389	0.9111
4	35 000	0.08357	8.437E-02	4.236E-02	0.1006	1.0915
5	50 000	0.05258	6.038E-02	2.607E-02	0.0924	1.4377
6	70 000	0.05474	7.582E-02	4.317E-02	0.0662	0.8063
7	100 000	0.03924	7.418E-02	4.154E-02	0.0672	0.8385
8	160 000	0.04775	6.432E-02	3.169E-02	0.0762	1.1081
9	200 000	0.02159	1.155E-01	7.188E-02	0.0861	0.6591
10	350 000	0.05359	9.040E-02	5.393E-02	0.0721	0.7250
11	500 000	0.02883	7.535E-02	3.656E-02	0.0946	1.1614
12	700 000	0.02946	6.499E-02	3.716E-02	0.0549	0.7901
13	1 000 000	0.02845	8.277E-02	4.479E-02	0.0829	0.9182
14	1 600 000	0.03683	3.325E-02	1.058E-02	0.0796	2.3132
15	2 000 000	0.01511	5.677E-02	2.438E-02	0.0869	1.4440
16	3 500 000	0.04445	2.083E-02	4.994E-03	0.0723	3.4004
17	5 000 000	0.02527	1.746E-02	4.895E-03	0.0478	2.6896
18	7 000 000	0.02654	1.944E-02	7.016E-03	0.0364	1.8352
19	10 000 000	0.02921	1.349E-02	3.303E-03	0.0440	3.2200
20	16 000 000	0.03493	8.407E-03	8.086E-04	0.0866	10.2105
21	20 000 000	0.01740	1.186E-02	4.939E-03	0.0171	1.4253
22	35 000 000	0.04839	5.323E-03	1.161E-03	0.0196	3.6550
23	50 000 000	0.03797	5.182E-03	5.776E-04	0.0433	8.3170
24	70 000 000	0.02769	3.174E-03	2.338E-04	0.0417	13.1003
25	100 000 000	0.03327	1.758E-03	1.386E-04	0.0210	11.9295
26	160 000 000	0.04356	9.985E-04	2.150E-05	0.0476	47.6040
27	200 000 000	0.02375	5.912E-04	7.249E-06	0.0500	84.5869
28	350 000 000	0.03759	1.283E-04	7.338E-08	0.2890	2 252.49
29	500 000 000	0.007493	2.066E-03	1.419E-04	0.0289	13.9512
30	700 000 000	0.003937	2.613E-04	4.290E-07	0.1890	723.0017
31	1 000 000 000	0.002413	1.084E-04	3.379E-08	0.5330	4 916.39
32	1 600 000 000	0.000381	6.000E-05	4.667E-09	3.3737	56 224.68

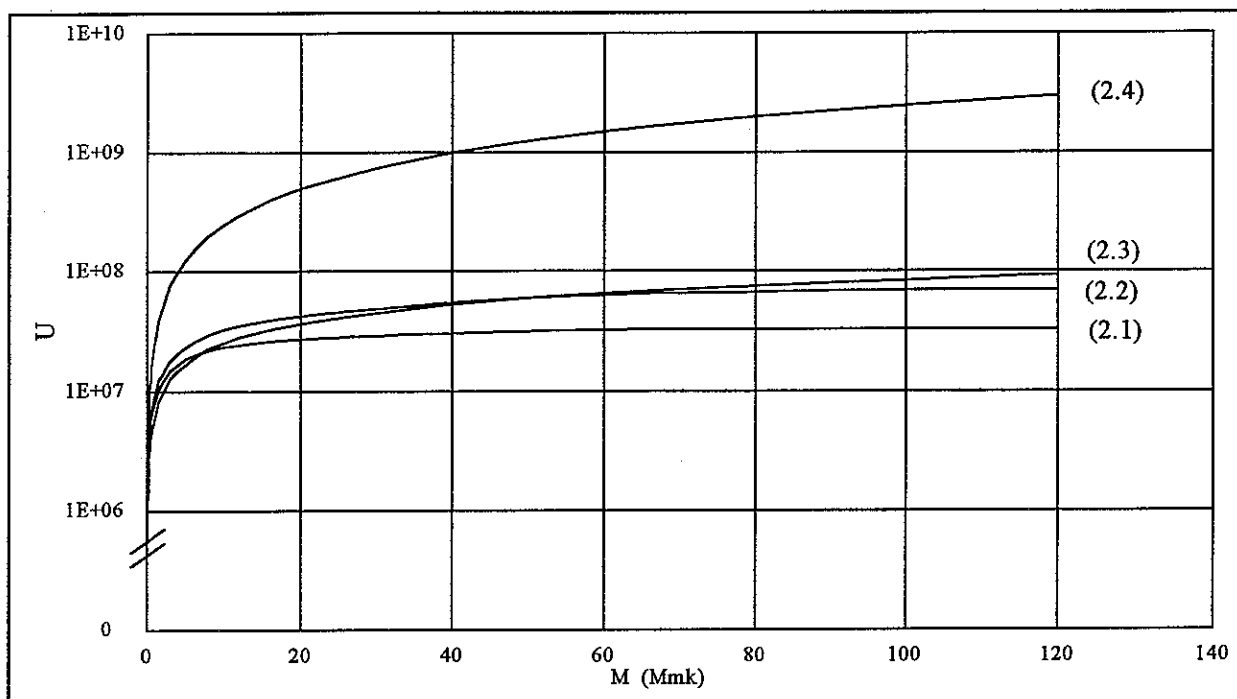
SATUNNAISLUKUGENERAATTORI BETA-JAKAUMALLE $\text{Beta}(\alpha, \beta)$,
 ALGORITMI B1 [DAG88].

Algorithm B1

Input $[\alpha, \beta]$ Saved $[a, b, J, d, f, \lambda, T, c]$.
 Output $[X]$ Parameter $[U, V = \text{machine's smallest and largest positive real numbers}]$.

```

S1  If  $\beta > \alpha$  then
S2     $a := \beta, b := \alpha, J := 1$ 
S3  Else
S4     $a := \alpha, b := \beta, J := 0$ 
S5  End if.
S6   $d := a/b, f := a + b$ .
S7  If  $b > 1$  then
S8     $\lambda := \sqrt{\{(2ab - a - b)/(a + b - 2)\}}, T := 1$ 
S9  Else
       $\lambda := b, T := 1/\{1 + [a/(bV)]^b\}$ .
S10 End If.
S11  $c := a + \lambda$ .
1   generate  $R_1, R_2 \sim U(0, 1)$ .
2    $S := R_2 R_1^2$ .
3   If  $R_1 < U$  or  $S \leq 0$  goto 1.
4   If  $R_1 < T$  then
       $G := \ln\{R_1/(1 - R_1)\}/\lambda$ 
       $Y := d \exp(G)$ 
5    $Z := cG + f \ln\{(1 + d)/(1 + Y)\} - \ln 4$ 
6   If  $S - 1 > Z$  then
7     If  $S - 1 > SZ$  goto 1
8     If  $\ln S > Z$  goto 1.
9   End If.
10   $X := Y/(1 + Y)$ .
11 Else
12  If  $4S > (1 + 1/d)^f$  goto 1.
13   $X := 1$ 
14 End If.
15 If  $J = 1$  then
16   $X := 1 - X$ 
17 End If.
18 Exit.
```



Kuva L3.1 Omapidätyksen määrääminen Beard et al. mukaan.

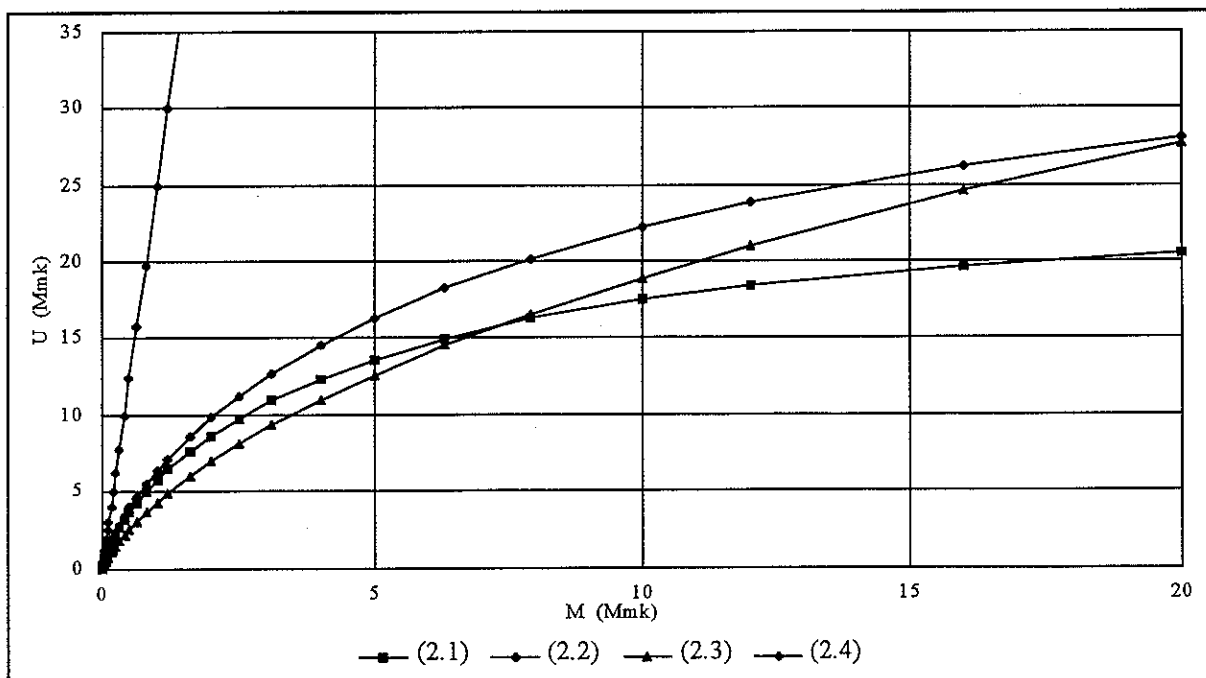
$$\lambda_0 = 0.04 \quad \varepsilon = 0.001$$

(2.1) perusyhtälö, normaalijakauma

(2.2) perusyhtälö, NP-kaava

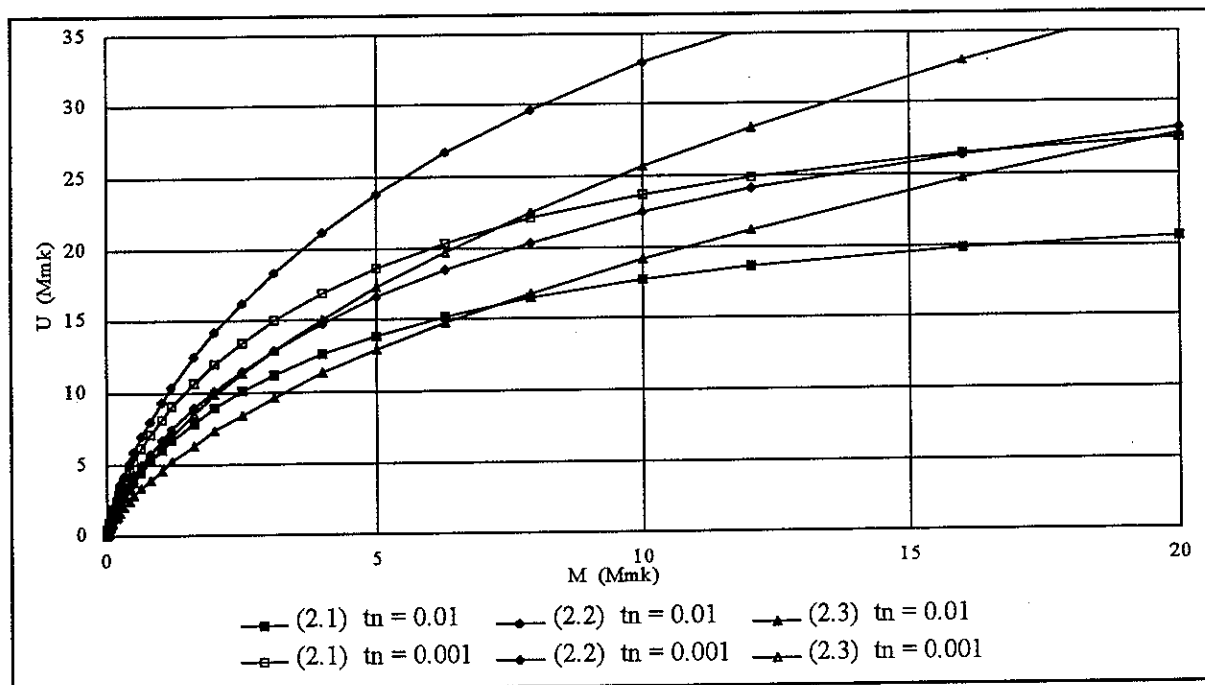
(2.3) perusyhtälö, jakaumasta riippumaton

(2.4) peukalosääntö, alaraja.

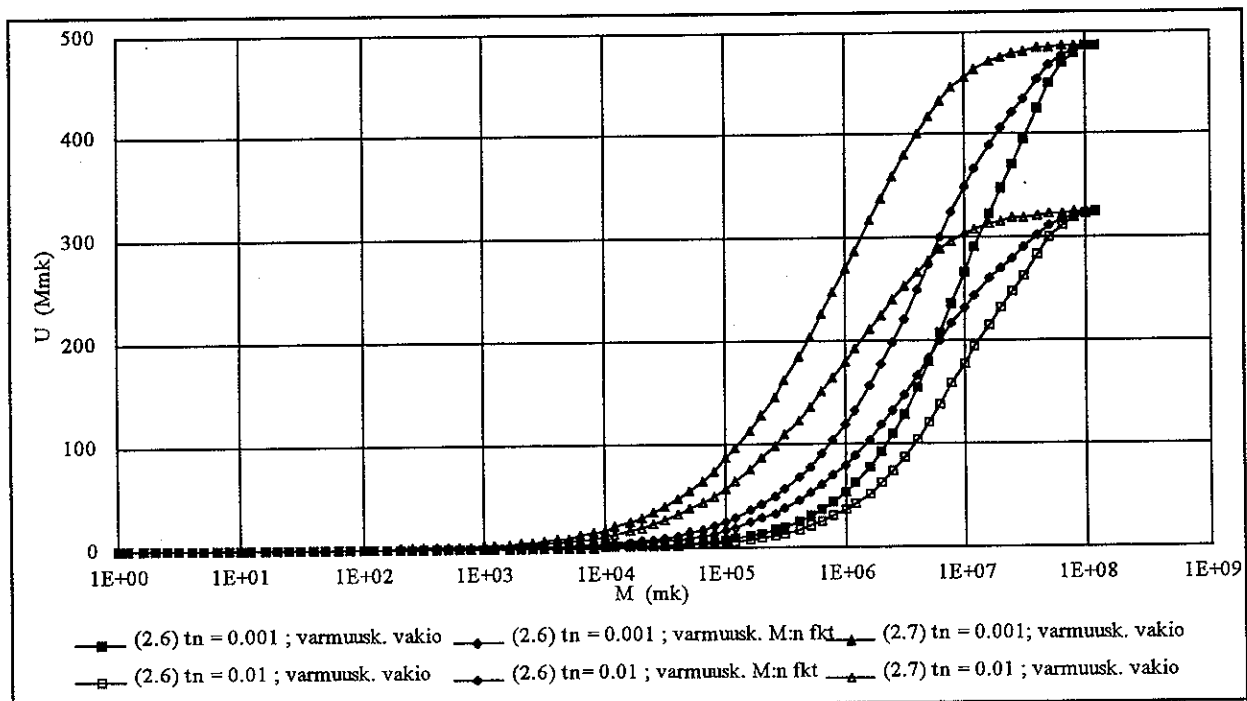


Kuva L3.2 Omapidätyksen määrääminen Beard et al. mukaan.

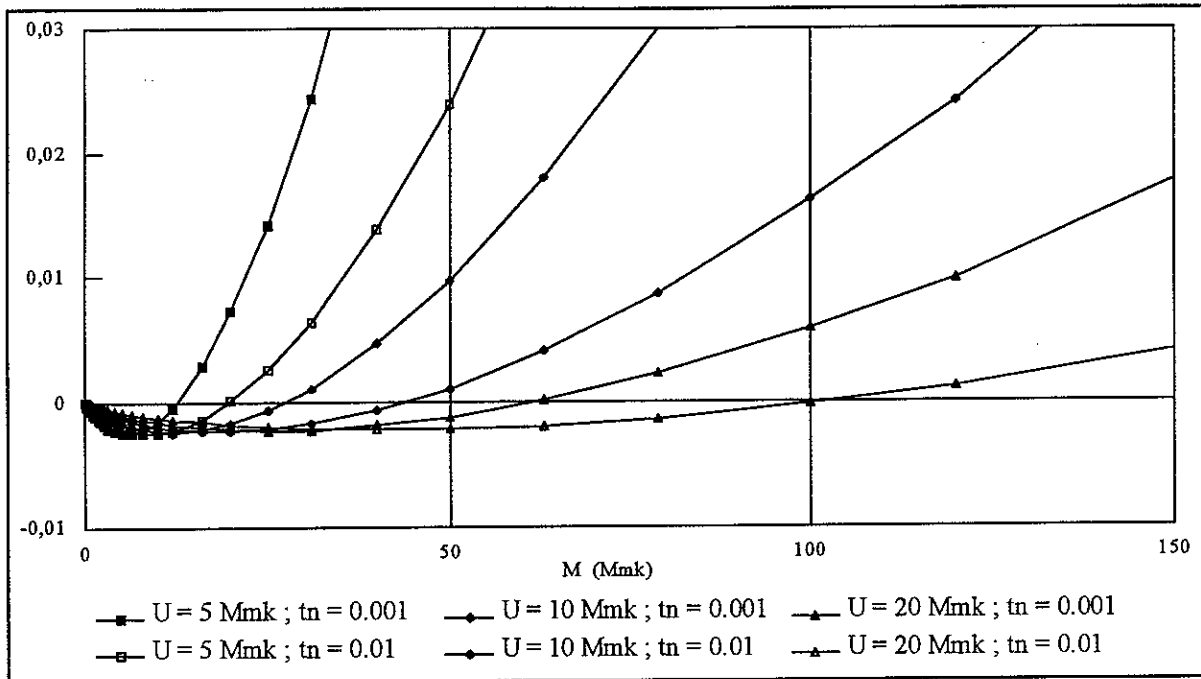
$$\lambda_0 = 0.04 \quad \varepsilon = 0.01$$



Kuva L3.3 Omapidätyksen määrääminen Beard et al. mukaan.
 λ_0 = alakohdassa 3.2.4 määritelty M:n funktio ; $t_n \equiv \varepsilon$.
 (2.1) perusyhtälö, normaalijakauma
 (2.2) perusyhtälö, NP-kaava
 (2.3) perusyhtälö, jakaumasta riippumaton



Kuva L3.4 Omapidätyksen määrääminen Straubin mukaan.
 λ_0 = vakio tai alakohdassa 3.2.4 määritelty M:n funktio; $t_n \equiv \varepsilon$.
 (2.6) malli
 (2.7) approksimaatio



Kuva L3.5 Omapidätyksen määrittäminen Amslerin mukaan (yhtälö 2.8).
 λ_0 = alakohdassa 3.2.4 määritelty $M:n$ funktio; $t_n \equiv \varepsilon$.

KIRJALLISUUSVIITTEET

- [AMS84] Amsler, M-H. (1984). Ruine et réassurance. Mitteilungen der schweizerischer Versicherungs-mathematiker. Heft 2, 173 - 198.
- [AND85] Andersson, G. (1985). A Simulation Study of an Insurance Portfolio. Publications of the Cologne Re., Number 11, 73 - 85.
- [BPP84] Beard, R. E., Pentikäinen, T., Pesonen, E. (1984). Risk Theory. Chapman and Hall, London.
- [BEU78] Beugel, H. M. (1978). Selbstbehaltsfindung beim Erstversicherer. Zeitschrift für Versicherungswesen, 21, 619 - 626.
- [CEN91] Centeno, L. (1991). An Insight into the Excess of Loss Retention Limit. Scandinavian Actuarial Journal, 97 - 102.
- [DAG88] Dagpunar J. (1988). Principles of Random Variate Generation. Clarendon Press, Oxford.
- [GER82] Gerathewohl, K. et al. (1982). Reinsurance. Principles and Practice. Vol.I. Verlag Versicherungswirtschaft e. V., Karlsruhe.
- [HEI81] Heiskanen, J. (1981). Palovakuutuksen osavahingot ja surplus-jälleenvakuutus. Working papers, The Actuarial Society of Finland.
- [RAN82] Rantala, J. (1982). Solvency of Insurers and Equalization Reserves. Vol. II. Insurance Publishing Company, Helsinki.
- [SAV88] Savijoki, P. (1988). Liikennevakuutuksen yksittäisen vahingon suuruusjakauman approksimoinnista. Working Papers, The Actuarial Society of Finland.
- [STR78] Straub, E. (1978). How to fix retention. Mitteilungen der Vereinigung schweizerischer Versicherungs-mathematiker. Heft 1, 95 - 104.
- [STR88] Straub, E. (1988). Non-Life Insurance Mathematics. Springer Verlag, Berlin.
- [WAT79] Waters, H. R. (1979). Excess of Loss Reinsurance Limits. Scandinavian Actuarial Journal, 37 - 43.
- [WAT83] Waters, H. R. (1983). Some mathematical aspects of reinsurance. Insurance: Mathematics and Economics 2, 17 - 26.
- [ZEC87] Zecchin, M. (1987). Calculation of the maximum retentions in XL reinsurance. Insurance: Mathematics and Economics 6, 169 - 178.

KIITOKSET

Haluan esittää kiitokseni filosofian tohtori Matti Ruohoselle hänen tutkielmaani koskevista arvokkaista kommentaistaan.

