Riskiteoria 16.12.1970 klo 10-14

1. Vakuutusyhtiön vuotuisen korvausmenon vinous on γ_1 ja vuotuinen rauniotodennäköisyys ε_0. Yhtiölle tarjotaan vakuutettavaksi aikaisemmasta liikkeestä stokastisesti riippumatonta laivaa täystuhon varalta (ts. vahingon sattuessa koko vakuutussumma erääntyy maksettavaksi ja vakuutus päättyy). Täystuhon todennäköisyys seuraavana vuonna on p ja lisäksi oletetaan, että uudesta vakuutuksesta saatava varmuuslisä on niin vähäinen, ettei sitä tarvitse ottaa laskelmassa huomioon. Alkuperäiseen liikkeeseen oletetaan voitavan soveltaa riittävällä tarkkuudella NP-menetelmää (vain kaksi ensimmäistä termiä). Korkoa ei oteta huomioon. Kuinka suuri suhteellinen osa alkuperäisen vuotuisen korvausmenon hajonnasta uuden vakuutuksen vakuutussumma korkeintaan saa olla, jos yhtiö jälleenvakuutukseen turvautumatta haluaa pitää vuotuisen rauniotodennäköisyyden $\leq \varepsilon$. (Ratkaisua ei tarvitse esittää suljetussa muodossa).

2. Olkoon yleistetyssä Poisson-prosessissa äärettömän pitkän ajan rauniotodennäköisyys $\psi = C\,e^{-RU}$. Merkitään $N = \lambda U/M$, missä λ on varmuuslisä ja M suurin mahdollinen vahinko. Osoitettava, että $(C/\psi)^a > e^N$, missä

$$a = \sum_{0}^{\infty} (2\lambda)^k/(k+2)!$$

3. Käytettäessä NP-menetelmän kahta ensimmäistä termiä yleistetyn Poisson-prosessin laskemisessa ensimmäinen poisjätetty termi

$$\frac{1}{24}\gamma_2(y^3-3y) - \frac{1}{36}\gamma_1^2(2y^3-5y)$$

antaa arvion virheen suuruusluokasta. Osoitettava, että jos suurin mahdollinen vahinko on M ja korvausmenon hajonta σ, sanottu termi kerrottuna luvulla $72/y\,\gamma_1^2$ on rajojen

$$1-y^2 \quad \text{ja} \quad (10-\frac{9M}{\sigma\gamma_1}) - (4-\frac{3M}{\sigma\gamma_1})y^2$$

välissä.

4. Johda yleistetyn Poisson-funktion Edgeworth-kehitelmä (kaksi merkitsevintä termiä riittää).

Riskiteoria 2.2.1971 klo 16-20

1. Laskettava yleistetylle Poisson-prosessille äärettömän pitkän ajan rauniotodennäköisyyden eksplisiittinen lauseke (vararikkotesti suoritetaan aika-akselin jokaisessa pisteessä), kun alkupääoma on U, varmuuslisä λ ja yhden vahingon suuruuden jakaantumisfunktio $S(x) = 1 - e^{-ax}$. (Opastus: luennoilla todistetut lauseet saa olettaa tunnetuiksi.)

2. Oletetaan, että riskiprosessi on yleistetty Poisson-prosessi. Lisäksi oletetaan, että NP-menetelmä antaa vuotuisen korvausmenon jakaantumisfunktiolle $F(x)$ ainakin yhdellä äärellisellä x:n arvolla saman arvon, vaikka vaihtoehtoisesti käytettäisiin laskemisessa kehitelmän yhtä, kahta tai kolmea merkitsevintä termiä. Mikä on funktion $F(x)$ eksplisiittinen lauseke, kun vahinkojen vuotuisen lukumäärän odotusarvo on n ja vahingon keskisuuruus m. (Opastus: kolmanneksi merkitsevin termi NP-kehitelmässä on $\frac{1}{24} \gamma_2(y^3-3y) - \frac{1}{36} \gamma_1^2 (2y^3-5y)$)

3. Vakuutusyhtiö A, jonka kokonaiskorvausmeno on ξ, haluaa sopia jälleenvakuutusjärjestelystä funktionaalityyppistä jälleenvakuutusta käyttäen (so. A:n vastattavaksi jää määrä $R(\xi)$, missä R on ehdon $0 \leq R(x) \leq x$ $(x \geq 0)$ toteuttava funktio). Osoitettava, että jos nettojälleenvakuutusmaksu eli jälleenvakuuttajan maksettavaksi tulevan korvausmenon odotusarvo halutaan pitää ennalta annetun vakion suuruisena, Stop Loss-jälleenvakuutus $R_S(x) = \mathrm{Min}(x,M)$ (M vakio) minimoi A:n vastuulle jäävän korvausmenon hajonnan.

4. Oletetaan, että markkinoilla esiintyy joukko toisistaan riippumattomia riskejä, joissa kussakin yhden vahingon suuruuden

jakaantumisfunktio on sama kuin tehtävässä 1, ja joiden kunkin erikseen oletetaan muodostavan yleistetyn Poisson-prosessin. Kuinka suuren nimenomaan näiden riskien vakuuttamiseksi perustettavan yhtiön alkupääoman tulee olla, jos vaaditaan yhden vuoden rauniotodennäköisyyden joka tapauksessa olevan alle 1 %, kun varmuuslisä on 0,1 ja kun etukäteen ei tiedetä, kuinka paljon vakuutuksia yhtiön vakuutettavaksi tulee. Oletetaan, että yhtiön liikkeeseen voidaan soveltaa NP-menetelmää (kaksi merkitsevintä termiä). Yhtälön $\Phi(y) = 0{,}99$ ratkaisuna käytetään likiarvoa 2,3.

Riskiteoria 21.2.1973 klo 9-13

Huom. Tehtävissä 2 ja 3 oletetaan, että vakuutusyhtiön riskiprosessi on yleistetty Poisson-prosessin, jonka laskemisessa voidaan käyttää NP-kehitelmän kahta merkitsevintä termiä. Lainsäädännössä ajatellaan vaadittavan, että vakuutusyhtiöillä yhden vuoden raueniotodennäköisyys on korkeintaan ε = 0.001. Yhtälön $\Phi(y) = 0.999$ juurena käytetään arvoa $y = 3$.

1. Vakuutusyhtiölle X tarjoutuu tilaisuus fuusioon vakuutusyhtiön Y kanssa ja ratkaisun tekemiseksi on X:lle ilmoitettu eräitä tietoja Y:n vakuutuskannasta ja vakavaraisuudesta. Arvosteluperusteena pidetään vakuutusyhtiölain 6 §:n mukaista "vuotuisten riskimenojen todennäköisen vaihtelun ja toimintapääoman" suhdetta, minkä arvo ei saisi kasvaa fuusion johdosta.

Oletetaan, että mainitun suhteen lausekkeena voidaan pitää

$T = s/(A + kP)$, missä $P = mn = n \cdot \alpha_1$ ja $s^2 = n \cdot \alpha_2$ sekä A on toimintapääoma ja kP toimintapääoman "kartuttamistavoite" eli tietty kiinteä osa, k, vuoden riskimaksutulosta, millä pyritään vuodessa kasvattamaan toimintapääomaa. Yhtiöiden liikkeiden oletetaan olevan stokastisesti toisistaan riippumattomia.

Käytettävissä olevat tiedot:

	X	Y
n	50 000	10 000
α_1	1 000 mk	1 200 mk
α_2/α_1^2	10	20
A	10 milj.mk	2 milj.mk
k	0.04	0.01

Fuusioidussa yhtiössä pyritään seuraamaan X:n toimintapääoman kartuttamistavoitetta 0.04. Onko fuusio mainitun arvosteluperusteen nojalla hyväksyttävissä. Perustele. Miten ratkaisu muuttuu, jos Y-yhtiön toimintapääomalla A on muu arvo?

2. Oletetaan, että vakuutusyhtiöiden A ja B vakuutusliikkeet ovat riskiominaisuuksiltaan ja vakuutusmaksuiltaan muutoin samanlaiset, paitsi, että yhtiön B liikkeen volyymi on nelinkertainen yhtiön A volyymiin verrattuna. Edelleen oletetaan, että yhtiöillä on tilinpäätöksessä yhtä suuret omat pääomat, jotka juuri ja juuri toteuttavat lainsäädännössä asetetut minimivaatimukset. Osoita, että tehdyillä oletuksilla yhtiöllä A varmuuslisä on liikkeen hajonnan suuruinen.

3. Johda vakuutusyhtiön omien pääomien vähimmäismäärälle U raja, joka on riippumaton liikkeen volyymista ja vaarallisuudesta. Vahingon suuruuden yläraja M ja varmuuslisäkerroin λ (>0) oletetaan tunnetuiksi.

4. Yhtiö haluaa pienentää jälleenvakuutuksen avulla riskiliikkeensä vuotuisen hajonnan arvosta σ arvoon σ'. Mitä jälleenvakuutusjärjestelyä on edullisinta käyttää, jos kysymykseen tulevia jälleenvakuuttajia on N kpl ja jos jälleenvakuuttajalla i jälleenvakuutusmaksu on jälleenvakuuttajan saaman liikkeenosan odotusarvo lisättynä kuormituksella $f_i(\sigma_{jv})$, missä f_i on monotonisesti kasvava funktio ja σ_{jv} on jälleenvakuuttajalle tulevan liikkeen osan hajonta. Tehtävässä oletetaan, että liikettä ei voi jakaa useamman jälleenvakuuttajan kesken.

Riskiteoria 26.4.1974 klo 9-15.

1. Vahinkovakuutusyhtiön vuotuisen vahinkomenon jakautumisfunktio on yleistetty Poisson-jakautuma, mutta niin vino ($\gamma_1 = 2{,}5$), ettei tavanomaisia tasoitusvarauksen rajojen laskemismenetelmiä voida käyttää. Tämän takia pyritään määräämään tasoitusvarauksen alaraja T_{min} suoraan määrittelevästä yhtälöstä

$$P\{1{,}05\,(T_{min} + L + U) + \sqrt{1{,}05}\,(P - x) \geqq 0\} = 0{,}99,$$

jossa L on luottovakuutuksen korvausrahaston tuntemattomien varaus, U yhtiön omat varat, P riskimaksutulo ja x korvausmeno. Oletetaan, että kokonaisvahinkomenon jakautumisfunktio voidaan riittävällä tarkkuudella approksimoida epätäydellisellä gammafunktiolla

$$\gamma_\lambda(ax) = \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{ax} z^{\lambda-1} e^{-z}\,dz ,$$

jonka arvot $\gamma_\lambda(ax) = p$ voidaan laskea χ^2-jakautuman fraktiileista vapausasteiden lukumäärän ollessa $f = 2\lambda$, kun $ax = \frac{1}{2}\chi^2_p \approx \frac{1}{4}\left(\sqrt{2f-1} + u_p\right)^2$, missä u_p on normaalijakautuman vastaava fraktiili.

Laske~~ma~~ T_{min} , kun vahinkojen vuotuisen lukumäärän keskiarvo n = 200, yhden vahingon suuruuden jakautumisfunktion keskiarvo $\alpha_1 = 5000$ mk ja toinen momentti $\alpha_2 = 10^9$ mk^2 sekä L = 0 ja U = 200 000 mk ($u_{99\%} = 2{,}3$).

2. Olkoon yhtiön kokonaiskorvausmenon jakaantumisfunktio F(x) ja todennäköisyys sille, että vuoden aikana ei satu lainkaan

vahinkoja, ε . Yhtiölle tarjotaan aikaisemmasta liikkeestä riippumatonta jälleenvakuutusliikettä, jossa kokonaiskorvauksen jakaantumisfunktion voidaan olettaa noudattavan yleistettyä Poisson-jakaantumaa. Tarjotusta liikkeestä oletetaan lisäksi seuraavaa: Vahinkojen lukumäärän odotusarvo on n, vahinkojen keskisuuruus m ja kokonaiskorvausmenon hajonta $m\sqrt{n}$. Oletetaan vihdoin, että jos yhtiö hyväksyy tarjouksen, todennäköisyys sille, että yhtiön vuotuinen kokonaiskorvausmeno ylittää määrän m, on p. Laske F(m).

3. Vakuutusyhtiön vuotuisen vahinkomenon jakautumisfunktio on F(z), vuotuinen riskimaksutulo P ja omat varat U. Johda integraalimuodossa oleva lauseke todennäköisyydelle, että omat varat vuoden kuluttua ovat ≥ 0 ja kahden vuoden kuluttua $\geq x$ (> 0).

4. Rauniotodennäköisyydelle saadaan määrätyin oletuksin yläraja e^{-RU}, missä U on alkupääoma ja R määräytyy yhtälöstä, jossa esiintyy varmuuslisä λ, kokonaiskorvausmenon jakaantumisfunktio sekä sanotun korvausmenon odotusarvo P. Oletetaan, että NP- kehitelmän lyhyt muoto (so. kaava, joka sisältää vinouden γ_1, mutta ei huipukkuutta) antaa riittävän tarkan approksimaation vuotuiselle korvausmenolle. Johda vakion R laskemiseksi kaava, joka sisältää vain alkeisfunktioita sekä parametrit R, λ, P, γ_1 ja σ (= kokonaiskorvausmenon hajonta).

Riskiteorian koe 24.1.1975 klo 9-15.

1. Vakuutusyhtiön riskiprosessina on yleistetty Poisson-prosess, jossa yhden vahingon suuruuden jakaantumafunktio on

$$S(x) = 1 - e^{-\frac{x}{m}} .$$

Yhtiö jälleenvakuuttaa riskinsä yksittäisylivahinkojälleenvakuutuksella käyttäen jokaisessa vahingossa samaa omavastuuta. Millä ehdolla ensivakuuttajan ja jälleenvakuuttajan vahinkomenojen varianssien summa on minimi? Mikä on tämän minimin suhde maksimiin?

2. Palovakuutuskantaan liitetään uusi vakuutuskohde, jonka vakuutusmäärä on 100 milj.mk. Yhtiön vapaiden varojen määrä on mitoitettu siten, että todennäköisyys sille, että ne menetetään yhden vuoden korvauksien perusteella, on 0.01. Minkä määrän uudesta vakuutuskohteesta voi yhtiö pitää omalla vastuullaan, jos tällaisen vahingon vuotuinen sattumistodennäköisyys on 0.01, uuden kohteen ja vanhan kannan vakuutusmaksujen varmuuslisä on 5 %, eikä vapaiden varojen menettämistodennäköisyys saa kasvaa. Sekä vanhan että uuden kannan katsotaan noudattavan yleistettyä Poissonjakautumaa, jota voidaan approksimoida normaalijakautumalla. Vanhan kannan vuotuisten vahinkojen lukumäärän odotusarvo on 2000 ja $\alpha_2 = 5 \cdot 10^{10} (\text{mk})^2$
(Yhtälön $\bar{\Phi}(-y) = 0,01$ juuri on $y = 2,3$)

3. Kaksi vakuutusyhtiötä, joiden vakuutuskannat ovat toisistaan riippumattomia, haluavat vaihtaa osamääräjälleenvakuutusta keskenään, niin ettei kummankaan vakuutusmaksutulo kasva, mutta molempien kokonaisvahinkomenon varianssi pienenee. Osoita miten jälleenvakuutussuhteet on valittava. Millä ehdolla on ratkaisuja?

4. Oletetaan, että hetken 0 jälkeen sattuvien vahinkojen lukumäärä on stokastinen prosessi, jonka inkrementit ovat riippumattomia ja joka lisäksi toteuttaa seuraavat ehdot:

1) samalla hetkellä ei voi sattua useampaa kuin yksi vahinko,
2) äärellisellä aikavälillä voi sattua ääretön määrä vahinkoja vain todennäköisyydellä 0,
3) funktio $P_0(t)$ (todennäköisyys, että puolisuljetulla välillä $(0, t]$ ei satu yhtään vahinkoa) on jatkuva t:n funktio, joka $\rightarrow 0$, kun $t \rightarrow \infty$.

Johda välillä $(0, t]$ sattuvien vahinkojen lukumäärän jakaantuma, kun Poisson-jakaantuman ominaisuudet oletetaan tunnetuksi.

5. Laske stop loss jälleenvakuutuksen nettomaksu olettaen, että kokonaisvahinkomenon jakautumana voi käyttää yleistettyä Poisson-jakautumaa. Tehtävä on ratkaistava

a) käyttäen NP-menetelmää,
b) käyttäen Esscherin kaavaa.

Kehitelmistä otetaan mukaan kahta merkitsevintä kertalukua olevat termit.

Riskiteoria 16.12.1970

1. Olkoon P riskimaksu/tulo, σ vuotuisen korvausmenon hajonta ja λ varmuuslisä alkuperäisessä liikkeessä sekä $b\sigma$ uuden vakuutuksen vakuutussumma. NP-menetelmässä on $F(x) = \phi(y)$, jos

$$\frac{x - P}{\sigma} = y + \frac{\gamma_1}{6}(y^2 - 1), \text{ missä } \gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}.$$

Yhtiön omat varat saadaan kaavasta

$$U = (y_{\varepsilon_0} + \frac{\gamma_1}{6}(y_{\varepsilon_0}^2 - 1))\sigma - \lambda P.$$

Uuden vakuutuskohteen korvausmenon odotusarvo on $pb\sigma$ ja varianssi $pb^2\sigma^2 - p^2b^2\sigma^2 = pb^2\sigma^2(1-p)$. Yhdistetyn liikkeen korvausmenon varianssi on tällöin $\sigma^2 + pb^2\sigma^2(1-p)$, koska laivan täystuho on stokastisesti riippumaton yhtiön aikaisemmasta liikkeestä. Kolmas keskipistemomentti on

$$\mu_3 + pb^3\sigma^3 - 3p^2b^3\sigma^3 + 3p^3b^3\sigma^3 - p^3b^3\sigma^3 =$$

$$\gamma_1\sigma^3 + pb^3\sigma^3(1 - 3p + 2p^2).$$

Uuden vakuutuskohteen liittämisen jälkeen saadaan siis

$$U \geq (y_\varepsilon + \frac{(\gamma_1\sigma^3+pb^3\sigma^3(1-3p+2p^2))(y_\varepsilon^2-1)}{6(\sigma^2+pb^2\sigma^2(1-p))^{3/2}})\sqrt{\sigma^2+pb^2\sigma^2(1-p)} - \lambda P$$

$$= (y_\varepsilon\sqrt{1+pb^2(1-p)} + \frac{(\gamma_1+pb^3(1-3p+2p^2))(y_\varepsilon^2-1)}{6(1+pb^2(1-p))})\sigma - \lambda P.$$

Vähentämällä edellä oleva U:n kaava tästä epäyhtälöstä saadaan seuraava epäyhtälö b:n ratkaisemiseksi

$$y_\varepsilon\sqrt{1+pb^2(1-p)} + \frac{(\gamma_1+pb^3(1-3p+2p^2))(y_\varepsilon^2-1)}{6(1+pb^2(1-p))} - y_{\varepsilon_0} - \frac{\gamma_1}{6}(y_{\varepsilon_0}^2-1) \leq 0.$$

2. Osoitettava epäyhtälö voidaan kirjoittaa muotoon $e^{RUa} > e^{\lambda U/M}$, joten todistettavaksi jää että $RM > \lambda/a$. Olkoon ξ kokonaisvahinkomeno, η ylijäämä ja n vahinkojen lukumäärän keskiarvo. Tällöin on $\eta = (1+\lambda)P - \xi$, missä $P = n\alpha_1$. R määräytyy yhtälöstä

$$1 = E\left[e^{-R\eta}\right] = e^{-(1+\lambda)PR}\, E\left[e^{R\xi}\right] \text{ eli}$$

$$e^{(1+\lambda)PR} = E\left[e^{R\xi}\right] = \exp\left(n\int_0^\infty e^{Rz}dS(z) - n\right), \text{ mistä saadaan}$$

$$1 + (1+\lambda)\alpha_1 R = \int_0^\infty e^{Rz}dS(z).$$

Nyt on

$$1 + (1+\lambda)R'M = e^{R'M} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(R'M)^k}{k!}, \text{ kun kaikki vahingot ovat}$$

yhtä suuret ja = M. Tästä saadaan

$$\lambda R'M = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(R'M)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(R'M)^{k+2}}{(k+2)!} = (R'M)^2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(R'M)^k}{(k+2)!} \quad \text{eli}$$

$$\lambda/R'M = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(R'M)^k}{(k+2)!} < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2\lambda)^k}{(k+2)!}, \text{ koska}$$

$$1 + (1+\lambda)R'M = e^{R'M} > 1 + R'M + \frac{(R'M)^2}{2} \text{ eli } R'M < 2\lambda.$$

Epäyhtälö $R'M > \lambda/a$ on siis voimassa siinä tapauksessa että kaikki vahingot = M. Se on kuitenkin voimassa kaikissa jakautumissa, koska

$$1 + (1+\lambda)\alpha_1 R = \int_0^\infty e^{Rz}dS(z) = \int_0^\infty \sum_{j=0}^{\infty}\frac{(Rz)^j}{j!}dS(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{R^j}{j!}\alpha_j \text{ eli}$$

$$\lambda = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{\alpha_j}{\alpha_1 j!}R^{j-1} \text{ ja vastaavasti } \lambda = \sum_{j=2}^{\infty}\frac{\alpha_j'}{\alpha_1' j!}(R')^{j-1} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(R'M)^j}{(j+1)!}$$

mutta

$$\alpha_j = \int_0^\infty z^j dS(z) \le M\int_0^\infty z^{j-1}dS(z) \le \ldots \le M^{j-1}\alpha_1, \text{ jota}$$

sijoittamalla saadaan

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(RM)^j}{(j+1)!} \ge \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(R'M)^j}{(j+1)!}, \text{ mistä seuraa että } R \ge R' \text{ ja siis}$$

$RM > \lambda/a$.

3. Merkitään

$$A = \frac{72}{y\gamma_1^2}\left(\frac{1}{24}\gamma_2(y^3-3y) - \frac{1}{36}\gamma_1^2(2y^3-5y)\right)$$
$$= \frac{3\gamma_2}{\gamma_1^2}(y^2-3) - 2(2y^2-5).$$

Nyt on

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1^2} = \frac{\alpha_4}{n\alpha_2^2}\cdot\frac{n\alpha_2^3}{\alpha_3^2} = \frac{\alpha_4\alpha_2}{\alpha_3^2} \geq 1,$$ koska olkoon ξ_1 ja ξ_2 kaksi toisistaan riippumatonta satunnaismuuttujaa joiden jakautumat ovat samat ja nollapistemomentit $= \alpha_j$. Tällöin on

$$2(\alpha_{j-1}\alpha_{j+1}-\alpha_j^2) = E\left[\xi_1^{j-1}\xi_2^{j+1}\right] + E\left[\xi_1^{j+1}\xi_2^{j-1}\right] - 2E\left[\xi_1^j\xi_2^j\right]$$
$$= E\left[(\xi_1\xi_2)^{j-1}(\xi_1-\xi_2)^2\right] \geq 0.$$

Siis

$$A \geq 3(y^2-3) - 2(2y^2-5) = 1 - y^2, \text{ jos } y^2 \geq 3.$$

Lauseke

$$10 - \frac{9M}{\sigma\gamma_1} - \left(4 - \frac{3M}{\sigma\gamma_1}\right)y^2 - A$$ voidaan kirjoittaa muotoon

$$\frac{3}{\gamma_1}(y^2 - 3)\left(\frac{M}{\sigma} - \frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right).$$

Nyt on

$$\frac{\gamma_2}{\gamma_1} = \frac{\alpha_4}{n\alpha_2^2}\cdot\frac{\alpha_2\sqrt{n\alpha_2}}{\alpha_3} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3\sqrt{n\alpha_2}} = \frac{\alpha_4}{\alpha_3\sigma} \leq \frac{M\alpha_3}{\alpha_3\sigma} = \frac{M}{\sigma},$$ koska

$$\alpha_4 = \int_0^\infty x^4 dS(x) \leq M\int_0^\infty x^3 dS(x) = M\alpha_3.$$

Siis

$$A \leq 10 - \frac{9M}{\sigma\gamma_1} - \left(4 - \frac{3M}{\sigma\gamma_1}\right)y^2, \text{ jos } y^2 \geq 3.$$

Jos $y^2 < 3$, vaihtavat ala- ja yläraja paikkaa joten A on aina mainittujen rajojen välissä.

4. Oletetaan että funktiolla $G(x)$:llä on derivaatat ja että $G^{(k)}(\pm\infty) = 0$ kun $k \geq 1$. Silloin on funktion $G(x)$:n k:nnen derivaatan karakteristinen funktio

$$\varphi_k(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} dG^{(k)}(x) = \Big/_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} G^{(k)}(x) - is \int_{-\infty}^{+\infty} e^{isx} dG^{(k-1)}(x)$$

$$= - is\,\varphi_{k-1}(s) = \ldots = (-is)^k \varphi_0(s)$$

Koska normaalijakautuma

$$\phi(x;m,\sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z-m}{\sigma}\right)^2} dz = \phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

täyttää nämä ehdot, sen k:nnen derivaatan karakteristinen funktio on

$$\varphi_k(s;m,\sigma) = (-is)^k \varphi_0(s;m,\sigma) \text{ , missä}$$

$$\varphi_0(s;m,\sigma) = \exp(ism - \frac{s^2\sigma^2}{2}).$$

$$\phi^{(k)}(x;m,\sigma) = \sigma^{-k} \phi^{(k)}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$$

Yleistetyn Poisson-jakautuman karakteristinen funktio on $\varphi(s) = e^{n\psi(s)-n}$, missä ψ on yhden vahingon suuruuden jakautumafunktion karakteristinen funktio.

$$\psi(s) = \sum_{k=0}^{N} \psi^{(k)}(0) \frac{s^k}{k!} + R_N \qquad \text{(Taylorin kehitelmä)}$$

$$\psi^{(k)}(0) = i^k \alpha_k \quad \text{ja täten}$$

$$\psi(s) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(is)^k}{k!} \alpha_k + R_N$$

Tästä saadaan

$$\varphi(s) = \exp(n(\sum_{k=0}^{N} \frac{(is)^k}{k!} \alpha_k + R_N - 1))$$

$$= \exp(in\alpha_1 s - \tfrac{1}{2}n\alpha_2 s^2)\exp(n(\sum_{k=3}^{N} \frac{(is)^k}{k!}\alpha_k + R_N))$$

$$= \varphi_0(s;n\alpha_1,\sqrt{n\alpha_2})\cdot(1 + \frac{n\alpha_3}{6}(is)^3 + \ldots + R_N'')$$

Tästä saadaan

$$F(x) = \phi(x;n\alpha_1,\sqrt{n\alpha_2}) - \frac{n\alpha_3}{6}\phi^{(3)}(x;n\alpha_1,\sqrt{n\alpha_2}) + \ldots + R_N'''$$

$$= \phi(\frac{x-n\alpha_1}{\sqrt{n\alpha_2}}) - \frac{\alpha_3}{6\alpha_2\sqrt{n\alpha_2}}\ \phi^{(3)}(\frac{x-n\alpha_1}{\sqrt{n\alpha_2}})$$

Poisjätetyt termit ovat muotoa $Cn^i\phi^{(j)}$, missä $i \leq -1$ ja C on n:stä riippumaton.

Riskiteoria 2.2.1971

1. Rauniotodennäköisyys $\psi_\infty = C(U)\, e^{-RU}$.
Olkoon ξ kokonaisvahinkomeno, η ylijäämä ja n vahinkojen lukumäärän keskiarvo. Tällöin $\eta = (1+\lambda)P - \xi$, jossa $P = n\alpha_1$ = riskimaksutulo.

$$\alpha_1 = \int_0^\infty z dS(z) = \int_0^\infty z a e^{-az} dz = \frac{1}{a}\int_0^\infty t e^{-t} dt = \frac{1}{a}$$

R saadaan yhtälöstä

$$1 = E\left[e^{-R\eta}\right] = e^{-(1+\lambda)PR} E\left[e^{R\xi}\right], \text{ josta saadaan}$$

$$e^{(1+\lambda)PR} = E\left[e^{R\xi}\right] = \int_0^\infty e^{Rx} dF(x) = \exp\left(n\int_0^\infty e^{Rz} dS(z) - n\right).$$

Tästä seuraa että

$$(1+\lambda)PR = n\int_0^\infty e^{Rz} dS(z) - n \quad \text{eli}$$

$$1 + (1+\lambda)\alpha_1 R = \int_0^\infty e^{Rz} dS(z) = a\int_0^\infty e^{-(a-R)z} dz = \frac{a}{a-R}.$$

Ratkaisemalla tämä yhtälö saadaan

$$R = \frac{a\lambda}{1+\lambda}$$

Nyt on

$$C(U) = \frac{1}{E\left[e^{-R(\omega_\nu + U)} \mid \nu < \infty\right]}, \text{ jossa } \omega_\nu = \sum_{i=1}^{\nu} \eta_i \quad (\eta_i \text{ on aika-}$$

välin i ylijäämä ja ν aikaväli jossa raunio tapahtuu).
Olkoon $\alpha = \omega_{\nu-1} + U > 0$. $\omega_\nu = \omega_{\nu-1} + \eta_\nu = \omega_{\nu-1} - \zeta = \alpha - U - \zeta$, jossa ζ = yhden vahingon suuruus. Tämä johtuu siitä, että $\eta_\nu \to -\zeta$, kun tarkasteltavan aikavälin pituus $\to 0$. Satunnaismuuttujan ζ jakautumisfunktio on

$$P\{\zeta \le x \mid \zeta \ge \alpha\} = \frac{S(x) - S(\alpha)}{1 - S(\alpha)} = 1 - e^{-a(x-\alpha)}.$$

Tästä saadaan

$$E\left[e^{-R(\omega_\nu+U)} \mid \nu<\infty\right]$$

$$= E\left\{e^{-R\alpha} E\left[e^{R\zeta} \mid \zeta \geq \alpha\right]\right\}$$

Nyt on

$$E\left[e^{R\zeta} \mid \zeta \geq \alpha\right] = \int_\alpha^\infty e^{Rx} a e^{-a(x-\alpha)} dx = ae^{a\alpha} \int_\alpha^\infty e^{-x(a-R)} dx$$

$$= \frac{a}{a-R} e^{\alpha R} ,$$

joten

$$E\left[e^{-R(\omega_\nu+U)} \mid \nu<\infty\right] = E\left[e^{-R\alpha} \frac{a}{a-R} e^{\alpha R}\right] = \frac{a}{a-R} .$$

ja siis

$$C(U) = \frac{a-R}{a} = \frac{1}{1+\lambda} .$$

Ylläolevasta saadaan

$$\psi_\infty = \frac{1}{1+\lambda} e^{-a\lambda U/(1+\lambda)} .$$

2. NP-menetelmän mukaan on $F(x) = \phi(y)$, jos

$$\frac{x-mn}{\sqrt{n\alpha_2}} = y + \frac{\gamma_1}{6}(y^2-1) + \frac{\gamma_2}{24}(y^3-3y) - \frac{\gamma_1^2}{36}(2y^3-5y), \text{ missä } \gamma_1 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2\sqrt{n\alpha_2}} \text{ ja}$$

$$\gamma_2 = \frac{\alpha_4}{n\alpha_2^2}$$

Kysymyksessä olevalla x:n arvolla on siis

$$\frac{\gamma_1}{6}(y^2-1) = \frac{\gamma_2}{24}(y^3-3y) - \frac{\gamma_1^2}{36}(2y^3-5y) = 0 \text{ , mistä seuraa}$$

$y = \pm 1$ ja $\gamma_1^2 = \gamma_2$ eli $\alpha_4\alpha_2 = \alpha_3^2$. Vahingon suuruus on tällöin vakio = m. Olkoon nimittäin ξ_1 ja ξ_2 kaksi riippumatonta positiivista satunnaismuuttujaa, joilla on samat nollapistemomentit α_k kuin yllä. Silloin on

$$0 = 2(\alpha_2\alpha_4 - \alpha_3^2) = E\left[(\xi_1\xi_2)^2(\xi_1 - \xi_2)^2\right] \text{ eli } \xi_1 = \xi_2 = m$$

todennäköisyydellä 1. Tästä seuraa, että

$$F(x) = \sum_0^{[x/m]} e^{-n} \frac{n^k}{k!}$$

3. Olkoon $P = E[\xi - R(\xi)]$ = vakio, alkuperäisen kokonaisvahinkomenon jakautumisfunktio = $F(x)$ sekä $P_1 = E[\xi] - P$. Tällöin on osoitettava, että $V_R \geq V_{R_S}$, kun R on mikä tahansa funktio, joka täyttää ehdon $0 \leq R(x) \leq x$. Nyt on

$$V_R+P_1^2 = \int_0^\infty R^2(x)dF(x) = \int_0^\infty (R(x)-M)^2 dF(x) + 2MP_1 - M^2$$

$$\geq \int_0^M (R(x)-M)^2 dF(x) + 2MP_1 - M^2$$

$$\geq \int_0^M (x-M)^2 dF(x) + 2MP_1 - M^2$$

$$= \int_0^\infty (R_S(x)-M)^2 dF(x) + 2MP_1 - M^2$$

$$= V_{R_S} + P_1^2 \text{ , siis}$$

$$V_R \geq V_{R_S}.$$

4. NP-menetelmän mukaan on $F(x) = \phi(y)$, jos

$$\frac{x-n\alpha_1}{\sqrt{n\alpha_2}} = y + \frac{\gamma_1}{6}(y^2-1), \text{ missä } \gamma_1 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2\sqrt{n\alpha_2}} .$$

Alkupääoman vähimmäismäärä on

$$U = (y_\varepsilon + \frac{\gamma_1}{6}(y_\varepsilon^2 - 1))\sqrt{n\alpha_2} - \lambda n\alpha_1$$

$$= y_\varepsilon\sqrt{n\alpha_2} + \frac{\alpha_3}{6\alpha_2}(y_\varepsilon^2 - 1) - \lambda n\alpha_1 \text{ , missä } \varepsilon = 0{,}01.$$

Nyt on

$$\alpha_1 = \int_0^\infty xae^{-ax}dx = \frac{1}{a}\int_0^\infty te^{-t}dt = \frac{1}{a} ,$$

$$\alpha_2 = \int_0^\infty x^2ae^{-ax}dx = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty t^2e^{-t}dt = \frac{2}{a^2} \text{ ja}$$

$$\alpha_3 = \int_0^\infty x^3 a e^{-ax} dx = \frac{1}{a^3}\int_0^\infty t^3 e^{-t} dt = \frac{6}{a^3}\ ,$$ joita sijoittamalla

saadaan

$$U = y_\varepsilon \sqrt{n}\ \frac{\sqrt{2}}{a} + \frac{1}{2a}(y_\varepsilon^2 - 1) - \frac{\lambda n}{a}\ .$$

Tämän yhtälön pitää olla toteutettuna vaarallisimmalla n:n arvolla. Asettamalla U:n derivaatta n:n suhteen = 0 saadaan

$$y_\varepsilon \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{n}\ a} - \frac{\lambda}{a} = 0 \quad \text{eli} \quad \sqrt{n} = \frac{y_\varepsilon}{\lambda\sqrt{2}}\ .$$

Sijoittamalla tämä arvo saadaan alkupääoman vähimmäismääräksi

$$U_{min} = \frac{1}{2a}\left(\frac{y_\varepsilon^2}{\lambda} + y_\varepsilon^2 - 1 \right) \approx \frac{28{,}595}{a}\ .$$

<u>Riskiteoria 21.2.1973</u>

1. Ennen fuusiota yhtiön X suhdeluku on

$$T = \frac{\sqrt{n\alpha_2}}{A+kP} = \frac{\sqrt{50000\cdot 10\cdot 10^6}}{10\cdot 10^6+0,04\cdot 50000\cdot 1000} \approx 0,0589.$$

Koska fuusioitavien yhtiöiden liikkeet ovat toisistaan stokastisesti riippumattomat, suhdeluku tulee fuusion jälkeen olemaan

$$T = \frac{\sqrt{50000\cdot 10\cdot 10^6+10000\cdot 28,8\cdot 10^6}}{12\cdot 10^6+0,04\cdot 50000\cdot 1000+0,04\cdot 10000\cdot 1200} \approx 0,0613.$$

Fuusio ei siis ole hyväksyttävissä.
Yhtiön Y kriitillinen toimintapääoma A_y saadaan yhtälöstä

$$\frac{\sqrt{50000\cdot 10\cdot 10^6+10000\cdot 28,8\cdot 10^6}}{10\cdot 10^6+A_y+0,04\cdot 50000\cdot 1000+0,04\cdot 10000\cdot 1200} \approx 0,0589,$$

josta saadaan
$A_y \approx 2,59\cdot 10^6$

2. Merkitään U = yhtiöiden omat pääomat,
n ja $4n$=vahinkojen lukumäärien keskiarvo sekä
λ = varmuuslisä.

NP-menetelmässä on $F(x) = \phi(y_\varepsilon)$, jos

$$\frac{x - n\alpha_1}{\sqrt{n\alpha_2}} = y_\varepsilon + \frac{\alpha_3}{6\alpha_2\sqrt{n\alpha_2}}(y_\varepsilon^2 - 1).$$

Yhtiön A oman pääoman vähimmäismäärä saadaan kaavasta

$$U = \left(y_\varepsilon + \frac{\alpha_3}{6\alpha_2\sqrt{n\alpha_2}}(y_\varepsilon^2 - 1)\right)\sqrt{n\alpha_2} - \lambda n\alpha_1$$

ja yhtiön B kaavasta

$$U = \left(y_\varepsilon + \frac{\alpha_3}{6\alpha_2\sqrt{4n\alpha_2}}(y_\varepsilon^2 - 1)\right)\sqrt{4n\alpha_2} - \lambda 4n\alpha_1 .$$

Vähentämällä nämä yhtälöt toisistaan saadaan

$$y_\varepsilon\sqrt{n\alpha_2} - 3\lambda n\alpha_1 = 0$$

eli

$$\sqrt{n\alpha_2} = \lambda n\alpha_1 \ .$$

Toisin sanoen yhtiön A liikkeen hajonta = $\lambda\cdot$riskimaksutulo.

3. NP-menetelmän mukaan on $F(x) = \phi(y_\varepsilon)$, jos

$$\frac{x - P}{\sqrt{n\alpha_2}} = y_\varepsilon + \frac{\gamma_1}{6}(y_\varepsilon^2 - 1) \ , \text{ jossa } P = n\alpha_1 \text{ ja } \gamma_1 = \frac{\alpha_3}{\alpha_2\sqrt{n\alpha_2}}.$$

Nyt on

$$\alpha_i = \int_0^M z^i dS_M(z) \le M\int_0^M z^{i-1}dS_M(z) = M\alpha_{i-1} \ .$$

Omien pääomien vähimmäismäärä

$$U = (y_\varepsilon + \frac{\alpha_3}{6\alpha_2\sqrt{n\alpha_2}}(y_\varepsilon^2 - 1))\sqrt{n\alpha_2} - \lambda P$$

$$\le (3 + \frac{4}{3}\cdot\frac{M\alpha_2}{\alpha_2\sqrt{n\alpha_2}})\sqrt{n\alpha_2} - \lambda P$$

$$\le 3\sqrt{nM\alpha_1} + \frac{4}{3}M - \lambda P = 3\sqrt{PM} + \frac{4}{3}M - \lambda P = f(P)$$

Funktion f(P) maksimi saadaan asettamalla

$$f'(P) = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{M}{P}} - \lambda = 0 \ , \text{ josta saadaan } P = \frac{9}{4}\cdot\frac{M}{\lambda^2} \ , \text{ siis}$$

$$U = 3\sqrt{\frac{9M^2}{4\lambda^2}} + \frac{4M}{3} - \frac{9M}{4\lambda} = (\frac{9}{4\lambda} + \frac{4}{3})M.$$

4. Olkoon ξ kokonaisvahinkomeno, ζ_i jälleenvakuuttajassa i vakuutettava osa ja η_i omalla vastuulla pidettävä osa.

$$\xi = \eta_i + \zeta_i$$

$$\sigma^2_{jv_i} = V[\zeta_i] = E[(\xi - \eta_i)^2] - E^2[\xi - \eta_i]$$

$$= V[\xi] + V[\eta_i] - 2(E[\xi\eta_i] - E[\xi]\,E[\eta_i])$$

$V[\xi] = \sigma^2$ ja $V[\eta_i] = (\sigma')^2$ ovat jälleenvakuutusjärjestelystä riippumattomat. Koska jälleenvakuutusmaksu $= E[\zeta_i] + f_i(\sigma_{jv_i})$, jälleenvakuutus on edullisin kun σ_{jv_i} on minimissään eli kun

$$\frac{E[\xi\eta_i] - E[\xi]\,E[\eta_i]}{\sigma\cdot\sigma'} \text{ on maksimissaan } = 1.$$

Tämä tapahtuu kun η_i = vakio$\cdot\xi$ siis silloin kun on suhteellinen jälleenvakuutus. Jälleenvakuuttajan liikkeen hajonta $= \sigma - \sigma'$. Olkoon i luku, joka antaa funktiolle $f_i(\sigma-\sigma')$ pienimmän arvon s.o. $f_i(\sigma-\sigma') \leq f_j(\sigma-\sigma')$ jokaiselle $1 \leq j \leq N$. Silloin on ratkaisuna suhteellinen jälleenvakuutus yhtiöstä i.

Riskiteoria 26.4.1974

1. $\Gamma(\lambda) = \int_0^\infty z^{\lambda-1}e^{-z}dz = -\int_0^\infty z^{\lambda-1}d(e^{-z}) = -\Big/_0^\infty z^{\lambda-1}e^{-z} +$

$(\lambda-1)\int_0^\infty z^{\lambda-2}e^{-z}dz = (\lambda-1)\,\Gamma(\lambda-1).$

Kokonaisvahinkomenon odotusarvo on

$$\int_0^\infty x\,d\mathcal{J}_\lambda(ax) = \int_0^\infty x\,\frac{a}{\Gamma(\lambda)}\,(ax)^{\lambda-1}\,e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty z^\lambda e^{-z}\,dz$$
$$= \frac{\Gamma(\lambda+1)}{a\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda}{a}\ .$$

Kokonaisvahinkomenon toinen nollapistemomentti on

$$\int_0^\infty x^2 d\mathcal{J}_\lambda(ax) = \int_0^\infty x^2\frac{a}{\Gamma(\lambda)}\,(ax)^{\lambda-1}e^{-ax}dx = \frac{1}{a^2\Gamma(\lambda)}\int_0^\infty z^{\lambda+1}e^{-z}dz$$
$$= \frac{\Gamma(\lambda+2)}{a^2\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda(\lambda+1)\,\Gamma(\lambda)}{a^2\,\Gamma(\lambda)} = \frac{\lambda(\lambda+1)}{a^2}\ .$$

Kokonaisvahinkomenon varianssi on

$$\frac{\lambda(\lambda+1)}{a^2} - \left(\frac{\lambda}{a}\right)^2 = \frac{\lambda}{a^2}\ .$$

Tästä seuraa että $n\alpha_1 = \frac{\lambda}{a}$ ja $n\alpha_2 = \frac{\lambda}{a^2}$, josta saadaan

$$a = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad \text{ja} \quad \lambda = \frac{n\alpha_1^2}{\alpha_2}\ .$$

Kokonaisvahinkomeno on 99%:n todennäköisyydellä pienempi tai yhtä suuri kuin

$$x = \frac{1}{4a}\left(\sqrt{2f-1} + u_{99}\right)^2 = \frac{1}{4a}\left(\sqrt{4\lambda-1} + u_{99}\right)^2$$
$$= \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\left(\sqrt{\frac{n\alpha_1^2}{\alpha_2} - \frac{1}{4}} + \frac{u_{99}}{2}\right)^2 = \frac{10^9}{5000}\left(\sqrt{\frac{200\cdot 25\cdot 10^6}{10^9} - \frac{1}{4}} + 1{,}15\right)^2$$
$$\approx 2\ 220\ 000$$

Tasoitusvarauksen alaraja T_{min} saadaan siis yhtälöstä

$1{,}05(T_{min}+L+U) + \sqrt{1{,}05}(n\alpha_1 - x) = 1{,}05(T_{min}+2\cdot 10^5) +$

$\sqrt{1,05}(200\cdot 5000-2,22\cdot 10^6) = 0$, josta

$T_{min} \approx 990\,000$ mk

2. Lisäliikkeen yhden vahingon suuruuden jakautumisfunktio olkoon $S(x)$.

Lisäliikkeen varianssi $= nm^2 = n\alpha_2 = n\int_0^\infty x^2 dS(x)$.

Yhden vahingon suuruuden varianssi $= \int_0^\infty x^2 dS(x) - m^2 = 0$,

joten jokainen vahinko on suuruudeltaan $= m$ ja siis $S(x)$ on singulaarijakautuma:

$$S(x) = \delta(x-m) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x < m \\ 1, & \text{kun } x \geq m \end{cases}$$

Lisäliikkeen kokonaisvahinkomenon jakautumisfunktio

$$G(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n} \frac{n^k}{k!} S^{k*}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-n} \frac{n^k}{k!} \delta(x-km).$$

Yhdistetyn liikkeen kokonaisvahinkomenon jakautumisfunktio

$$F(x) * G(x) = \int_0^x F(x-t)dG(t)$$

ja erityisesti

$$1-p = \int_0^m F(m-t)dG(t) = F(m)G(0) + F(0)(G(m) - G(0))$$

$$= F(m)e^{-n} + \varepsilon e^{-n} n$$

ja siis

$$F(m) = (1-p)e^n - n\varepsilon.$$

3. Vahinkomeno ensimmäisenä vuotena ξ_1 (stokastinen muuttuja) ja toisena vuotena ξ_2. Haettu todennäköisyys

$$H = P\{U + P - \xi_1 \geq 0 \text{ ja } U + 2P - \xi_1 - \xi_2 \geq x\}$$

$$= P\{\xi_1 \leq U + P \text{ ja } \xi_1 + \xi_2 \leq U + 2P - x\}.$$

Jos $U + P \leq U + 2P - x$, on

$$H = \int_0^{U+P} F(U + 2P - x - t)dF(t).$$

Jos $U + P > U + 2P - x$, on

$$H = \int_0^{U+2P-x} F(U + 2P - x - t)dF(t),$$

mutta $F(U + 2P - x - t) = 0$, kun $t > U + 2P - x$, joten tällöinkin voidaan kirjoittaa

$$H = \int_0^{U+P} F(U + 2P - x - t)dF(t).$$

4. Olkoon ξ kokonaisvahinkomeno ja η ylijäämä (alijäämä). Tällöin

$$\eta = (1+\lambda)P - \xi .$$

R määräytyy yhtälöstä

$$1 = M(R) = E\left[e^{-R\eta}\right] = e^{-(1+\lambda)PR}\, E\left[e^{R\xi}\right] \text{ eli yhtälöstä}$$

$$e^{(1+\lambda)PR} = \int_0^{\infty} e^{Rx}dF(x).$$

NP-menetelmässä on $F(x) = \phi(y)$, jos

$$\frac{x - P}{\sigma} = y + \frac{\gamma_1}{6}(y^2 - 1).$$

Tästä saadaan

$$\int_0^{\infty} e^{Rx}dF(x) \approx \int_{-\infty}^{+\infty} e^{R(\frac{\gamma_1\sigma}{6}y^2+\sigma y+P-\frac{\gamma_1\sigma}{6})}d\phi(y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\frac{1}{2} - \frac{R\gamma_1\sigma}{6})y^2+R\sigma y+PR-\frac{R\gamma_1\sigma}{6}}dy.$$

Nyt voidaan exponentti kirjoittaa muotoon

$$-(\frac{1}{2} - \frac{R\gamma_1\sigma}{6})y^2+R\sigma y+PR- \frac{R\gamma_1\sigma}{6} =$$

$$- \frac{1}{2}\left(\sqrt{1- \tfrac{1}{3}R\gamma_1\sigma}\; y - \frac{R\sigma}{\sqrt{1- \frac{1}{3}R\gamma_1\sigma}}\right)^2 + \frac{R^2\sigma^2}{2(1- \frac{1}{3}R\gamma_1\sigma)} + PR - \frac{R\gamma_1\sigma}{6}.$$

Sijoittamalla $z = \sqrt{1-\frac{1}{3}R\gamma_1\sigma}\, y - \frac{R\sigma}{\sqrt{1-\frac{1}{3}R\gamma_1\sigma}}$ saadaan

$$e^{(1+\lambda)PR} = \int_0^\infty e^{Rx}\,dF(x) \approx \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{3}R\gamma_1\sigma}}\, e^{\frac{R^2\sigma^2}{2(1-\frac{1}{3}R\gamma_1\sigma)} + PR - \frac{1}{6}R\gamma_1\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}\,dz \; ,$$

josta seuraa

$$e^{\lambda PR} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{3}R\gamma_1\sigma}}\, e^{\frac{R^2\sigma^2}{2(1-\frac{1}{3}R\gamma_1\sigma)} - \frac{1}{6}R\gamma_1\sigma} .$$

Tästä saadaan seuraavanlainen kaava vakion R laskemiseksi:

$$2\lambda PR + \ln\left(1-\frac{1}{3}\sigma\gamma_1 R\right) = \frac{\sigma^2 R^2}{1-\frac{1}{3}\sigma\gamma_1 R} - \frac{1}{3}\sigma\gamma_1 R$$

Riskiteoria 24.1.1975

1. Olkoon omavastuu M ja vahinkojen lukumäärän keskiarvo n. Vahingon suuruuden jakaantumafunktion toinen nollapistemomentti omalle vastuulle jäävässä liikkeessä on

$$\alpha_2 = \int_0^M x^2 \, dS(x) + \int_M^\infty M^2 \, dS(x) ,$$

josta kahdella osittaisintegroinnilla saadaan

$$\alpha_2 = 2 m^2 - 2 m M e^{-\frac{M}{m}} - 2 m^2 e^{-\frac{M}{m}} .$$

Jälleenvakuuttajan liikkeessä vahingon suuruuden toinen nollapistemomentti on

$$\alpha_2^{jv} = \int_M^\infty (x-M)^2 \, dS(x) = 2 m^2 e^{-\frac{M}{m}} .$$

Ottaen jälleenvakuuttajan kannalta nollan suuruiset vahingot mukaan noudattaa myös jälleenvakuuttajan liike yleistettyä Poisson-prosessia, jolloin ensivakuuttajan ja jälleenvakuuttajan vahinkomenojen varianssien summa on

$$n\alpha_2 + n\alpha_2^{jv} = 2 n m^2 \left(1 - \frac{M}{m} e^{-\frac{M}{m}}\right) .$$

Sulkulausekkeen derivaatan nollakohta antaa minimin ehdoksi $M = m$, eli omavastuun tulee olla keskivahingon suuruinen. Maksimaalinen varianssi saavutetaan, kun koko liike on yhden vastuulla, ja on siis $= 2 n m^2$, ja minimin suhde siihen $= 1 - e^{-1}$.

Toinen ratkaisutapa

Jälleenvakuuttajan osalta ei oteta huomioon nollan suuruisia vahinkoja, jolloin jälleenvakuutettujen vahinkojen lukumäärän keskiarvo on $n \cdot (1-S(M)) = n e^{-\frac{M}{m}}$. Vahingon suuruuden jakaantumafunktio jälleenvakuuttajan liikkeessä on

$$T(x) = \frac{S(x + M) - S(M)}{1 - S(M)} = 1 - e^{-\frac{x}{m}} = S(x) .$$

Toinen nollapistemomentti on

$$\int_0^{\infty} x^2 \, dT(x) = 2\, m^2 .$$

Jälleenvakuutusliikkeen kokonaisvahinkomenon varianssi on siis

$$n\, e^{-\frac{M}{m}} \cdot 2\, m^2 .$$

Jatkossa ratkaisu on samanlainen kuin edellä.

2. Olkoon omavastuu = M, vahinkojen lukumäärän keskiarvo = n ja varmuuslisä $= \lambda$.
Alkuperäinen varianssi $= n\alpha_2$.
Uuden vakuutuskohteen liittämisen jälkeen varianssi on $n\alpha_2 + 0{,}01\, M^2$.
Ehdosta ettei yhtiön vapaiden varojen menettämistodennäköisyys ε saa kasvaa seuraa

$$U = y_\varepsilon \sqrt{n\alpha_2} - \lambda n \alpha_1 = y_\varepsilon \sqrt{n\alpha_2 + 0{,}01 M^2} - \lambda(n\alpha_1 + 0{,}01 M) ,$$

josta saadaan

$$M = \frac{2\lambda y_\varepsilon \sqrt{n\alpha_2}}{y_\varepsilon^2 - 0{,}01\lambda^2} = \frac{2\cdot 0{,}05\cdot 2{,}3\sqrt{2000\cdot 5\cdot 10^{10}}}{(2{,}3)^2 - 0{,}01\cdot 0{,}0025} \approx 435000 .$$

3. Merkitään yhtiöt X_1 ja X_2 ja niiden kokonaisvahinkomenot ξ_1 ja ξ_2. Olkoot $a_1\xi_1$ ja $a_2\xi_2$ yhtiöiden omalla vastuulla pidettävät osat. Jälleenvakuutuksen vaihtamisen jälkeen yhtiöiden kokonaisvahinkomenot ovat

Yhtiö X_1: $a_1\xi_1 + (1-a_2)\xi_2$

Yhtiö X_2: $(1-a_1)\xi_1 + a_2\xi_2$

Ehdosta että kokonaisvahinkomenojen varianssien on tultava pienemmiksi seuraa:

$$a_1^2 V(\xi_1) + (1-a_2)^2 V(\xi_2) \leq V(\xi_1) \text{ ja}$$

$$(1-a_1)^2 V(\xi_1) + a_2^2 V(\xi_2) \leq V(\xi_2) ,$$

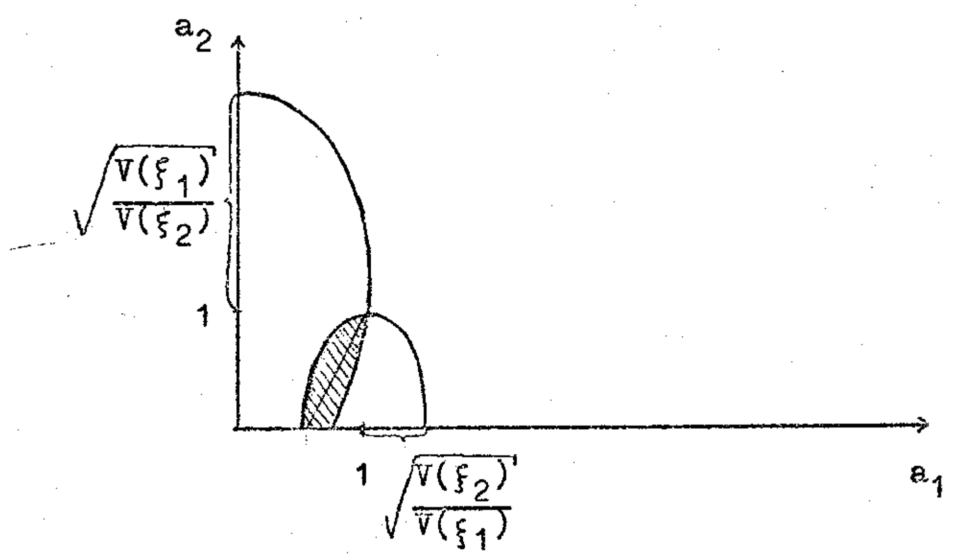
koska vakuutuskannat ovat toisistaan riippumattomat.
Tästä saadaan

$$a_1^2 + \frac{(a_2-1)^2}{V(\xi_1)/V(\xi_2)} \leq 1 \quad \text{ja} \quad \frac{(a_1-1)^2}{V(\xi_2)/V(\xi_1)} + a_2^2 \leq 1.$$

Edelleen on

$$(1-a_1)E(\xi_1) = (1-a_2)E(\xi_2),$$

koska kummankaan yhtiön vakuutusmaksutulo ei saanut kasvaa. Ratkaisupiste on kuvan ellipsien yhteisellä alueella ja tämän läpi kulkevalla suoralla $(1-a_1)E(\xi_1) = (1-a_2)E(\xi_2)$.



Yhtiön X_1 kokonaisvahinkomenon varianssin

$$a_1^2V(\xi_1) + (1-a_2)^2V(\xi_2) = a_1^2V(\xi_1) + \frac{(1-a_1)^2E^2(\xi_1)}{E^2(\xi_2)}V(\xi_2)$$

minimoiminen antaa

$$a_1^{(1)} = \frac{V(\xi_2)E^2(\xi_1)}{V(\xi_1)E^2(\xi_2) + V(\xi_2)E^2(\xi_1)}.$$

Yhtiön X_2 kokonaisvahinkomenon varianssin minimoiminen puolestaan antaa

$$a_1^{(2)} = \frac{V(\xi_1)E^2(\xi_2) + V(\xi_2)E^2(\xi_1) - V(\xi_2)E(\xi_1)E(\xi_2)}{V(\xi_1)E^2(\xi_2) + V(\xi_2)E^2(\xi_1)}.$$

Nyt on $a_1^{(1)} = a_1^{(2)}$ vain jos $\frac{E(\xi_1)}{E(\xi_2)} = \frac{V(\xi_1)}{V(\xi_2)}$, josta seuraa

$$a_1 = \frac{E(\xi_1)}{E(\xi_1) + E(\xi_2)} \quad \text{ja} \quad a_2 = \frac{E(\xi_2)}{E(\xi_1) + E(\xi_2)}.$$

4. Olkoon $\nu(t)$ vahinkojen lukumäärä välillä $(0,t]$. $P_0(t)$ voidaan merkitä $e^{-q\tau(t)}$, missä $\tau(t) = -\frac{1}{q}\ln P_0(t)$, joka $\to\infty$ kun $t\to\infty$ eikä ole missään laskeva ($P_0(t)\to 0$, kun $t\to\infty$ eikä ole missään nouseva). Vakio q voidaan valita siten että $\tau(1) = 1$. Jokaista $\tau>0$ vastaan on olemassa ainakin yksi t siten että $\tau = \tau(t)$. Stokastista prosessia $\nu(t)$ voidaan merkitä $\nu'(\tau)$ määrittelemällä $\nu'(\tau) = \nu(t)$, missä t täyttää ehdon $\tau = \tau(t)$.

Olkoot $\tau_1, \tau_2 > 0$ sekä t_1, t_2 ja t sellaisia että $\tau_1 = \tau(t_1)$, $\tau_2 = \tau(t_2)$ ja $\tau_1 + \tau_2 = \tau(t)$. Tällöin on

$$P\{\nu'(\tau_1+\tau_2) - \nu'(\tau_1) = 0\} = e^{-q\tau_2} = P\{\nu'(\tau_2) = 0\},$$

koska $P\{\nu'(\tau) = 0\} = e^{-q\tau}$.

$\underline{P_k(t) = ?}$

Olkoon h sellainen kokonaisluku että $n = 2^h > k$ sekä

$$I_i = \left(\frac{i-1}{n}\tau, \frac{i}{n}\tau\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

A_h = sellaiset realisoitumiset, joissa tapahtumia sijoittuu tasan k:hon väliin I_i (n-k väliä jää tyhjäksi).

B_h = sellaiset realisoitumiset, joissa vähintään yhteen väliin I_i tulee vähintään 2 tapahtumaa.

Tästä saadaan

$$\{\nu(t) = k\} = \{\nu'(\tau) = k\} \subset A_h \cup B_h,$$

koska jotta tulisi k tapahtumaa joko k välissä on yksi tapahtuma tai jossakin välissä on vähintään 2 tapahtumaa. Toisaalta

$$A_h - A_h \cap B_h \subset \{\nu'(\tau) = k\} = \{\nu(t) = k\}.$$

Vasen puolihan sisältää realisoitumisia, joissa tapahtumia esiintyy k:ssa välissä eikä missään useammin kuin kerran.

Siis

$$P\{A_h - A_h \cap B_h\} \leq P_k(t) \leq P\{A_h \cup B_h\} \quad \text{tai}$$

$$P\{A_h\} - P\{B_h\} \leq P_k(t) \leq P\{A_h\} + P\{B_h\}.$$

Nyt $P\{B_h\} \to 0$, kun $h \to \infty$ joten

$$P_k(t) = \lim_{h\to\infty} P\{A_h\}.$$

Todennäköisyys että tietyssä välissä I_i esiintyy ainakin yksi tapahtuma on

$$1 - P_0(t'(\tfrac{T}{n})) = 1 - e^{-\frac{qT(t)}{n}},$$

missä $t'(\frac{T}{n})$ on T/n:ää vastaava arvo t-avaruudessa.
Todennäköisyys että tapahtumia esiintyy tasan k:ssa välissä on

$$(1 - e^{-\frac{qT(t)}{n}})^k (e^{-\frac{qT(t)}{n}})^{n-k}, \text{ joten}$$

$$P\{A_h\} = \binom{n}{k}(1 - e^{-qT(t)/n})^k (e^{-qT(t)/n})^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)!} e^{-qT(t)} \cdot e^{qT(t)k/n} (1 - e^{-qT(t)/n})^k$$

$$= \frac{1}{k!} e^{-qT(t)} \cdot n^k (1 - 1/n)(1 - 2/n)\ldots(1 - (k-1)/n) \cdot$$

$$e^{qT(t)k/n} \cdot (1 - e^{-qT(t)/n})^k$$

$$= \frac{1}{k!} e^{-qT(t)} \left(\frac{1 - e^{-qT(t)/n}}{1/n}\right)^k (1 + O(1/n)) \longrightarrow$$

$$e^{-qT(t)} \frac{(qT(t))^k}{k!}, \text{ kun } n \to \infty.$$

5. Stop loss jälleenvakuutuksen nettomaksu =

$$\int_M^\infty (x - M)dF(x), \text{ missä}$$

M = omalla vastuulla pidettävä osa ja
$F(x)$ = kokonaisvahinkomenon jakautumisfunktio.

a) NP-menetelmässä on $F(x) = \phi(y)$, jos

$$\frac{x - P}{\sqrt{n\alpha_2}} = y + \frac{\gamma_1}{6}(y^2 - 1)$$, jossa P = nettomaksu ja

n = vahinkojen lukumäärän keskiarvo.

Tästä saadaan

$$y = \sqrt{6\,\frac{x - P}{\gamma_1\sqrt{n\alpha_2}} + 1 + \frac{9}{\gamma_1^2}} - \frac{3}{\gamma_1},$$

$$y_M = \sqrt{6\,\frac{M - P}{\gamma_1\sqrt{n\alpha_2}} + 1 + \frac{9}{\gamma_1^2}} - \frac{3}{\gamma_1}$$ sekä

$$x = P + y\sqrt{n\alpha_2} + \frac{1}{6}\gamma_1\sqrt{n\alpha_2}\,(y^2 - 1),$$

joten

$$P_{jv} = \int_M^\infty (x-M)\,dF(x) = \int_{y_M}^\infty \left[P-M+y\sqrt{n\alpha_2} + \frac{1}{6}\gamma_1\sqrt{n\alpha_2}\,(y^2-1)\right] d\phi(y)$$

$$= \left(P-M-\frac{\gamma_1\sqrt{n\alpha_2}}{6}\right)\int_{y_M}^\infty d\phi(y) -$$

$$\sqrt{n\alpha_2}\int_{y_M}^\infty \left(1+\frac{\gamma_1}{6}y\right) d\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}y^2}\right)$$

Jälkimmäistä termiä osittaisintegroimalla saadaan

$$P_{jv} = \left(1+\frac{\gamma_1 y_M}{6}\right)\sqrt{n\alpha_2}\,\phi'(y_M) - (M-P)(1-\phi(y_M)).$$

b) Olkoon $\beta_k = \int_0^\infty y^k e^{hy} dS(y)$. Esscherin menetelmässä muunnetaan

funktiota S(x) seuraavasti:

$$\overline{S}(x) = \frac{1}{\beta_0}\int_0^x e^{hy} dS(y)$$

Tästä saadaan

$$dF(x) = e^{-n+n\beta_0-hx}\,d\overline{F}(x),$$

joten

$$P_{jv} = \int_M^\infty (x-M)dF(x) = \int_M^\infty (x-M)e^{-n+n\beta_0-hx}d\overline{F}(x)$$

Soveltamalla Edgeworthin kehitelmän kahta ensimmäistä termiä funktioon $\overline{F}(x)$ sekä sijoittamalla $z = \frac{x-M}{\sqrt{n\beta_2}}$ (määritetään h niin että $M = n\beta_1$) saadaan

$$P_{jv} = e^{-n+n\beta_0-hM}\sqrt{n\beta_2}\left(\int_0^\infty ze^{-hz\sqrt{n\beta_2}}d\phi(z) + c_3\int_0^\infty ze^{-hz\sqrt{n\beta_2}}d\phi'''(z)\right)$$

$$= e^{-n+n\beta_0-hM}\sqrt{n\beta_2}\left(-\int_0^\infty e^{-hz\sqrt{n\beta_2}}d\phi'(z) - c_3\int_0^\infty e^{-hz\sqrt{n\beta_2}}(-z^3+3z)d\phi'(z)\right)$$

$$= e^{-n+n\beta_0-hM}\sqrt{n\beta_2}\Big(-E_1(h\sqrt{n\beta_2}) - c_3 \Big/_{\!0}^{\!\infty} e^{-hz\sqrt{n\beta_2}}(-z^3+3z)\phi'(z) +$$

$$c_3\int_0^\infty(-h\sqrt{n\beta_2})e^{-hz\sqrt{n\beta_2}}(-z^3+3z)d\phi(z) +$$

$$c_3\int_0^\infty e^{-hz\sqrt{n\beta_2}}(-3z^2+3)d\phi(z)\Big)$$

$$= e^{-n+n\beta_0-hM}\sqrt{n\beta_2}\Big(-E_1(h\sqrt{n\beta_2}) - c_3h\sqrt{n\beta_2}\int_0^\infty e^{-hz\sqrt{n\beta_2}}d\phi'''(z) -$$

$$3c_3\int_0^\infty e^{-hz\sqrt{n\beta_2}}d\phi''(z)$$

$$= e^{-n+n\beta_0-hM}\sqrt{n\beta_2}\left(-E_1(h\sqrt{n\beta_2}) - c_3h\sqrt{n\beta_2}E_3(h\sqrt{n\beta_2}) - 3c_3E_2(h\sqrt{n\beta_2})\right)$$

Sijoittamalla $c_3 = -\frac{\beta_3}{6\beta_2\sqrt{n\beta_2}}$ saadaan

$$P_{jv} = e^{-n+n\beta_0-hM}\left(-\sqrt{n\beta_2}E_1(h\sqrt{n\beta_2}) + \frac{\beta_3}{2\beta_2}E_2(h\sqrt{n\beta_2}) + \frac{\beta_3}{6\beta_2}h\sqrt{n\beta_2}E_3(h\sqrt{n\beta_2})\right)$$

$(P_1 - P_2)$