

## ESIPUHE

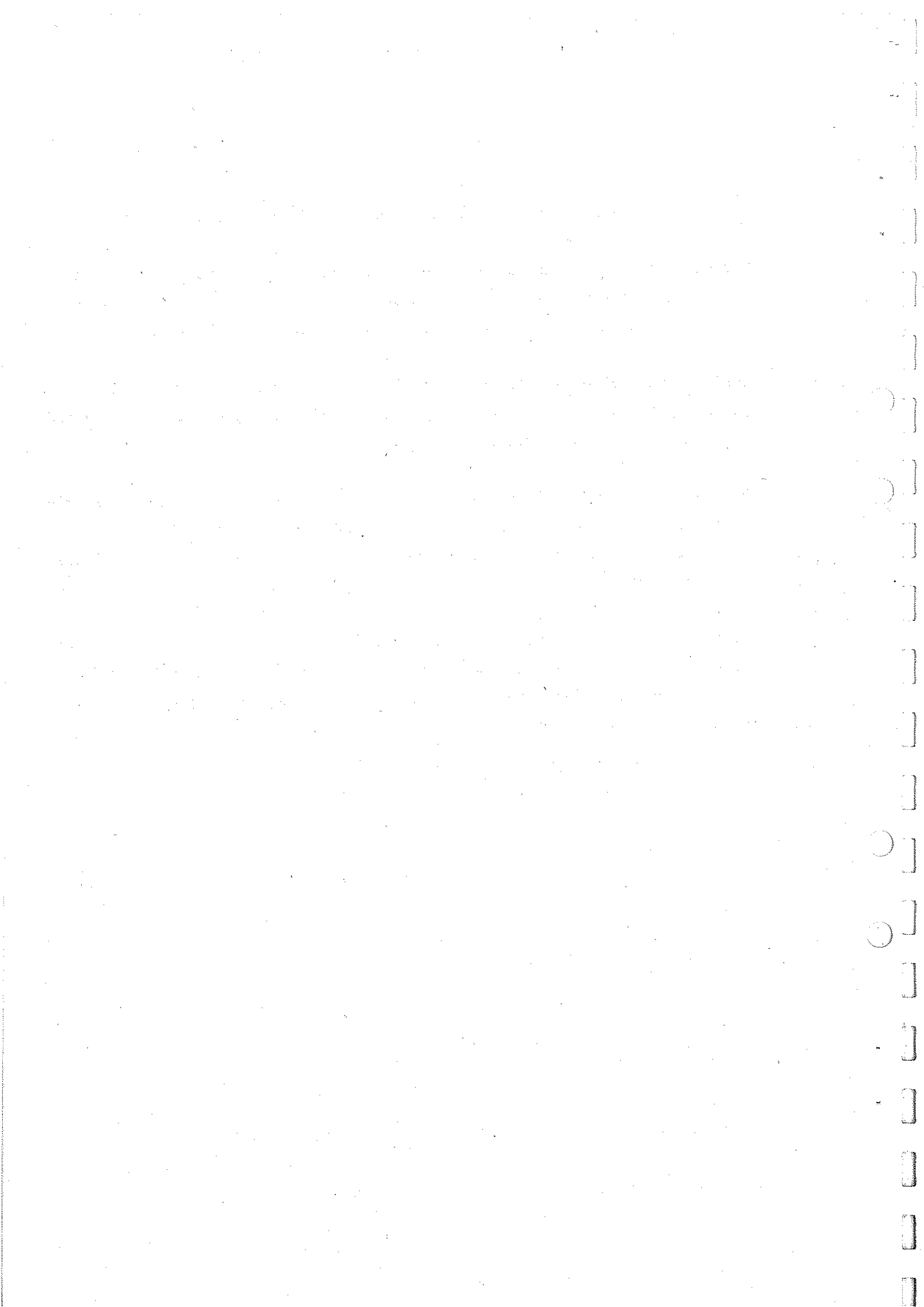
Aiheen tähän harjoitustehtävään olen saanut professori Pentikäiseltä.

Harjoitustehtävän tarkoituksena olen ymmärtänyt olevan kartoittaa nopean Fourier-muunnoksen laskennallista käyttökelpoisuutta yleistetyn Poisson-jakautuman määräämisessä yksittäisvahingon jakautumasta lähtien.

Harjoitustehtävä ei sisällä matemaattisen teorian kannalta mitään uutta. Koska taustalla oleva teoria löytyy alan oppikirjoista, ei tässä yhteydessä teoriaa johdeta, vaan tyydytään kursooriseen esittelyyn.

Taustan esittelemiseksi on valittavissa useita lähtökohtia kuten karakteristinen funktio (jatkuva Fourier-muunnos), funktioavaruus ja sille kehitetty numeroituva kanta (ääretön Fourier-sarja) tai toisaalta äärellinen, diskreetti Fourier-sarja.

Kukin lähestymistapa valaisee Fourier-muunnoksen luonnetta hieman eri tavoin. Koska nopean Fourier-muunnoksen algoritmi kohdistuu nimenomaan äärellisen, tasavälisin muuttujan arvoin lasketun sarjan muunnokseen, olen valinnut tämän myös lähtökohdaksi tässä harjoitustyössä.



1

## DISKREETTI FOURIER-MUUNNOS

Tarkastelemme äärellistä, kompleksiarvoista lukujonoa

$$x_n \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

ja liitämme tähän Fourier-muunnoksen välityksellä toisen lukujonon

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^* e^{\frac{2\pi i}{N} nk},$$

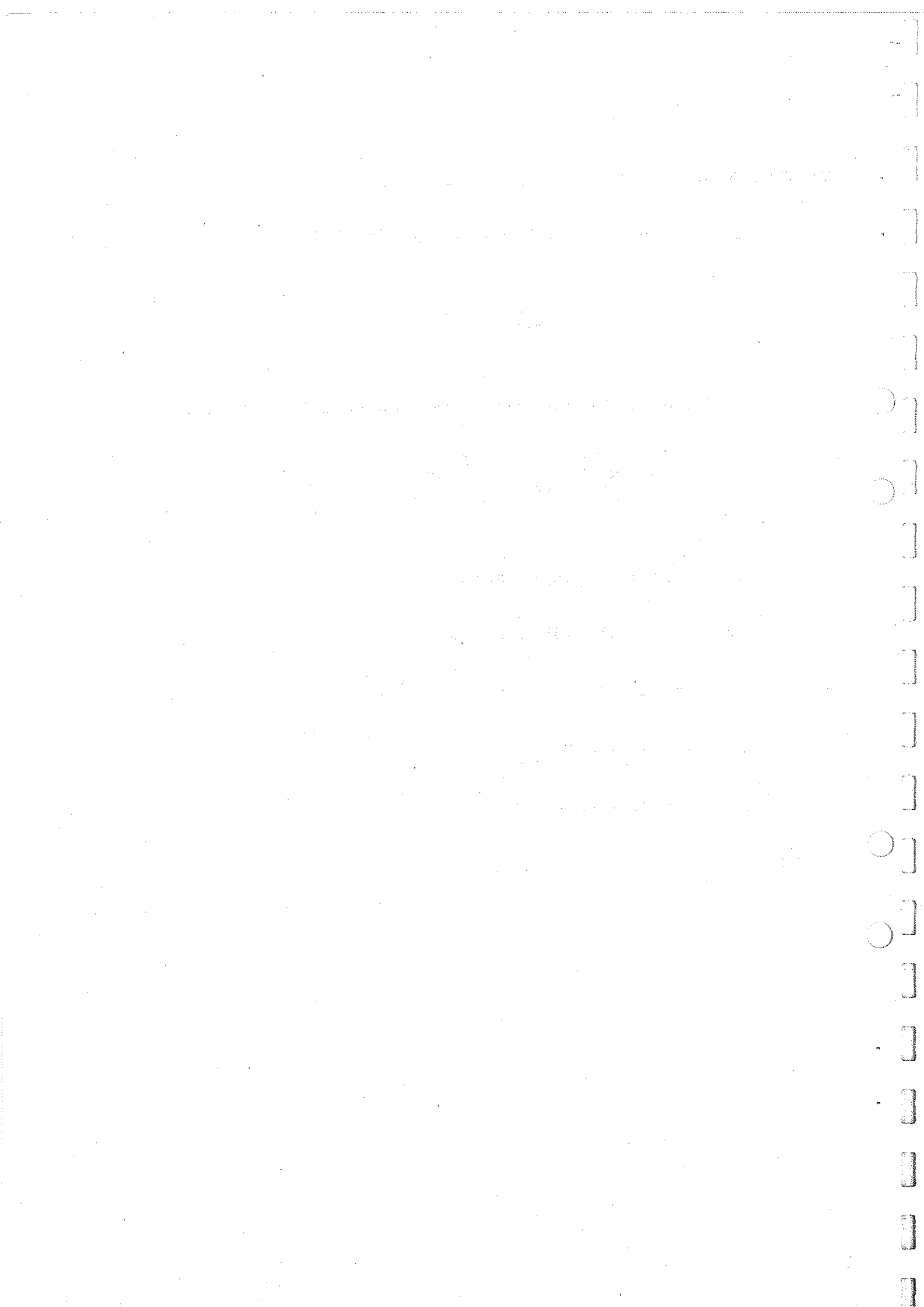
jossa \* merkitsee konjugointia.

Jatkossa merkitään tätä muunnosta

$$y = F(x),$$

jossa  $y = (y_0, \dots, y_{N-1})$

ja  $x = (x_0, \dots, x_{N-1})$



Näin määritelty Fourier-muunnos on kääntäen yksikäsitteinen ja

$$F^{-1} = \frac{1}{N} F^2$$

Määrittelemme lukujoille laskutoimitukset

1) yhteenlasku

$$x = x^{(1)} + x^{(2)} \longleftrightarrow x_n = x_n^{(1)} + x_n^{(2)} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

2) vakiolla kertominen

$$\begin{aligned} x &= \lambda x^{(1)} \\ &= x^{(1)} \lambda \end{aligned} \longleftrightarrow \begin{aligned} x_n &= \lambda x_n^{(1)} \\ &= x_n^{(1)} \lambda \end{aligned} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

3) kertolasku

$$\begin{aligned} x &= x^{(1)} \cdot x^{(2)} \\ &= x^{(2)} \cdot x^{(1)} \end{aligned} \longleftrightarrow \begin{aligned} x_n &= x_n^{(1)} \cdot x_n^{(2)} \\ &= x_n^{(2)} \cdot x_n^{(1)} \end{aligned} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

4) konvoluutio

$$\begin{aligned} x &= x^{(1)} * x^{(2)} \\ &= x^{(2)} * x^{(1)} \end{aligned} \longleftrightarrow \begin{aligned} x_n &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k^{(1)} \cdot x_{dN+n-k}^{(2)} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} x_k^{(2)} \cdot x_{dN+n-k}^{(1)} \end{aligned}$$

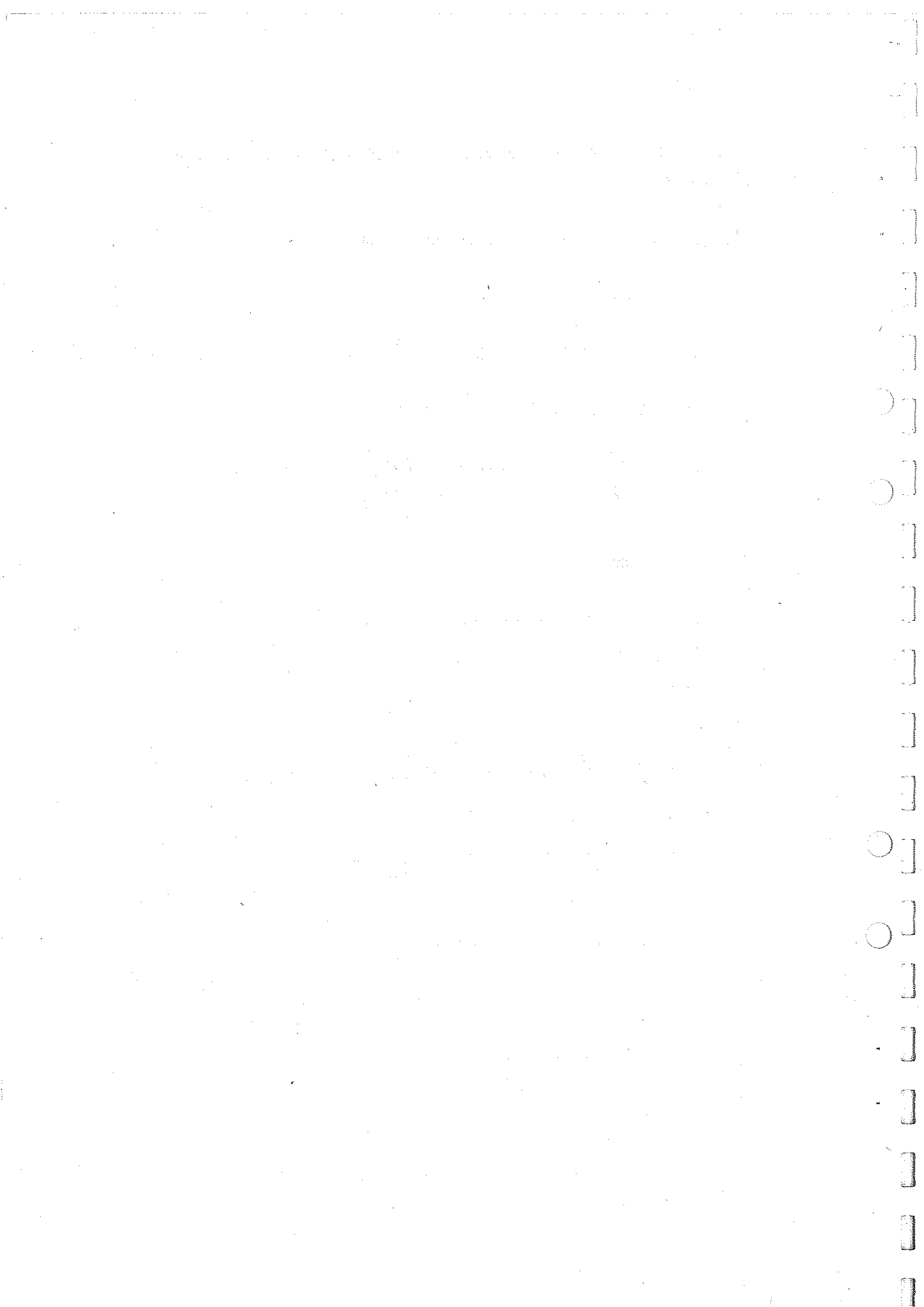
jossa

$$d = 0, \quad \text{kun } 0 \leq n-k \leq N-1$$

ja

$$d = 1, \quad \text{kun } -(N-1) \leq n-k \leq -1$$

ja indeksi  $n$  saa arvot  $0, 1, \dots, N-1$ .



Näillä määrittelyksillä voimme todeta Fourier-muunnoksella olevan ominaisuudet

$$1^{\circ} \quad F(F(x)) = Nx$$

$$2^{\circ} \quad F\left(\sum_{r=0}^M \lambda_r x^{(r)}\right) = \sum_{r=0}^M \lambda_r^* F(x^{(r)})$$

$$3^{\circ} \quad F(x^{(1)} \cdot x^{(2)}) = F(x^{(1)}) * F(x^{(2)})$$

$$4^{\circ} \quad F(x^{(1)} * x^{(2)}) = F(x^{(1)}) \cdot F(x^{(2)})$$

5<sup>o</sup> Jos jono  $x$  on reaalinen, niin sen Fourier-muunnos

$$y = F(x)$$

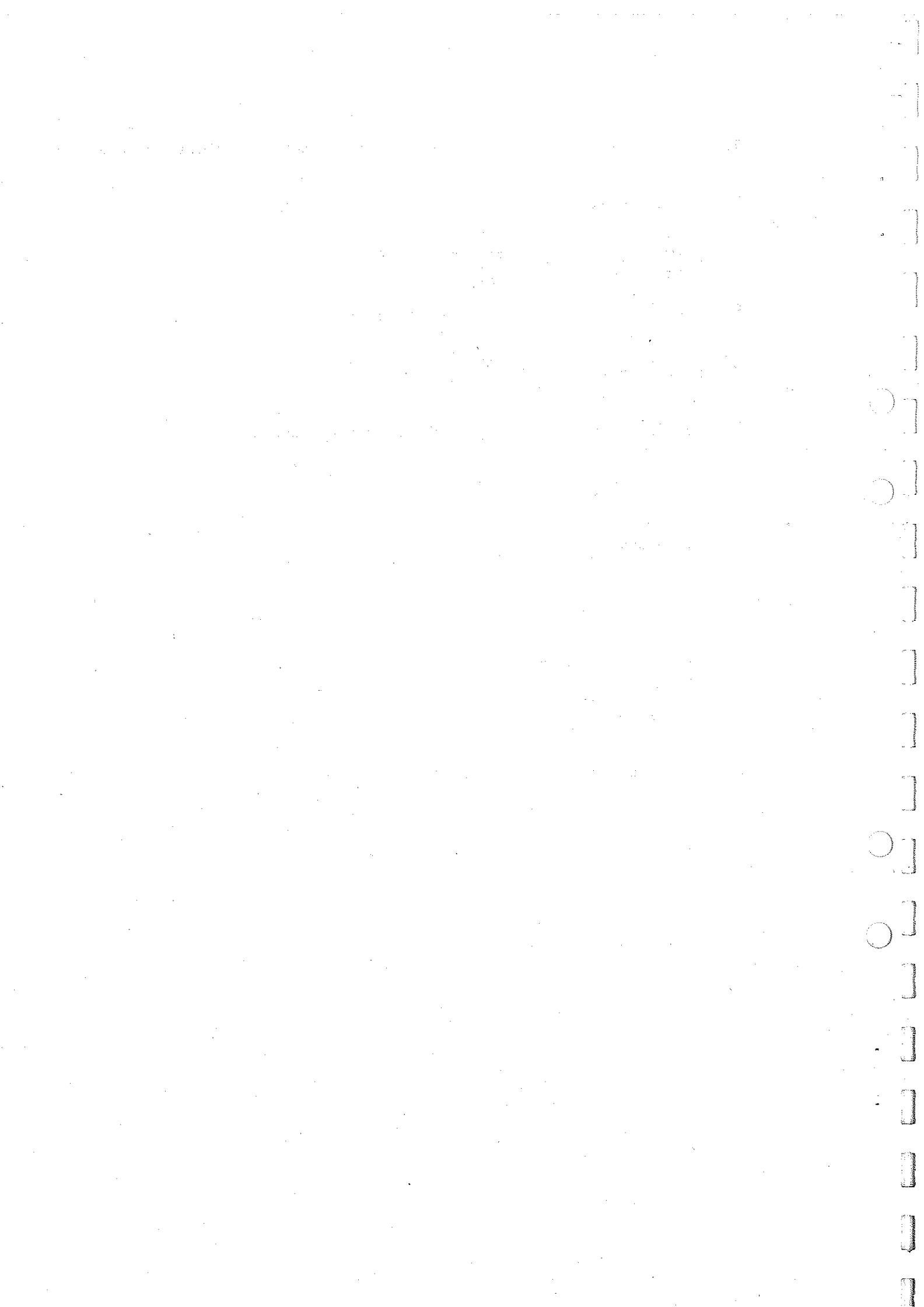
toteuttaa

$$y_n = y_{N-n}^*$$

6<sup>o</sup> Jos jonolle  $x$  pätee

$$x_n = x_{N-n}^*$$

niin  $F(x)$  on reaalilukujen jono





Edellä määritellyllä konvoluutiolla on yhteys satunnaismuuttujien konvoluutioon:

Jos satunnaismuuttujat  $\hat{x}^{(1)}$  ja  $\hat{x}^{(2)}$  voivat saada vain kokonaisarvoja  $0, 1, \dots, N-1$  ja arvon  $n$  saamistodennäköisyydet ovat  $x_n^{(1)}$  ja  $x_n^{(2)}$ , niin satunnaismuuttuja

$$\hat{x} = \hat{x}^{(1)} + \hat{x}^{(2)}$$

saa arvon  $n$  todennäköisyydellä

$$x_n = \sum_{k=\max(0, n-N+1)}^{\min(n, N-1)} x_k^{(1)} x_{n-k}^{(2)}$$

eli jos tarkastellaan vain  $n:n$  arvoja  $0, 1, \dots, N-1$

$$x_n = \sum_{k=0}^n x_k^{(1)} x_{n-k}^{(2)}$$

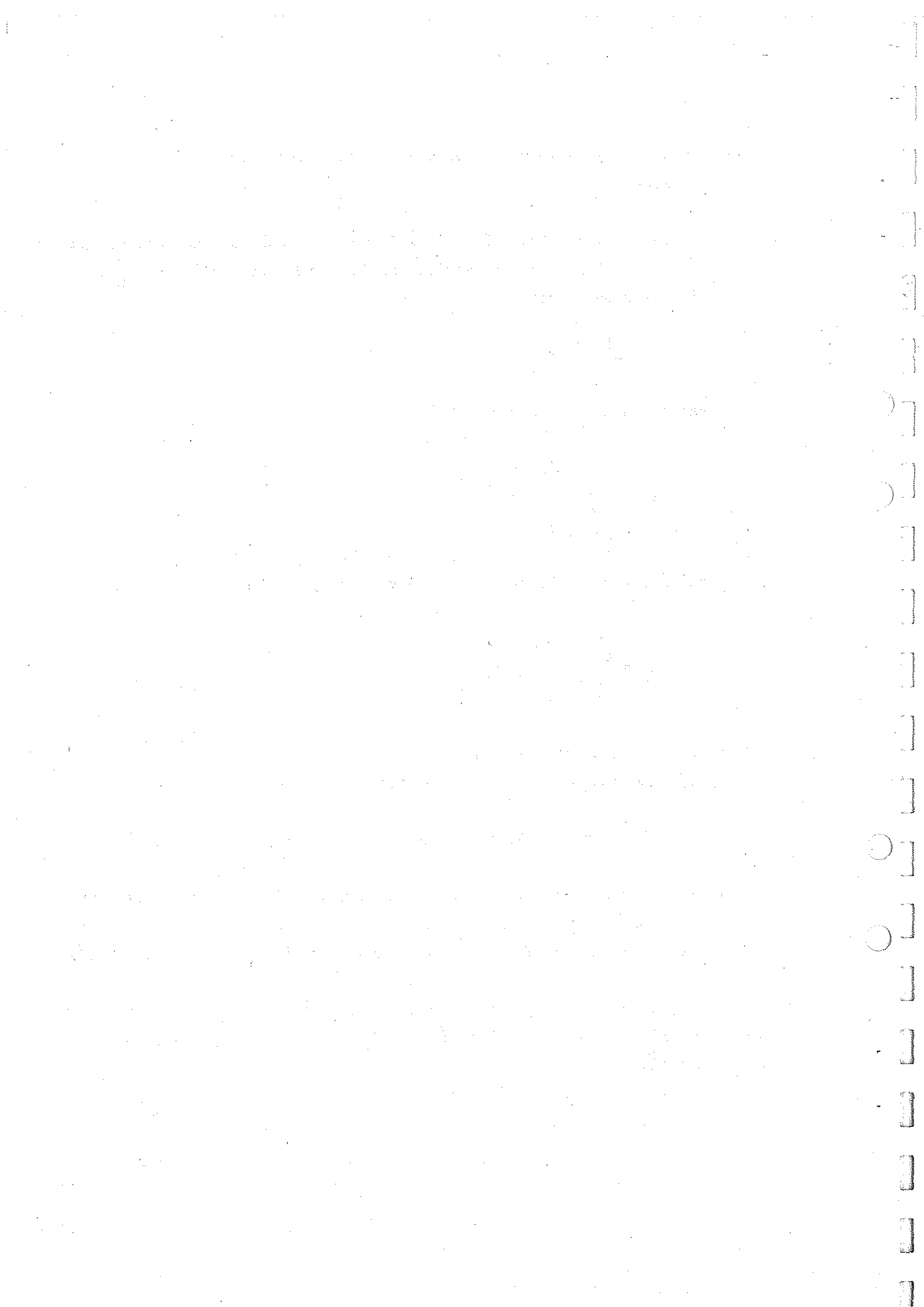
Konvoluutiot eivät ole täsmälleen samat.

Riittävä ehto samojen arvojen saavuttamiselle on, että

$$x_m^{(1)} \cdot x_n^{(2)} = 0, \text{ kun } m+n \geq N$$

Fourier-muunnoksen yhteydessä määritelty konvoluutio on itseasiassa määritelty kokonaislukujen renkaassa mod  $N$ , kun taas em. todennäköisyysjakautumia tarkastelemme reaaliakselilla ei-negatiivisilla kokonaislukuarvoilla.

Ennen soveltamismahdollisuuksiin paneutumista käymme kuitenkin lyhyesti läpi algoritmin, jolla Fourier-muunnos voidaan suorittaa käytännössä tehokkaasti.



2

## NOPEAN FOURIER-MUUNNOKSEN ALGORITMI

Nopean Fourier-muunnoksen algoritmi on tehokas tapa laskea arvot  $y_n$  ( $n = 0, 1, \dots, N-1$ ) sarjalle

$$y_n = \sum_{k=0}^{N-1} x_k^* e^{\frac{2\pi i n k}{N}} \quad (n = 0, \dots, N-1)$$

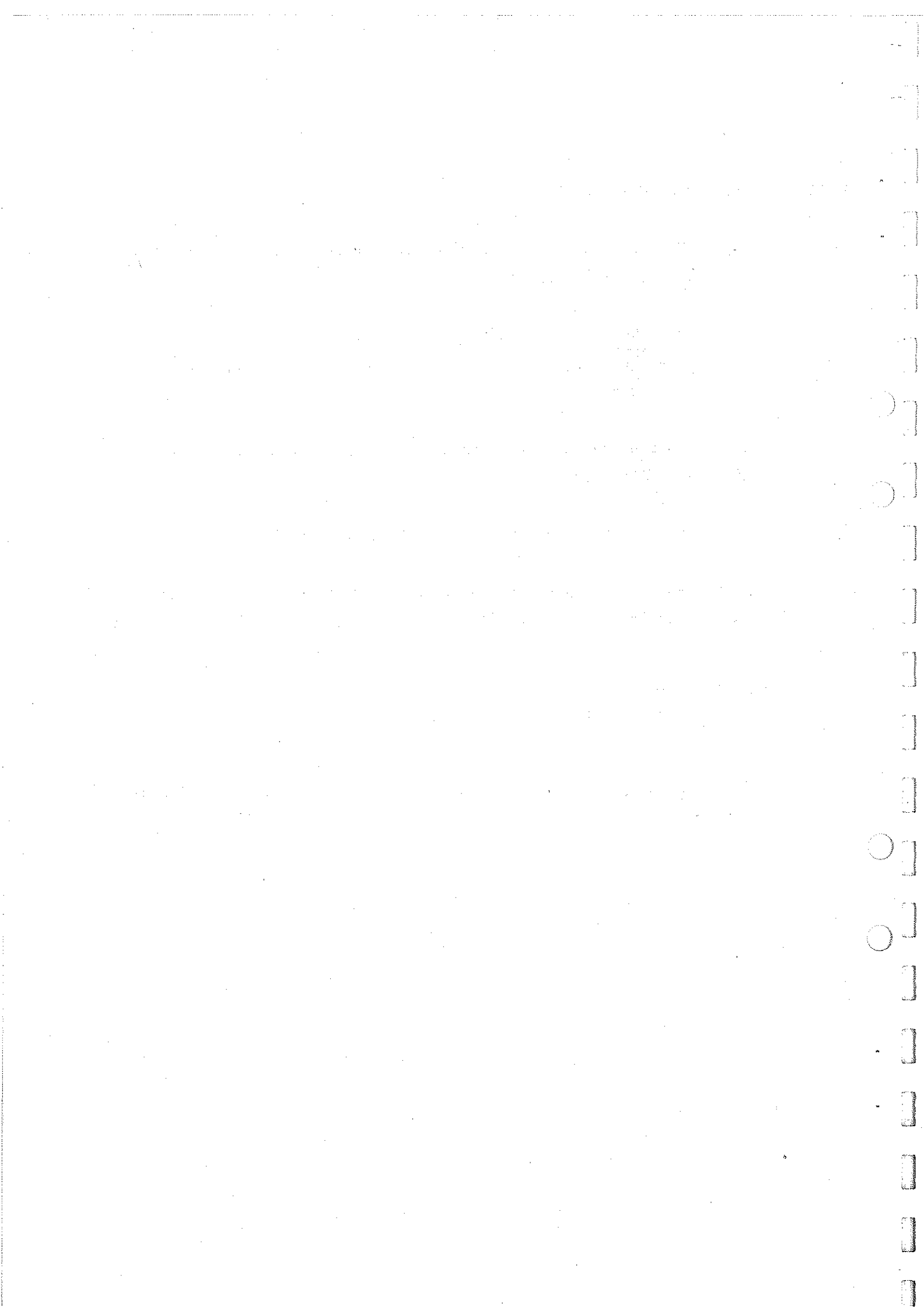
Nopean Fourier-muunnoksen algoritmissa valitaan  $N$  erikoisella tavalla, nimittäin siten, että

$$N = 2^r \quad (r = \text{positiivinen kokonaisluku})$$

ja perustetaan lukujonojen indeksien laskenta  $r$ -bittisille binääriluvuille. Tällöin kukin indeksi  $n$  on ilmoitettavissa  $r$ -bittisellä binääriluvulla

$$n = \sum_{s=0}^{r-1} n_s \cdot 2^s$$

ja toisaalta jokainen tätä muotoa oleva luku on kelvollinen indeksi.



Nopean Fourier-muunnoksen algoritmi on seuraava.

Asetetaan

$$Z_0(n_{r-1}, n_{r-2}, \dots, n_0) = x_p^*$$

$$\text{jossa } p = \sum_{s=0}^{r-1} n_s 2^s,$$

ja  $p$  käy läpi arvot  $0, \dots, 2^r - 1$ .

Tästä alkuarvosta lähtien suoritetaan  $m$ :n arvoon  $r$  saakka muunnokset

$$\begin{aligned} Z_m(n_{r-1}, \dots, n_{r-m+1}, 0, n_{r-m-1}, \dots, n_0) &= \\ &Z_{m-1}(n_{r-1}, \dots, n_{r-m+1}, 0, n_{r-m-1}, \dots, n_0) + \\ &+ Z_{m-1}(n_{r-1}, \dots, n_{r-m+1}, 1, n_{r-m-1}, \dots, n_0) \times W(2^{r-m} \sum_{s=0}^{m-2} n_{r-s-1} \cdot 2^s) \\ Z_m(n_{r-1}, \dots, n_{r-m+1}, 1, n_{r-m-1}, \dots, n_0) &= \\ &Z_{m-1}(n_{r-1}, \dots, n_{r-m+1}, 0, n_{r-m-1}, \dots, n_0) + \\ &- Z_{m-1}(n_{r-1}, \dots, n_{r-m+1}, 1, n_{r-m-1}, \dots, n_0) \times W(2^{r-m} \sum_{s=0}^{m-2} n_{r-s-1} \cdot 2^s), \end{aligned}$$

jossa

$$W(x) = e^{\frac{2\pi i}{N} x}$$

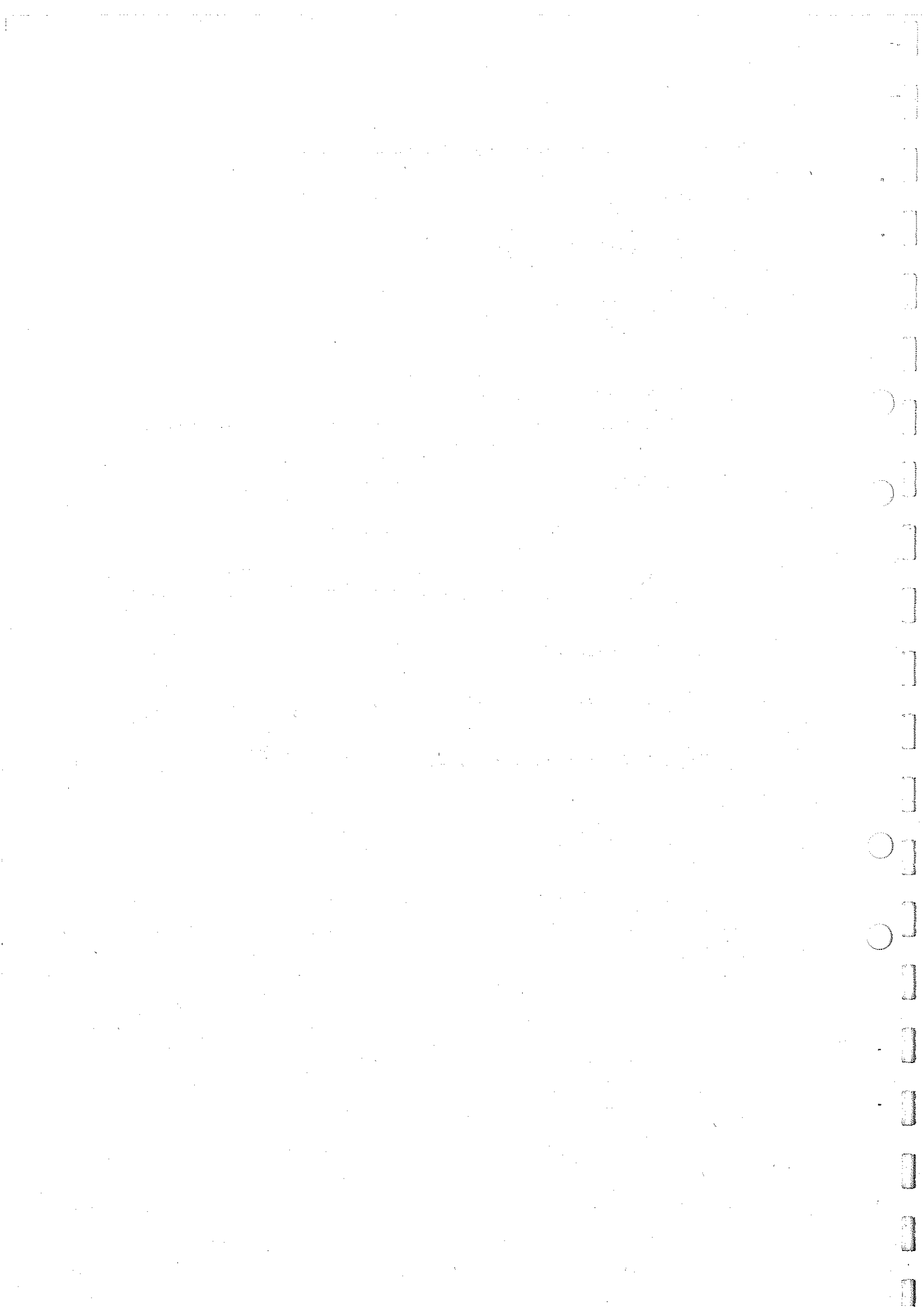
ja  $n_{r-1}, \dots, n_{r-m+1}, n_{r-m-1}, \dots$  ja  $n_0$  saavat kukin arvot 0 ja 1 siten, että kaikki kombinaatiot tulevat kertaalleen läpikäydyksi kutakin indeksin  $m$  arvoa kohden.

Algoritmin tuloksena saadaan

$$Z_r(n_0, n_1, \dots, n_{r-1}) = y_p,$$

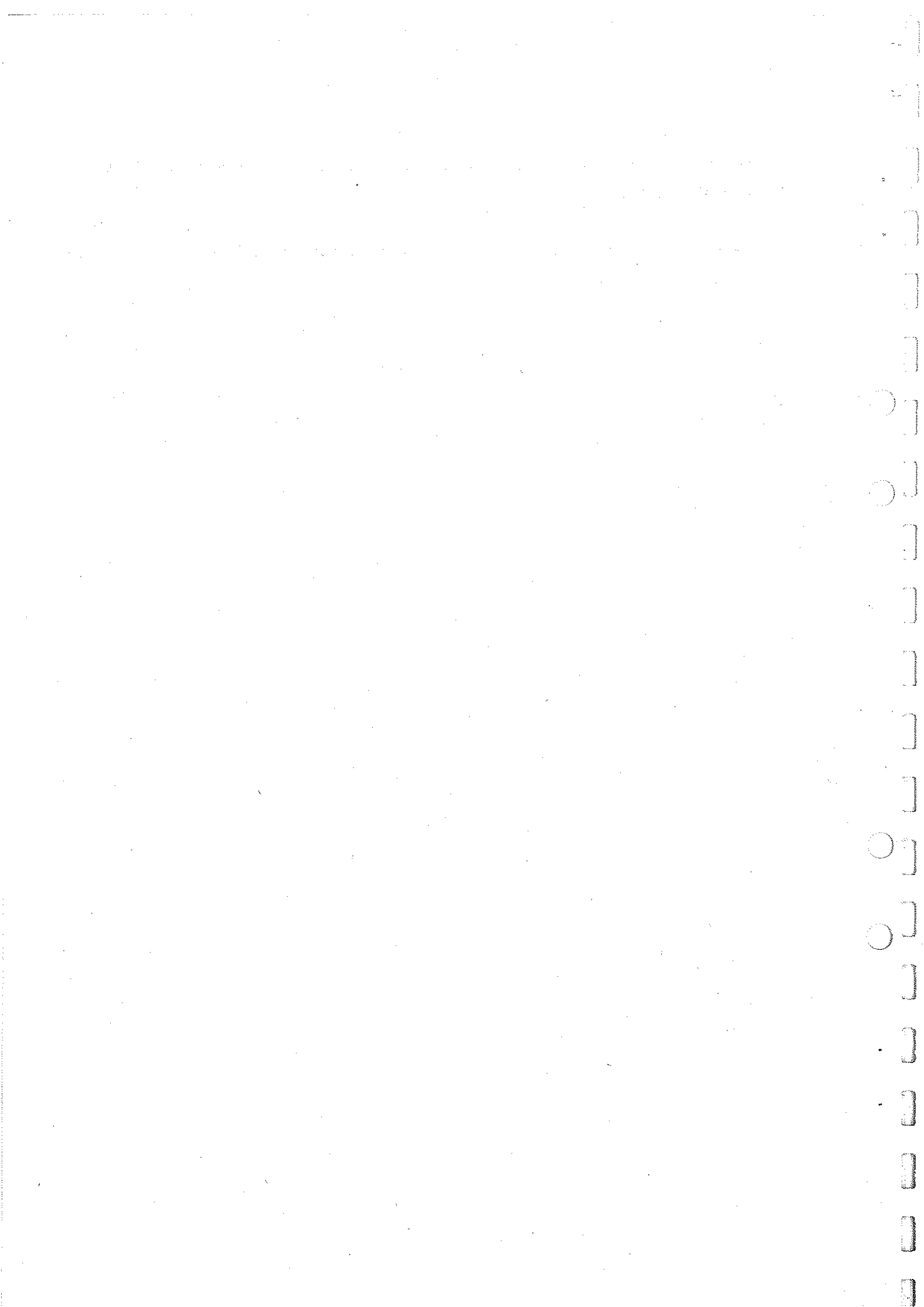
$$\text{jossa } p = \sum_{s=0}^{r-1} n_s \cdot 2^s \quad \text{saaden arvot } 0, \dots, 2^r - 1.$$

Tulos on muutoin oikein, mutta jonon alkioit ovat väärässä järjestyksessä (indeksi binäärilukuna ilmoitettuna on muutoin oikein, mutta bitit on luettava vastakkaisessa järjestyksessä).



Fourier-muunnoksen tulemme suorittamaan voidaksemme korvata konvoluution kertolaskulla.

Käytettyä ohjelmistoa on olennaisin osin selostettu liitteessä 1.





3

## YLEISTETTYÄ POISSON-JAKAUTUMAA

## VASTAAVA FOURIER-MUUNNOS

Oletetaan annetuksi yksittäisvahingon jakautuma tasavälisesti pistetodennäköisyyksin arvosta 0 alkaen arvoon  $(N-1)\Delta$  saakka

$$s_k = \text{todennäköisyys, että vahingon suuruus on } k\Delta$$

Tätä vastaava yleistetty Poisson-jakautuma voidaan vastaavasti kuvata pistetodennäköisyyksin ja jos merkitään

$$p_k = \text{todennäköisyys, että vahinkomeno on } k\Delta$$

voidaan välillä  $k = 0, 1, \dots, N-1$  laskea yleistetty Poisson-jakautuma

$$p_n = e^{-q} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} q^k s^{*k}$$

jossa

$q$  = vahinkojen lukumäärän odotusarvo ja

$*k$  viittaa  $k$ -kertaiseen yksittäisvahingon jakautuman konvoluutioon.

Mikäli Fourier-sarjalle määritelty konvoluutio olisi identtinen todennäköisyysjakautumalle määritellyn konvoluution kanssa, olisi

$$F(p) = e^{q(F(s)-1)} \quad \text{eli} \quad p = \frac{e^{-q}}{N} F(e^{qF(s)})$$

jossa

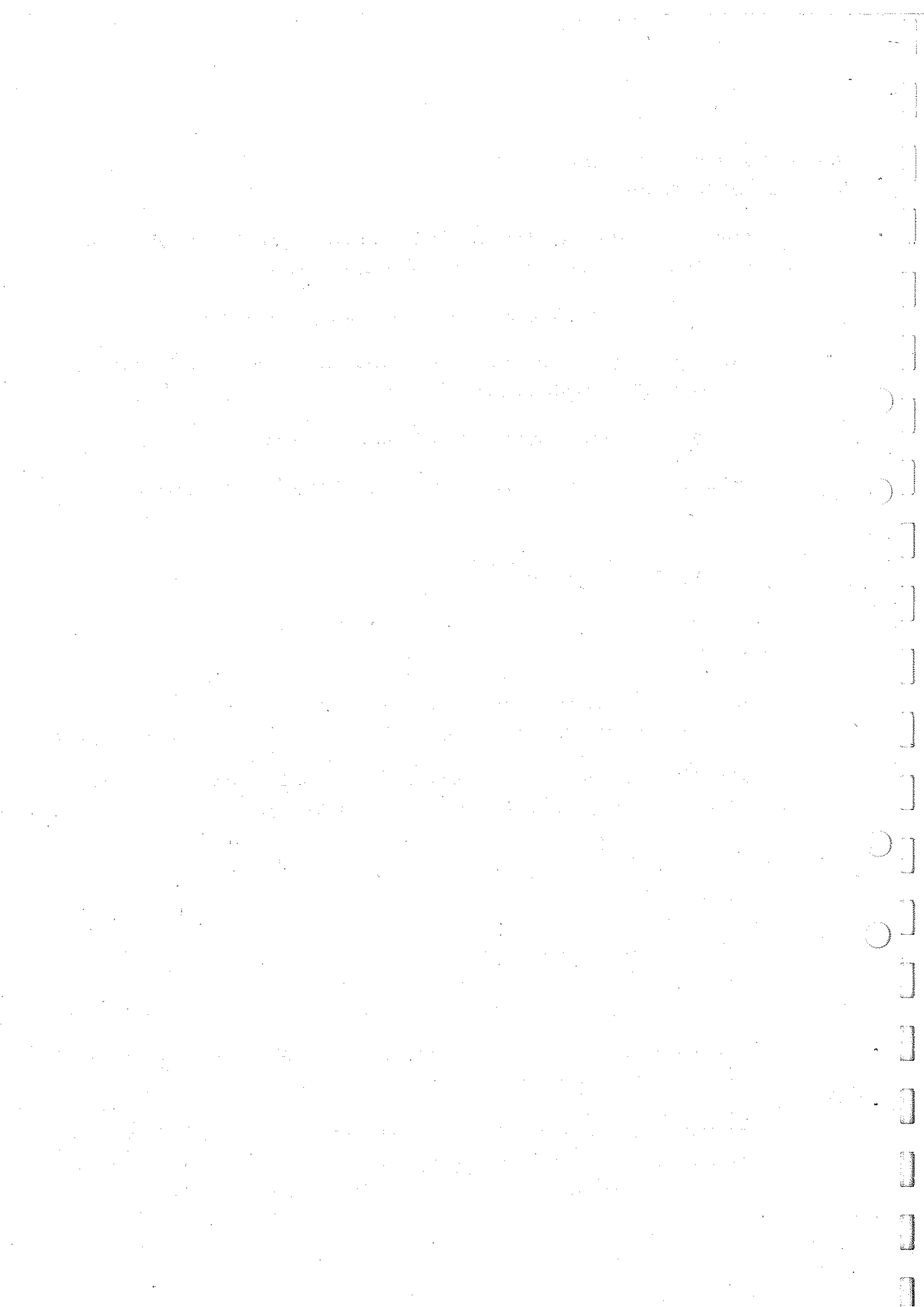
$$s = (s_0, s_1, \dots, s_{N-1})$$

ja

$$p = (p_0, p_1, \dots, p_{N-1}).$$

Konvoluutiokäsitteiden eroavuudesta johtuvaa virhettä olen jatkossa nimitänyt konvoluutiovirheeksi.

Parametrin  $q$  ollessa pieni ja otettaessa yksittäisvahinkojakautuma riittävän tiheästi ja riittävän suuriin vahingonarvoihin saakka voidaan odottaa saata-  
van suhteellisen hyviä arvoja erityisesti jakautuman alkupäässä.



4

KAHDEN YLEISTETYN POISSON-PROSESSIN  
FOURIER-MUUNNOSTEN SAMANAIKAINEN  
SUORITUS

Kun lähtö- ja tulosjonot ovat reaaliset, voidaan prosessi suorittaa yht'aikaa kahdelle eri jakautumalle, kunhan termien määrä on molemmissa sama.

Tällöin lähtöjakautumista  $s^{(1)}$  ja  $s^{(2)}$  muodostetaan jono

$$s = s^{(1)} + i s^{(2)}.$$

Merkitään

$$y = F(s) \quad y^{(1)} = F(s^{(1)}) \quad y^{(2)} = F(s^{(2)})$$

jolloin

$$y = y^{(1)} - i y^{(2)}.$$

Jonojen  $s^{(1)}$  ja  $s^{(2)}$  reaalisuudesta seuraa

$$y_n^{(1)} = y_{N-n}^{(1)*} \quad \text{ja} \quad y_n^{(2)} = y_{N-n}^{(2)*},$$

jolloin

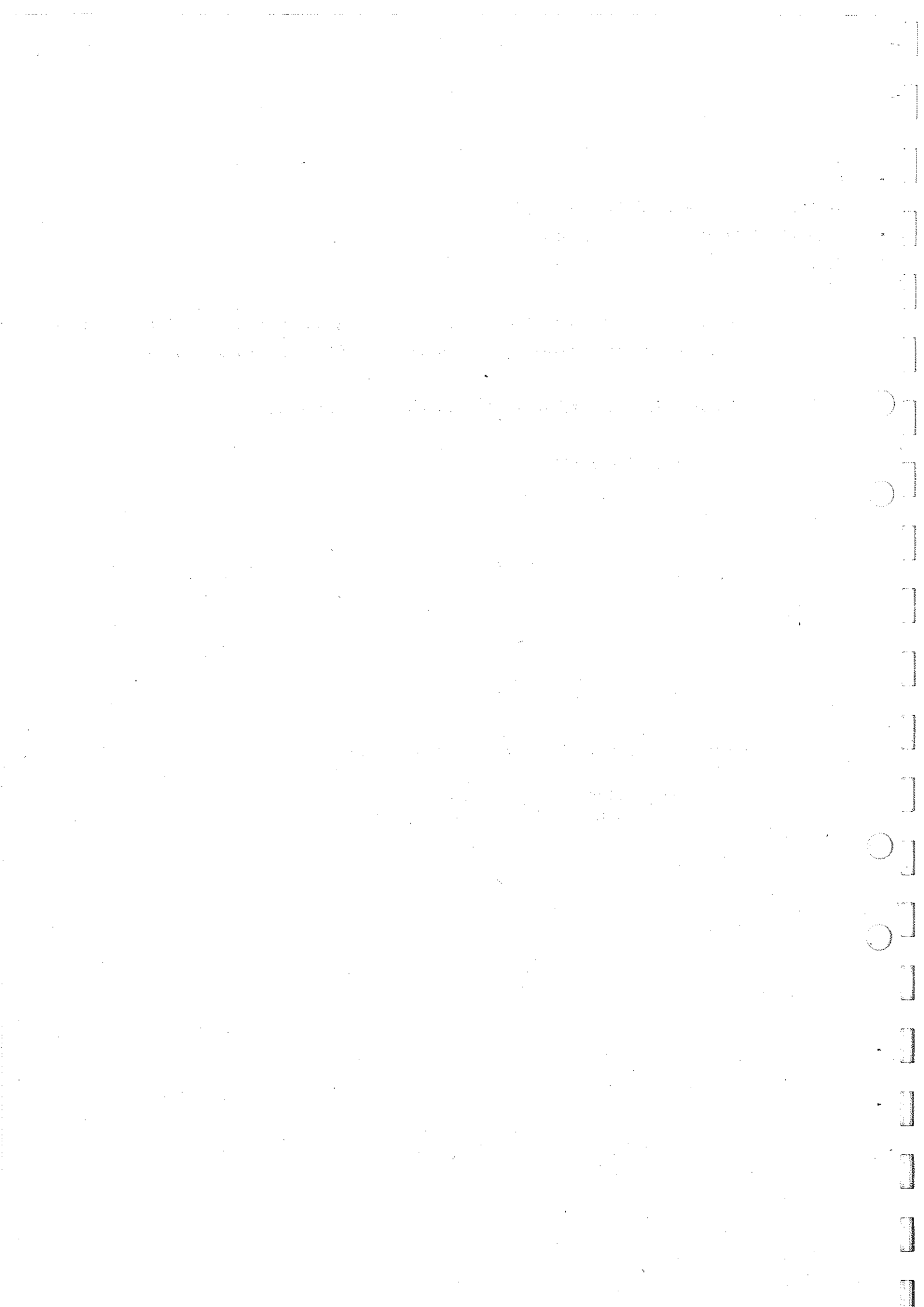
$$y_n = y_n^{(1)} - i y_n^{(2)}$$

$$y_{N-n}^* = y_n^{(1)} + i y_n^{(2)}$$

ja edelleen

$$y_n^{(1)} = \frac{1}{2} (y_n + y_{N-n}^*)$$

$$y_n^{(2)} = \frac{i}{2} (y_n - y_{N-n}^*)$$



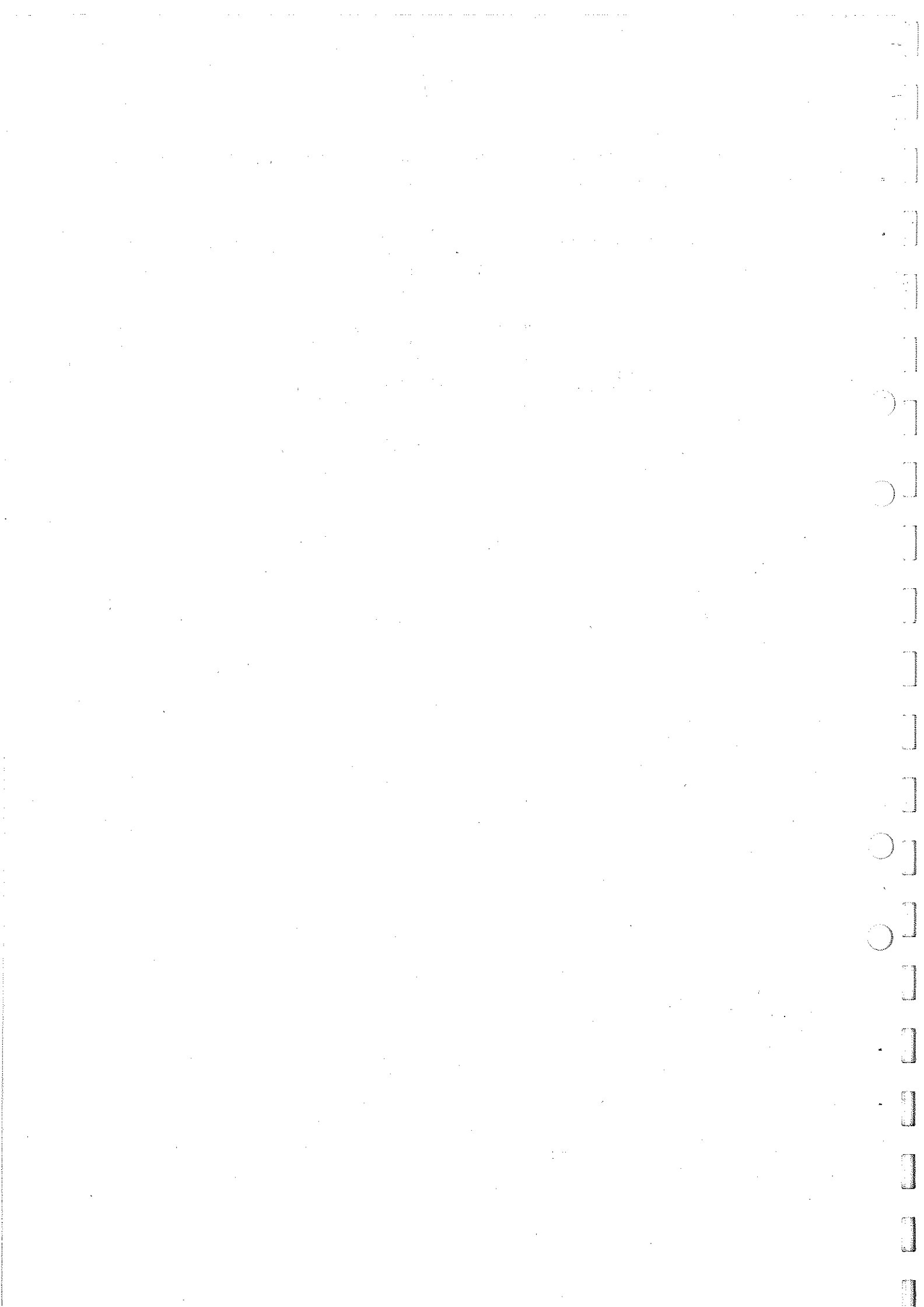
joten suorittamalla Fourier-muunnos kertaalleen saadaan esiin kummankin jonon Fourier-muunnos.

Tuloksen halutaan muodostuvan jonon  $s^{(1)}$  osalta reaali- ja jonon  $s^{(2)}$  osalta imaginääriosaksi. Täten siis

$$p = p^{(1)} + i p^{(2)} = \frac{e^{-q_1}}{N} F e^{q_1 F(s^{(1)})} + i \frac{e^{-q_2}}{N} F e^{q_2 F(s^{(2)})}$$

$$= \frac{1}{N} F (e^{-q_1} e^{q_1 F(s^{(1)})} - i e^{-q_2} e^{q_2 F(s^{(2)})}),$$

jolloin myös tulos saadaan suorittamalla Fourier-muunnos kertaalleen.



5

## NOPEAN FOURIER-MUUNNOKSEN

## SOVELTAMINEN

Menetelmän soveltamiseksi käytin Fortran-ohjelmointikieltä ja suurehkoa tietokonetta.

Soveltamisen kannalta keskeiset kysymykset näyttivät olevan

- sopivan laskentatarkkuuden valitseminen
- yksittäisvahinkojakautuman esittäminen tasavälisin pistetodennäköisyyksin ('rakeistus')
- tulosjakautuman pistetodennäköisyyksien tasoittaminen (portaiden tasoittaminen kertymäfunktiossa)
- konvoluutiovirheen vähentäminen

## 5.1

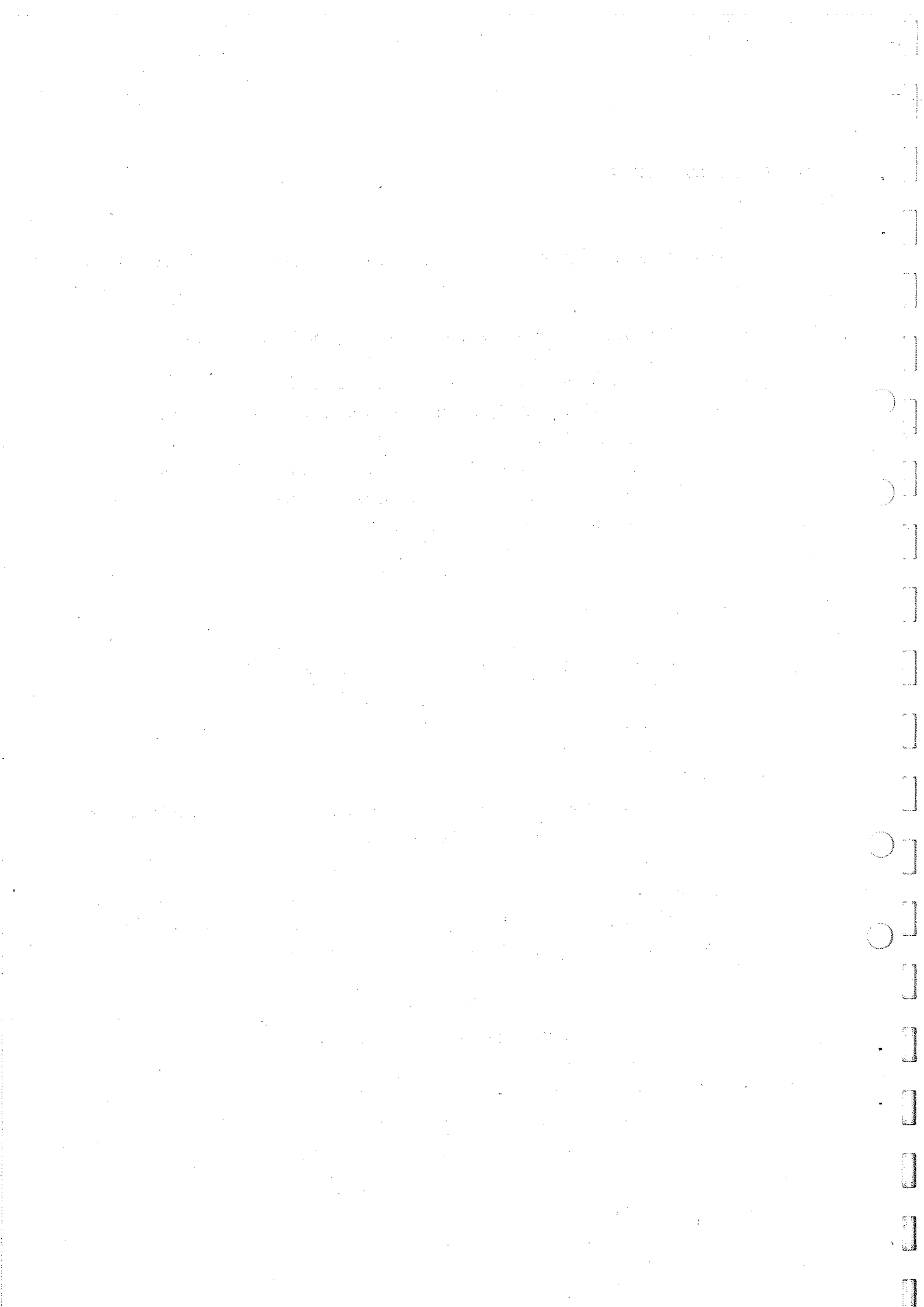
## Laskentatarkkuuden valitseminen

Fortrania käyttäessäni oli valittavissani lähinnä

- 'normaalitarkkuus' eli laskutoimitusten suorittaminen noin 7,2 numeron tarkkuudella
- 'kaksinkertainen tarkkuus' eli laskutoimitusten suorittaminen noin 16,8 numeron tarkkuudella.

Kuvan muodostamiseksi laskentatarkkuuden vaikutuksesta sovelsin nopean Fourier-muunnoksen menettelyä vakiovahinkoon vahinkojen lukumäärän odotusarvon ollessa yksi. Tämä jakautuma oli edullinen siinä mielessä, että

- tarkat tulokset voidaan laskea
- yksittäisvahinkojakautuma voidaan esittää tarkasti kahdella termillä
- konvoluutiovirhe voidaan eliminoida ottamalla jakautuma riittävän korkeaan argumentin arvoon saakka
- tulosjakautumaa ei tarvitse 'tasoittaa'





Osoittautui, että pistetodennäköisyyksien virhe tuloksessa oli

- suuruusluokkaa  $\frac{1}{N} \cdot 10^{-6}$  'normaalilla laskentatarkkuudella' ja
- suuruusluokkaa  $\frac{1}{N} \cdot 10^{-15}$  'kaksinkertaisella tarkkuudella'.

Tuloksen epätarkkuus ilmeni saman suuruusluokan virheenä sekä tuloksen reaali- että imaginääriosassa. Arviointiin käytetty yksittäisvahinkojakautuma sisältää paljon 0-termejä, joten saatu kuva laskentatarkkuudesta on aiheettoman positiivinen.

Tuloksena voin kuitenkin todeta, että laskennassa on syytä käyttää Fortranin 'kaksinkertaista laskentatarkkuutta', joka myöskin on varmasti riittävä.

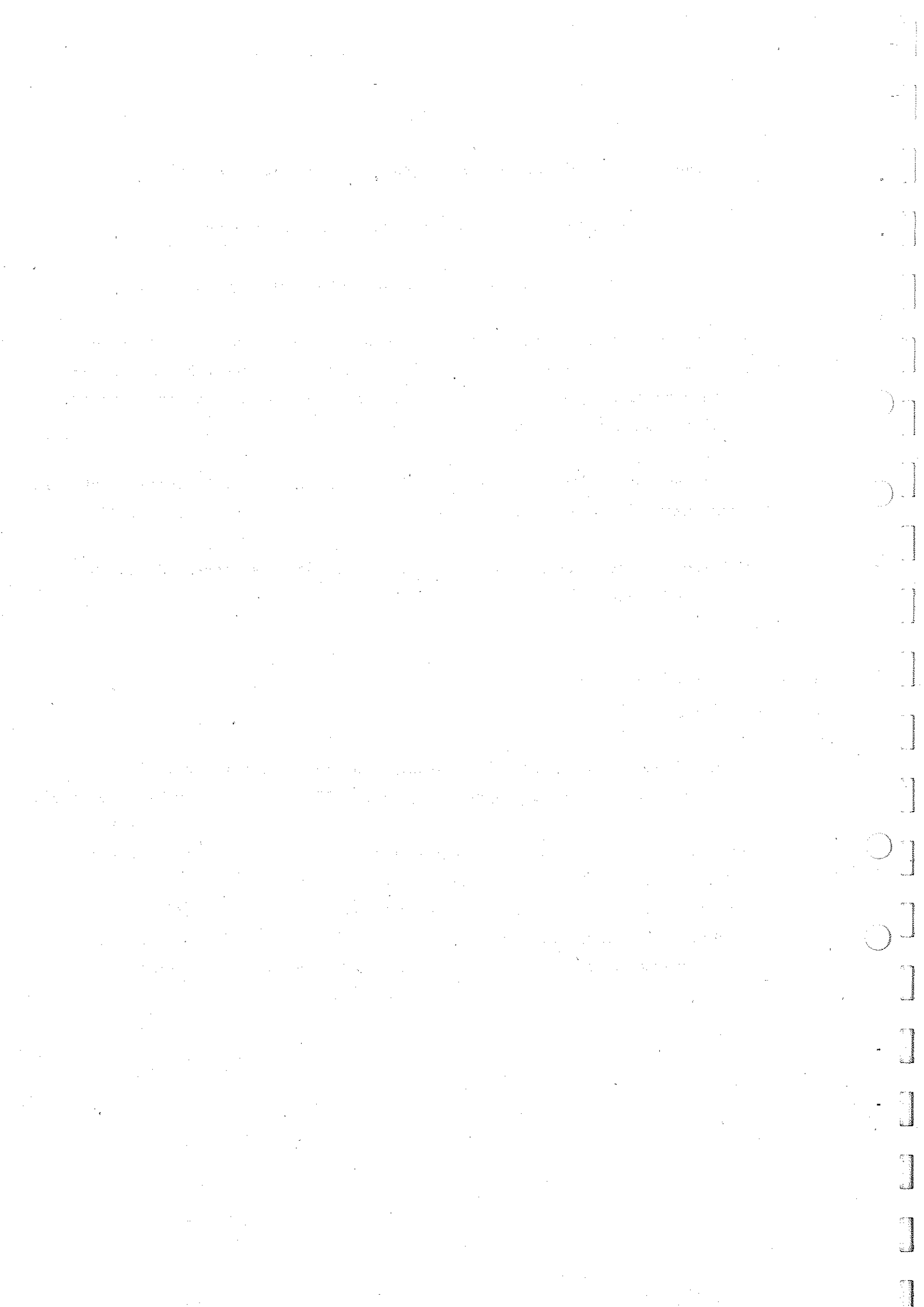
Tulokset on tämän harjoitustyön osalta otettu jatkossa tarkkuudella  $10^{-6}$  (kertymäfunktiossa).

## 5.2

Yksittäisvahinkojakautuman esittäminen  
tasavälisin pistetodennäköisyyksin

Toimenpidettä, jolla yksittäisvahinkojakautuma korvataan tasavälisesti annetuilla pistetodennäköisyyksillä, nimitetään seuraavassa rakeistamiseksi.

Rakeistaminen korvaa alkuperäisen jakautuman uudella, erityistyyppisellä jakautumalla, jonka on olennaiselta osalta kyettävä kuvaamaan alkuperäistä jakautumaa. Täten todennäköisyyssmassat eivät saa lokaalisesti siirtyä merkittäviä matkoja ja perustunnusluvut eivät saa ratkaisevasti muuttua. Viime mainittu vaatimus kohdistuu erityisesti jakautuman keskiarvoon.



## 5.2.1

## Rakeistamisessa käytetty menetelmä

Laskennalle valittu korkein argumentin arvo ja Fourier-jonon termien lukumäärä määräävät argumentin arvot, joihin jakautuman todennäköisyysmassa kerätään pistetodennäköisyyksiksi. Tämän lisäksi annetaan rakeistusta varten rakeistustarkkuutta ohjaava parametri

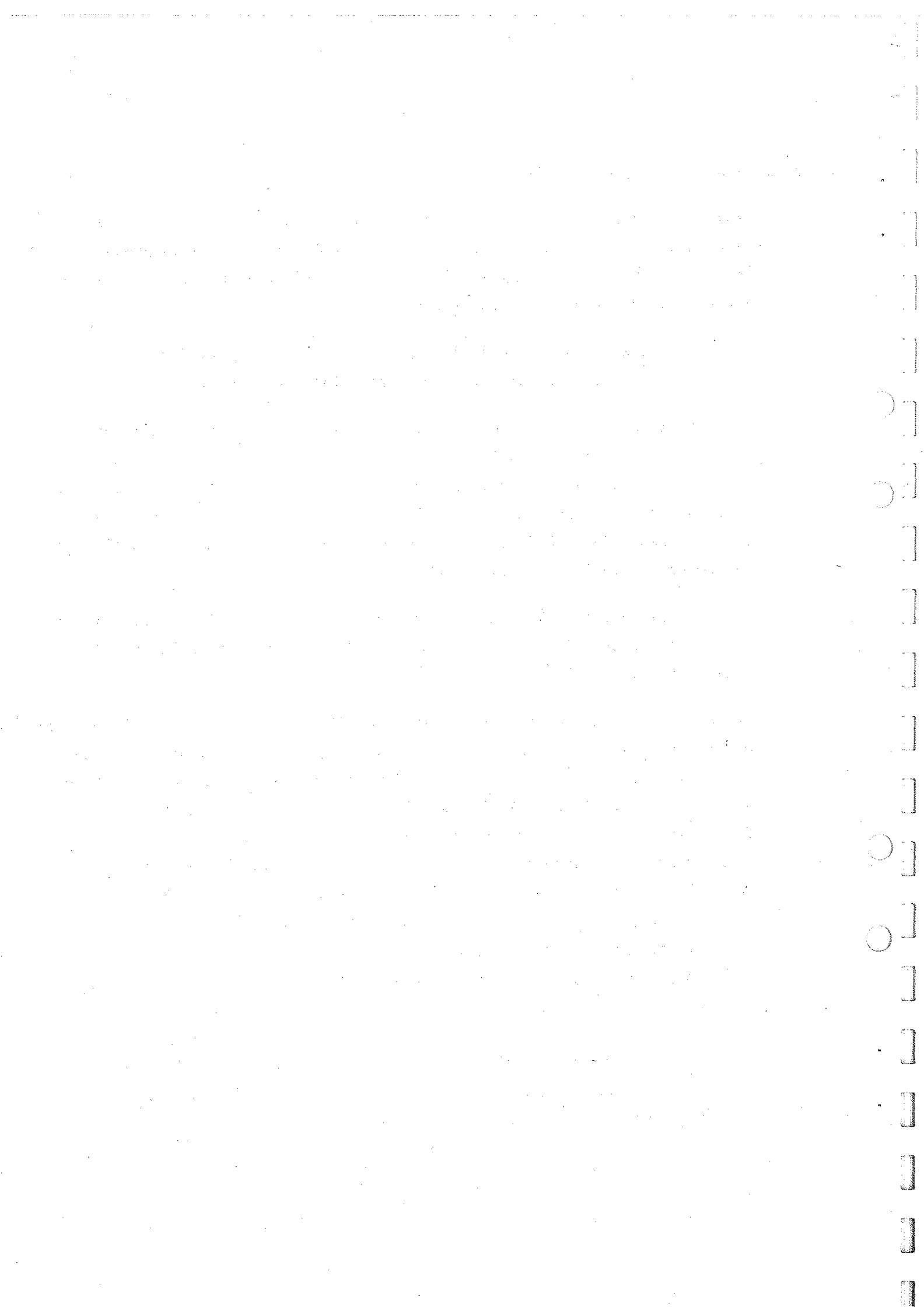
- keskiarvossa rakeistuksen johdosta enintään syntyväksi sallittu suhteellinen virhe (ja jakautuman keskiarvo)

Parametrin perusteella lasketaan sallittu kokonaisvirhe sekä rakeistuksen tapahtuessa vähennetään sallitusta virheestä rakeistaessa enintään jo syntynyt virhe. Täten prosessin edetessä ollaan selvillä jäljellä olevasta virhemarginaalista ja kullakin askelella sallitaan jäljellä olevasta virhemarginaalista käytettäväksi osuus, joka vastaa jäljellä olevien, käsittelemättömien jakoväliden määrää.

Prosessi aloitetaan jakautuman loppupäästä, jossa tiukankin virhemarginaalin toteuttaminen on helppoa. Täten saadaan virhemarginaalia 'säätymään' jakautuman alkupäähän.

Prosessi käsittelee kahta peräkkäistä jakoväliä kerrallaan integroiden ensimmäisen ja toisen momentin kummaltakin jakoväliltä ja sijoittaen tällä perusteella jakoväleiltä integroidun todennäköisyysmassan jakoväliden yhteiseen jakopisteeseen ja jakoväliden erillisiin päätepisteisiin siten, että jakautuman keskiarvo ei muutu eikä myöskään jakautuman toinen momentti. Jakautuman toisen momentin muuttumattomuutta ei voida ei-negatiivisin todennäköisyyksin taata. Mikäli tuloksena syntyisi negatiivinen pistetodennäköisyys rakeistuksen tuloksena, estetään tämä tinkimällä toisen momentin muuttumattomuusvaatimuksesta tarvittava määrä. Asetettua virherajaa käytetään ohjaamassa jakovälillä suoritettavan integroinnin tarkkuutta.

Jakovälejä on pariton määrä. Kun jakautuman rakeistus on suoritettu lukuun ottamatta ensimmäistä jakoväliä, sovelletaan menettelyä vielä kertaalleen näin muodostuneeseen jakautumaan; sen kahteen ensimmäiseen jakoväliin.



## 5.3

## Tulosjakautuman pistetodennäköisyyksien tasoittaminen

Yksittäisvahinkojakautuman ollessa jatkuva funktio on myös yleistetty Poisson-jakautuma jatkuva funktio. Menetelmä lähtee kuitenkin liikkeelle rakeistetusta, epäjatkuvasta jakautumasta ja antaa tuloksena vastaavasti epäjatkuvan jakautuman, jossa tiettyyn pisteeseen kertynyt todennäköisyysmassa tulee jatkuvan jakautuman approksimoimiseksi hajoittaa pisteen molemmiin puolin oleville jakoväleille.

Eräs mahdollinen tasoitustapa on tarkastella muodostunutta kertymäfunktioita  $F(x)$  ja asettaa tasoitetulle kertymäfunktioille  $F^T(x)$  arvo

$$F^T((n+u)\Delta) = \begin{cases} \frac{1}{2}[F((n-1)\Delta) + F(n\Delta)] + u[F(n\Delta) - F((n-1)\Delta)] & \text{kun } 0 \leq u < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}[F(n\Delta) + F((n+1)\Delta)] - u[F((n+1)\Delta) - F(n\Delta)] & \text{kun } \frac{1}{2} \leq u < 1 \end{cases}$$

asettaen kuitenkin

$$F^T(u\Delta) = e^{-q} + 2u(F(0) - e^{-q}), \text{ kun } 0 \leq u \leq \frac{1}{2}$$

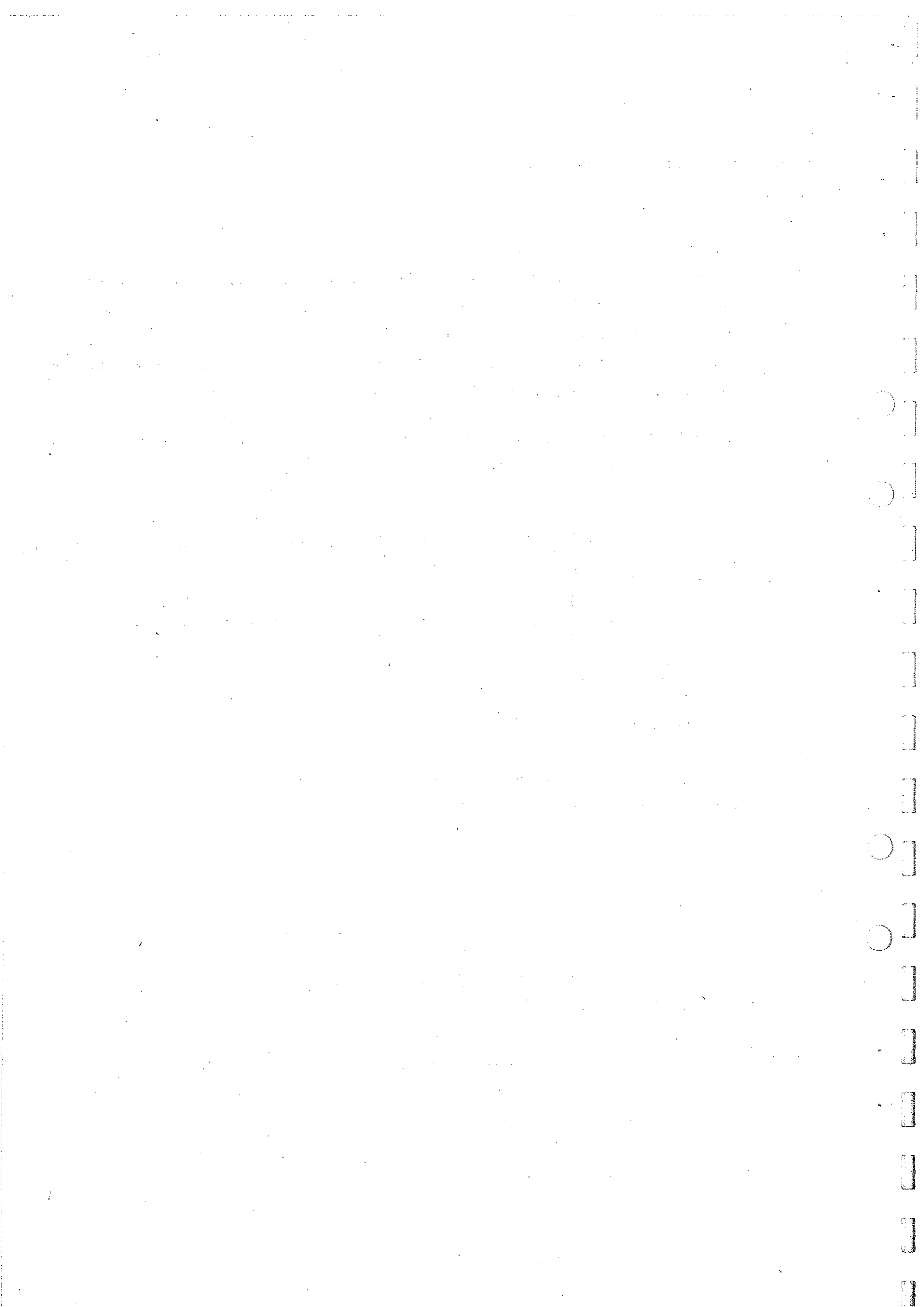
Tulosjakautuman tasoittamisella on merkitystä erityisesti silloin, kun kertymäfunktio muuttuu 'paljon' askelvälillä.

## 5.4

## Konvoluutiovirheen vähentäminen

Mahdollisuutta suorittaa kahden Poisson-prosessin tarvitsemat Fouriermuunnokset samanaikaisesti voidaan käyttää konvoluutiovirheen vähentämiseksi siten, että

- tulosjakautuman alkuosan pistetodennäköisyyksien määräämiseksi käytetään rakeistuksen antamaa yksittäisvahinkojakautumaa nollaten loppuosan termit
- tulosjakautuman loppuosan pistetodennäköisyydet otetaan 'täydellisenä' otetun yksittäisvahinkojakautuman antamasta tuloksesta.



6

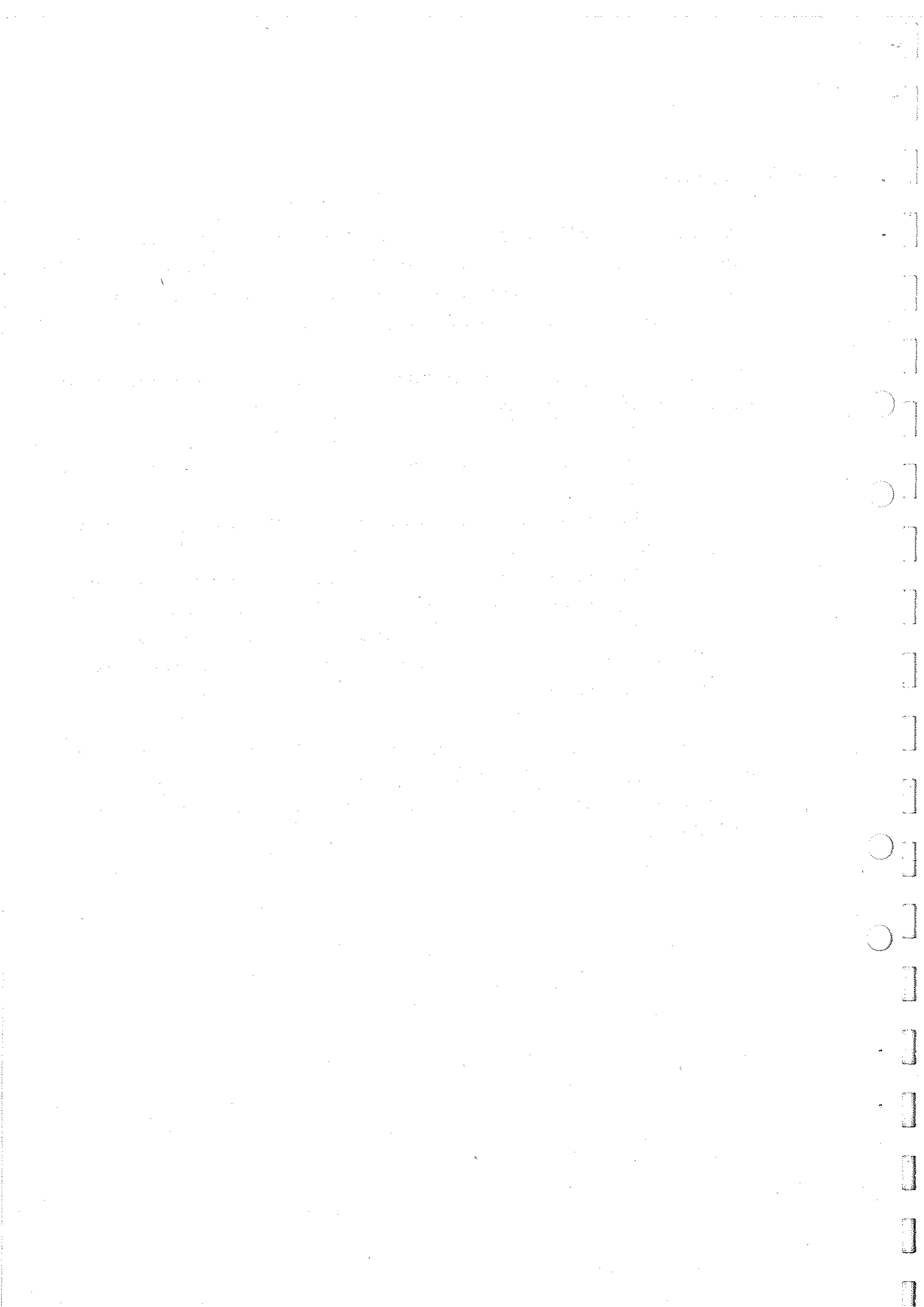
## KÄYTÄNNÖN ESIMERKKEJÄ

Päähuomion tätä harjoitustyötä tehdessäni olen kiinnittänyt niihin parannuksiin, joilla tulostarkkuutta voidaan lisätä kasvattamatta Fourier-jonojen pituuksia. Tulostarkkuushan on aina saavutettavissa jakovälin pituutta lyhentämällä ja korkeinta laskennan argumentin arvoa suurentamalla.

Täten menetelmän tähän saakka kehitetty muoto sinänsä on analysoimatta eli on vastaamatta mm. kysymyksiin

- kuinka suuri rakeistusvirhe keskiarvossa on suositeltavaa sallia
- kuinka pitkä jakoväli voidaan sallia, jotta yksittäisvahinkojakautuma tulisi riittävän hyvin kuvattua
- kuinka pieneen laskennan korkeimman argumentin arvoon voidaan tyytyä annetulla vahinkojen lukumäärän odotusarvolla
- kuinka suureen vahinkojen lukumäärän odotusarvoon saakka menetelmä on käyttökelpoinen (so. selvitetään kohtuullisella terminäärällä).

Näiden kysymysten kunnollinen selvittäminen edellyttäisi varsin runsasta materiaalia ja koneajan käyttöä. Tästä johtuen olen tyytynyt pariin käytännön esimerkkiin ja jättänyt menetelmän verifiointin tässä mielessä avoimeksi.





## 6.1

Yksittäisvahinkojakautuma  $1-e^{-x}$

Yksittäisvahinkojakautuma  $1-e^{-x}$  on valittu tarkasteluihin lähinnä seuraavista syistä

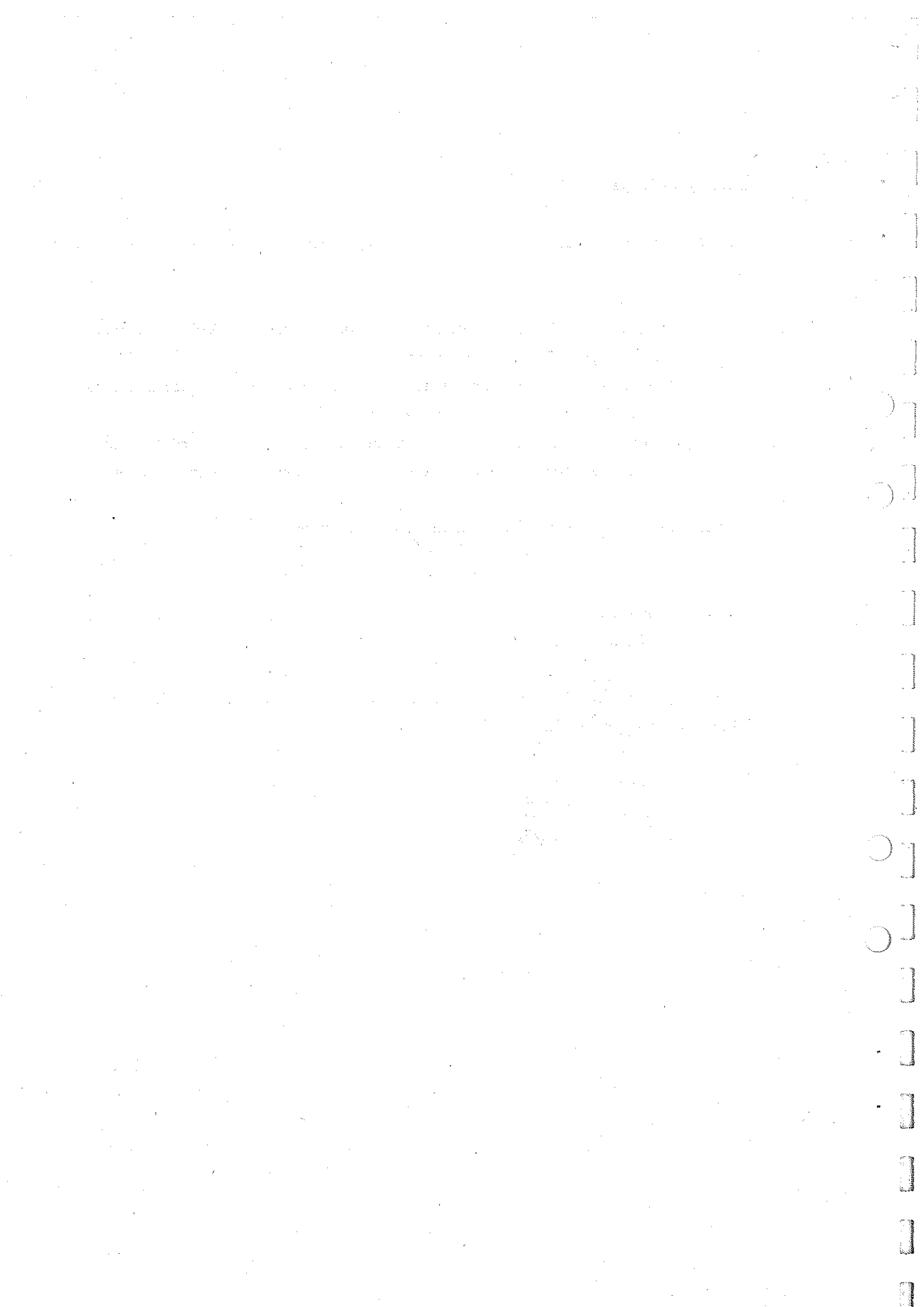
- yleistetty Poisson-jakautuma voidaan laskea edellä selostetusta menetelmästä riippumattomasti
- eksponentiaalista jakautumaa käytetään usein approksimoimassa todellista jakautumaa tai sen osaa
- yksittäisvahinkojakautuma on jatkuva (antaa kuvaa rakeistus-tuloksen tasoitusmenettelyn tehokkuudesta tai tehottomuudesta).

Valitun yksittäisvahinkojakautuman tunnusluvut ovat

- keskiarvo 1
- hajonta 1
- vinous 2

jolloin yleistetyn Poisson-jakautuman tunnusluvut ovat vahinkojen lukumäärän odotusarvon ollessa  $q$

- keskiarvo  $q$
- hajonta  $\sqrt{2q}$
- vinous  $3/\sqrt{2q}$

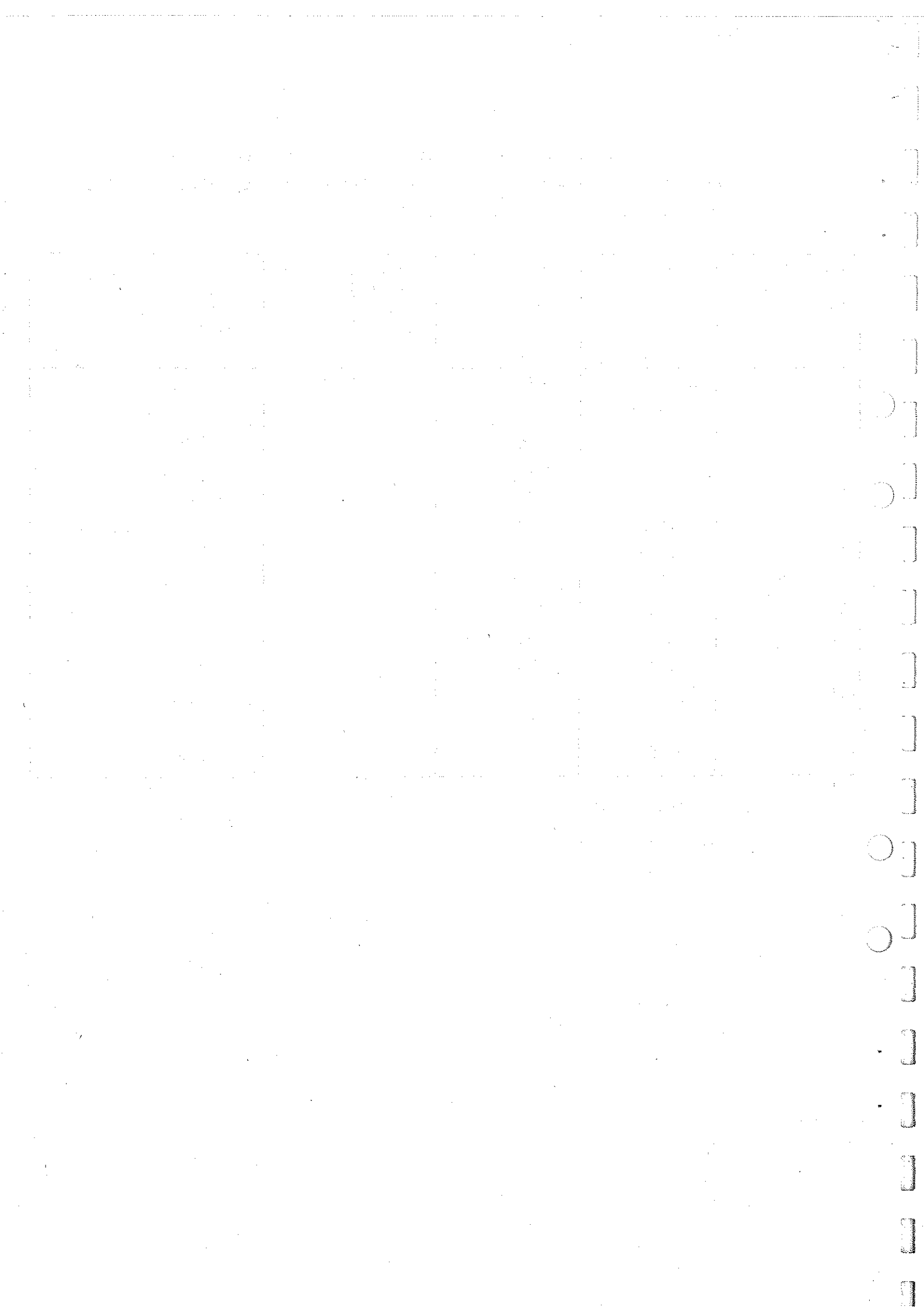


Tähän jakautumaan nojautuen kokeilin menetelmää eräillä parametrin arvoilla saadakseni karkeata kuvaa parametrien vaikutuksesta tuloksiin. Kokeilun tulokset on koottu alla olevaan taulukkoon.

vahinkojen lukumäärän odotusarvo	laskennan suurin argumentti	Fourier-termien määrä	rakeistusvirh. yläraja keskiarvossa %	$1-F(x)$ suhteellinen virhe välillä $(mq, mq+6\sqrt{q(m^2+\delta^2)})$
q	$X_m$	N		%
1	15.9375	256	0,1...3,1	- 3,8...-4,8
1	3.9375	64	1	- 4,4...-16
1	7.9375	128	1	- 3,9...-24,7
1	31.9375	512	1	- 3,8...-4,5
1	15.75	64	1	- 14,5...-17
1	15.875	128	1	- 7,5...-9,1
1	15.96875	512	1	- 2...-2,6
1	15.984375	1024	1	- 1...-1,3
10	63.9375	1024	0,1...3,1	- 1,2...-2,7
10	31.9375	512	1	0...-82
10	15.9375	256	1	0...-93
10	49.9375	1024	1	- 0,9...-2,0
10	49.875	512	1	- 1,8...-4,1
10	49.75	256	1	- 3,8...-8,0

$m$  = yksittäisvahingon odotusarvo

$\delta$  = yksittäisvahingon hajonta

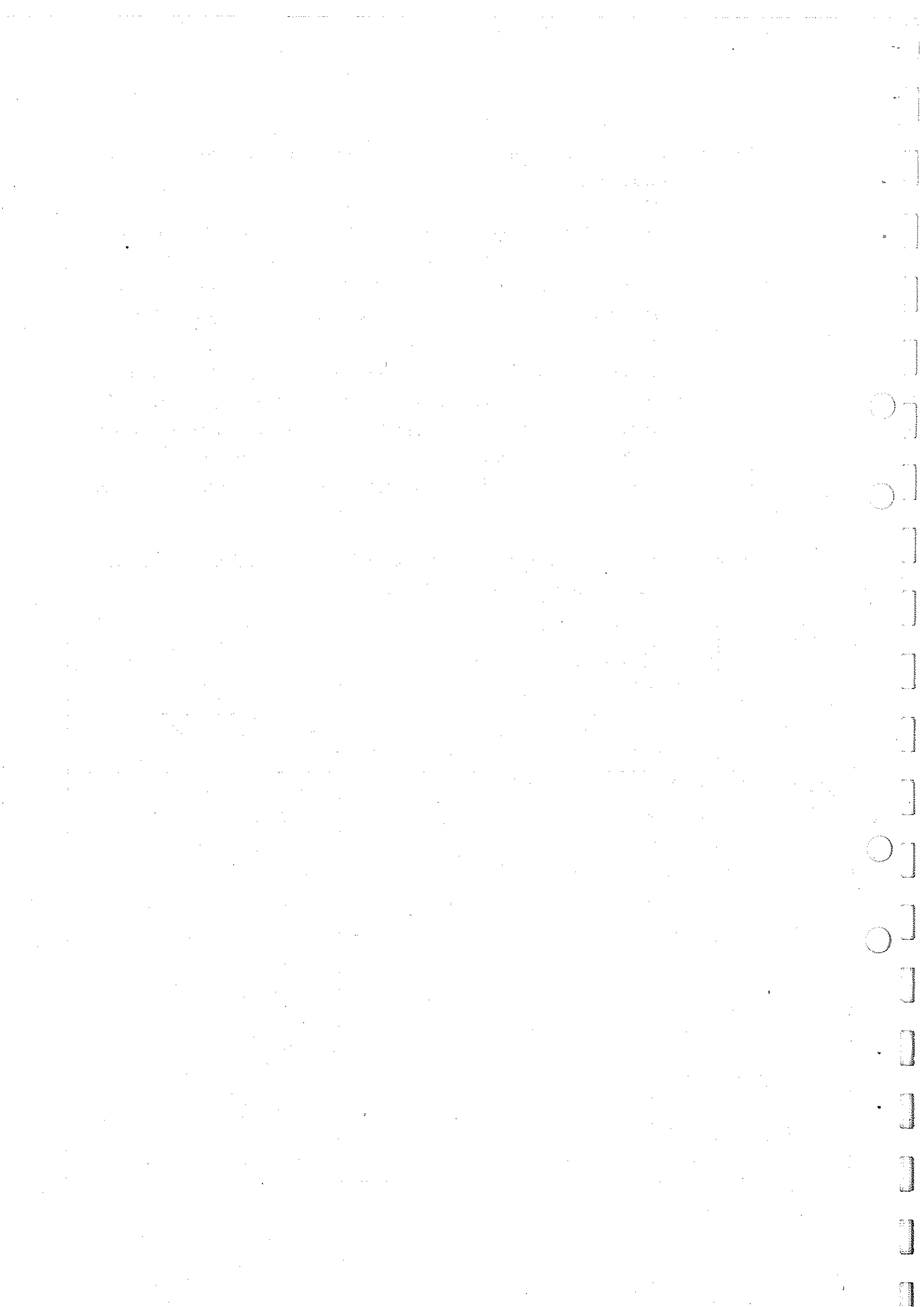


Havaintojen vähydestä johtuen ei pitäviä johtopäätöksiä voida tehdä. Intuitiivisesti tuntuu, että

- keskiarvoon rakeistuksessa syntyvän virheen merkitys kasvaa vahinkojen lukumäärän odotusarvon kasvaessa siten, että sallittua virherajaa tulostarkkuuden säilyttämiseksi olisi ehkä muutettava vahinkojen lukumäärän neliöjuureen kääntäen verrannollisena
- jakovälin pituutta voidaan pidentää vahinkojen lukumäärän odotusarvon kasvaessa (yksittäisvahinkojakautumasta generoituva yleistetty Poisson-jakautuma lähenee normaalijakautumaa)
- laskennan korkeimman argumentin valinnan kannalta oleellista saattaisi olla etäisyys tulosjakautuman keskiarvosta hajonnalla mitattuna.

Alla olevassa taulukossa on edellä annetut tulokset listattu esitetyn intuitiivisen näkemyksen mukaisesti.

$p\sqrt{q}$ %	$\frac{X_m}{(N-1)\sqrt{q(m^2+\delta^2)}}$	$\frac{X_m - mq}{\sqrt{q(m^2+\delta^2)}}$	$1-F(x)$ suhteellinen virhe välillä $(mq, mq+6\sqrt{q(m^2+\delta^2)})$ %
0,1...3,1	0,0442	10,6	-3,8...-4,8
1	0,0442	2,1	-4,4...-16
1	0,0442	4,9	-3,9...-24,7
1	0,0442	21,9	-3,8...-4,5
1	0,1768	10,4	-14,5...-17
1	0,0879	10,5	-7,5...-9,1
1	0,0221	10,6	-2...-2,6
1	0,0110	10,6	-1...-1,3
0,3...9,8	0,0140	12,1	-1,2...-2,7
3,2	0,0140	4,9	0...-82
3,2	0,0140	1,3	0...-93
3,2	0,0109	8,9	-0,9...-2,0
3,2	0,0218	8,9	-1,8...-4,1
3,2	0,0436	8,9	-3,8...-8,0



$p$  = rakeistuksessa keskiarvoon syntyvä virhe

$q$  = vahinkojen lukumäärän odotusarvo

$X_m$  = laskennan korkein argumentti

$m$  = yksittäisvahingon odotusarvo

$\delta$  = yksittäisvahingon hajonta

Joskaan havainto aineisto ei oikeuta johtopäätöksiin, voitaneen aavistella seuraavan kaltaisia nyrkkisääntöjä parametrien arvojen valinnalle pyritessä n. 5 % tulostarkkuuteen funktiossa  $1-F(x)$  alueella keskiarvosta kuusinkertaisen hajonnan päähän:

- rakeistuksessa sallittava virheen ylärajaksi voidaan valita

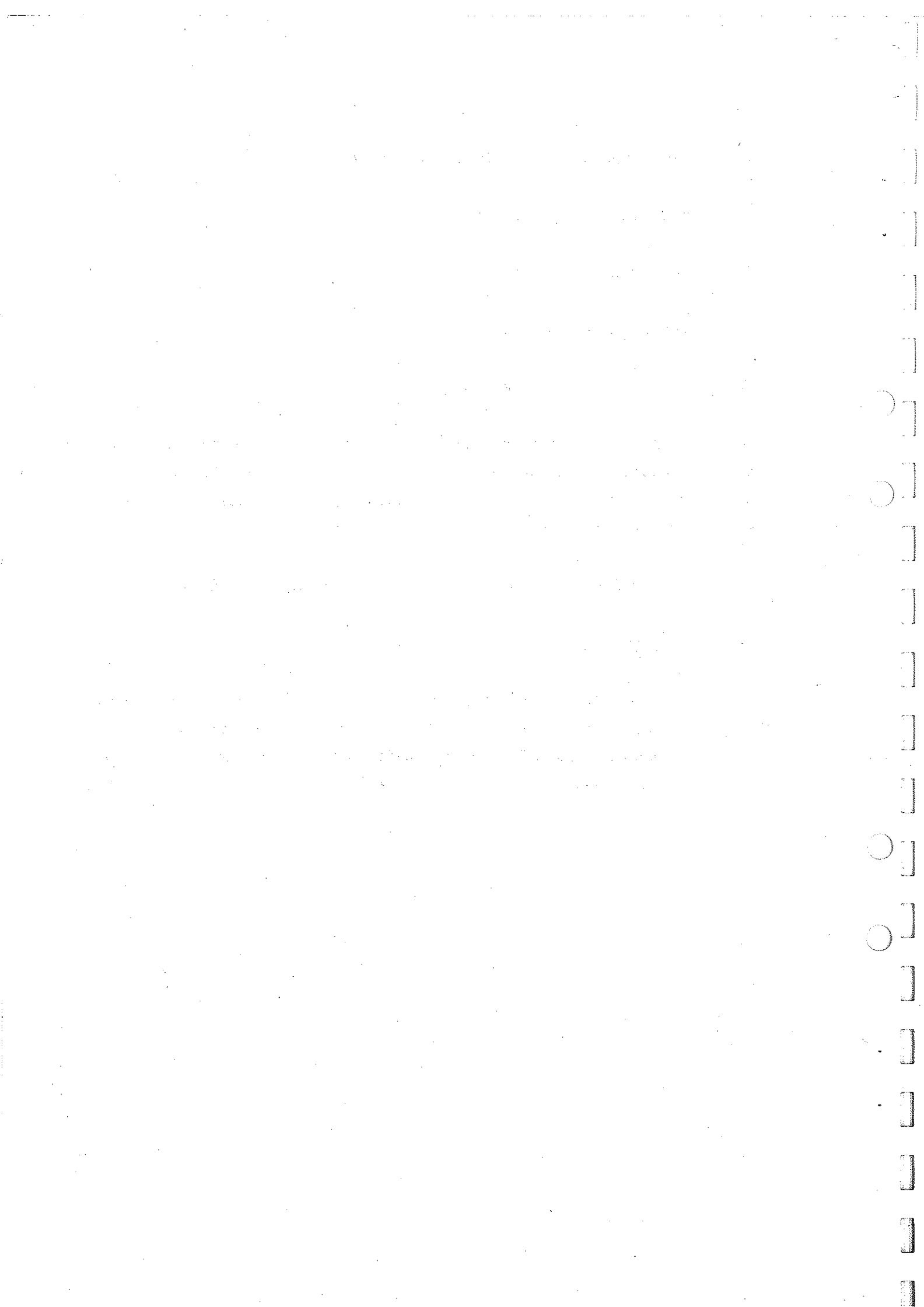
$$\leq \frac{1}{\sqrt{q}} \cdot 0,03$$

- laskennan korkein argumentti tulisi valita 9-10 x tulosjakautuman

hajonnan verran tulosjakautuman odotusarvoa suuremmaksi

- termien lukumäärä tulisi valita siten, että jakovälin pituus

tulosjakautuman hajonnalla mitattuna olisi suuruusluokkaa 2 %.





## 6.2

## Non-industrial Fire-jakautuma

Ns. ruotsalainen aktuaarikomitea on julkaisussaan [2] laskenut yleistetyn Poisson-jakautuman lähtien varsin vinosta yksittäisvahinkojakautumasta 'non-industrial fire'. Testasin tässä paperissa selostettua menetelmää tätä jakautumaa ja vahinkojen lukumäärän odotusarvoa 100 käyttäen.

Jakautumien tunnusluvut ovat tällöin

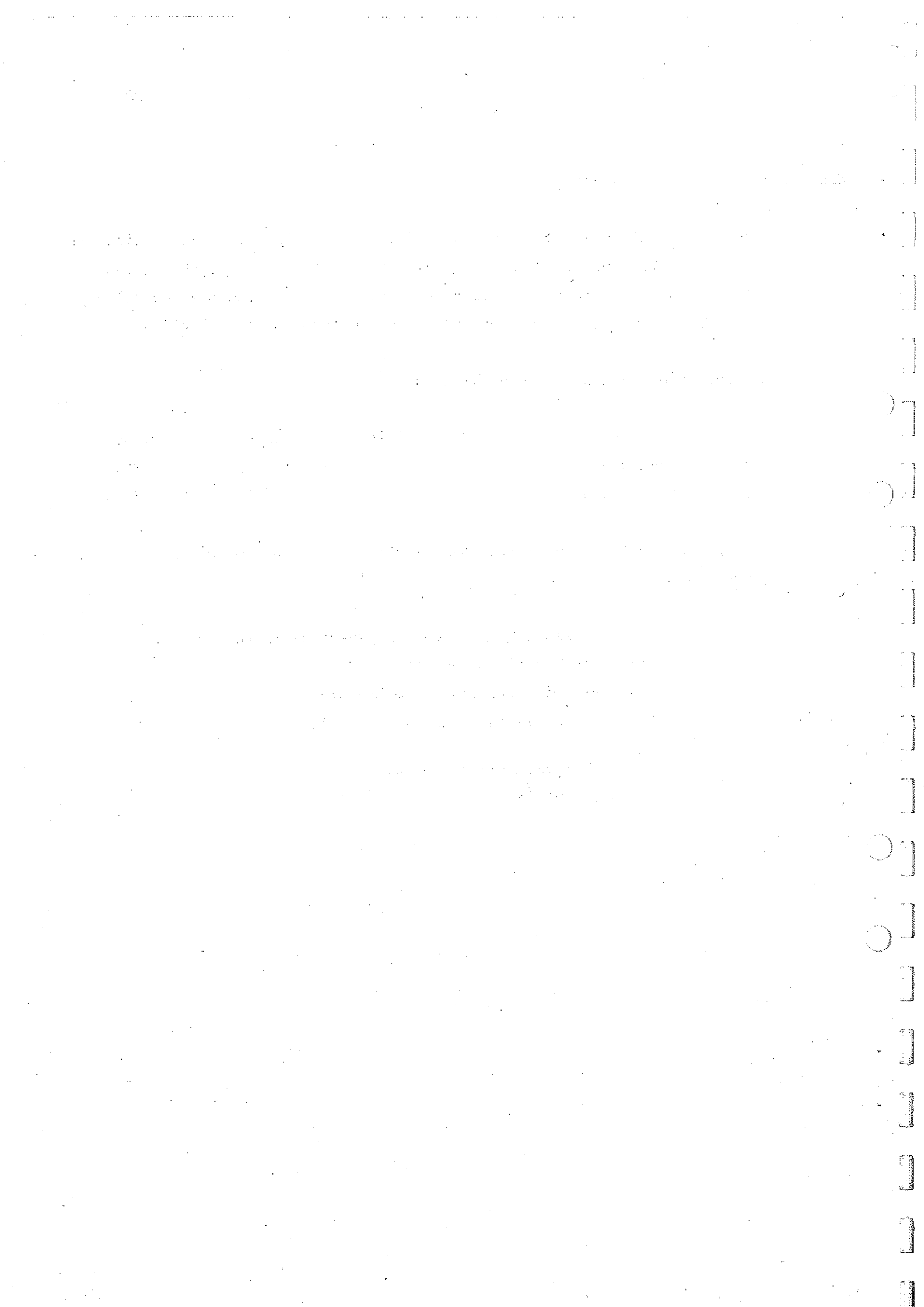
	keskiarvo	hajonta	vinous
yksittäisvahinko	1.00	6.83	39.2
yleistetty Poisson	100	68,98	3,84

Edellä muodostetun näkemyksen mukaisesti valitsin parametrien arvot seuraavasti

- rakeistuksessa keskiarvon syntyväksi sallittu virhe 0,3 %
- laskennan korkein argumentti 720
- Fourier-sarjan termien lukumäärä 512  
(jolloin jakovälin pituudeksi tuli 1,4

ja

$$\frac{X_m}{(N-1)\sqrt{q(m^2 + \sigma^2)}} = 0,02)$$



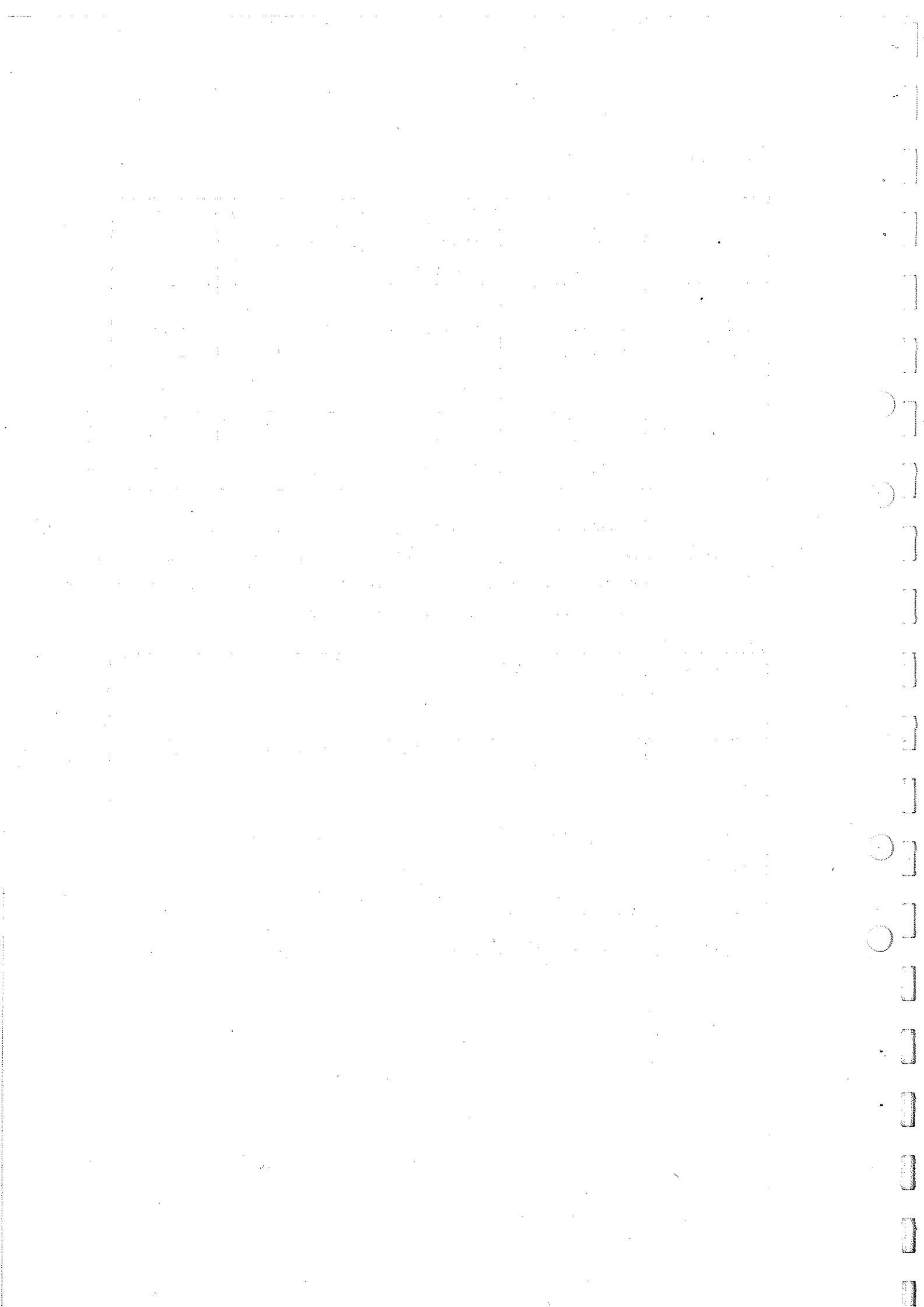
Tulos muodostui seuraavaksi

vahinko- summa	1-F(x)		virhe		
	julkaisu [2]	Fourier- menetelmä	absol.	suht. %	
0		1.000000			
100	0.374300	0.373995	-0.000305	-0,1	
169	0.094700	0.094467	-0.000233	-0,2	
238	0.034500	0.034276	-0.000224	-0,6	
306,9	0.017090	0.016825	-0.000265	-1,6	*
375,9	0.008930	0.008590	-0.000340	-3,8	*
513,9	0,003780	0,003409	-0.000371	-9,8	*

Käytettäessä laskennan korkeimpana argumentin arvona arvoa 800 (n. kymmenkertaisen hajonnan päässä keskiarvossa) ja Fourier-sarjan termien määränä 4096 (ohjelmassa varattu maksimitila) sekä rakeistuksessa keskiarvoon syntyväksi sallittuna virheenä 0,1 % saatiin tulostaulukko

vahinko- summa	1-F(x)		virhe		
	julkaisu [2]	Fourier- menetelmä	absol.	suht. %	
100	0.374300	0.373743	-0.000557	-0,1	
169	0.094700	0.094255	-0.000445	-0,5	
238	0.034500	0.034380	-0.000120	-0,3	
306,9	0.017090	0.017077	-0.000013	-0,1	
375,9	0.008930	0.008904	-0.000026	-0,3	
513,9	0.003780	0.003761	-0.000019	-0,5	*

\* Poikkeaa julkaisun [2] arvosta enemmän kuin julkaisun tulokselle ilmoitetun virherajan verran.

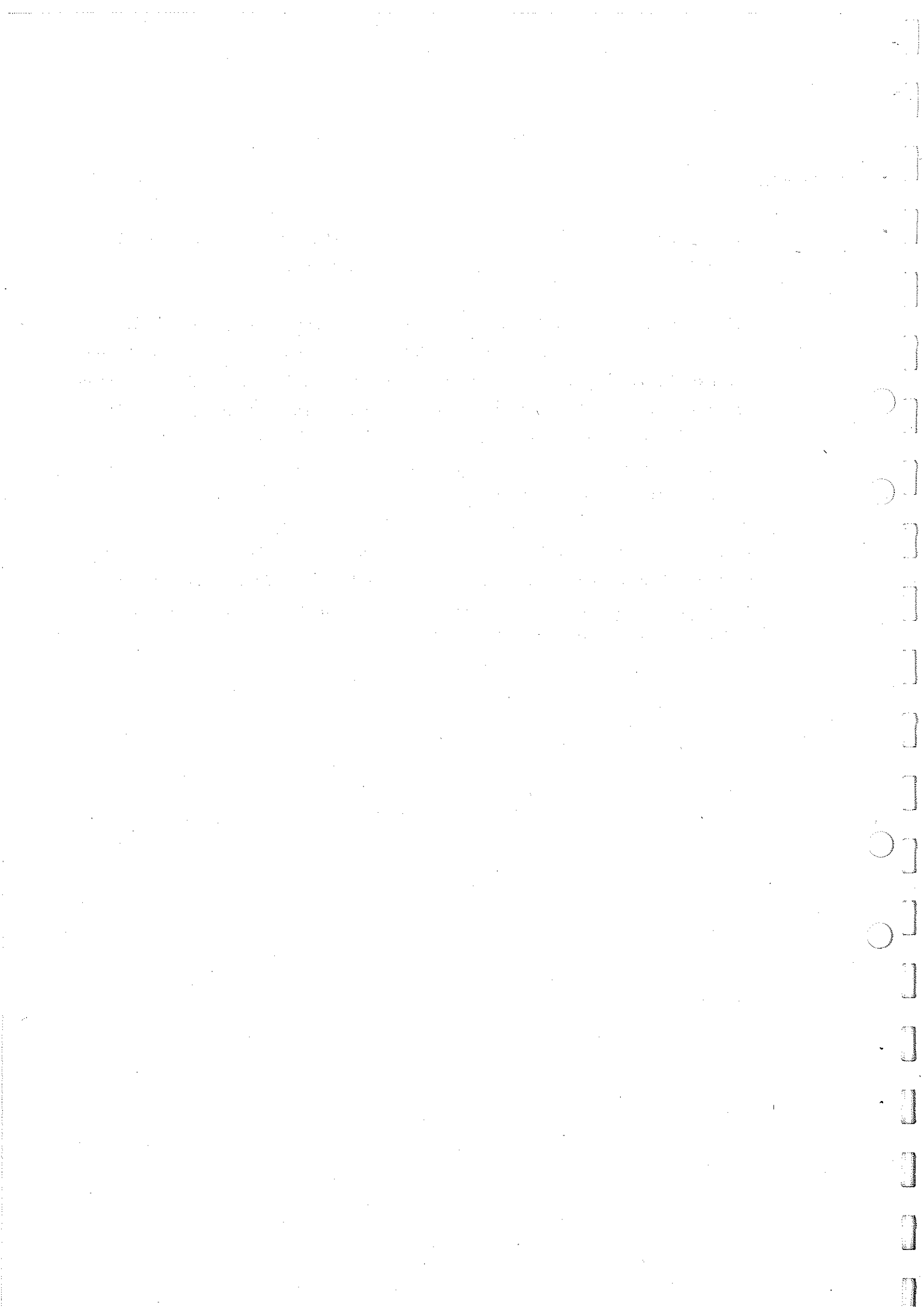


## YHTEENVETO

Näin lyhyen tarkastelun perusteella on vaikeata lausua kovin pitkälle meneviä päätelmiä menetelmän käyttökelpoisuudesta.

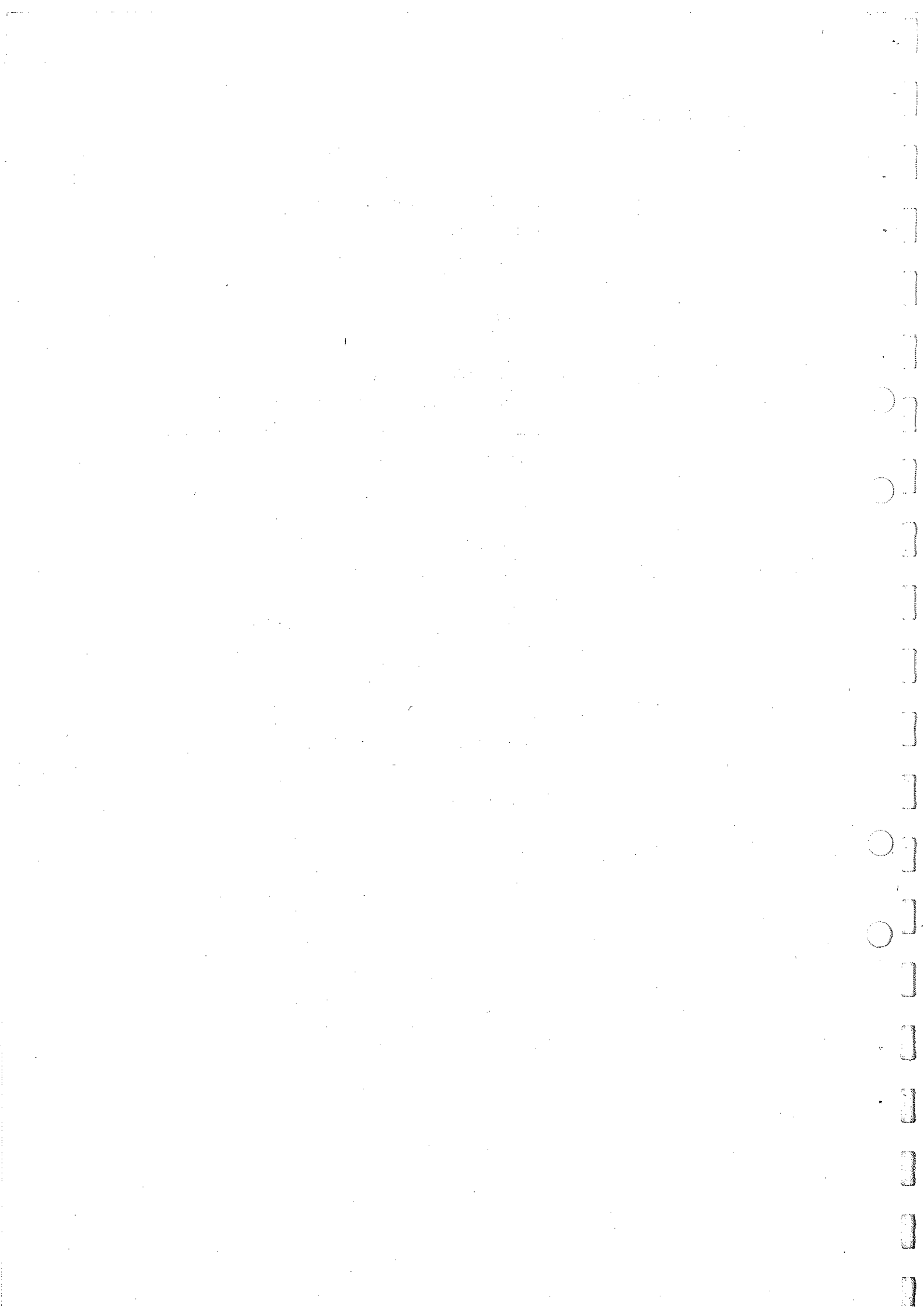
Voitaneen kuitenkin todeta, että menetelmä on käyttökelpoinen esim. mikro- tai pienoistietokoneessa (huomaa muistivaatimus), kun vahinkojen lukumäärän odotusarvo ei ole kovin suuri (ehkä joitakin satoja) ja antaa käyttökelpoisia tuloksia koko jakautuman alueella suhteellisen suuriin argumentin arvoihin saakka (4-6 kertaisen hajonnan päähän keskiarvosta). Mikäli muisti- ja koneaikaresurssia on 'rajattomasti', voidaan haluttu tulostarkkuus aina saavuttaa.

Tässä paperissa menetelmän kehittäminen on lähtenyt liikkeelle yksittäisvahinkojakautumasta ja ohjelmisto tarjoaa täten mahdollisuuden tarkastella yksittäisvahinkojakautumassa tapahtuvien muutosten heijastumista tulokseen (esim. jälleenvakuutus).



KIRJALLISUUSLUETTELO

- [1] Beard R.E., Pentikäinen T. ja Pesonen E.  
Risk Theory  
The Stochastic Basis of Insurance  
  
Chapman and Hall, 1977
  
- [2] Bohman, H. ja Esscher, F.  
Studies in Risk Theory with Numerical  
Illustrations Concerning Distribution Function  
and Stop Loss Premiums.  
  
Part I  
Skandinavisk Aktuarietidskrift  
Häft. 3-4, 1963  
  
Part II  
Skandinavisk Aktuarietidskrift  
Häft. 1-2, 1964
  
- [3] Brigham, E. Oren  
The Fast Fourier Transform  
  
Prentice Hall, 1974
  
- [4] Halmos, P.R.  
Measure Theory  
  
D. van Nostrand Company, 1950
  
- [5] Kamke, E.  
Das Lebesgue-Stieltjes Integral  
  
B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, 1956





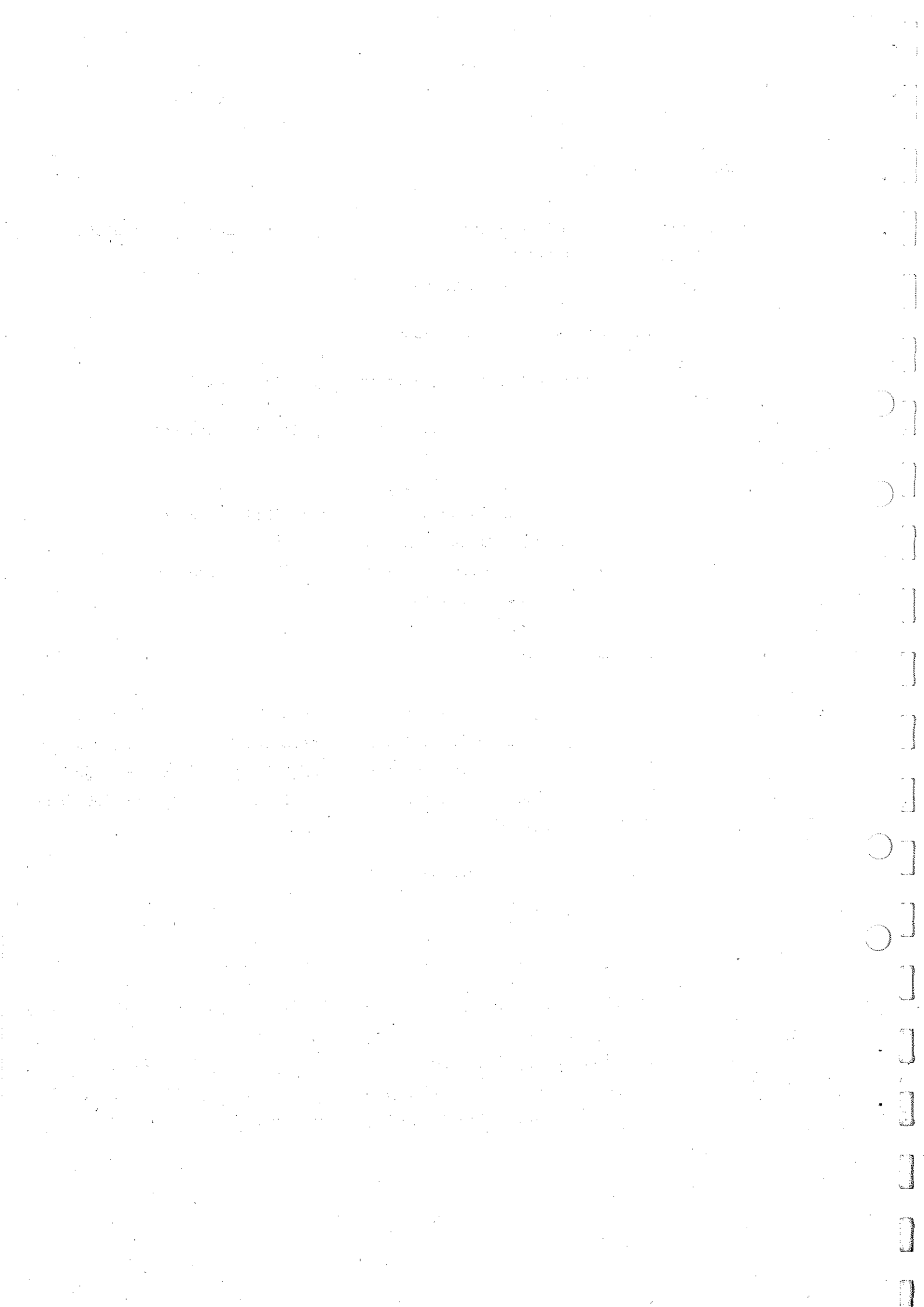
## OHJELMISTON KUVAUS

Ohjelmiston laadin FORTRAN-kielisenä ja sen käyttöä ohjataan päätteeltä.

## 1. SYÖTTÖ JA TULOSTIEDOT

Syöttötietona ohjelmistoa käytettäessä annetaan

- yksittäisvahinkojakautumasta
  - jakautumatiedot pisteittäin levytiedostossa
    - antamalla pistetodennäköisyydet ja vastaavat argumentin arvot tai
    - antamalla kertymäfunktion arvo ja vastaava argumentin arvo (pisteiden välillä oletetaan kertymäfunktio lineaariseksi) tai
    - kuten edellä, mutta kertymäfunktion sijasta l-kertymäfunktio
  - tai
  - jakautumatiedot annetaan funktioksi `FUNKY(X)` nimetyllä funktio-ohjelmalla, joka antaa tuloksena kertymäfunktion ykkösestä vähennettynä. `FUNKY(X)` on ohjelmitava ja liitettävä mukaan erikseen kullekin yksittäisvahinkojakautumalle
- tunnusluvut levytiedostosta
  - keskiarvo
  - hajonta
  - vinous
- tiedot yksittäisvahinkojakautumaa vastaavasta yleistetystä Poisson-jakautumasta (sikäli kuin tunnetaan !) vastaavasti kuin yksittäisvahinkojakautumasta. Mikäli yleistetty Poisson-jakautuma kuvataan funktiolla, on funktio nimetty `FUNKP(X,Q)`, jossa `Q` on vahinkojen lukumäärän odotusarvo.



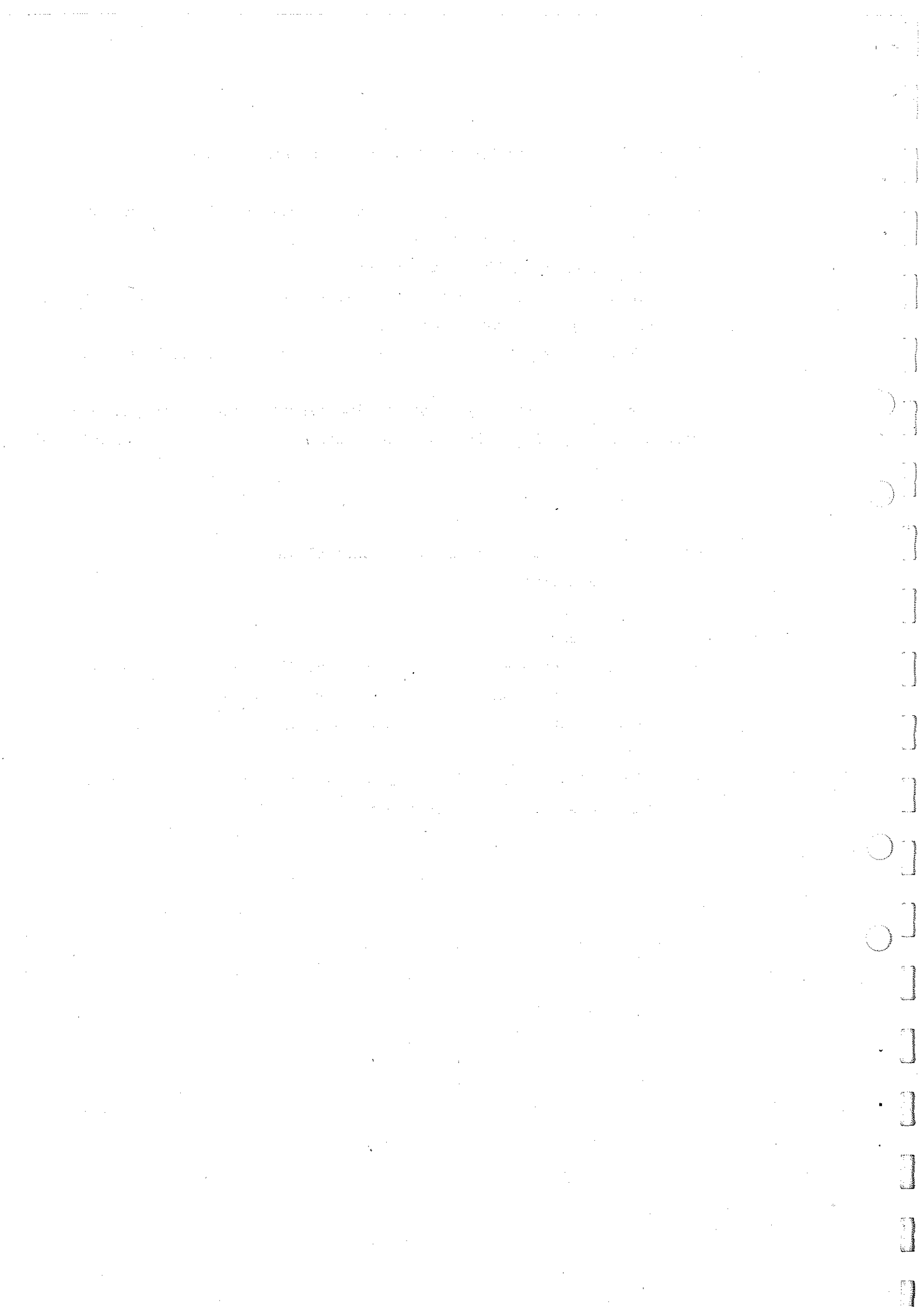
Parametritietoina käsittelyä ohjaamaan annetaan päätteeltä

- tieto yksittäisvahinkojakautuman ja yleistetyn Poisson-jakautuman saatavuudesta ja saantitavasta (levytiedosto / funktio)
- vahinkojen lukumäärän odotusarvo
- korkein argumentin arvo, johon saakka laskennan halutaan ulottuvan
- Fourier-jonon termien lukumäärä
- rakeistuksessa keskiarvoon syntyväksi sallittu enimmäisvirhe.

Tulostus voidaan pyytää joko päätteeltä annettavilla argumentin arvoilla tai 'täydellisenä', so. jonon termejä vastaavin argumentin arvoin.

Tulostietoina saadaan

- yleistetyn Poisson-jakautuman tunnusluvut
  - keskiarvo
  - hajonta
  - vinous
- 'nopean Fourier-muunnoksen'-menetelmällä laskettu yleistetyn Poisson-jakautuman kertymäfunktio ykkösestä vähennettynä ja vastaava funktio normaalijakautumaoletuksella ja NP-menetelmällä laskettuna
- mikäli 'oikea' tulosjakautuma oli annettu, tulostetaan myös tämä ja suhteellinen virhe termissä  $1-F(x)$



## 2. KÄSITTELYN KARKEA KUVAUS

Saatu yksittäisvahinkojakautuma rakeistetaan haluttua prosessia vastaavasti (laskennan korkein argumentin arvo, Fourier-termien määrä ja keskiarvossa sallittu virhe).

Yksittäisvahinkojakautumasta muodostetaan sen rinnalle toinen yksittäisvahinkojakautuma, joka eroaa alkuperäisestä ainoastaan siten, että pistetodennäköisyydet on jonon puolesta välistä eteenpäin asetettu nolliksi.

Suoritetaan molemmille jakautumille yht'aikainen Fourier-muunnos, Poisson-prosessi sekä yht'aikainen palauttava Fourier-muunnos ja tuloksena saatavasta jonosta poimitaan tulospistetodennäköisyydet

- puoleenväliin saakka 'typistettyä' yksittäisvahinkojakautumaa vastaavasta jonosta ja
- puolesta välistä eteenpäin 'täydellistä' yksittäisvahinkojakautumaa vastaavasta jonosta.

Tulostettaessa kertymäfunktio ykkösestä vähennettynä suoritetaan tulosjakautuman tasoitus.

## 3. OHJELMALISTAUKSET

Ohjelmistoa ei ole kehitetty kokonaisuudessaan valmiiksi käyttöohjelmistoksi (luovutuskelpoiseksi 'paketiksi'), vaan on syntynyt lähinnä menetelmän kokeilemiseksi. Ohjelmiston täydellinen listaus ei ole tarkoituksen mukaista.

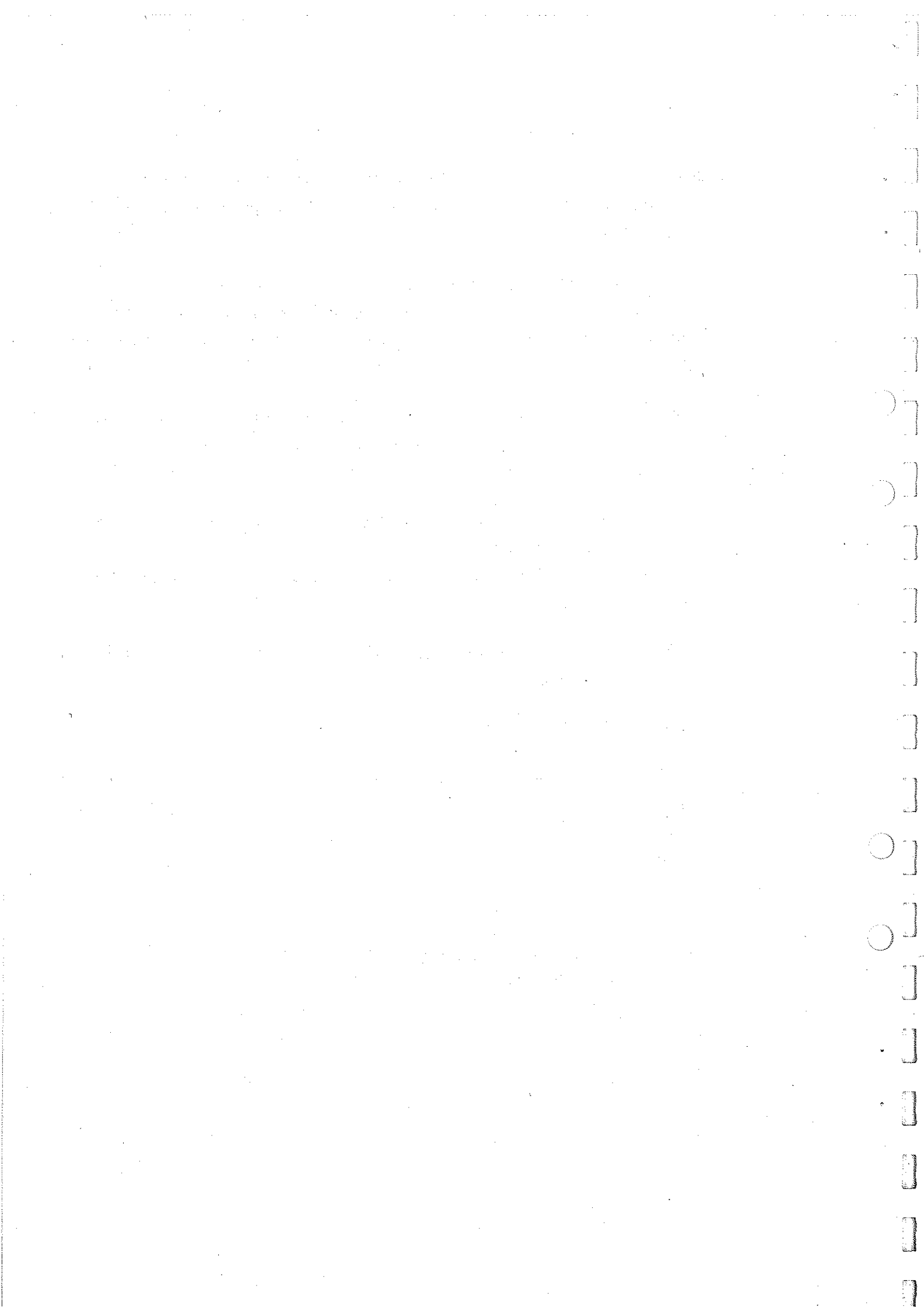
Menetelmän runkona olevat

- 1) yleistetyn Poisson-jakautuman (ilman tuloksen tasoitusta) laskeva alirutiini QYPSN
- 2) Fourier-sarja muunnoksen suorittava alirutiini FRIER sekä tämän käyttämä

- 'käänteisen bitti-indeksin' laskeva funktio NBITV

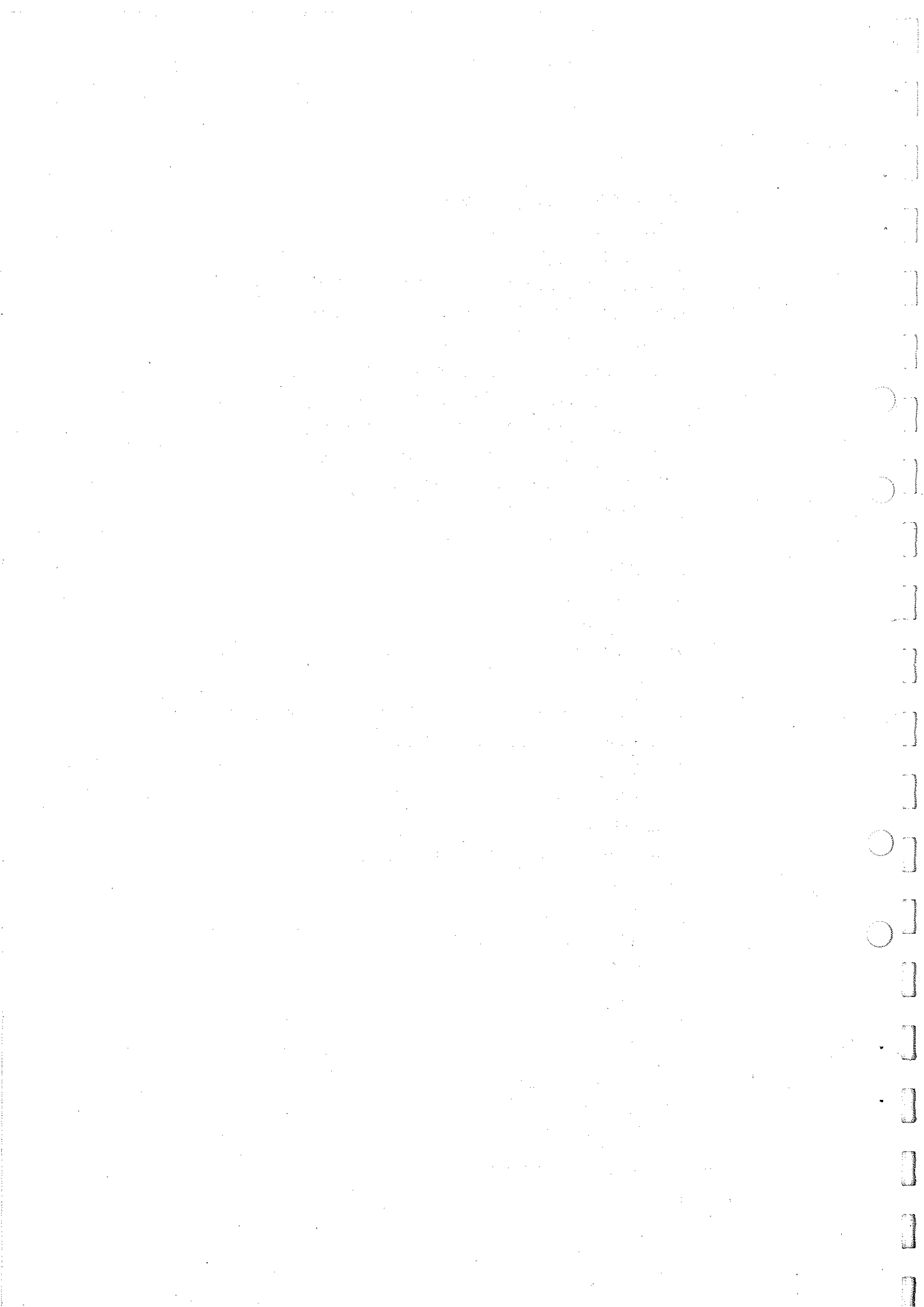
ja FRIER-aliohjelman antaman jonon järjestämiseksi tarvittava alirutiini FJARJ

on listattu tämän liitteen liitteinä.



## ALIRUTIINI QYPSN

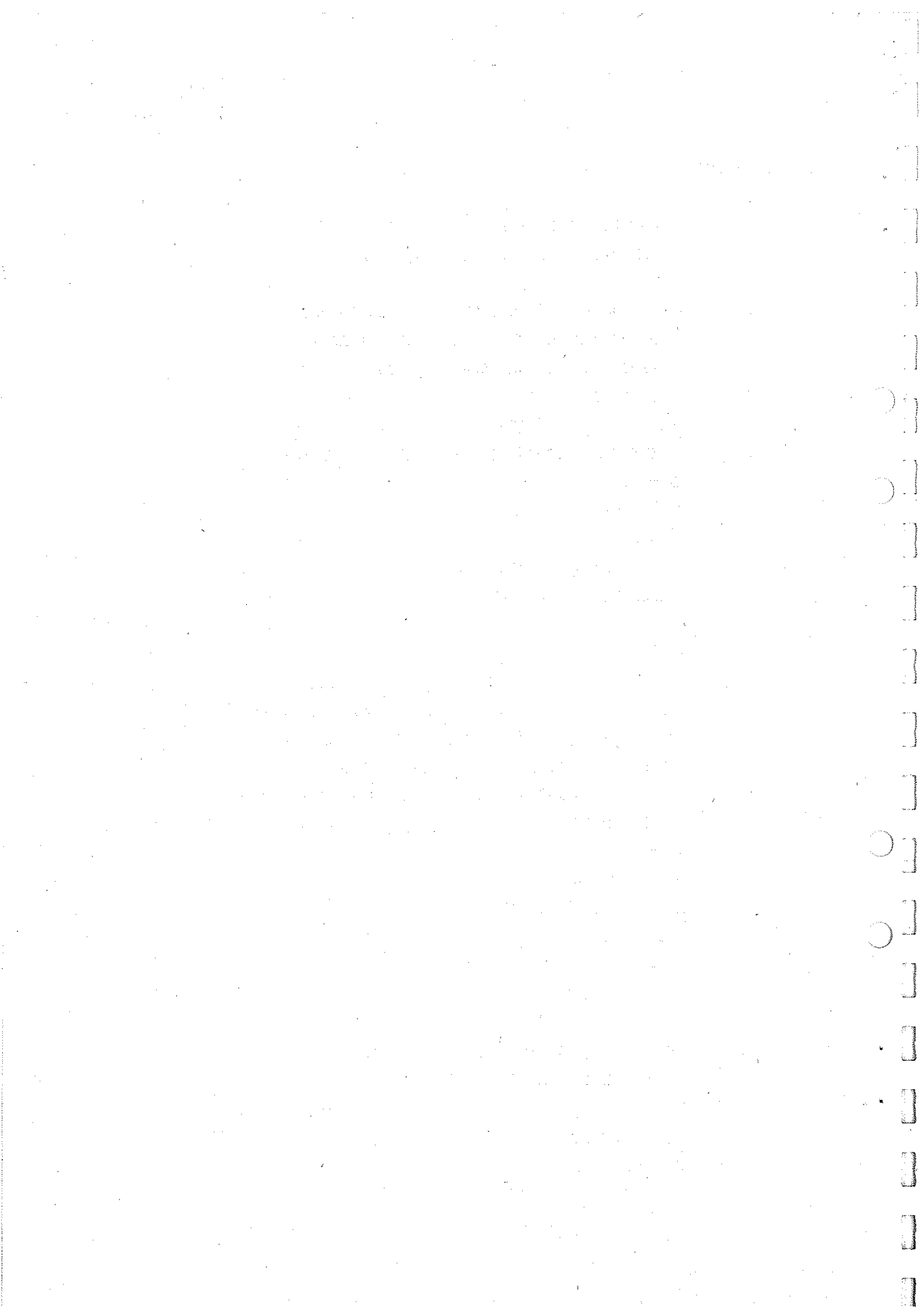
```
SUBROUTINE QYPSN (X,NR,Q,Y)
DOUBLE PRECISION X,Y,Q,FAC
DIMENSION X(1),Y(1)
C SUORITTAAN YLEISTETYN POISSON-JAKAUTUMAN LASKENNAN
C LÄHTÖLUKUINA JONO X, JOSSA 2**NR ALKIOTA
C KUVATEN TASAVÄLEIN 0:STA ALKAEN
C YKSITTÄISVAHINGON PISTETODENNÄKÖISYYKSIÄ
C Q ON VAHINKOJEN LUKUMÄÄRÄN ODOTUSARVO
C TULOKSENA X YLEISTETYN POISSON-JAKAUTUMAN
C KERTYMÄFUNKTIO LUVUSTA 1 VÄHENNETTYNÄ
C Y ON 2**NR-ALKIOINEN TYÖTILAJONO
N = 2**NR
C PUOLET LÄHTÖJONOSTA X JONOON Y
NM = N/2
DO 1 J = 1,NM
JJ = J + NM
Y(J) = X(J)
1 Y(JJ) = 0.
C YLEISTETYN POISSON-JAKAUTUMAN PISTETODENNÄKÖISYYKSIEN
C FOURIER-KEHITELMÄN MUODOSTAMINEN
CALL FRIER(X,Y,NR)
CALL FJARJ(X,Y,NR)
CALL GENER(X,Y,Q,N)
C YLEISTETYN POISSON-JAKAUTUMAN PISTETODENNÄK.
CALL FRIER(X,Y,NR)
CALL FJARJ(X,Y,NR)
C KERROIN JA 1.-KERTYMÄN MUODOSTUS
FAC = N
FAC = DEXP(-Q/2.)/FAC
X(1) = 1.-FAC*Y(1)
DO 2 J = 2,NM
2 X(J) = X(J-1)-FAC*Y(J)
NM = NM + 1
DO 3 J = NM,N
3 X(J) = X(J-1)-FAC*X(J)
RETURN
END
```





## ALIRUTIINI FRIER

```
SUBROUTINE FRIER(X,Y,NR)
DOUBLE PRECISION X,Y,WR,WI,AR,AI, FN
DIMENSION X(1), Y(1)
C NOPEA FOURIER-MUUNNOS 2**NR ALKION JONOLLE
C TULOS MUODOSTUU SYÖTTÖJONON X,Y PAIKALLE
C BITTIKÄÄNTEISESSÄ JÄRJESTYKSESSÄ
C X(K) ON REAALIOSA
C Y(K) ON IMAGINÄÄRIOSA
C RUTIININ SUORITUSAIKAISTEN VAKIOIDEN ASETUS
AR = 1.
N = 2**NR
FN = N
FN = 8.*DATAN(AR)/FN
C LÄHTÖJONON KONJUGOINTI
DO 1 M = 1,N
1 Y(M) = -Y(M)
C ALGORITMIASKELLUS, SUORITETAAN NR KERTAA
C ASKELEEN SISÄLLÄ KAKSI SISÄKKÄISTÄ SILMUKKAA
C NN ON SISIMMÄSSÄ SILMUKASSA SAMAAAN AIKAAN
C KÄSITELTÄVIEN ALKIOIDEN INDEKSIEN EROTUS,
C JOKA MÄÄRÄYTYY KULLEKIN ALGORITMIASKELEELLE
C ERIKSEEN
NV = N
DO 1 M = 1,NR
C ASKELEEN SISÄINEN ULOMPI SILMUKKA
NASK = NV
NV = NV/2
DO 2 NN = 1,N,NASK
NU = NN-1
C KERROIN WR+I*WI ON VAKIO, KUNNES NU MUUTTUU
WI = NBITV(NU/NV,NR)
WI = FN*WI
WR = DCOS(WI)
WI = DSIN(WI)
```



C SISIMMÄSSÄ SILMUKASSA INDEKSI JUOKSEE

C ARVOSTA NN ARVOON NU+NV

N2 = NU+NV

DO 2 K = NN,N2

KV = K+NV

AR = WR\*X(KV)-WI\*Y(KV)

AI = WR\*Y(KV)+WI\*X(KV)

X(KV) = X(K)-AR

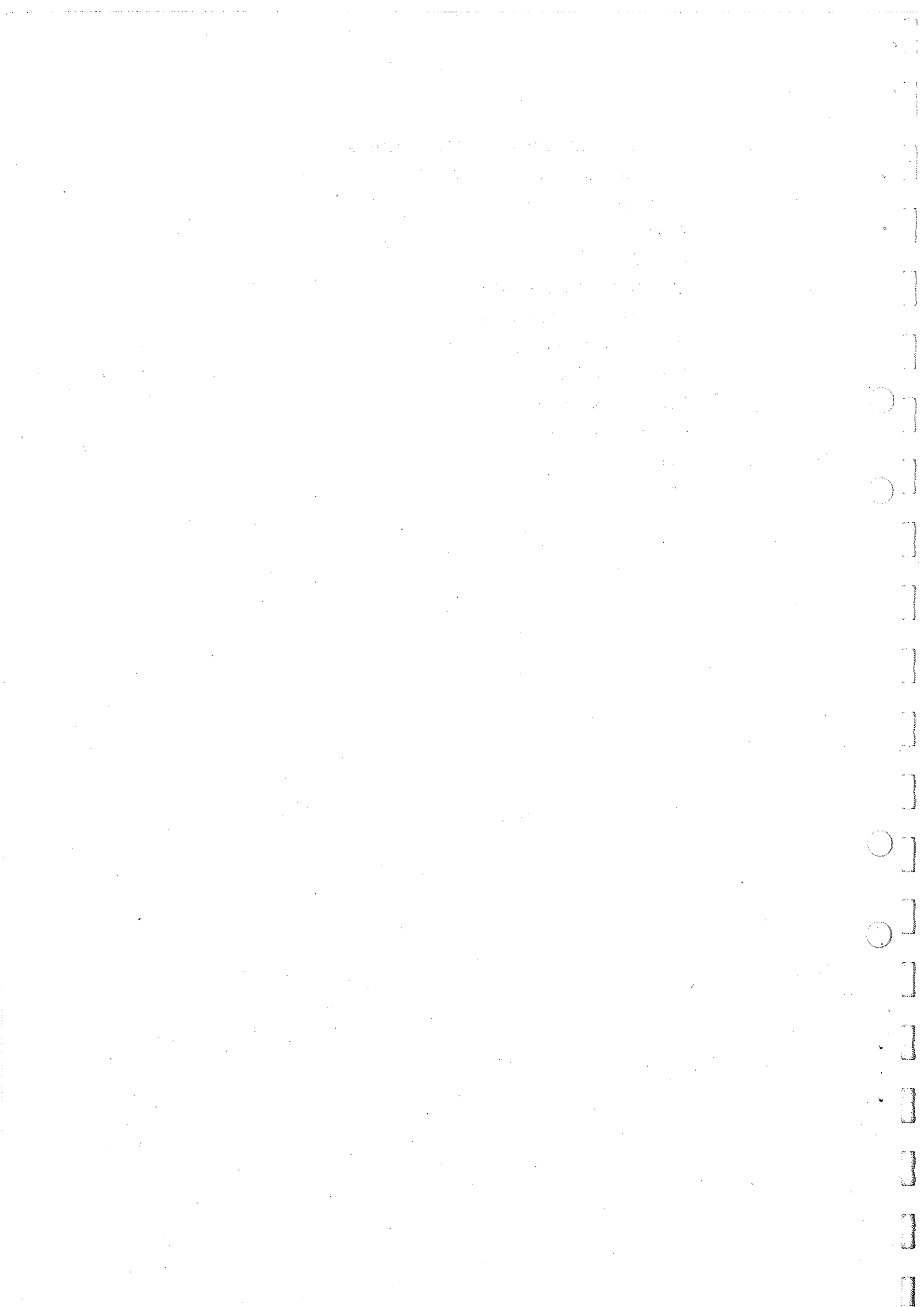
Y(KV) = Y(K)-AI

X(K) = X(K) + AR

2 Y(K) = Y(K) + AI

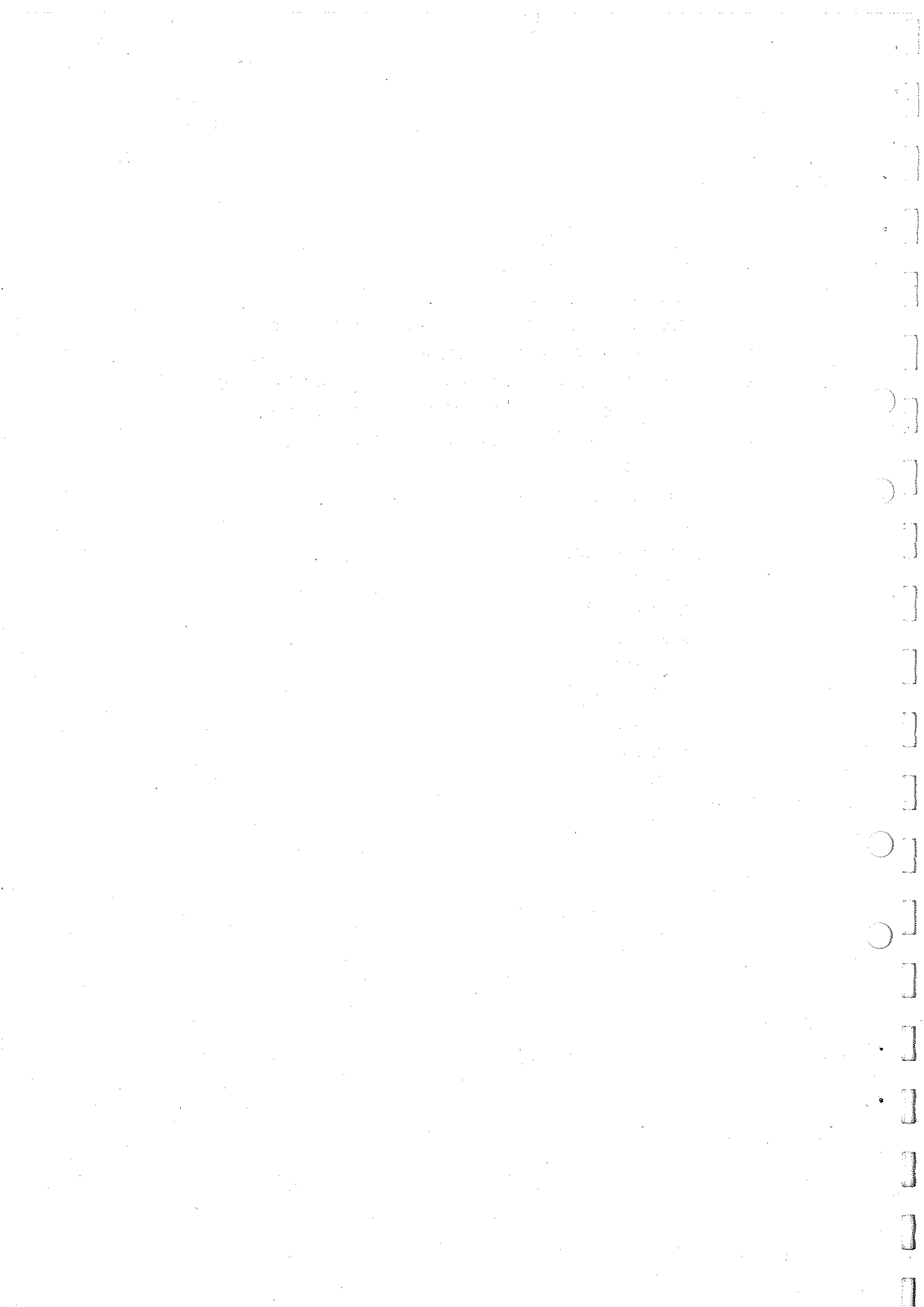
RETURN

END



ALIRUTIINI FJARJ

```
SUBROUTINE FJARJ(X,Y,NR)
DOUBLE PRECISION A,X,Y
DIMENSION X(1), Y(1)
C      MUUTTAA JONOJEN X JA Y ALKIOIDEN JÄRJESTYKSEN
C      INDEKSIÄ K TULEE VASTAAMAAN INDEKSI, JOKA SAADAAN
C      KUN LUKU K-1 ESITETÄÄN NR-BITTISENÄ BINÄÄRILUKUNA
C      JA VAIHDETAAN BITTIEN JÄRJESTYS KÄÄNTEISEKSI
C      SEKÄ LISÄTÄÄN MUODOSTUNEESSEN LUKUUN 1
      N = 2**NR-1
      DO 2 K = 2,N
        J = 1 + NBITV(K-1,NR)
        IF (J-K) 2,2,1
1      A = X(K)
        X(K) = X(J)
        X(J) = A
        A = Y(K)
        Y(K) = Y(J)
        Y(J) = A
2      CONTINUE
      RETURN
      END
```



## FUNKTIO NBITV

```
FUNCTION NBITV (K,N)
C   OTTAA VASTAAN LUVUN K
C   MUUNTAAN SEN N-BITTISEKSI BINÄÄRILUVUKSI
C   VAIHTAA BITTIEN JÄRJESTYKSEN KÄÄNTEISEKSI
C   ANTAA TULOKSENA SAADUN LUVUN ARVON
NBITV = 0
J = K
DO 1 L = 1,N
M = J/2
NBITV = 2*NBITV + J-2*M
1 J = M
RETURN
END
```

