

MONITAVOITEOPTIMOINTI JA SEN KÄYTTÄMINEN VAKUUTUSYHTIÖSSÄ



hyväksytty 19.12.1994

SHV-harjoitustyö

4.11.1994

Pertti Pulkkinen

ENGLISH SUMMARY

MULTI-OBJECTIVE OPTIMIZATION AND IT'S UTILIZATION IN AN INSURANCE COMPANY

Multi-objective optimization problem is a problem where there are several conflicting objectives to be optimized simultaneously (under some constraints).

There are several methods to solve this kind of problems. These methods can be divided into two groups: evaluation methods and design methods. Evaluation methods can be used to rank possible alternatives and/or to find the most-preferred alternative when solving a well-defined multi-objective optimization problem. Design methods can also be used to find the most-preferred solution to a problem but they can as well be used to get better insight into the problem and into the factors related to it.

In this paper several solution methods are presented, both evaluation methods and design methods.

Multi-objective optimization problems are easy to find. In this paper some multi-objective optimization problems related to the insurance business are formulated and some examples of the utilization of multi-objective optimization methods to solve these problems are presented.

SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO	1
1.1 PERUSKÄSITTEET	1
1.2 HYÖTYFUNKTIO	6
 2. MONITAVOITEOPTIMOINTI	11
2.1 ARVIOINTIMENETELMÄT	12
2.1.1 MAUT	13
2.1.2 AHP	22
2.1.3 ELECTRE	30
2.1.4 UTA	43
2.1.5 KVALITATIIVISET KRITEERIT	46
2.2 SUUNNITTELUMENETELMÄT	54
2.2.1 MAHDOLLISTEN SUUNTIEN MENETELMÄ	55
2.2.2 LEIKKAUSTASOALGORITMI	59
2.2.3 ZW-MENETELMÄ	61
2.2.4 LAGRANGEN KERTOIMIIN PERUSTUVA MENETELMÄ	64
2.2.5 REFERENSSIPISTEMENETELMÄ	66
2.2.5.1 REFERENSSISUUNTAMENETELMÄ	68
2.2.6 STOKASTIIKKAAN PERUSTUVAT MENETELMÄT	71
2.2.6.1 PAINOTETTU TCHEBYCHEFF-ALGORITMI	72
2.2.6.2 VIERIVÄN PALLON MENETELMÄ	73
2.2.7 EI-DOMINOITUJEN RATKAISUJEN GENEROINTI	78
 3. OPTIMOINTI EPÄVARMUUDEN VALLITESSA	79
 4. MONITAVOITEOPTIMOINTI VAKUUTUSYHTIÖSSÄ	82

1. JOHDANTO

Optimointiongelmaa

$$\begin{aligned} (1.1) \quad & \max f_1(\mathbf{x}) \\ & \max f_2(\mathbf{x}) \\ & : \\ & \max f_r(\mathbf{x}) \\ & g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, p \\ & \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

nimitetään monitavoiteoptimointiongelmaksiksi. Kaikki ratkaisut $\mathbf{x}$, jotka toteuttavat ehdot $g_i(\mathbf{x}) \leq b_i$, $i = 1, \dots, p$, muodostavat sallittujen ratkaisujen joukon X . Usein funktiot $f_1, \dots, f_r$ ovat sellaisia, että ei ole olemassa ratkaisua, jolla kaikki funktiot optimoituisivat yhtäikaa. Tällöin joudutaan etsimään ongelmalle kompromissiratkaisua, ts. joudutaan tinkimään eri funktioiden optimaalisuudesta, jotta löydettäisiin tyydyttävä ratkaisu.

1.1 PERUSKÄSITTEET

Seuraavassa määritellään joukko tässä työssä käytettäviä käsitteitä (Steuer, 1986; Keeney & Raiffa, 1976; Hwang & Masud, 1979; Miettinen, 1994)

Muuttujia $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ nimitetään päätösmuuttujiksi ja muuttujia

$y = (y_1, \dots, y_r) = (f_1(x), \dots, f_r(x))$ kriteerimuuttujiksi. Sallitun joukon $X \subset \mathbb{R}^n$ päätösmuuttuja-avaruudessa muodostavat ne pisteet x , joille kaikki ehdot $g_i(x) \leq b_i$, $i = 1, \dots, p$, toteutuvat. Sallittu joukko $S \subset \mathbb{R}^r$ tavoiteavaruudessa määritellään seuraavasti $S = \{y \mid y = (f_1(x), \dots, f_r(x)), x \in X\}$.

Jos ratkaisut $x, x' \in X$ ovat sellaisia, että $f_i(x) \leq f_i(x')$ kaikilla $i = 1, \dots, r$ ja $f_k(x) < f_k(x')$ jollakin $1 \leq k \leq r$, sanotaan, että piste $y = (f_1(x), \dots, f_r(x))$ dominoi pistettä $y' = (f_1(x'), \dots, f_r(x'))$. Mikäli pistettä $y = (f_1(x), \dots, f_r(x)) \in S$ ei dominoi mikään toinen piste $y' \in S$, on piste y ei-dominoitu ratkaisu, tällöin ratkaisua $x \in X$ sanotaan tehokkaaksi. Usein käytetään käsitettä Pareto-optimaalisuus, kun viitataan tehokkaisiin ja ei-dominoituihin pisteisiin. Merkitään symbolilla $X^p \subset X$ tehokkaiden ratkaisujen joukkoa päätösmuuttuja-avaruudessa ja $S^p \subset S$ on puolestaan ei-dominoitujen pisteiden joukko tavoiteavaruudessa.

Jos ratkaisut $x, x' \in X$ ovat sellaisia, että $f_i(x) < f_i(x')$ kaikilla $i = 1, \dots, r$, sanotaan, että piste $y = (f_1(x), \dots, f_r(x))$ dominoi vahvasti pistettä $y' = (f_1(x'), \dots, f_r(x'))$. Jos ratkaisu $y = (f_1(x), \dots, f_r(x)) \in S$ on sellainen, että ei ole olemassa sellaista pistettä $y' = (f_1(x'), \dots, f_r(x')) \in S$, että y' dominoisi pistettä y vahvasti, sanotaan, että y on heikosti ei-dominoitu. Täten siis ei-dominoitujen pisteiden joukko on heikosti ei-dominoitujen pisteiden osajoukko.

Jos $y \in S^p$ ja löydetään $y' \notin S$, joka dominoi pistettä y ja joka voidaan lausua joidenkin S^p :n pisteiden konveksina kombinaationa, sanotaan, että y on ei-tuettu ei-dominoitu ratkaisu.

Kun etsitään ratkaisu ongelmalle

$$(1.2) \quad \max f_i(\mathbf{x}), \quad i=1, \dots, r$$

$$\mathbf{x} \in X,$$

saadaan utopia- 1. ideaaliratkaisu, josta käytetään merkintää $\mathbf{y}^u$. Jos $\mathbf{y}^u \in S$, on se tietenkin optimointiongelman ratkaisu, ja tällöin ei jouduta tekemään kompromisseja eri tavoitteiden kesken. Jos tavoitteet ovat ristiriitaisia, ei piste $\mathbf{y}^u$ kuulu joukkoon S : se muodostaa tällöin ylärajan ei-dominoitujen pisteiden joukolle S^p . Ongelman

$$(1.3) \quad \min f_i(\mathbf{x}), \quad i=1, \dots, r$$

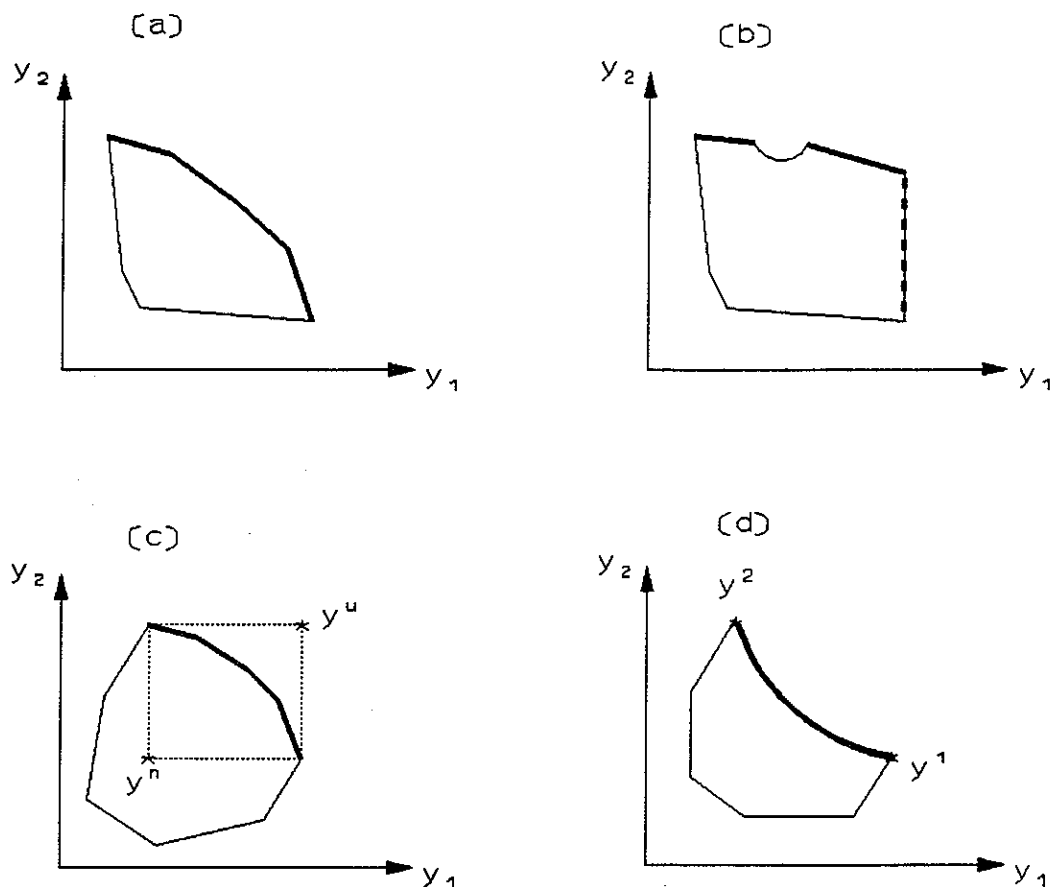
$$\mathbf{x} \in X,$$

$$\mathbf{y} = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x})) \in S^p$$

ratkaisusta käytetään nimitystä nadir-piste, ja sitä merkitään symbolilla $\mathbf{y}^n$. Tämä piste muodostaa alarajan ei-dominoitujen pisteiden joukolle.

ESIMERKKI 1.1

Seuraavassa kuviossa 1.1 on esitetty kahden tavoitemuuttujan $\mathbf{y} = (y_1, y_2)$ tilanteessa sallittu joukko S . Kuviossa (a) on ei-dominoitujen ratkaisujen joukko merkitty vahvennetulla viivalla. Kuvioon (b) merkitty ei-dominoitujen pisteiden joukko ei ole yhtenäinen; lisäksi heikosti ei-dominoitujen ratkaisujen joukkoon kuuluvat katkoviivalla merkityt pisteet. Kuvioon (c) on merkitty utopiapiste ja nadir-piste. Kuvion (d) kaikki ei-dominoidut ratkaisut ovat ei-tuettuja ei-dominoituja ratkaisuja, pisteitä $\mathbf{y}^1$ ja $\mathbf{y}^2$ lukuunottamatta.



KUVIO 1.1 Ei-dominoituja ratkaisuja

Funktio U on kasvava, jos $U(y^1) < U(y^2)$, aina kun $y^1 < y^2$ ja $y^1, y^2 \in R^n$. Funktio U on vähenevä, jos $U(y^1) > U(y^2)$, aina kun $y^1 < y^2$ ja $y^1, y^2 \in R^n$. Funktio U on ei-vähenevä, jos $U(y^1) \leq U(y^2)$, aina, kun $y^1 \leq y^2$ ja $y^1, y^2 \in R^n$. Vastaavasti funktio U on ei-kasvava, jos $U(y^1) \geq U(y^2)$, aina kun $y^1 \leq y^2$ ja $y^1, y^2 \in R^n$.

Jos kaikilla $y^1, y^2 \in R^n$ ja $\alpha \in [0,1]$ on voimassa $U(\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2) \geq \alpha U(y^1) + (1-\alpha)U(y^2)$, sanotaan että funktio U on konkaavi ja mikäli $U(\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2) > \alpha U(y^1) + (1-\alpha)U(y^2)$, on U aidosti konkaavi. Funktio U , joka vastaavasti toteuttaa ehdon $U(\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2) \leq \alpha U(y^1) + (1-\alpha)U(y^2)$, on konvekksi ja ehdon

$U(\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2) < \alpha U(y^1) + (1-\alpha)U(y^2)$ täyttyessä on kyseessä aidosti konvekssi funktio.

Funktio U on kvasikonkaavi, jos $U(\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2) \geq U(y^1)$ kaikilla $y^1, y^2 \in R^n$ ja $\alpha \in [0,1]$, joilla on voimassa $U(y^1) \leq U(y^2)$. Aito kvasikonkaavisuus on kyseessä, jos nyt $U(\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2) > U(y^1)$. Vastaavasti funktio U on kvasikonvekssi, jos $U(\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2) \leq U(y^1)$ kaikilla $y^1, y^2 \in R^n$ ja $\alpha \in [0,1]$, joilla on voimassa $U(y^1) \geq U(y^2)$. Vastaavasti aito kvasikonkaavisuus on kyseessä, jos nyt $U(\alpha y^1 + (1-\alpha)y^2) < U(y^1)$.

Oletetaan, että funktio U on differentioituva. Sanotaan, että funktio U on pseudokonkaavi, jos $U(y^2) \leq U(y^1)$ kaikilla $y^1, y^2 \in R^n$, joilla on voimassa $\nabla U(y^1)(y^2 - y^1) \leq 0$. Vastaavasti pseudokonveksisuus on kyseessä, jos $U(y^2) \geq U(y^1)$ kaikilla $y^1, y^2 \in R^n$, joilla on voimassa $\nabla U(y^1)(y^2 - y^1) \geq 0$.

Määritellään lisäksi seuraava yhdistysoperaattori: $\gamma(x^1, x^2)$, $\gamma(x^1, x^2) = \lambda_1 x^1 + \lambda_2 x^2$, $0 \leq \lambda_1 \leq 1$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$.

Päätöksentekijällä tarkoitetaan henkilöä (tai henkilöryhmää), jolla on riittävä näkemys käsiteltävään ongelmaan ja (seuraavassa luvussa esitettävät ehdot täyttävä) preferenssirakenne kriteerimuuttujien suhteen. Päätöksentekijä on siis henkilö (tai henkilöryhmä), joka tekee lopullisen valinnan tarjolla olevien vaihtoehtojen joukosta. Ongelman mallintaminen ja saattaminen tietokoneella käsiteltävään muotoon voi olla eri henkilöiden huolena. Lisäksi voidaan olettaa, että päätöksentekijä on jollain tavalla vastuussa tekemästään päätöksestä.

1.2 HYÖTYFUNKTIO

Oletetaan, että päätöksentekijä pystyy arvioimaan eri vaihtoehtojen keskinäistä järjestystä tehdessään valinnan muuttujien $y = (y_1, \dots, y_n)$ mahdollisten arvojen joukosta S eli päätöksentekijällä on tietyt preferenssit, joiden perusteella hän tekee valintansa (Keeney & Raiffa, 1976; Berger, 1985; Wehrung, 1978). Jos päätöksentekijän mielestä vaihtoehto y^1 on yhtä hyvä kuin vaihtoehto y^2 , merkitään

$$(1.4) \quad y^1 \sim y^2.$$

Jos päätöksentekijän mielestä vaihtoehto y^1 on parempi kuin vaihtoehto y^2 , merkitään

$$(1.5) \quad y^2 < y^1$$

Vastaavasti merkinnällä

$$(1.6) \quad y^2 \leq y^1$$

tarkoitetaan, että vaihtoehto y^2 ei ole parempi kuin vaihtoehto y^1 .

Oletetaan, että päätöksentekijän preferenssirakenne muuttujien y suhteen toteuttaa seuraavat ehdot

- (1.7) E1: $y^1 \sim y^2$, $y^1 < y^2$ tai $y^2 < y^1$ kaikilla y^1, y^2
 E2: $y^1 \leq y^2$ ja $y^1 \leq y^3$ on $y^1 \leq y^3$
 E3: Kaikilla $y^1 \in S$ joukot $\{y^2 \in S | y^1 \leq y^2\}$ ja $\{y^2 \in S | y^2 \leq y^1\}$ ovat suljettuja.

Ehto E1 formalisoi sen periaatteen, että päätöksentekijän pitää pystyä vertaamaan kaikkia vaihtoehtoja. Toinen ehto E2 puolestaan ilmaisee luonnollisen transitiivisuuden. Ehto E3 takaa sen, että lähellä toisiaan joukossa S olevilla pisteillä pitää olla samanlainen preferenssisuhde muihin pisteisiin.

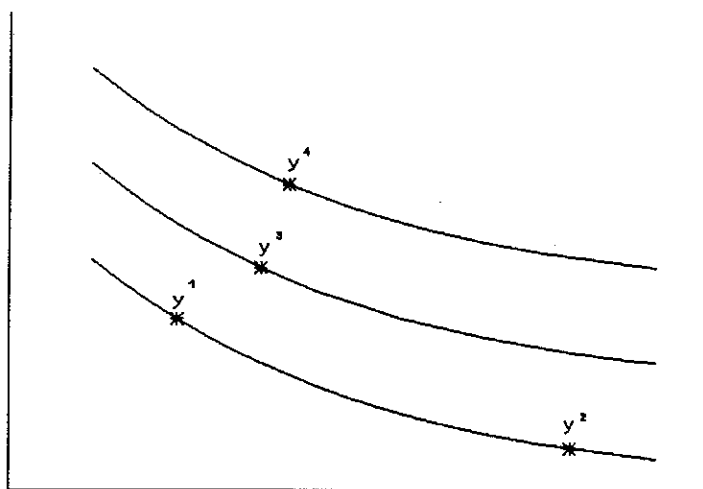
Jos päätöksentekijän preferenssirakenne on sellainen, että kaavan (1.7) ehdot toteutuvat, on olemassa äärellinen jatkuva reaaliarvoinen funktio, jolla päätöksentekijän preferenssirakennetta voidaan kuvata. Tämä funktio on yksikäsitteinen positiivisia lineaarisia muunnoksia lukuunottamatta. Merkitään tätä funktiota U :lla. Nyt on voimassa

$$\begin{aligned} (1.8) \quad y^1 \sim y^2 &\Leftrightarrow U(y^1) = U(y^2) \\ y^1 > y^2 &\Leftrightarrow U(y^1) > U(y^2) \\ y^1 \geq y^2 &\Leftrightarrow U(y^1) \geq U(y^2). \end{aligned}$$

Käytetään jatkossa funktiosta U nimitystä hyötyfunktio. (Kirjallisuudessa käytetään usein preferenssirakennetta kuvaavasta funktiosta nimitystä arvo-funktio silloin, kun päätöksentekotilanteeseen ei liity epävarmuutta, ja nimitystä hyötyfunktio silloin, kun tilanteeseen liittyy epävarmuutta. Tässä työssä käytetään kaikissa tilanteissa preferenssirakennetta kuvaavasta funktiosta nimitystä hyötyfunktio.)

ESIMERKKI 1.2

Tarkastellaan muuttujia $y = (y_1, y_2)$. Oheisessa kuviossa 1.2 on $y^1 \sim y^2$. Kaikki ne muuttujat, jotka päätöksentekijän mielestä ovat yhtä hyviä kuin y^1 ja y^2 , on kuvattu näiden pisteiden kautta kulkevalla käyrällä. Tätä käyrää nimitetään indifferenssikäyräksi. Edelleen on $y^1 < y^3 < y^4$. Myös pisteiden y^3 ja y^4 kautta on piirretty indifferenssikäyrät. //



KUVIO 1.2 Indifferenssikäyrät

Tyypillisiä usein käytettyjä hyötyfunktioita ovat (Keeney & Raiffa, 1976; Oppenheimer, 1978)

$$(1.9) \quad U(y) = \sum a_i y_i$$

$$(1.10) \quad U(y) = \sum a_i \exp(b_i y_i)$$

ja

$$(1.11) \quad U(y) = \sum a_i y_i^{b_i},$$

missä a_i ja b_i ovat vakioita.

Oletetaan nyt, että päätöksentekotilanteeseen liittyy epävarmuutta (Berger, 1985). Merkitään päätöksenteon mahdollisten seuraamusten joukkoa symbolilla S . Nyt päätöksentekijän päätöksen seuraamusta kuvaa jokin todennäköisyysjakauma joukossa S , merkitään näiden todennäköisyysjakaumien joukkoa symbolilla P . Jos $p^1 \in P$ ja $p^2 \in P$, voidaan vastaavasti kuin edellä kuvata päätöksentekijän preferenssirakennetta merkinnoilla

$$(1.12) \quad \begin{aligned} p^1 &\sim p^2 \\ p^1 &> p^2 \\ p^1 &\geq p^2, \end{aligned}$$

jotka siis tarkoittavat, että p^1 on yhtä hyvä, parempi tai ei-huonompi kuin p^2 .

Oletetaan, että päätöksentekijän preferenssirakenne joukon P alkioden suhteen toteuttaa seuraavat ehdot

$$(1.13) \quad \begin{aligned} E1: & p^1 \sim p^2, p^1 < p^2 \text{ tai } p^2 < p^1 \text{ kaikilla } p^1, p^2 \\ E2: & p^1 \leq p^2 \text{ ja } p^1 \leq p^3 \text{ on } p^1 \leq p^3 \\ E3: & \text{Jos } p^1 < p^2, \text{ on } \alpha p^1 + (1-\alpha)p^3 < \alpha p^2 + (1-\alpha)p^3 \text{ kaikilla} \\ & 0 < \alpha < 1 \\ E4: & \text{Jos } p^1 < p^2 < p^3, \text{ on olemassa sellaiset luvut } 0 < \alpha < 1 \\ & \text{ja } 0 < \beta < 1, \text{ että } \alpha p^1 + (1-\alpha)p^3 < p^2 \text{ ja } p^2 < \beta p^1 \\ & + (1-\beta)p^3. \end{aligned}$$

Ehdot E1 ja E2 ilmaisevat kaikkien vaihtoehtojen vertailtavuuden ja transitiivisuuden. Ehto E3 ilmaisee yksinkertaisesti sen, että

jos p^2 on päätöksentekijän mielestä parempi vaihtoehto kuin p^1 , pitää päätöksentekijä kahdesta satunnaistilanteesta parempana sitä, jossa p^2 toteutuu todennäköisyydellä α kuin sitä, jossa p^1 toteutuu todennäköisyydellä α , jos nämä tilanteet ovat muuten analogiset. Neljäs ehto E4 ilmaisee sen, että vaihtoehtojen joukossa ei ole mitään äärettömän hyvää tai äärettömän huonoa vaihtoehtoa. Jos esimerkiksi p^1 olisi äärettömän huono vaihtoehto, ei päätöksentekijän kannattaisi missään tilanteessa yrittää tavoitella vaihtoehtoa p^3 , jos vaarana on, että vaihtoehto p^1 toteutuu.

Jos päätöksentekijän preferenssirakenne joukossa P on sellainen, että kaavan (1.13) ehdot toteutuvat, on olemassa äärellinen jatkuva reaaliarvoinen hyötyfunktio, jolla päätöksentekijän preferenssirakennetta voidaan kuvata.

Hyötyfunktion ohella voidaan käyttää käsitettä tappiofunktio, joka kuvaa (taloudellista) menetystä. Jos tappiofunktioita merkitään symbolilla $L(y)$, on

$$(1.14) \quad U(y) = -L(y),$$

eli tappio voidaan tulkita negatiiviseksi hyödyksi.

2. MONITAVOITEOPTIMOINTI

Oletetaan, että olemassa päätöksentekijän preferenssirakennetta kuvaava hyötyfunktio $U(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x}))$. Oletetaan nyt, että ratkaistessaan ongelmaa

$$\begin{aligned}
 (2.1) \quad & \max f_1(\mathbf{x}) \\
 & \max f_2(\mathbf{x}) \\
 & : \\
 & \max f_r(\mathbf{x}) \\
 & g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, p \\
 & \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$

päätöksentekijä itse asiassa pyrkii maksimoimaan hyötyfunktioaan $U(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x}))$. Jos tämä päätöksentekijän hyötyfunktio tunnettaisiin, voitaisiin ongelma kirjoittaa muotoon

$$\begin{aligned}
 (2.2) \quad & \max U(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x})) \\
 & g_i(\mathbf{x}) \leq b_i, \quad i = 1, \dots, p \\
 & \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n).
 \end{aligned}$$

Tällöin kyseessä olisi yksiulotteinen optimointiprobleema, ja sille voitaisiin etsiä ratkaisua yksiulotteisten optimointimenetelmien avulla. Useimmiten hyötyfunktio ei kuitenkaan ole eksplisiittisesti tunnettu, jolloin kaavassa (2.2) esitetyn ongelman ratkaisuun joudutaan etsimään muita keinoja.

Monitavoiteoptimointiin on olemassa lukuisa joukko eri menetelmiä, jotka ovat lähestymistavoiltaan hyvin erilaisia. Yksi tapa monitavoiteoptimointiin kehitettyjen menetelmien ryhmittelyyn on jakaa ne kahteen joukkoon, joista voidaan käyttää nimityksiä arviointimenetelmät ja suunnittelumenetelmät (Korhonen, 1992). Seuraavassa esitellään tämän jaottelun mukaisesti yleisimmät lähestymistavat monitavoiteoptimointiin, esittely ei kuitenkaan pyri olemaan kattava eikä tyhjentävä. Asiasta laajemmin kiinnostuneet löytävät perusteellisempia esityksiä alan kirjallisuudesta (Steuer, 1986; Keeney & Raiffa, 1976; Hwang & Masud, 1979; Shin & Ravindran, 1991; Korhonen & al., 1992; Vincke, 1986; French, 1984; Roy & Vincke, 1981; Miettinen, 1994).

2.1 ARVIOINTIMENETELMÄT

Arviointimenetelmät ovat menetelmiä, joiden avulla voidaan vertailla olemassa olevaa (mahdollisesti ääretöntä) vaihtoehtojoukkoa, ja etsiä optimaalisin ratkaisu tästä joukosta. Näitä menetelmiä käytettäessä on olennaista, että ongelmanrakenne ja ratkaisuun vaikuttavat tekijät tunnetaan suhteellisen hyvin: päätöksentekijän pääasiallisena pulmana on vain valita mieluisin ratkaisu tarjolla olevien vaihtoehtojen joukosta.

Seuraavassa esitetään viisi arviointimenetelmää, jotka tavalla tai toisella perustuvat erilaisiin lähestymistapoihin.

2.1.1 MAUT

MAUT on lyhenne sanoista 'multiattribute utility theory', suomenkielisen nimityksen keksiminen jätetään (kuvitellun) lukijan tehtäväksi. MAUT on menetelmä, jossa päätöksentekijän hyötyfunktio pyritään konstruoimaan kysymällä päätöksentekijältä suoraan hyötyfunktioon liittyvää tietoa (Keeney & Raiffa, 1976; Fishburn, 1988; Farquhar, 1984; Roy & Bouysson, 1986).

Tämän menetelmän esittelyä varten otetaan käyttöön yksi uusi merkintä: merkinnällä $\langle p_1, y^1; \dots; p_k, y^k \rangle$ tarkoitetaan sitä, että vaihtoehto y^j toteutuu todennäköisyydellä p_j , $j=1, \dots, k$.

Tarkastellaan kahden muuttujan hyötyfunktia $U(y_1, y_2)$. Sanotaan, että muuttuja y_1 on hyötyriippumaton muuttujasta y_2 , jos päätöksentekijän ehdolliset preferenssit muuttujan y_1 kohdalla eivät riipu muuttujan y_2 arvoista. Toisin sanoen, jos joillakin arvoilla y_1' , y_1'' , y_1''' ja y_2' on voimassa, $(y_1', y_2') \sim \langle p, (y_1'', y_2'); (1-p), (y_1''', y_2') \rangle$ seuraa tästä, että päätöksentekijän mielestä kaikilla y_2 :n arvoilla y_2'' vaihtoehdot (y_1', y_2'') ja $\langle p, (y_1'', y_2''); (1-p), (y_1''', y_2'') \rangle$ ovat yhtä hyviä: $(y_1', y_2'') \sim \langle p, (y_1'', y_2''); (1-p), (y_1''', y_2'') \rangle$.

Jos muuttuja y_1 on hyötyriippumaton muuttujasta y_2 , ei tästä välttämättä seuraa, että muuttuja y_2 on hyötyriippumaton y_1 :sta. Jos muuttuja y_1 on hyötyriippumaton y_2 :sta ja y_2 on hyötyriippumaton y_1 :stä, sanotaan, että muuttujat y_1 ja y_2 ovat keskinäisesti hyötyriippumattomia.

Edellä esitetty määrittely voidaan yleistää r muuttujaa koskevak-
 si. Oletetaan, että muuttujia on r kappaletta $Y = \{y_1, \dots, y_r\}$, ja
 olkoon Z joukon Y osajoukko. Merkitään edelleen Z :n komplementtia
 symbolilla Z^c , $Y = Z \cup Z^c$, $Z \cap Z^c = \emptyset$. Sanotaan, että muuttujajou-
 kon Y osajoukko Z on hyötyriippumaton komplementistaan Z^c , jos
 muuttujajoukkoon Z liittyvät ehdolliset preferenssit eivät riipu
 muuttujajoukon Z^c alkioden arvoista. Edelleen sanotaan, että
 muuttujat $y_1, \dots, y_r$ ovat keskenään hyötyriippumattomia, jos joukon
 $\{y_1, \dots, y_r\}$ kaikki osajoukot ovat hyötyriippumattomia komplemen-
 teistaan. (Keskinäisen hyötyriippumattomuuden toteamiseksi
 muuttujajoukossa $Y = \{y_1, \dots, y_r\}$ ei tarvitse tutkia kaikkia joukon
 Y osajoukkoja, vaan asia saadaan selville vähemmälläkin vaivalla,
 esimerkiksi jos $r > 2$ ja joukot $\{y_i, y_{i+1}\}$, $i=1, \dots, r-1$ ovat hyöty-
 riippumattomia komplementeistaan, seuraa tästä koko muuttuja-
 joukon Y keskinäinen hyötyriippumattomuus. (Muita ehtoja, kts.
 esim. Keeney & Raiffa (1976), sivu 292.))

Voidaan osoittaa, että n keskenään hyötyriippumattoman muuttujan
 $y = (y_1, \dots, y_r)$ kohdalla hyötyfunktio $U(y)$ voidaan kirjoittaa joko
 additiiviseen

$$(2.3) \quad U(y) = \sum k_i U_i(y_i)$$

tai multiplikatiiviseen

$$(2.4) \quad kU(y) + 1 = \prod (kk_i U_i(y_i) + 1)$$

muotoon, missä $U_i(y_i)$ on muuttujaan y_i liittyvä hyötyfunktio, ja
 hyötyfunktio $U(y)$ ja $U_i(y_i)$, $i=1, \dots, r$, on skaalattu siten, että

$$(2.5) \quad U(\mathbf{y}^0) = 0, \quad U(\mathbf{y}^1) = 1$$

ja

$$(2.6) \quad U_i(\mathbf{y}_i^0) = 0, \quad U_i(\mathbf{y}_i^1) = 1.$$

Tässä $\mathbf{y}_i^0$ on huonoin arvo, jonka muuttuja y_i voi saada, $\mathbf{y}_i^1$ on muuttujan y_i paras mahdollinen arvo ja $\mathbf{y}^0 = (y_1^0, \dots, y_r^0)$, $\mathbf{y}^1 = (y_1^1, \dots, y_r^1)$.

Edelleen on

$$(2.7) \quad k_i = U(y_1^0, \dots, y_{i-1}^0, y_i^1, y_{i+1}^0, \dots, y_r^0).$$

Jos $\sum k_i = 1$, on kyseessä additiivinen muoto, muuten kyseessä on multiplikatiivinen muoto ja vakion k arvo voidaan määrittää kaavasta

$$(2.8) \quad 1 + k = \prod (1 + k k_i).$$

Edellä esitetty pitää paikkansa myös silloin, kun jokin muuttujista y_i on vektori, ts. voidaan muodostaa moniulotteinen hyötyfunktio $U(\mathbf{y})$ jonka 'alkioista' $U_i(\mathbf{y}_i)$ joku on moniulotteinen hyötyfunktio.

MAUTissa oletetaan, että muuttujat $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r)$ ovat hyötyriippumattomia, kuitenkin menettelyn kuluessa tämän oletuksen paikkansapitävyyttä pyritään tarkistamaan. Tulokseksi yritetään saada muotoa (2.3) tai (2.4) oleva monen muuttujan hyötyfunktio.

Jatkuvan muuttujan y_i kohdalla hyötyfunktio $U_i(y_i)$ voidaan konstruoida seuraavasti: aluksi valitaan muuttujan y_i suurin mahdollinen arvo y_i^1 ja pienin mahdollinen arvo y_i^0 . Hyötyfunktio $U_i(y_i)$ skaalataan siten, että $U_i(y_i^0) = 0$ ja $U_i(y_i^1) = 1$. Tämän jälkeen pyydetään päätöksentekijää valitsemaan sellainen muuttujan y_i arvo $y_i^{0.5}$, että $y_i^{0.5} \sim \langle 0.5, y_i^0; 0.5, y_i^1 \rangle$. Pisteessä $y_i^{0.5}$ on $U_i(y_i^{0.5}) = 0.5$. Vastaavasti pyydetään päätöksentekijää valitsemaan sellaiset pisteet $y_i^{0.25}$ ja $y_i^{0.75}$, että $y_i^{0.25} \sim \langle 0.5, y_i^0; 0.5, y_i^{0.5} \rangle$ ja $y_i^{0.75} \sim \langle 0.5, y_i^{0.5}; 0.5, y_i^1 \rangle$. Tätä menettelyä jatketaan, kunnes on saatu riittävästi tietoa hyötyfunktion määrittämiseksi. Saatuihin pisteisiin voidaan sovittaa jokin esim. muotoa (1.9)-(1.11) oleva hyötyfunktio tai hyötyfunktio $U_i(y_i)$ voidaan määritellä interpoloimalla saatujen pisteiden välillä.

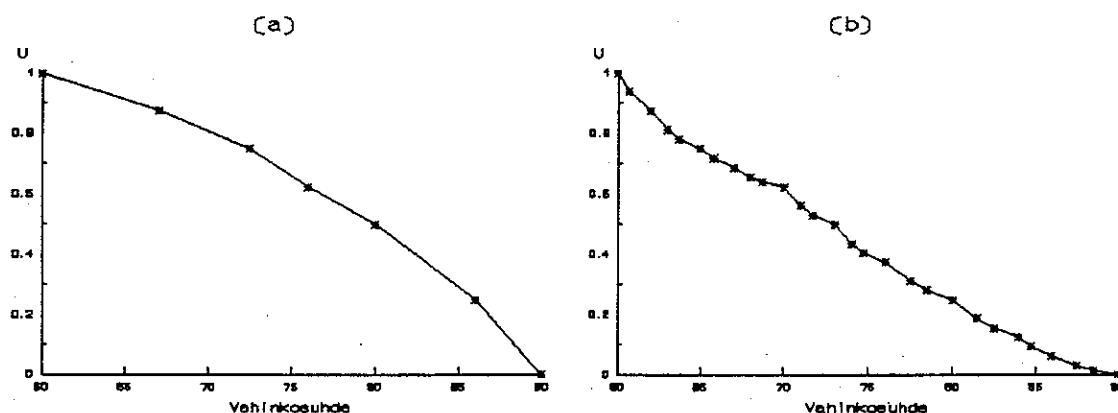
Toinen vaihtoehto on pyytää päätöksentekijää valittujen pisteiden y_i^q kohdalla ilmoittamaan se todennäköisyys p , että hänen mielestään $y_i^q \sim \langle p, y_i^0; 1-p, y_i^1 \rangle$. Tätä menettelyä voidaan käyttää esimerkiksi silloin, kun kaikki muuttujan y_i arvot välillä (y_i^0, y_i^1) eivät ole mielekkäitä.

Tässä lueteltujen lisäksi hyötyfunktion määrittämiseen on kehitetty myös joukko menetelmiä, joissa päätöksentekijä ei joudu vertailemaan muuttujien vaihteluvälin ääriarvoja keskenään, ja tällöin vertailujen teko voi olla helpompaa (kts. esim. Keeney & Raiffa, 1976; Farquhar, 1984).

ESIMERKKI 2.1

Seuraavassa kuviossa 2.1 (a) on esitetty eräässä suomalaisessa vakuutusyhtiössä työskentelevän matemaatikon hyötyfunktio suureen 'vahinkosuhde' suhteen, kun vahinkosuhde on välillä [60%, 90%].

Tämä hyötyfunktio on määritetty sivulla 16 esitettyä menettelyä käyttäen. Kuten kuvasta havaitaan, on käyrä konkaavi, joten kyseinen henkilö on riskinkaihtaja vahinkosuhteen ollessa kyseessä. Samassa kuviossa toisena kuvana (b) on erään toisen suomalaisen vakuutusyhtiön palveluksessa olevan aktuaarin vastaava hyötyfunktio. Tätä funktiota voidaan pitää hieman konveksina, joten kyseistä henkilöä voidaan pitää vahinkosuhteen kohdalla tarkasteltavalla vaihteluvälillä hiukan jopa riskinottajana. //



KUVIO 2.1 Esimerkkejä hyötyfunktioista

Vakiot k_i voidaan määrittää esimerkiksi pyytämällä päätöksentekijää valitsemaan sellainen todennäköisyys p_i että $\langle Y_1^0, \dots, Y_{i-1}^0, Y_i^1, Y_{i+1}^0, \dots, Y_r^0 \rangle \sim \langle p_i, Y^1; (1-p_i), Y^0 \rangle$. Kaavojen (2.3)-(2.7) perusteella on nyt $k_i = p_i$.

Toinen vaihtoehto vakioiden k_i määrittämiseen on etsiä sellaiset muuttujien y_i ja y_j arvot y_i' ja y_j' , että päätöksentekijän mielestä vaihtoehdot (y_i^0, y_j') ja (y_i', y_j^0) ovat yhtä hyviä muiden

muuttujien arvojen ollessa vakioita. Nyt kaavojen (2.3)-(2.7) mukaan

$$(2.9) \quad k_i U_i(y_i') = k_j U_j(y_j').$$

Muodostamalla r kappaletta tällaisia yhtälöitä, voidaan vakiot k_i ratkaista.

Vakioiden k_i määrittämiseksi edellä esitettyjen menettelyiden ongelmana on se, että päätöksentekijä joutuu vertailemaan muuttujien y_i ääriarvoja keskenään. Jos muuttujien vaihteluvälit (y_i^0, y_i^1) ovat hyvin laajoja, ei tällainen vertailu välttämättä ole helppoa. Vakioiden k_i määrittämiseksi voidaan muuttujien $y_1, \dots, y_r$ arvot kiinnittää jollekin 'luontevalle' tasolle ja etsiä vakioiden k_i, k_j suhteellisia arvoja vaihtelemalla kahden muuttujan y_i ja y_j arvoja kerrallaan.

Saatujen vastausten johdonmukaisuutta voidaan testata lisäkysymyksillä. Jos esimerkiksi kolme muuttujan y_1, y_2, y_3 tilanteessa päätöksentekijän mielestä on $(y_1^1, y_2^0, y_3^0) > (y_1^0, y_2^1, y_3^1)$, täytyy tällöin olla $k_1 > k_2 + k_3$.

Vakioiden k_i saamat arvot riippuvat muuttujille $y_i, i=1, \dots, r$, valittujen ala- ja ylärajojen y_i^0, y_i^1 arvoista. Valitut ala- ja ylärajat y_i^0, y_i^1 puolestaan vaihtelevat optimointitilanteittain. Täten kertoimien k_i arvojen perusteella ei voida tehdä mitään yleisiä tulkintoja muuttujien $y_i, i=1, \dots, r$, keskinäisestä tärkeydestä.

Keskinäinen hyötyriippumattomuutta täytyy luonnollisesti testata

hyötyfunktioita $U(y)$ muodostettaessa. Jos muuttujia on esimerkiksi kaksi $y = (y_1, y_2)$, ja halutaan selvittää onko y_1 hyötyriippumaton muuttujasta y_2 , voidaan muuttujalle y_2 valita s kappaleita arvoja, joille se kiinnitetään: $y_2'^1, \dots, y_2'^s$. Tämän jälkeen muuttujalle y_1 valitaan jokin arvo $y_1'^1$ ja päätöksentekijää pyydetään vertailemaan vaihtoehtoja y_1' ja $\langle 0.5, y_1^0; 0.5, y_1^1 \rangle$, kun y_2 :lla on arvo $y_2'^1$. Arvoa $y_1'^1$ muutellaan niin kauan, kunnes $y_1'^1 \sim \langle 0.5, y_1^0; 0.5, y_1^1 \rangle$. Menettely toistetaan kaikilla valituilla muuttujan y_2 tasoilla. Jos hyötyriippumattomuus pitää paikkansa, täytyy olla $y_1'^1 = y_1'^2 = \dots = y_1'^s$. Vastaavaa menettelyä voidaan käyttää myös silloin, kun muuttujia on enemmän kuin kaksi.

Vaikka hyötyriippumattomuus ei aivan pitäisikään paikkaansa, on additiivinen tai multiplikatiivinen hyötyfunktio kuitenkin usein hyvä approksimaatio varsinaiselle hyötyfunktiolle. Kuitenkin vaikka hyötyriippumattomuusoletuksesta joudutaan kokonaan luopumaan, ei peli ole silti vielä kokonaan menetetty. Hyötyfunktio voidaan vielä saada kasaan (esimerkiksi) seuraavilla menettelyillä.

- a) Muunnos: alkuperäisiin muuttujiin tehdään jokin (mielekäs) muunnos, jonka avulla saadaan hyötyriippumattomia muuttujia.
- b) Hyötyriippumattomuus jossain y :n arvoalueen osajoukoissa. Voi olla mahdollista, että muuttujat $y = (y_1, \dots, y_r)$ eivät ole hyötyriippumattomia koko arvoalueella, mutta hyötyriippumattomuus toteutuu y :n arvoalueen osajoukoissa. Tällöin y :n arvoalue pilkotan palasiin ja hyötyfunktiot määritellään kussakin palasessa erikseen. Tällöin täytyy noudattaa riittävää huolellisuutta,

jotta funktio $U(y)$ saadaan kunnolla skaalattua.

c) Suora hyötyfunktion $U(y)$ määrittäminen. Tämä menetelmä on suhteellisen hankala, varsinkin, jos muuttujia on useita. Käytännössä toimitaan niin, että valitaan edustava joukko pisteitä $y^q = (y_1^q, \dots, y_r^q)$, $y_1^0 \leq y_1^q \leq y_1^1$. Tämän jälkeen pyydetään päätöksentekijää ilmoittamaan sellainen arvon p , että $y^q \sim \langle p, y^0; 1-p, y^1 \rangle$. Vastauksena saatuihin pisteisiin voidaan sovittaa jokin (moniuulotteinen) funktio tai pisteiden välillä voidaan harrastaa interpolointia.

d) Keskinäistä hyötyriippumattomuutta lievempien oletusten ollessa voimassa saadaan hyötyfunktio helpomin kuin kohdassa c).

Jos esimerkiksi $y = (y_1, y_2)$ ja y_1 on hyötyriippumaton y_2 :sta, voidaan hyötyfunktio $U(y)$ kirjoittaa muotoon

$$(2.10) \quad U(y) = U(y_1, y_2^0)(1 - U(y_1^0, y_2)) + U(y_1, y_2^1)U(y_1^0, y_2)$$

jolloin siis joudutaan määrittämään kaksi hyötyfunktiota muuttujan y_1 suhteen ja yksi hyötyfunktio muuttujan y_2 suhteen.

Toisena esimerkkinä tarkastellaan tapausta, missä kukin muuttuja y_i , $i=1, \dots, n$, on riippumaton komplementistaan. Nyt edellä esitetyt kaavat (2.3) ja (2.4) yleistää muotoon

$$(2.12) \quad U(y) = \sum_i k_i U(y_i) + \sum_i \sum_{j \neq i} k_{ij} U_i(y_i) U_j(y_j) + \sum_i \sum_{j \neq i} \sum_{h \neq i, j} k_{ijh} U_i(y_i) U_j(y_j) U_h(y_h) + \dots + k_{12 \dots r} U_1(y_1) \dots U_r(y_r).$$

Nyt kuitenkin tarvitaan arvot tarvitaan $2^r - 2$ vakiolle,

joten jos r on suuri, on tällaisen hyötyfunktion määrittäminen työlästä.

Edellisten lisäksi on joukko täydellistä keskinäistä hyötyriippumattomuutta lievempiä oletuksia, joiden toteutuessa hyötyfunktion määrittäminen helpottuu.

Hyötyfunktioita $U(y)$ voidaan käyttää kaavassa (1.1) esitetyn ongelman tilanteessa, jolloin siis on $y_i = f_i(x_1, \dots, x_n)$, $i=1, \dots, r$. Tätä menettelyä sovelletaan kuitenkin usein silloin, kun $r=n$ ja $y_i = x_i$, $i=1, \dots, r$.

Kun hyötyfunktio $U(y)$ on tavalla tai toisella saatu kasaan, on eri vaihtoehtojen vertailu hyvin suoraviivaista. Jos muuttujien $x = (x_1, \dots, x_n)$ mahdollisten arvojen joukko on suhteellisen pieni, voidaan hyötyfunktion $U(y)$ arvo laskea kaikissa pisteissä; paras piste on tietenkin se, jossa hyötyfunktion arvo on suurin. Jos kaikkien mahdollisten pisteiden läpikäynti ei ole mahdollista, voidaan hyötyfunktion $U(y)$ optimointi tehdä jollakin yksiulotteiseen (rajoitettuun) optimointiin tarkoitetulla menetelmällä.

Tätä menettelyä voidaan soveltaa myös silloin, kun optimointitilanteeseen liittyy epävarmuutta. Jos muuttujat y_i , $i=1, \dots, r$, ovat satunnaismuuttujia, helpottuu ongelman käsittely jos muuttujat ovat riippumattomia.

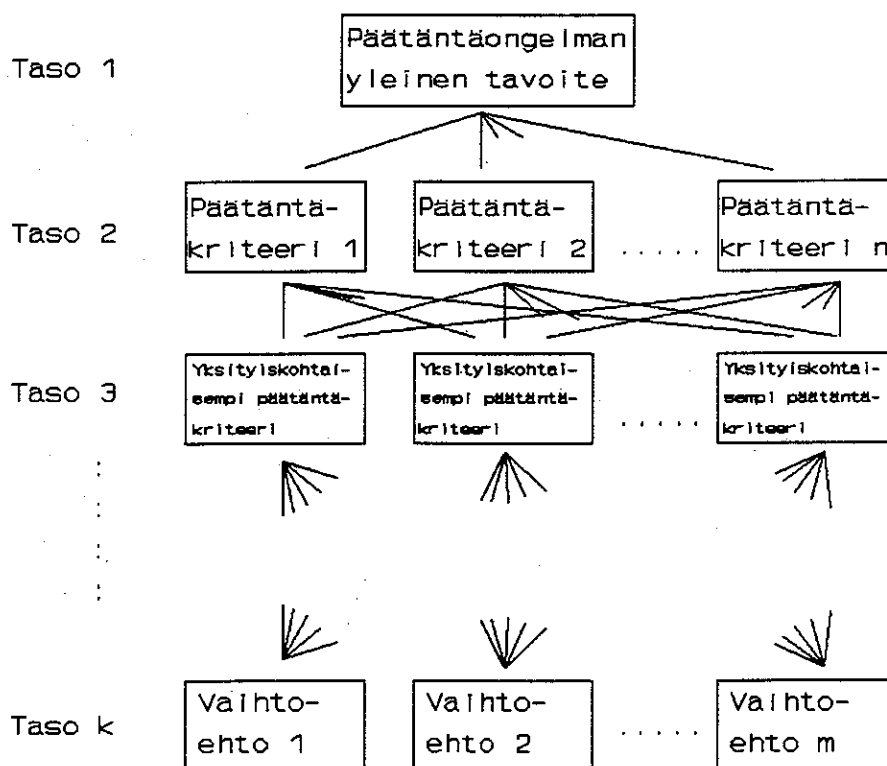
2.1.2 AHP

Tämä lyhenne AHP tulee sanoista 'analytical hierarchy process', jolle voi antaa vaikkapa vapaan suomennoksen 'analyttinen hierarkiaprosessi'. Tämä menetelmä on saavuttanut suurta suosiota ja sitä onkin sovellettu hyvin monilla eri aloilla (Saaty, 1982; Vargas, 1990). Kuriositeettina mainittakoon, että tämä menetelmä on pohjana Tilastokeskuksen ennen Suomen EU-äänestystä markkinoimassa EU-testissä, jonka avulla voi mikrotietokonetta käyttäen selvittää omaa suhtautumistaan Euroopan Unioniin (Pietiläinen, 1994). AHP:n perusidea on, että tarkasteltava monitavoiteoptimointiongelma pilkotaan aluksi hierarkkiseksi rakenteeksi, jolloin ongelmaa on helpompi käsitellä. Eri osien arvioinnin jälkeen eri palaset kootaan yhteen, jolloin saadaan järjestys eri vaihtoehtojen välille. Eri vaihtoehtojen varsinainen arviointi tehdään pareittaiten vertailujen avulla (Zahedi, 1986; Saaty, 1982; Saaty, 1990).

Menetelmä koostuu neljästä vaiheesta:

- Vaihe 1: Muodostetaan päätöshierarkia jakamalla päätösongelma keskenään riippuviin päätöselementteihin.
- Vaihe 2: Kerätään tarvittava tieto päätöselementtien pareittaiten vertailujen avulla.
- Vaihe 3: Ominaisarvomenettelyn avulla arvioidaan suhteelliset painot eri päätöselementeille.
- Vaihe 4: Yhdistämällä kaikkien tasojen eri elementtien suhteelliset painot saadaan eri vaihtoehtojen lopullinen järjestys.

Vaiheessa 1, joka on ehkäpä tärkein edellä luetelluista vaiheista, päätäntäongelma pilkotaan keskenään riippuvien päätöselementtien hierarkkiseksi rakenteeksi. Ylimpänä hierarkiassa on päätäntäongelman yleisin tavoite ja alimpana hierarkiassa ovat eri vaihtoehdot. Näiden välillä olevat tasot muodostuvat päätäntäkriteereistä sillä tavalla, että mitä alemmaksi hierarkiassa mennään, sitä yksityiskohtaisemmasta kriteeristä on kysymys. Yksinkertaisimmassa tilanteessa päätäntäkriteerejä on vain yhdellä tasolla. Yleinen hierarkian muoto on esitetty seuraavassa kuviossa.



KUVIO 2.2 Päätäntäongelman hierarkkinen rakenne

Jotkut tason k kriteerit voivat liittyä vain yhteen tason k-1 kriteeriin, tällöin hierarkiaa kutsutaan epätäydelliseksi.

Kriteerit ovat yleensä päätäntäongelman yleiseen tavoitteeseen tai ylemmän tason kriteeriin liittyviä ominaisuuksia tai attribuutteja, mutta ne voivat olla myös esim. skenaarioita.

Vaikka tätä menetelmää käytetään yleensä päätöksentekoon, jossa käsillä olevista vaihtoehtoista valitaan mieluisin, voidaan tätä menettelyä käyttää eri vaihtoehtojen järjestämiseen. Samoin voi olla tilanteita, jossa ei ole mielekästäkään pyrkiä yhden vaihtoehdon valintaan, vaan tämän menettelyn tuloksena saadaan jonkinlainen suhteellinen tärkeysjärjestys.

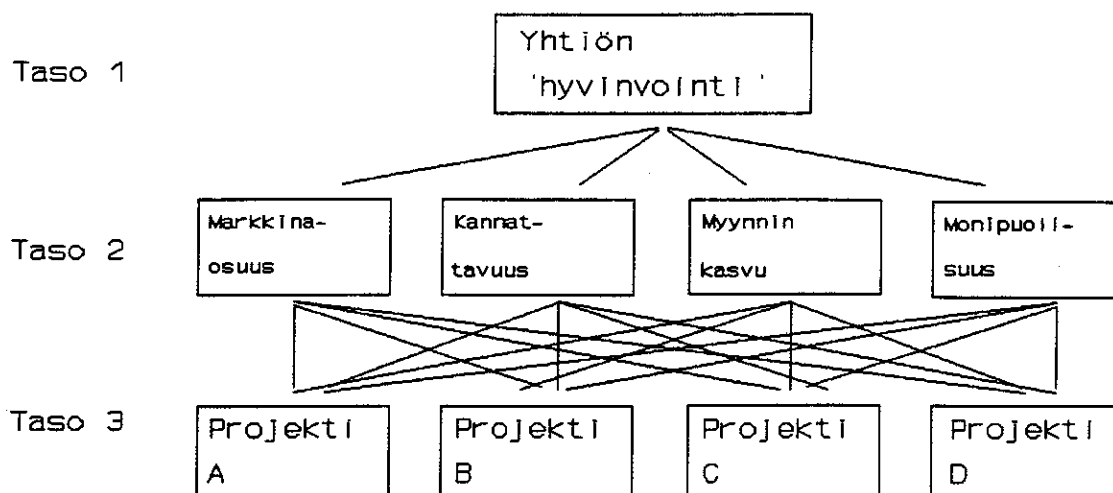
ESIMERKKI 2.2

Tarkastellaan yhtiön ongelmaa, jossa vaihtoehtoina ovat projektit A, B, C ja D. Tavoitteena on eräänlainen yhtiön 'hyvinvointi'. Tässä eri projektien lopullista järjestystä ei välttämättä ole mielekästä tulkita minkäänlaiseksi ehdottomaksi paremmuusjärjestykseksi, vaan se kuvaa eräänlaista suhteellista paremmuutta: mitä paremmaksi jokin projekti on tässä tulkittu, sitä enemmän siihen vaihtoehtoon kannattaa sijoittaa kohdistaa resursseja. Tietenkin jos kaikkia projekteja ei ole mahdollista jatkaa, voidaan tämän tyyppistä analyysia käyttää apuna valittaessa jatkettavia/lopetettavia projekteja.

a) Tarkastellaan aluksi tilannetta, jossa kriteereiksi on valittu yhtiön

markkinaosuus, kannattavuus, myynnin kasvu ja monipuolisuus.

Tämän ongelman hierarkkinen rakenne on esitetty kuviossa 2.3.



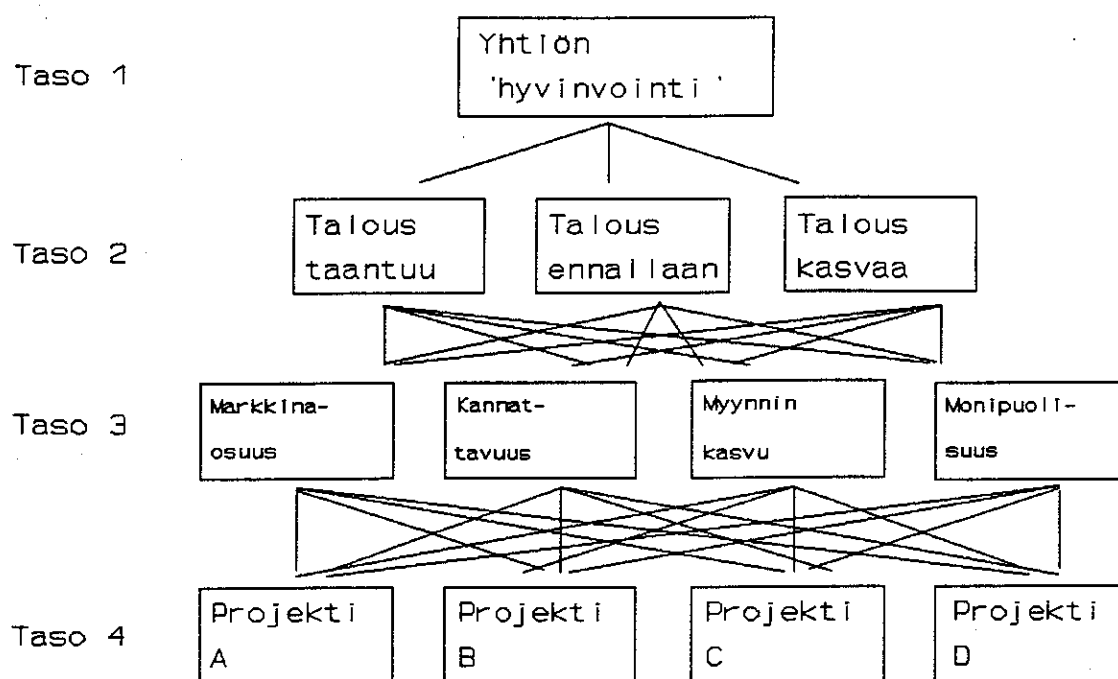
KUVIO 2.3 Esimerkin 2.2 a) ongelman hierarkkinen rakenne

b) Lisätään edellä kohdassa a) esitettyyn tarkasteluun vielä taloudellista kehitystä kuvaava kriteeri, jossa vaihtoehtoina ovat

talous taantuu, pysyy ennallaan tai kasvaa.

Tämä kriteeri voidaan nyt tulkita eräänlaiseksi skenaariokriteeriksi. Nyt eri projektien 'hyödyllisyyttä' voitaisiin tarkastella tulevan oletetun talouskehityksen valossa tai - mikä ehkä antoisampaa - verrata eri vaihtoehtoja, kun talouden tulevasta kehityksestä ei voida tehdä olettamuksia tai - mikä ehkä antoisinta - sellaisen resurssien jaon muodostamiseen, joka takaa 'hyvän' tuloksen talouden kehityksestä riippumatta. Tämän ongelman hierarkkinen rakenne on esitetty kuviossa 2.4. //

AHP:n toisessa vaiheessa suoritetaan kullakin kriteeritasolla (>1) eri elementtien pareittainen vertailu kunkin ylemmän tason



KUVIO 2.4 Esimerkin 2.2 b) ongelman hierarkkinen rakenne

kriteerin suhteen. Tämän vertailun lopputuloksena saadaan eri elementtien suhteellista tärkeyttä kuvaava vektori (jonkin seuraavalla tasolla olevan kriteerin suhteen). Jos tämä vektori $w' = (w_1, \dots, w_n)$ tunnettaisiin tarkasti, voitaisiin tarkasteltavan tason n elementistä muodostaa pareittaista vertailua kuvaava matriisi A' :

$$(2.12) \quad A' = \begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ : & & & \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{bmatrix}.$$

Koska vektori w' ei ole tunnettu, joudutaan sille etsimään arvio. Aluksi muodostetaan matriisi $A = [a_{ij}]_{n \times n}$, jonka lävistäjän alkioiksi asetetaan ykköset: $a_{ii} = 1$, $i=1, \dots, n$. Muut matriisin

A alkiot löydetään vertailemalla eri alkioita pareittain (tarkasteltavan ylemmän tason kriteerin suhteen). Jos esimerkiksi alkiota i pidetään 2 kertaa parempana kuin alkiota j , asetetaan $a_{ij} = 2$ ja $a_{ji} = 1/2$. Näiden lukuarvojen suora asettaminen voi olla päätöksentekijälle hankalaa, jolloin voidaan käyttää arvoja $1, 2, \dots, 9$ ($1/9, 1/8, \dots, 1$) seuraavasti:

1 = vertailtavat elementit ovat yhtä hyviä

3 = toinen elementti on vähän toista parempi

5 = toinen on melko selvästi toista parempi

7 = toinen on selvästi toista parempi

9 = toinen on erittäin selvästi toista parempi,

ja arvot 2, 4, 6 ja 8 ovat näiden väliarvoja.

AHP:n kolmannessa vaiheessa ratkaistaan suhteellista tärkeyttä kuvaava vektori w yhtälöstä

$$(2.13) \quad Aw^T = \lambda_{\max} w^T,$$

missä $\lambda_{\max}$ on matriisin A suurin ominaisarvo (ja w^T on vastaava oikeanpuoleinen ominaisvektori).

On selvää, että matriisin A alkioilta voidaan vaatia johdonmukaisuutta. Mikäli n on suurempi kuin kolme ja jos alkion i ja alkioin j suhde on a_{ij} ja alkioiden j ja k suhde on a_{jk} on periaatteessa $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$. Matriisin A johdonmukaisuuden tutkimiseksi määritellään johdonmukaisuusindeksi C_I

$$(2.14) \quad C_I = (\lambda_{\max} - n)/(n-1)$$

ja johdonmukaisuussuhde C_R

$$(2.15) \quad C_R = (C_I/C_A) \cdot 100,$$

missä suure C_A satunnaisesti generoituja lukuarvoja a_{ij} vastaava keksimääräinen johdonmukaisuusindeksi. Jos arvot a_{ij} valitaan joukosta $\{1/9, 1/8, \dots, 1, \dots, 8, 9\}$ edellä esitetyllä tavalla, on suureen C_A arvo seuraava:

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
C_A	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51

Voidaan osoittaa, että arvo $\lambda_{\max}$ on aina suurempi kuin n. Mitä johdonmukaisempi on matriisi A, sitä lähempänä arvo $\lambda_{\max}$ on lukua n, ja sitä pienemmän arvon suure C_R saa. Jonkinlaisena nyrk-kisääntönä pidetään sitä, että johdonmukaisuussuhteen C_R arvo pitäisi olla pienempi kuin kymmenen, muuten matriisin A arvot joudutaan arvioimaan uudellaan.

Edellä esitetyn ominaisarvomenettelyn lisäksi on olemassa myös muita tapoja painovektorin w määrittämiseksi, mutta ominaisarvomenettely on käytetyistä tavoista tunnetuin.

Vaiheessa 4 yhdistetään edellisessä vaiheessa saadut painot ja tuloksena saadaan eri vaihtoehtojen lopullinen järjestys. Oletetaan, että tasolla i elementtien määrä on n_i . Olkoon B_i matriisi, jonka rivin i muodostaa vaiheessa 3 muodostettu alkioon i liittyvä tason i+1 alkioden suhteellista tärkeyttä kuvaava vektori w. Nyt tason elementtien järjestystä kuvaava vektori tason 1 suhteen $C[1,k]$ saadaan kaavan

(2.16)

$$C[1, k] = \prod_{i=2}^k B_i$$

avulla.

AHP:tä voidaan käyttää myös kustannus-hyöty -analyysiin muodostamalla tarkasteltavan asian kustannukselle ja hyödyille erillinen hierarkia, jotka analysoidaan erikseen. Näin eri vaihtoehdoille saadaan sekä kustannusta että hyötyä kuvaava indeksi. Vaihtoehdot saadaan järjestettyä hyöty- ja kustannusindeksien suhteen mukaiseen järjestykseen.

AHP:tä voidaan käyttää apuna myös suunnittelussa.

a) Tavallisin suunnittelumuoto on ns. 'eteenpäin tapahtuva suunnittelu', jossa systeemin tuleva tila pyritään ennustamaan systeemin elementtien nykyisen tilan perusteella ottaen huomioon mahdolliset tulevaisuusskenaariot.

b) Toinen suunnittelutapa on ns. 'taaksepäin tapahtuva suunnittelu', jossa pyritään halutun tulevaisuuden saavuttamiseen; arvioinnin kohteena ovat tällöin vaihtoehtoiset toimintatavat. Tällaista menettelyä voidaan käyttää apuna esim. jaettaessa resursseja eri projekteille.

c) Kolmatta suunnittelutapaa nimitetään 'eteenpäin-taaksepäin -suunnitteluksi', jossa ensin arvioidaan tulevaisuutta 'eteenpäin' nykyisen tilanteen valossa, ja tämän jälkeen suunnittelemalla 'taaksepäin' saadaan vaihtoehdot halutun tulevaisuuden saavuttamiseksi. Näin saadut vaihtoehdot lisätään 'eteenpäin' malliin, jolloin niiden vaikutusta voidaan tutkia. Tätä menettelyä voidaan toistaa useampiakin kertoja.

AHP:tä voidaan kritisoida eri elementtien välisen vertailun

jäykkyydestä: eri elementtien välinen suhde ei välttämättä pysy vakiona koko tarkastelualueella. Lisäksi joissakin tapauksissa eri elementtien keskinäisen paremmuuden arviointi voi olla hankalaa sillä tarkkuudella, kuin tässä menetelmässä edellytetään. Ennen kuin AHP:n avulla tuotettujen tulosten perusteella tehdään lopullisia suurisuuntaisia ratkaisuja, kannattaakin suorittaa jonkinlainen herkkyysanalyysi.

2.1.3 ELECTRE

Electre on lähinnä Euroopan ranskankielisellä alueella kehitetty monitavoiteoptimointimenetelmä, jota voidaan käyttää eri vaihtoehtojen vertailuun silloin, kun vaihtoehtoja on äärellinen määrä. Tässä menetelmässä konstruoidaan relaatio, jonka avulla eri vaihtoehdot voidaan järjestää (Roy, 1978; Roy & Bouyssou, 1986).

Oletetaan, että vaihtoehtojen lukumäärä on R ja olkoon vaihtoehtojen joukko $X = \{x^1, x^2, \dots, x^R\}$. Olkoon kriteerifunktioiden lukumäärä r , ja käytetään kriteerifunktion f_i arvosta vaihtoehdon x^j kohdalla merkintää $f_i(x^j)$, $i=1, \dots, r$, $j=1, \dots, R$.

Tässä menetelmässä minkä tahansa kahden vaihtoehdon x^s ja x^t kohdalla on mahdollista arvioida väittämiä

$$(2.17) \quad x^s \text{ on ainakin yhtä hyvä kuin } x^t$$

ja

(2.18) x^t on ainakin yhtä hyvä kuin x^s .

Näistä väittämistä kumpi tahansa voidaan hyväksyä tai hylätä, tai väittämän luotettavuutta voidaan arvioida. On huomattava, että toisen väitteen hyväksyminen tai hylkääminen ei anna mitään tietoa toisesta väittämästä. Jos molemmat väittämät hylätään, sanotaan, että vaihtoehdot x^s ja x^t eivät ole vertailtavissa.

Väitteen (2.17) tutkimiseksi vertaillaan kunkin kriteerin f_i kohdalla arvoja $f_i(x^s)$ ja $f_i(x^t)$. Jokaiselle kriteerille f_i päätöksentekijä valitsee mahdollisesti arvosta $f_i(x^t)$ (tai arvosta $f_i(x^s)$) riippuvat kynnsarvot $q_i = q_i(f_i(x^t))$ ja $p_i = p_i(f_i(x^t))$. Vaihtoehtoja x^s ja x^t arvioidaan kriteerin f_i kohdalla seuraavien sääntöjen mukaan:

(2.19) jos $0 \leq (f_i(x^s) - f_i(x^t)) \leq q_i$, on $x^s \sim x^t$
 jos $q_i \leq (f_i(x^s) - f_i(x^t)) \leq p_i$, on $x^s > x^t$ heikosti
 jos $p_i \leq (f_i(x^s) - f_i(x^t))$, on $x^s > x^t$ vahvasti.

Kynnsarvojen q_i ja p_i lisäksi otetaan käyttöön kolmas kynns, ns. veto-kynns, joka voi myös riippua arvosta $f_i(x^t)$: $v_i = v_i(f_i(x^t))$. Tämän kynnsarvon tarkoituksena on estää, että vaihtoehtoa x^s ei tulkittaisi vaihtoehtoa x^t paremmaksi silloin, kun x^s on (hieman) parempi vähemmän tärkeiden kriteerien kohdalla, kun taas x^t on huomattavasti parempi jonkin tärkeämmän kriteerin kohdalla. Arvo v_i valitaan siis sitä pienemmäksi, mitä tärkeämmästä kriteeristä on kysymys.

Kaavan (2.19) perusteella voidaan arvioida eri vaihtoehtojen keskinäistä paremmuutta yhden kriteerin kohdalla. Jotta pys-

tyttäisiin arvioimaan väitteiden (2.17) ja (2.18) luotettavuutta, täytyy eri kriteerien kohdalla tehty vertailu pystyä yhdistämään. Määritelläänkin aluksi vaihtoehtoparille $\mathbf{x}^s$ ja $\mathbf{x}^t$ kunkin kriteerin f_i kohdalla (keskinäisen paremmuuden luotettavuutta kuvaava) luku $d_i(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^t)$, $0 \leq d_i(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^t) \leq 1$, joka saa seuraavat arvot:

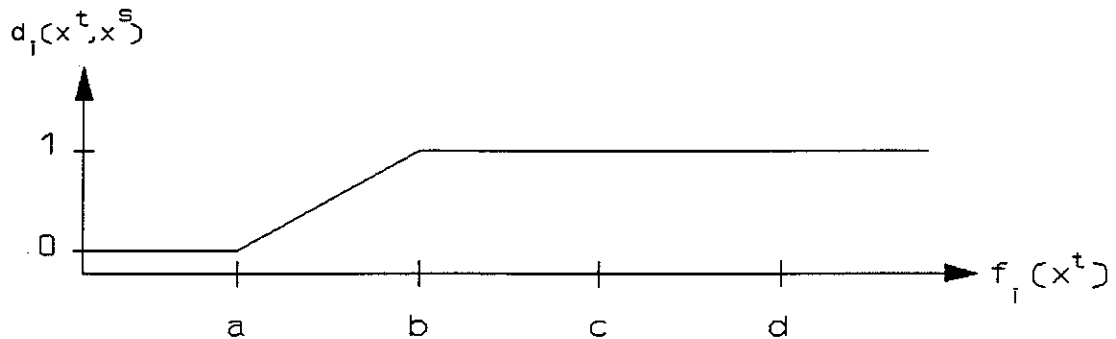
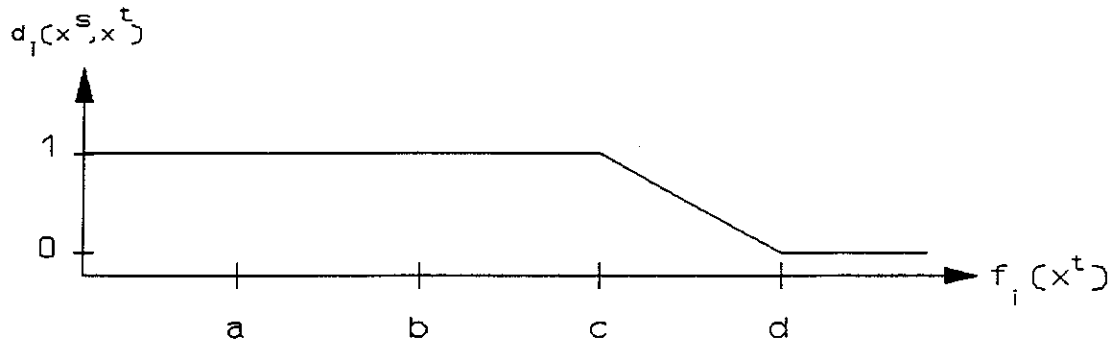
$$(2.20) \quad \begin{aligned} d_i(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^t) &= 1, \text{ jos } (f_i(\mathbf{x}^s) - f_i(\mathbf{x}^t)) \leq 0 \\ d_i(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}^s) &= 0, \text{ jos } (f_i(\mathbf{x}^s) - f_i(\mathbf{x}^t)) \leq s_i \\ d_i(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}^s) &= 1, \text{ jos } 0 \leq (f_i(\mathbf{x}^s) - f_i(\mathbf{x}^t)) \leq q_i. \end{aligned}$$

Mikäli $q_i \neq p_i$ ja $q_i < (f_i(\mathbf{x}^s) - f_i(\mathbf{x}^t)) < p_i$, on arvo $d_i(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}^s)$ määrittämätön edellä esitettyjen sääntöjen perusteella. Sovelletaan tässä tapauksessa lineaarista interpolointia, jolloin suure $d_i(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}^s)$ saadaan määriteltä seuraavalla kaavalla

$$(2.21) \quad \begin{aligned} d_i(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}^s) &= \frac{(s_i - \min\{f_i(\mathbf{x}^s) - f_i(\mathbf{x}^t), s_i\})}{(s_i - \min\{f_i(\mathbf{x}^s) - f_i(\mathbf{x}^t), s_i\})}, \text{ kun } q_i \neq p_i \\ d_i(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}^s) &= 1, \text{ kun } q_i = p_i \text{ ja } f_i(\mathbf{x}^t) \leq q_t \\ d_i(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}^s) &= 0, \text{ kun } q_i = p_i \text{ ja } f_i(\mathbf{x}^s) > q_t \end{aligned}$$

Suureiden $d_i(\mathbf{x}^t, \mathbf{x}^s)$ ja $d_i(\mathbf{x}^s, \mathbf{x}^t)$ määräytymistä $f_i(\mathbf{x}^t)$:n funktiona on selvennetty seuraavassa kuviossa 2.5. Tässä kuvassa piste $a = f_i(\mathbf{x}^s) - s_i(f_i(\mathbf{x}^t))$, $b = f_i(\mathbf{x}^s) - q_i(f_i(\mathbf{x}^t))$, $c = f_i(\mathbf{x}^s) + q_i(f_i(\mathbf{x}^s))$ ja $d = f_i(\mathbf{x}^s) + s_i(f_i(\mathbf{x}^s))$.

Edellä määritellyn veto-kynnyksen v_i suuruus kuvastaa tietyllä tavalla kriteerin f_i suhteellista tärkeyttä. Tämän veto-kynnyksen lisäksi kriteerien suhteellista tärkeyttä kuvataan painokertoimilla $k_i > 0$, $i=1, \dots, r$, $\sum k_i = 1$, jotka ovat päätöksentekijän valittavissa. Näitä painokertoimia käytetään määriteltäessä



KUVIO 2.5 Suureet $d_i(x^t, x^s)$ ja $d_i(x^s, x^t)$

suure $C(x^t, x^s)$:

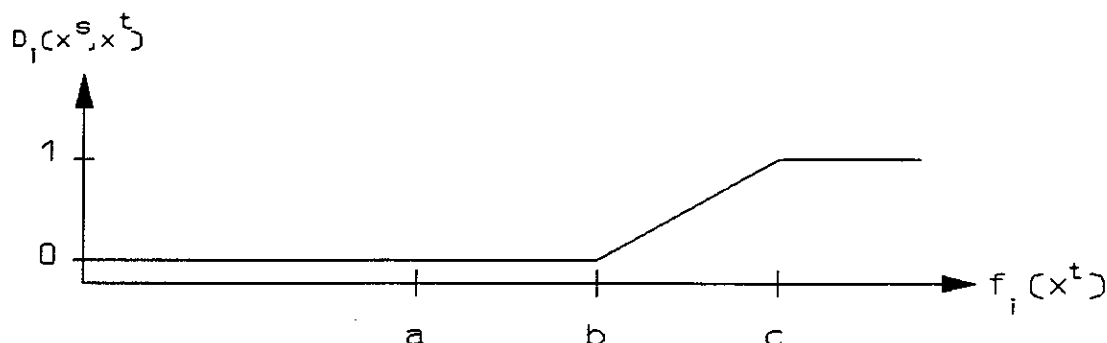
$$(2.22) \quad C(x^t, x^s) = \sum k_i d_i(x^t, x^s)$$

Tämä suure kuvaa eräällä tavalla, kuinka hyvin tehdyt havainnot ovat sopusoinnussa väitteen (2.18) kanssa. Aiemmin määriteltujen veto-kynnysten v_i , $i=1, \dots, r$, takia ei tämä suure tällaisenaan ole kaikissa tilanteissa riittävä. Tämän takia otetaankin käyttöön apusuureet $D_i(x^t, x^s)$, $i=1, \dots, r$:

$$(2.23) \quad D_i(x^t, x^s) = \min(1, \max(0, (f_i(x^s) - f_i(x^t) - s_i) / (v_i - s_i))).$$

Suure $D_i(x^t, x^s)$ määräytyy nyt $f_i(x^t)$:n funktiona seuraavassa kuviossa 2.6 nähtävällä tavalla. Tässä kuvassa piste $a = f_i(x^s)$,

$$b = f_i(x^s) + s_i(f_i(x^s)) \text{ ja } c = f_i(x^s) + v_i(f_i(x^s)).$$



KUVIO 2.6 Suure $D_i(x^t, x^s)$

Määritellään nyt edellä esitettyjen suureiden $C(x^t, x^s)$ ja $D_i(x^t, x^s)$ avulla suure $d(x^t, x^s)$ kuvaamaan kuinka hyvin tehdyt havainnot ovat sopusoinnussa väitteen (2.18) kanssa. Helposti havaitaan, että jos on $d_i(x^t, x^s) > 0$, on $D_i(x^t, x^s) = 0$. Jos kaikilla i , $i=1, \dots, r$, on $d_i(x^t, x^s) > 0$, on tällöin on hyvin luonnollista asettaa

$$(2.24) \quad d(x^t, x^s) = C(x^t, x^s).$$

Tarkastellaan tilannetta, jossa on olemassa yksi sellainen indeksi j , $1 \leq j \leq r$, että on $D_j(x^t, x^s) > 0$. Tällöin on siis $d_j(x^t, x^s) = 0$, ja kriteeri j ei vaikuta suureeseen $C(x^t, x^s)$, joten selvästi $C(x^t, x^s) < 0$. Asetetaan tässä tilanteessa

$$(2.25) \quad d(x^t, x^s) = C(x^t, x^s), \text{ jos } D_j(x^t, x^s) \leq C(x^t, x^s),$$

jolloin siis on $d(x^t, x^s) = C(x^t, x^s)$, kun $D_j(x^t, x^s) = C(x^t, x^s)$. Veto-

kynnyksen määrittelyn perusteella asetetaan

$$(2.26) \quad d(x^t, x^s) = 0, \text{ jos } D_j(x^t, x^s) = 1.$$

Suureen $d(x^t, x^s)$ arvo on määrittelemättä vielä välillä $C(x^t, x^s) < D_j(x^t, x^s) < 1$. Harrastetaan tällä välillä lineaarista interpolointia, ja $d(x^t, x^s)$:n lopulliseksi kaavaksi voidaan tässä tilanteessa kirjoittaa

$$(2.27) \quad d(x^t, x^s) = C(x^t, x^s) \cdot (1 - D_j(x^t, x^s)) / (1 - C(x^t, x^s)).$$

Jos on useampia kriteereitä, joilla suureen $D_i(x^t, x^s)$ arvo on nolasta poikkeava, on luonnollista vaatia, että ne kaikki vaikuttavat $d(x^t, x^s)$:n arvoa pienentävästi. Suureen $d(x^t, x^s)$ lopulliseksi kaavaksi valitaan

$$(2.28) \quad d(x^t, x^s) = C(x^t, x^s), \text{ jos } F(t, s) = \emptyset$$

$$d(x^t, x^s) = C(x^t, x^s) \cdot \prod_{j \in F(t, s)} (1 - D_j(x^t, x^s)) / (1 - C(x^t, x^s)) \text{ muuten,}$$

missä joukko $F(t, s)$ on

$$(2.29) \quad F(t, s) = \{j \mid 1 \leq j \leq r, C(x^t, x^s) < D_j(x^t, x^s)\}.$$

Jos $d(x^t, x^s) > d(x^{t^*}, x^{s^*})$, ei tämän perusteella kuitenkaan voida väittää, että väite ' x^s on ainakin yhtä hyvä kuin x^t ' olisi luotettavampi kuin väite ' x^{s^*} on ainakin yhtä hyvä kuin x^{t^*} ' johtuen kaavassa (2.28) käytetystä tavallaan mielivaltaisesta lineaarisesta interpoloinnista. Jotta eri väitteiden keskinäistä luotettavuutta voitaisiin arvioida, otetaan käyttöön diskriminaatiokynnykset, joka on suureen $d(x^t, x^s)$ funktio: $s(d(x^t, x^s))$. Tämä

funktio on päätöksentekijän valittavissa, ja se voi olla myös vakio. Funktion täytyy kuitenkin toteuttaa ehto

$$(2.30) \quad (s(d)-s(d^*))/(d-d^*) \geq -1 \quad \forall d, d^*,$$

sillä muutoin voi syntyä tilanne, jossa $d+s(d) < d^*+s(d^*)$ ja $d > d^*$.

Jos nyt

$$(2.31) \quad d(x^t, x^{s*}) < d(x^t, x^s) - s(d(x^t, x^s)),$$

voidaan sanoa, että väite ' x^t on ainakin yhtä hyvä kuin x^s ' on luotettavampi kuin väite ' x^t on ainakin yhtä hyvä kuin x^{s*} '.

Mikäli

$$(2.32) \quad -s(d(x^t, x^s)) \leq d(x^s, x^t) - d(x^t, x^s) \leq s(d(x^s, x^t)),$$

voidaan arvioida, että väitteiden ' x^s on ainakin yhtä hyvä kuin x^t ' ja ' x^t on ainakin yhtä hyvä kuin x^s ' luotettavuus on samaa tasoa.

Jotta vaihtoehdolle $x^1, \dots, x^R$ saataisiin jonkinlainen järjestys aikaan, tarvitaan vielä muutama käsite lisää. Määritellään kaikilla $h, 0 \leq h \leq 1$ ja kaikilla $B \subset X$ suure $p_b^h(x^t)$ seuraavasti

$$(2.33) \quad p_b^h(x^s) = \#\{x^t \mid x^t \in B, d(x^s, x^t) > h, d(x^s, x^t) > d(x^t, x^s) + s(d(x^s, x^t))\}$$

missä merkinnällä $\#\{.\}$ tarkoitetaan joukon $\{.\}$ alkioden

lukumäärää. Nyt $p_B^h(x^s)$ on niiden joukon B alkioden x^t lukumäärä, joiden kohdalla väite ' x^s on ainakin yhtä hyvä kuin x^t ' on luotettavampi kuin väite ' x^t on ainakin yhtä hyvä kuin x^s ' kaavan (2.31) mukaisesti, kun vaaditaan, että $d(x^s, x^t) > h$.

Vastaavasti voidaan määritellä suure $f_B^h(x^t)$ seuraavasti

$$(2.34) \quad f_B^h(x^s) = \#\{x^t \mid x^t \in B, d(x^t, x^s) > h, d(x^t, x^s) > d(x^s, x^t) + s(d(x^t, x^s))\},$$

joka on niiden joukon B alkioden lukumäärä, jotka voidaan luotettavammin tulkita vaihtoehtoa x^s paremmaksi, kun vaaditaan, että $d(x^t, x^s) > h$. Käytetään näiden suureiden erotuksesta merkintää $q_B^h(x^t)$

$$(2.35) \quad q_B^h(x^t) = p_B^h(x^t) - f_B^h(x^s).$$

Otetaan vielä käyttöön pari lisämerkintää. Merkitään

$$(2.36) \quad d_B^h = 0, \text{ jos } \{d(x^t, x^s) \mid x^t, x^s \in B, d(x^t, x^s) < h\} = \emptyset$$

$$d_B^h = \text{Max } \{d(x^t, x^s) \mid x^t, x^s \in B, d(x^t, x^s) < h\}, \text{ muuten}$$

ja

$$(2.37) \quad h_0(B) = \text{Max } \{d(x^t, x^s) \mid x^t, x^s \in B\},$$

missä $\max\{.\}$ tarkoittaa luonnollisesti joukon $\{.\}$ suurinta alkia.

Tarkastellaan nyt yleisesti joukon X osajoukkoa B . Arvioitaessa joukkoon B kuuluvien vaihtoehtojen keskinäistä järjestystä,

lasketaan aluksi suureet

$$(2.38) \quad h_1 = d_B^{h_0(B) - s(h_0(B))}$$

$$(2.39) \quad q_B^{h_1}(\mathbf{x}^s) \quad \forall \mathbf{x}^s \in B$$

ja

$$(2.40) \quad q^* = \max_{\mathbf{x}^s \in B} q_B^{h_1}(\mathbf{x}^s) .$$

Tämän jälkeen asetetaan

$$(2.41) \quad D_1 = \{\mathbf{x}^s \mid \mathbf{x}^s \in B, q_B^{h_1}(\mathbf{x}^s) = q^*\}$$

Tästä eteenpäin edetään seuraavalla tavalla: jos joukko D_k on saatu kasaan, muodostetaan joukko D_{k+1} asettamalla aluksi

$$(2.42) \quad h_{k+1} = d_{D_k}^{h_k - s(h_k)} ,$$

minkä jälkeen lasketaan

$$(2.43) \quad q_{D_k}^{h_{k+1}}(\mathbf{x}^s) \quad \forall \mathbf{x}^s \in D_k$$

ja

$$(2.44) \quad q^* = \max_{\mathbf{x}^s \in D_k} q_{D_k}^{h_{k+1}}(\mathbf{x}^s) .$$

Tämän jälkeen asetetaan

$$(2.45) \quad D_{k+1} = \{\mathbf{x}^s \mid \mathbf{x}^s \in D_k, q_{D_k}^{h_{k+1}}(\mathbf{x}^s) = q^*\}$$

Vaihetta $k+1$ ei enää suoriteta, jos toinen seuraavista ehdoista täyttyy:

$$(2.46) \quad h_k = 0$$

$$\# D_k = 1,$$

ja tällöin asetetaan $D = D_k$.

Käydään nyt läpi se, mitä kaavoissa (2.37)-(2.41) itse asiassa tehdään. Kaavassa (2.37) etsitään suureiden $d(x^t, x^s)$ joukosta maksimi, missä vaihtoehdot x^t ja x^s kuuluvat joukkoon B . Oletetaan nyt, että x^a ja x^b ovat sellaisia vaihtoehtoja, että $d(x^a, x^b) = h_0(B)$. Kaavassa (2.38) etsitään suurin luku $d(x^t, x^s)$, kun $x^t, x^s \in B$ ja väitettä ' x^t on vähintään yhtä hyvä kuin x^s ' ei pidetä yhtä luottavana kuin väitettä ' x^a on vähintään yhtä hyvä kuin x^b '. Kaavassa (2.39) kaikille B alkioille x^s lasketaan kaavojen (2.33) ja (2.34) mukaisesti niiden B :n alkioden lukumäärä jotka x^s peittoaa luotettavammin kuin ne x^s :n vähennettynä niiden B :n alkioden lukumäärällä, joille x^s vastaavassa vertailussa häviää, kun vertailun kynnsarvona käytetään lukua $h_0(B)$. Kaavassa (2.40) luvuksi q^* valitaan suurin näiden parivertailujen erotus ja seuraavassa kaavassa muodostetaan joukko D_1 tämän $q_B^{h_1}(x^s)$ -luvun omaavista B :n alkioista. Jos joukon D_1 alkioden lukumäärä on suurempi kuin 1, muodostetaan joukosta D_1 edelleen joukot $D_2, D_3, \dots$ kaavoissa (2.42)-(2.45) osoitetulla tavalla, kunnes saadaan joukko, jossa on vai yksi alkio tai tullaan tilanteeseen, jossa $h_k = 0$.

Edellä kaavassa (2.40) on otettu maksimi luvuista $q_B^{h_1}(x^s)$, ts. on valittu joukkoon D_1 ne joukon B ne alkiot, jotka ovat B :n alkioden keskinäisessä vertailussa 'vahvimpia'. Vastaavaa menettelyä on sovellettu myös kaavassa (2.44). Toinen vaihtoehto on valita näissä kaavoissa jatkoon 'heikoimmat' alkiot, jolloin

kaavat (2.40) ja (2.44) korvataan kaavoilla:

$$(2.47) \quad q^* = \min_{\mathbf{x}^s \in B} q_B^{h_1}(\mathbf{x}^s) .$$

ja

$$(2.48) \quad q^* = \min_{\mathbf{x}^s \in D_k} q_{D_k}^{h_{k+1}}(\mathbf{x}^s) .$$

Joukon X alkiot voidaan järjestää kahteen eri järjestykseen edellä esitetyn perusteella seuraavalla algoritmilla:

ALGORITMI 2.1

Vaihe 0: Asetetaan $B = X$, $j=0$.

Vaihe 1: Asetetaan $j=j+1$. Muodostetaan joukosta B joukko D kaavojen (2.37)-(2.48) avulla. Jos käytetään kaavoja (2.40) ja (2.44), asetetaan $C_{aj} = D$, jos vaihtoehtoisesti käytetään kaavoja (2.47) ja (2.48), asetetaan $C_{yj} = D$.

Vaihe 2: Asetetaan $B = B \setminus D$. Jos $\#B > 1$, siirrytään vaiheeseen 1, muuten siirrytään vaiheeseen 3.

Vaihe 3: Jos $\#B = 1$, asetetaan $j=j+1$ ja $C_{aj} = B$ tai $C_{yj} = B$, tilanteesta riippuen. Jos on käytetty kaavoja (2.40) ja (2.44), on joukon X alkioden lopullinen järjestys $P^* = C_{a1}, C_{a2}, \dots, C_{aj}$. Vastaavasti kaavoja (2.47) ja (2.48) käytettäessä järjestykseksi muodostuu $P_* = C_{y1}, C_{y2}, \dots, C_{yj}$.

Riippuen siitä, käytetäänkö edellä kaavoja (2.40) ja (2.44) vai kaavoja (2.47) ja (2.48), saadaan joukon X alkioille kaksi jakoa osajoukkoihin, jaot $C_{a1}, C_{a2}, \dots, C_{aj}$ ja $C_{y1}, C_{y2}, \dots, C_{yj}$. Näistä

ensimmäinen muodostaa alenevan järjestyksen, jossa joukkoon C_{ak} kuuluvat X :n alkiot ovat sellaisia, että voidaan väittää, että ne ovat vähintään yhtä hyviä kuin joukon $C_{a, (k+1)}$ alkiot. Vastaavasti toinen järjestys on sellainen, että joukkoon $C_{y, (k+1)}$ kuuluvat vaihtoehdot ovat vähintään yhtä hyviä, kuin joukkoon C_{yk} kuuluvat.

Jos järjestykset P^* ja P_* ovat yhteneväiset, on tämä järjestys X :n alkioden lopullinen täydellinen järjestys: mitä tahansa kahta X :n alkioita voidaan pitää yhtä hyvinä tai toista voidaan pitää toista parempana. Jos P^* ja P_* eivät ole yhteneväiset, on lopputuloksena epätäydellinen järjestys. Jos vaihtoehdot x^t ja x^s ovat sellaisia, että x^t on luokiteltu toisessa järjestyksessä vaihtoehtoa x^s paremmaksi, ja sitä ei ole luokiteltu toisessa järjestyksessä vaihtoehtoa x^s heikommaksi, luokitellaan x^t lopullisessa järjestyksessä vaihtoehtoa x^s paremmaksi. Jos vaihtoehdot x^t ja x^s ovat sellaisia, että x^t on luokiteltu toisessa järjestyksessä vaihtoehtoa x^s paremmaksi, ja taas x^s on toisessa vaihtoehtoa x^t parempi, ei vaihtoehtojen x^t ja x^s välille saada järjestystä.

ESIMERKKI 2.3

Oletetaan, että vaihtoehtoja on kahdeksan: $X = \{x^1, x^2, \dots, x^8\}$.

a) Jos saadut järjestykset ovat seuraavat

$$P^* = \{x^1\}, \{x^2\}, \{x^4\}, \{x^6, x^3\}, \{x^8, x^5\}, \{x^7\}$$

$$P_* = \{x^1\}, \{x^4\}, \{x^6\}, \{x^2\}, \{x^3, x^8\}, \{x^5\}, \{x^7\},$$

havaitaan helposti, että vaihtoehto x^1 on muita vaihtoehtoja parempi, sen sijaan vaihtoehtoparien (x^2, x^4) ja (x^2, x^6) kohdalla

ei keskinäistä järjestystä ole saatu aikaan.

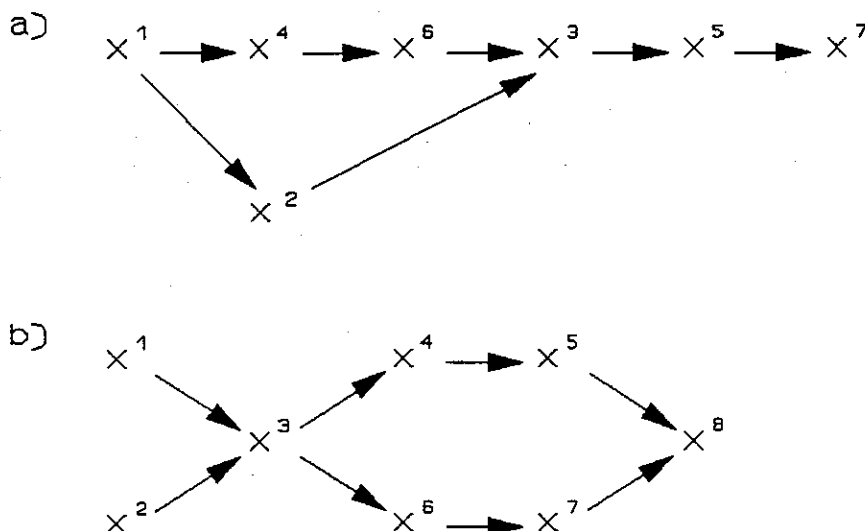
b) Jos saadut järjestykset ovat

$$P^* = \{x^1\}, \{x^2\}, \{x^3\}, \{x^6\}, \{x^7\}, \{x^4\} \{x^5\}, \{x^8\}$$

$$P_* = \{x^2\}, \{x^1\}, \{x^3\}, \{x^4\}, \{x^5\}, \{x^6\}, \{x^7\}, \{x^8\},$$

ei vaihtoehtojen joukosta ole löydetty selvästi parasta, kuitenkin vaihtoehdot x^1 ja x^2 on luokiteltu kaikkia muita paremmiksi. Lopullinen valinta vaihtoehtojen x^1 ja x^2 välillä täytyy tehdä muilla perusteilla. Kuitenkin tässä tapauksessa vaihtoehtojen joukkoa on saatu huomattavasti pienennettyä, ja menetelmä on tällä tavalla tehnyt tehtävänsä. Vaihtoehtoparin (x^1, x^2) lisäksi parien (x^4, x^6) , (x^4, x^7) , (x^5, x^6) ja (x^5, x^7) keskinäistä järjestystä ei ole saatu selville.

Molemmat lopulliset järjestykset on esitetty graafeina Seuraavassa kuviossa 2.7. //



KUVIO 2.7 Esimerkin 2.3 vaihtoehtojen lopulliset järjestykset

2.1.4 UTA

Edellä luvussa 2.1.1 esitetty MAUT on menetelmä, jossa päätöksentekijän hyötyfunktio muodostetaan keräämällä päätöksentekijältä suoraan hyötyfunktioon liittyvää informaatiota. Hyötyfunktion määrittämisen menetelmien toisen ryhmän muodostavat epäsuorat menetelmät, joissa hyötyfunktio määritellään tehtyjen valintojen tai subjektiivisten preferenssien perusteella. Tätä jälkimmäistä tapaa edustaa tässä luvussa esitettävä UTA-menetelmä: UTA:ssa päätöksentekijän hyötyfunktio määritellään tehtyjen valintojen perusteella (Jacquet-Lagreze & Siskos, 1982).

Lyhenne UTA tulee sanoista 'UTilite Additive' ja itse asiassa nimi paljastaa menetelmän perusoletuksen: menetelmässä oletetaan, että hyötyfunktio on muotoa (2.3) oleva additiivinen hyötyfunktio. Vastaavasti kuten luvussa 2.1.1 kaavan (2.3) kohdalla oletetaan, että $\sum_k k_i = 1$ ja kaavoissa (2.5) ja (2.6) esitetyt ehdot toteutuvat. Hyötyfunktioista $U_i(y_i)$, $i=1, \dots, r$, oletetaan, että ne ovat kasvavia argumenttiensa suhteen.

UTA-menetelmässä valitaan R kappaletta vaihtoehtoja $x^1, \dots, x^R$. Päätöksentekijää pyydetään asettamaan järjestykseen vektorit $(y_1(x^1), \dots, y_r(x^1))$, $i=1, \dots, R$. Päätöksentekijän esittämän järjestyksen perusteella konstruoidaan paloittain lineaariset hyötyfunktiot $U_i(y_i)$, $i=1, \dots, r$, siten, että ne ovat mahdollisimman hyvin sopusoinnussa päätöksentekijän esittämän järjestyksen kanssa.

Vastaavasti kuten luvussa 2.1.1 oletetaan, että muuttujan x_i

mahdolliset arvot kuuluvat välille $[x_i^0, x_i^1]$. Jaetaan kunkin muuttujan kohdalla tämä väli a_i yhtä suureen osaan $[y_i^{j/a_i}, y_i^{(j+1)/a_i}]$, $j=0, \dots, a_i-1$, missä

$$(2.49) \quad y_i^{j/a_i} = y_i^0 + (j/a_i)(y_i^1 - y_i^0).$$

Mielivaltaisen pisteen $x \in [y_i^0, y_i^1]$ hyötyä approksimoidaan interpoloimalla lineaarisesti yli sen välin, johon x kuuluu. Jos $x \in [y_i^{j/a_i}, y_i^{(j+1)/a_i}] = [b, c]$, on

$$(2.50) \quad U_i(y_i(x)) = U_i(b) + ((y_i(x) - b)/(c - b))(U_i(c) - U_i(b)).$$

Määritellään funktio $U'(y(x))$ seuraavasti:

$$(2.51) \quad U'(y(x)) = \sum k_i U_i(y_i(x)) + \sigma(x),$$

missä

$$(2.52) \quad \sigma(x) = U(y(x)) - \sum k_i U_i(y_i(x)).$$

Kaavan (1.8) perusteella kirjoitetaan seuraava ehto:

$$(2.53) \quad x^i > x^j \Leftrightarrow U'(y(x^i)) - U'(y(x^j)) \geq \delta,$$

missä $\delta > 0$ on sopiva (R :stä riippuva) reaali-luku. Kaavojen (2.51) ja (2.52) perusteella voidaan kirjoittaa edelleen.

$$(2.54) \quad x^i > x^j \Leftrightarrow \sum_h (k_h U_h(y_h(x^i)) - k_h U_h(y_h(x^j))) + \sigma(x^i) - \sigma(x^j) \geq \delta.$$

Sellaisille pareille x^i ja x^j , joilla $x^i - x^j$ määritellään

$$(2.55) \quad \mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j \Leftrightarrow \sum_h (k_h U_h(y_h(\mathbf{x}^i)) - k_h U_h(y_h(\mathbf{x}^j))) + \sigma(\mathbf{x}^i) + \sigma(\mathbf{x}^j) = 0.$$

Koska hyötyfunktiot $U_i(y_i)$ oletettiin kasvaviksi argumenttinsa suhteen, voidaan tästä muodostaa ehto

$$(2.56) \quad U_i(y_i^{j/a_i}) - U_i(y_i^{(j+1)/a_i}) \geq s_i, \quad i=1, \dots, r, \quad j=1, \dots, a_i,$$

missä $s_i \geq 0$ on jokaiselle muuttujalle y_i erikseen valittu arvo.

Täten on saatu kasaan lineaarinen optimointiongelma paloittain lineaaristen hyötyfunktioiden määrittämiseksi. Pyrkimyksenä on siis löytää seuraavan optimointiongelman avulla arvot pisteille $U_i(y_i^{j/a_i})$, $i=1, \dots, r$, $j=2, \dots, a_i$.

$$(2.57) \quad \begin{aligned} \sum_{i=1}^R \sigma(\mathbf{x}^i) &= \min \\ \sum_h (k_h U_h(y_h(\mathbf{x}^i)) - k_h U_h(y_h(\mathbf{x}^j))) + \sigma(\mathbf{x}^i) + \sigma(\mathbf{x}^j) &\geq \delta, \quad \text{jos } \mathbf{x}^i > \mathbf{x}^j \\ \sum_h (k_h U_h(y_h(\mathbf{x}^i)) - k_h U_h(y_h(\mathbf{x}^j))) + \sigma(\mathbf{x}^i) + \sigma(\mathbf{x}^j) &= 0, \quad \text{jos } \mathbf{x}^i - \mathbf{x}^j \\ U_i(y_i^{j/a_i}) - U_i(y_i^{(j+1)/a_i}) &\geq s_i, \quad i=1, \dots, r, \quad j=1, \dots, a_i \\ \sum k_i &= 1 \\ \sigma(\mathbf{x}^i) &\geq 0, \quad i=1, \dots, R \\ U_i(y_i^0) &= 0, \quad U_i(y_i^1) = 1, \quad i=1, \dots, r \\ k_i &> 0, \quad i=1, \dots, r. \end{aligned}$$

Tätä menettelyä käytettäessä täytyy olettaa, että päätöksentekijä on päätöstä tehdessään tehnyt valintansa nimenomaan muuttujien $y_1, \dots, y_r$ perusteella. Jos päätöksentekijä ei ole riittävässä määrin perehtynyt tehtävään valintaan tai hänen valintakriteerinsä ovat olleet jotkin muut kuin mitä varsinaisesti tutkitaan, ei tuloksena saatava hyötyfunktio (välttämättä) vastaa todelli-

suutta.

Tätä menetelmää voidaan periaatteessa käyttää hyötyfunktion muodostamiseen myös silloin, kun 'pääöksentekijä' ei luovuta preferenssi-informaatiotaan vapaaehtoisesti, ts. havainnoidaan jonkin henkilön tai ryhmän tekemiä valintoja ja muodostetaan hyötyfunktio näiden havaintojen perusteella. Kuitenkin tässä tilanteessa virheelliset oletukset käytetyistä valintakriteereistä voivat johtaa hyvinkin virheellisiin tuloksiin.

2.1.5 KVALITATIIVISET KRITEERIT

Tässä luvussa esitetään menetelmä, jota voidaan käyttää tehtäessä valintaa kvalitatiivisten kriteerien perusteella (Korhonen, 1986). Käytettävillä kriteereillä voi olla hierarkkinen rakenne: täten valinnan perustana voi olla suhteellisen abstraktejakin käsitteitä, koska ne voidaan jakaa konkreettisempiin alakäsitteisiin, joiden avulla varsinainen vaihtoehtojen arviointi tehdään. Toisen kvalitatiivisia vertailuja käyttävän menetelmän on esittänyt Roubens (1982), mutta tässä menetelmässä ei ole mahdollista käyttää hierarkkista rakennetta. Luvussa 2.1.2 esitetty AHP perustuu myös hierarkkiseen rakenteeseen, kuitenkin AHP:stä poiketen tässä luvussa käsiteltävässä menetelmässä ei pareittaista vertailua tarvitse tehdä kuin hierarkian alimmalla tasolla, ja silloinkin vähimmillään riittää arvio siitä, ovatko vertailtavat vaihtoehdot yhtä hyviä vai onko toinen niistä parempi.

Olkoon vertailtavien vaihtoehtojen joukko $A = \{a_1, \dots, a_n\}$. Oletetaan, että kriteerejä on tasoilla $0, 1, \dots, T$ ja olkoon tasolla t kriteerimuuttujien määrä p_t . Merkitään tason t kriteerimuuttujia symbolilla C_i^t , $i=1, \dots, r$, $k=1, \dots, p_t$. Kun $t < T$, liittyy jokainen kriteerimuuttuja C_i^t tarkalleen yhteen tason $t+1$ kriteerimuuttujaan.

Tässä menetelmässä oletetaan, että hyötyfunktio on muotoa (2.3) oleva additiivinen hyötyfunktio:

$$(2.58) \quad U = \sum k_i U_i.$$

Hyötyfunktioita U_i ei oleteta tunnetuiksi, eikä niitä konstruoida tässä menetelmässä, niitä käytetään ainoastaan teoreettisena apuvälineenä.

Oletetaan, että tasolla t johonkin tason $t+1$ muuttujaan liittyviä kriteerimuuttujia on p kappaletta: Jos päätöksentekijän hyötyfunktiot U_i^t , $i=1, \dots, p$, näiden kriteerimuuttujien kohdalla tunnettaisiin, voitaisiin vaihtoehtoon a_i kohdalla saavutettava hyöty ilmaista muodossa

$$(2.59) \quad U^{t+1}(a_i) = \sum_j k_j U_j^t(a_i),$$

missä $U_i^t(a_i)$ on hyöty kriteerin i suhteen tasolla t ja $U^{t+1}(a_i)$ kuvaa näiden kriteerien yhdistettyä hyötyä. Kirjoitetaan edelleen

$$(2.60) \quad U^{t+1} = X^t k^t,$$

missä $U^{t+1} = (U^{t+1}(a_1), \dots, U^{t+1}(a_n))'$, $k^t = (k_1^t, \dots, k_p^t)'$ ja X^t on $p \times n$ -

matriisi, jonka alkio x_{ij}^t on $U_j^t(a_i)$. Käytetään tämän matriisin sarakkeesta j merkintää $X^t(j)$, $j=1, \dots, p$. Nyt pystyvektori $X^t(j)$ siis kuvaa hyötyfunktion U_j^t arvoja eri vaihtoehtojen a_i kohdalla, $i=1, \dots, n$.

Kertoimet $k_1^t, \dots, k_p^t$ on mielekästä pyrkiä valitsemaan siten, että hyötyfunktion U^{t+1} arvot ja eri kriteerien suhteen havaitut arvot $X^t(j)$ olisivat mahdollisimman hyvin sopusoinnussa keskenään. Kriteeriksi valitaan, että vektorien U^{t+1} ja $X^t(j)$ välinen korrelaatio $r(U^{t+1}, X^t(j))$ on mahdollisimman suuri. Täten saadaan monitavoiteoptimointiongelma:

$$(2.61) \quad \begin{aligned} \max \quad & r(U^{t+1}, X^t(j)), \quad j = 1, \dots, p \\ U^{t+1} = & X^t k^t, \\ k_i^t \geq & 0. \end{aligned}$$

Yleisyyttä loukkaamatta oletetaan, että vektorin $X^t(j)$ alkioille pätee $\sum_i U_j^t(a_i) = 0$. Lisäksi oletetaan, että $X^t(j)'X^t(j) = 1$, jolloin myös vektorin U^{t+1} alkioden summa on nolla. Olkoon R^t matriisin X^t korrelaatiomatriisi $R^t = (X^t)'X^t$. Jos asetetaan $k^t'R^tk^t = 1$, seuraa tästä, että $(U^{t+1})'U^{t+1} = k^tX'Xk^t = (k^t)'R^tk^t = 1$. Edelleen $r(U^{t+1}, X^t(j)) = (U^{t+1})'X^t(j) = k^tX'X^t(j) = \sum_j k_j r_{jj}^t$, missä $r_{ji}^t = r(X^t(j), X^t(i))$. Nyt ongelma (2.61) saadaan muotoon

$$(2.62) \quad \begin{aligned} \max \quad & U^{t+1} = R^t k^t \\ (k^t)' & R^t k^t = 1 \\ k^t \geq & 0. \end{aligned}$$

Muuttujalla U^{t+1} on samat ominaisuudet kuin muuttujilla U_i^t , joten tason $t+1$ muuttujia voidaan kohdella samoin kuin muuttujia

tasolla t ja muodostaa niistä edelleen muuttujia tasolle $t+2$. Jos tiettyyn tason $t+2$ muuttujiin liittyvien tason $t+1$ muuttujien määrä on q , voidaan muodostaa nxq -matriisi X^{t+1} , ja tämän avulla saadaan määritettyä korrelaatiomatriisi $R^{t+1} = (X^{t+1})'X^{t+1}$. Vastaa-
vasti

$$(2.63) \quad r_{ij}^{t+1} = (U_j^{t+1})'U_i^{t+1} = (k_i^t)'(X_i^t)'X_j^tk_j = (k_i^t)'R_{ij}k_j,$$

missä $U_i^{t+1} = X_j^tk_j^t$ ja R_{ij} on X_i^t :n ja X_j^t :n välinen korrelaatiomat-
riisi.

Yleisesti korrelaatiomatriisi tasolla $t+1$ voidaan johtaa tason
0 korrelaatiomatriisista:

$$(2.64) \quad R^{t+1} = (B^{t+1})'R^tB^{t+1} = (B^{t+1})'\dots(B^1)'R^0B^1\dots B^{t+1}$$

missä $p_t \times p_{t+1}$ -matriisi B^{t+1} määritellään seuraavasti

$$(2.65) \quad B^{t+1} = \begin{bmatrix} k_1^t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & k_1^t & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & k_{p_{t+1}}^t \end{bmatrix}$$

Tässä vektori k_i^t liittyy niihin tason t kriteereihin, jotka yhdistetään kriteeriin C_i^{t+1} tasolla $t+1$.

Varsinaisen vertailun päätöksentekijä siis tekee vaihtoehtojou-
kossa A kriteerien C_i^0 , $i=1, \dots, p_0$ suhteen. Minimivaatimus on, että
pätöksentekijä pystyy vertailemaan eri vaihtoehtoparien
keskinäistä paremmuutta kriteerimuuttujien suhteen. Merkitään

nyt

$$(2.66) \quad z_{ij}(C_k^0) = \begin{cases} 1, & \text{jos } a_i(C_k^0) > a_j(C_k^0) \\ 0, & \text{jos } a_i(C_k^0) = a_j(C_k^0), \quad j \neq i \\ -1, & \text{jos } a_i(C_k^0) < a_j(C_k^0) \end{cases}$$

$$z_{ii}(C_k^0) = 0,$$

missä esimerkiksi merkinnällä $a_i(C_k^0) > a_j(C_k^0)$ tarkoitetaan, että vaihtoehtoa a_i pidetään parempana kuin a_j kriteerin C_k^0 suhteen. Käytetään näistä luvuista muodostetusta $n \times n$ -matriisista merkintää $Z(C_i^0) = [z_{ij}(C_k^0)]$.

Määritellään seuraavaksi kriteerien C_i^0 , $i=1, \dots, p_0$ korrelaatiomatriisi R^0

$$(2.67) \quad R^0 = [r_{ij}^0],$$

missä

$$(2.68) \quad r_{ij}^0 = \sum \sum z_{im}(C_i^0) z_{jm}(C_j^0) / (s(C_i^0) s(C_j^0)).$$

Edellä käytetty suure $s(C_i^0)$ määritellään seuraavasti:

$$(2.68) \quad s^2(C_i^0) = \sum \sum (z_{im}(C_i^0))^2, \quad i=1, \dots, p_0.$$

Näin määritelty korrelaatiokerroin r_{ij}^0 on Kendalliin järjestyskorrelaatiokerroin.

Otetaan käyttöön merkintä

$$(2.70) \quad Q(C_i^0) = Z(i^0)/s(C_i^0)$$

ja yleisessä muodossa, jos tason t kriteerit $C_1^t, \dots, C_{1+p}^t$ liittyvät tason $t+1$ kriteeriin C_h^{t+1} :

$$(2.71) \quad Q(C_h^{t+1}) = \sum_m k_m^t Q(C_m^t) = [q_{ij}^t].$$

Tämä matriisi voidaan tulkita preferenssien vahvuutta kuvaavaksi matriisiksi. Matriisin alkio q_{ij}^t kuvaa, kuinka vahvasti vaihtoehto a_i on preferoitu vaihtoehtoon a_j nähden kriteerin C_h^{t+1} suhteen. Edelleen on voimassa

$$(2.72) \quad r_{hm}^t = \sum_i \sum_j q_{ij}^t(C_h^t) q_{ij}^t(C_m^t).$$

Esitetään matriisi $Q(C_h^t)$ vielä $n(n-1)$ -vektorina $q(C_q^t) = (q_{11}(C_q^t), q_{12}(C_q^t), \dots, q_{1n}(C_q^t), q_{21}(C_q^t), \dots, q_{nn}(C_q^t))$.

Kun ollaan tasolla T , määritellään vaihtoehtojen lopullinen järjestys siten, että se on sopusoinnussa matriisin $Q(C^T)$ preferenssien kanssa. Olkoon $n \times n$ -matriisi $G = [g_{ij}]$ sellainen, että se esittää täydellistä epäsymmetristä pareittaista vaihtoehtojen järjestystä. Nyt

$$(2.73) \quad g_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{jos } a_i > a_j, i \neq j \\ 0, & \text{jos } a_i < a_j, i \neq j \\ 1/2, & \text{jos } i = j. \end{cases}$$

On osoitettu, että matriisi G määrittelee täydellisen järjestyksen, jos seuraava ehto toteutuu

$$\begin{aligned}
 (2.74) \quad & g_{ij} \in \{0,1\}, \quad i \neq j \\
 & g_{ij} + g_{ji} = 1, \quad \text{kaikilla } i, j = 1, \dots, n \\
 & g_{hi} + g_{ij} + g_{jh} \leq 2, \quad \text{kaikilla } h, i, j = 1, \dots, n \\
 & g_{ii} = 1/2, \quad \text{kaikilla } i = 1, \dots, n.
 \end{aligned}$$

Nyt vaihtoehtojen lopullinen järjestys saadaan seuraavan ongelman ratkaisuna

$$\begin{aligned}
 (2.75) \quad & \max f = \sum \sum g_{hm}(C^T) q_{hm}(C^T) \\
 & \text{kaavan (2.74) rajoitusten ollessa voimassa}
 \end{aligned}$$

Ratkaisuna saadaan vaihtoehtojen järjestys, joka maksimoi preferenssien summan.

Jos matriisi G esitetään vektorina $g = (g_{11}(C^T), g_{11}(C^T), \dots, g_{1n}(C^T), g_{21}(C^T), \dots, g_{nn}(C^T))$, ja etsitään ratkaisu ongelmalle

$$\begin{aligned}
 (2.76) \quad & \max r(g, q(C^T)) \\
 & \text{kaavan (2.74) rajoitusten ollessa voimassa}
 \end{aligned}$$

saadaan sama ratkaisu, kuin kaavassa (2.75) esitetylle probleemalle. Täten kaavan (2.75) antama ratkaisu maksimoi korrelaation vektorien g ja $q(C^T)$ välillä (rajoitusten (2.74) ollessa voimassa).

Esitetään tämä menetelmä vielä selvyiden vuoksi algoritmina:

ALGORITMI 2.2

Vaihe 1: Pyydetään päätöksentekijää tekemään pareittaiset vertailut vaihtoehtojen kesken kaikkien kriteerien C_i^0 ,

$i=1, \dots, p_0$ suhteen. Konstruoidaan matriisit $Z(C_i^0)$ ja $Q(C_i^0)$ ja muodostetaan kriteerien välinen korrelaatiomatriisi R^0 . Asetetaan $t=0$.

Vaihe 2: Asetetaan $t=t+1$. Ratkaistaan ongelma (2.62) kaikille kriteereille C_i^t , jonka ratkaisuna saadaan vektorit k_i^t , $i=1, \dots, p_t$. Näiden avulla lasketaan kaavan (2.71) mukaan preferenssien vahvuutta kuvaavat matriisit $Q(C_i^t)$.

Vaihe 3: Jos $t < T$, lasketaan kaavan (2.64) avulla korrelaatiomatriisi R^t , ja palataan vaiheeseen 2.

Muuten ratkaistaan vaihtoehtojen lopullinen järjestys kaavan (2.75) mukaisesti.

Jos pareittaisen vertailun asemasta eri vaihtoehtoista on olemassa välimatka-asteikollista informaatiota, voidaan kaavassa (2.66) esiintyvä suure $z_{ij}(C_k^0)$ kirjoittaa muotoon

$$(2.77) \quad z_{ij}(C_k^0) = x_i(C_k^0) - x_j(C_k^0),$$

missä $x_i(C_k^0)$ on havaittu lukuarvo vaihtoehdon a_i kohdalla kriteerin C_k^0 suhteen. Nyt kaavan (2.68) avulla laskettu korrelaatiokerroin on Pearsonin tulomomenttikorrelaatiokerroin. Mikäli käytettävät suureet ovat järjestysasteikollisia, ja suure $z_{ij}(C_k^0)$ määritellään kaavan (2.77) avulla, saadaan kaavan (2.68) avulla laskien tulokseksi Spearmanin järjestyskorrelaatiokerroin.

Tätä menetelmää voidaan myös käyttää interaktiivisesti korvaamalla algoritmin 2.2 vaiheessa 2 ongelman (2.62) ratkaiseminen sillä, että päätöksentekijä etsii vektorille k^t mieluisimman arvon (kts. Korhonen, 1986).

2.2 SUUNNITTELUMENETELMÄT

Suunnittelumenetelmiksi voidaan nimittää monitavoiteoptimointimenetelmiä, joissa päätäntäprosessin kuluessa pyritään lisäämään tietoa käsillä olevasta ongelmasta. Tavoitteet ja rajoitukset eivät välttämättä ole selviä heti päätäntäprosessin alusta lukien, vaan tavoitteita ja rajoituksia voidaan jopa vaihtaa keskenään. Näissä menetelmissä ei tavoitteena ole välttämättä tuottaa vai yhtä oikeaa ratkaisua, vaan yhtä tärkeä tavoite on lisätä päätöksentekijän tietoa käsillä olevasta ongelmasta. On huomattava, että näitä menetelmiä voidaan varsin mainiosti käyttää myös olemassa olevan vaihtoehtojoukon arviointiin.

Luvuissa 2.2.1-2.2.6 esitettäviä menetelmiä nimitetään interaktiivisiksi menetelmiksi. Päätöksentekijän hyötyfunktioita ei eksplisiittisesti tunneta mutta sen oletetaan kuitenkin olevan olemassa. Hyötyfunktioista saadaan tietoa päätäntäprosessin kuluessa. Päätöksentekijä ei siis formuloi hyötyfunktioitaan matemaattisesti, vaan vastaa tietokoneen esittämiin kysymyksiin, joiden avulla päätäntäprosessia ohjataan optimaalisen ratkaisua kohti.

Nämä menetelmät pystyvät tuottamaan optimaalisen ratkaisun tiettyjen ehtojen vallitessa: yleisiä oletuksia ovat sallitun joukon X konveksisuus, kriteerifunktioiden $y_i = f_i(x)$, $i=1, \dots, r$, konkaavisuus ja oletus, että hyötyfunktio on $U(y)$ konkaavi ja kasvava kaikkien argumenttiensa suhteen.

Interaktiivisia monitavoiteoptimointimenetelmiä on eri variaatioineen löydettävissä hyvin useita - ja jokainen itseään kunnioittava monitavoiteoptimoija pyrkii kehittämään vähintään yhden lisää. Seuraavassa esitetäänkin vain yleisimmät lähestymistavat monitavoiteoptimointiin, tarkempaa selkoa eri lähestymistapojen vivahteista ja tästä esittelystä pois jätetyistä menetelmistä on löydettävissä alan kirjallisuudesta (kts. esim. luettelo sivulla 12).

2.2.1 MAHDOLLISTEN SUUNTIEN MENETELMÄ

Ensimmäinen varsinainen implisiittiseen hyötyfunktioon perustuva menetelmä oli Geoffrionin, Dyerin ja Feinbergin kehittämä monitavoiteoptimointimenetelmä, josta kehittäjiensä nimien alkukirjainten mukaan usein käytetään nimitystä GDF-menetelmä (Geoffrion & Dyer & Feinberg, 1972; Steuer, 1986).

Oletetaan, että hyötyfunktio $U(f_1(x), \dots, f_r(x))$ on jatkuva ja konkaavi. Jos hyötyfunktio tunnettaisiin eksplisiittisesti, maksimoitaisiin se Frank-Wolfe -menetelmän avulla seuraavaa algoritmia käyttäen:

ALGORITMI 2.3

Vaihe 0: Valitaan alkupiste $x^1 \in X$ ja asetetaan $k=0$.

Vaihe 1: Asetetaan $k=k+1$. Ratkaistaan ongelma:

$$(2.78) \quad \max \{ \nabla U(f_1(x^k), \dots, f_r(x^k))y \mid y \in X \}.$$

Olkoon tämän ongelman ratkaisu y^k . Asetetaan suunnaksi

$$d^k = y^k - x^k.$$

Vaihe 2: Ratkaistaan ongelma

$$(2.79) \quad \max \{ U(f_1(x^k + t \cdot d^k), \dots, f_r(x^k + t \cdot d^k)) \mid 0 \leq t \leq 1 \}$$

Olkoon ratkaisu t^k . Asetetaan $x^{k+1} = x^k + t^k d^k$. Jos valittu lopetuskriteeri täyttyy (esim. $t=0$ tai riittävä määrä iteraatioita on jo tehty), lopetetaan, muuten siirrytään vaiheeseen 1.

Koska hyötyfunktioita ei eksplisiittisesti tunneta, joudutaan edellä esitettyä algoritmia muuttamaan. Ketjusaännön mukaan on

$$(2.80) \quad \nabla U(f_1(x^k), \dots, f_r(x^k)) = \sum (\partial U / \partial f_i) \nabla f_i(x^k),$$

missä $(\partial U / \partial f_i)$ on funktion U i:s osittaisderivaatta pisteessä $(f_1(x^k), \dots, f_r(x^k))$ ja $\nabla f_i(x^k)$ on funktion f_i gradientti pisteessä x^k . Optimaaliseen ratkaisuun y_k ei kuitenkaan vaikuta, jos funktio jaetaan jollain positiivisella suureella $(\partial U / \partial f_j)$. Tätä suuretta sanotaan referenssikriteeriksi. Yleisyyttä menettämättä voidaan olettaa, että referenssikriteeri on ensimmäinen, joten edellä oleva kaava (2.78) voidaan kirjoittaa muotoon

$$(2.81) \quad \max \{ \sum w_i^k \nabla f_i(x^k) y \mid y \in X \},$$

missä

$$(2.82) \quad w_i^k = (\partial U / \partial f_i) / (\partial U / \partial f_1).$$

Painot w_i^k edustavat sitä marginaalista substituuutiota, joka päätöksentekijän mielestä on kriteerien 1 ja i välillä pisteessä x^k . Jos päätöksentekijän mielestä pisteet $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ ja $(x_1^k - \Delta_1, x_2^k, \dots, x_1^k + \Delta_1, \dots, x_n^k)$ ovat yhtä hyviä ratkaisuja, on likimäärin

$$(2.83) \quad w_i^k \approx -\Delta_1/\Delta_i.$$

Tällöin siis hyötyfunktioa approksimoidaan lineaarisella funktiolla pisteessä x^k .

Frank-Wolfe-algoritmiin perustuva GDF-algoritmi voidaan nyt kirjoittaa muotoon:

ALGORITMI 2.4

Vaihe 0: Valitaan alkupiste $x^1 \in X$ ja asetetaan $k=0$.

Vaihe 1: Asetetaan $k=k+1$. Etsitään arvot suureille w_i^k , $i=1, \dots, r$, joko pyytämällä ne suoraan päätöksentekijältä tai käyttämällä jotain menettelyä, jossa päätöksentekijä vertailee eri pisteitä keskenään.

Vaihe 2: Ratkaistaan ongelma:

$$\max \{ \sum w_i^k \nabla f_i(x^k) y \mid y \in X \},$$

Olkoon tämän ongelman ratkaisu y^k . Asetetaan suunnaksi $d^k = y^k - x^k$.

Vaihe 3: Jos $y^k = x^k$, siirrytään vaiheeseen 7, muuten siirrytään vaiheeseen 4.

Vaihe 4: Valitaan suunnassa d^k tapahtuvassa haussa tulostettavien pisteiden lukumäärä P , $P > 1$.

Vaihe 5: Tulostetaan pisteet

$$z^t = (f_1(x^k + (t/P) \cdot d^k), \dots, f_r(x^k + (t/P) \cdot d^k)), t=1, 2, \dots, P.$$

Näiden joukosta päätöksentekijä mieluisimman. Jos valittu ratkaisu on z^t , asetetaan $x^{k+1} = x^k + (t/P) \cdot d^k$.

Vaihe 6: Jos päätöksentekijä on tyytyväinen ratkaisuun (tai kyllästynyt iterointiin), asetetaan $k=k+1$ ja siirrytään vaiheeseen 7, muuten siirrytään vaiheeseen 1.

Vaihe 7: Lopetetaan, ratkaisuksi saatiin x^k , jota vastaava ratkaisu tavoiteavaruudessa on $(f_1(x^k), \dots, f_r(x^k))$.

Algoritmin vaiheessa 1 kertoimien w_i^k arvot voidaan pyytää suoraan päätöksentekijältä. Helpompi tapa näiden kertoimien määrittämiseen on kuitenkin vertailla valittuja pisteitä keskenään. Tämä voidaan tehdä esimerkiksi seuraavasti: aluksi valitaan arvot suureille Δ_1 ja Δ_2 . Päätöksentekijää pyydetään vertailemaan pisteitä $x^1 = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ ja $x^2 = (x_1^k - \Delta_1, x_2^k, \dots, x_1^k + \Delta_1, \dots, x_n^k)$. Jos päätöksentekijän mielestä piste x^1 on parempi, kasvatetaan arvoa Δ_1 ja vastaavasti jos piste x^2 osoittautuu mieluisammaksi, pienennetään arvoa Δ_1 . Tätä jatketaan niin kauan, että löydetään sellainen arvo Δ_1 , että päätöksentekijän mielestä pisteet x^1 ja x^2 ovat yhtä hyviä.

Voidaan osoittaa, että jos hyötyfunktio on konkaavi, f_i :t ovat konkaaveja ja rajoitukset ovat lineaarisia, tämä algoritmi tuottaa optimiratkaisun tai tuottaa ratkaisujonon, joka konvergoi kohti optimaalista ratkaisua (White, 1982).

Tästä GDF-algoritmista on tehty lukuisa joukko muunnelmia, joissa on parannettu joko suunnanhakua, yksiulotteista optimointia tai molempia. Esimerkiksi Sadagopan & Ravindran (1986) ovat

kehittäneet algoritmista version, jossa Frank-Wolfe -menetelmän sijasta käytetään yleistetyn redusoidun gradientin menetelmää. Tämä monitavoiteoptimointimenetelmä tuottaa optimaalisen ratkaisun silloinkin, kun hyötyfunktio U on kvasikonkaavi. Oppenheimer (1978) puolestaan on laatinut algoritmista version, jossa edellä esitetyssä algoritmista esiintyvä hyötyfunktion lineaarinen approksimaatio korvataan muotoa (1.10) tai (1.11) olevilla approksimaatioilla.

2.2.2 LEIKKAUSTASOALGORITMI

Leikkaustasoalgoritmeissa pyritään pienentämään sallittujen ratkaisujen joukkoa X määrittämällä leikkaustaso tavoiteavaruuden sallitussa joukossa S (Musselman & Talavage, 1980; Loganathan & Serali, 1987; Shin & Ravindran, 1991). Algoritmi perustuu seuraavaan havaintoon: kun U on konkaavi ja differentioituva, on vaiheessa k voimassa

$$(2.84) \quad U(\mathbf{y}) \geq U(\mathbf{y}^k) \Rightarrow \sum_i \lambda_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i^k) \geq 0,$$

missä $\mathbf{y}^k = (\mathbf{y}_1^k, \dots, \mathbf{y}_r^k) = (f_1(\mathbf{x}^k), \dots, f_r(\mathbf{x}^k)) \in S$ on tarkasteltavana oleva ratkaisu ja $\mathbf{y} = (\mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_r) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x}))$ sekä $\lambda_i = \partial U(\mathbf{y}) / \partial \mathbf{y}_i$, kun $\mathbf{y} = \mathbf{y}^k$. Kun etsitään U :lle parempia arvoja, voidaan tästä eteenpäin keskittyä vain siihen puoliavaruuteen, jossa $\lambda_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i^k) \geq 0$ tai yhtäpitävästi

$$(2.85) \quad w_i^k (\mathbf{y}_i - \mathbf{y}_i^k) \geq 0,$$

missä $w_i^k = \lambda_i / \lambda_1$. Nyt tietenkään kertoimien w_i^k tarkkoja arvoja ei tunneta, vaan niille joudutaan käyttämään likiarvoja, kuten luvussa 2.2.1 on esitetty.

Kussakin vaiheessa rajoitusten joukkoon lisätään siis uusi rajoitus, jolloin sallittu alue X pienenee. Merkitään vaiheen k sallittua aluetta symbolilla X^k . Pisteeksi x^k saadaan ei-dominoitu ratkaisu esimerkiksi ratkaisemalla ongelma

$$(2.86) \quad \begin{aligned} \max \quad & \sum \lambda_i f_i(x) \\ & x \in X^k \\ & \lambda_i > 0, \sum \lambda_i = 1. \end{aligned}$$

Pistettä x^k voidaan myös yrittää etsiä mahdollisimman kaukaa lisätyistä rajoituksista ratkaisemalla ongelma

$$(2.87) \quad \begin{aligned} \max \quad & z \\ & z \leq \sum w_i^j [f_i(x) - f_i(x^j)], \quad j=1, \dots, k-1 \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Voidaan osoittaa, että tämän ongelman ratkaisu on ei-dominoitu piste (Loganathan & Serali, 1987). Kaavaa (2.87) käytettäessä toimii z myös lopetuskriteerinä: optimiratkaisu on saavutettu, kun z saa arvon 0.

Käytettäessä kaavaa (2.87), on käytettävä algoritmi siis seuraava

ALGORITMI 2.5

Vaihe 0: Valitaan aloituspiste x^1 ja asetetaan $k=0$.

Vaihe 1: Asetetaan $k = k+1$. Lisätään rajoitus (2.85) rajoitusten

joukkoon.

Vaihe 2: Ratkaistaan ongelma (2.87)

Vaihe 3: Jos $z = 0$, siirrytään vaiheeseen 4, muuten siirrytään vaiheeseen 1.

Vaihe 4: Lopetetaan, optimaalinen ratkaisu on löytynyt

Voidaan osoittaa, että jos U on jatkuva, konkaavi ja differentioituva, f_i :t ovat konkaaveja ja X on konvekksi, tämä algoritmi tuottaa optimaalisen ratkaisun tai ratkaisujen jonon, joka sisältää on optimaalista ratkaisua kohti konvergoivan osajonon (Loganathan & Sherali, 1987).

Edellä esitettyä algoritmia voidaan käyttää myös tilanteessa, jossa X ei ole konvekksi ja f_i :t eivät ole konkaaveja (Loganathan & Sherali, 1987). Jos tällöin jollakin k :n arvolla saavutetaan piste, jossa ongelman (2.87) ratkaisu on nollavektori, optimipiste on löydettyjen ratkaisujen $x^1, \dots, x^k$ joukossa, ei kuitenkaan välttämättä piste x^k . Jos algoritmi puolestaan tuottaa äärettömän ratkaisujen jonon, on optimiratkaisu generoitujen ratkaisujen joukossa, ei kuitenkaan välttämättä jonon kasautumispiste.

2.2.3 ZW-MENETELMÄ

Tarkastellaan seuraavassa alunperin Ziontsin ja Walleniuksen kehittämää menetelmää, josta Roy ja Waallenius ovat kehittäneet uudemman version (Roy & Wallenius, 1992). Tässä tälle menetelmälle on annettu nimi ZW-menetelmä. Menetelmä perustuu yksiulotteiseen epälineaariseen optimointiin tarkoitettuun yleistetyn

redusoitun gradientin menetelmään, jonka perustana on puolestaan simplex-menetelmä.

Sallitun alueen määrittelyyn mahdollisesti käytettävät epäyhtälörajoitukset muutetaan yhtälörajoituksiksi lisäämällä niihin kuhunkin alijäämamuuttuja. Rajoitukset ovat nyt siis muotoa

$$(2.88) \quad g_k(x) = 0, \quad k = 1, \dots, p;$$

lisäksi kuhunkin muuttujaan x_i liitetään rajoitukset

$$(2.89) \quad l_i \leq x_i \leq u_i,$$

missä alaraja l_i voi olla myös $-\infty$ ja yläraja u_i voi saada arvon $+\infty$.

Oletetaan, että muuttujien kokonaismäärä on n eli $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Redusoiden gradientin menetelmän perusajatuksena on ilmaista kullakin iterointikierroksella m kantamuuttujaa $n-m$ ei-kantamuuttujan avulla. Kirjoitetaan x muotoon $x = (v, w)$, missä v ovat kantamuuttujat ja w ovat ei-kantamuuttujat. Jos $p \times p$ -matriisi $\partial g / \partial v$ on ei-singulaarinen sallitussa pisteessä $x' = (v', w')$, yhtälöillä $g(v, w) = 0$ on ratkaisu $v(w)$ kaikilla vektoreilla v jossakin pisteen v' ympäristössä. Tällöin funktiot $f_i(x)$ voidaan kirjoittaa muotoon $F_i(w) = f_i(v(w), w)$, jolloin ongelmaksi saadaan

$$(2.90) \quad \max (F_1(w), \dots, F_m(w))$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i.$$

Funktion F_i redusoitu gradientti on

$$(2.91) \quad \nabla_w F_i = \nabla_w f_i - (\nabla_v f_i) J^{-1} C,$$

missä $m \times m$ matriisi J sisältää funktioiden g osittaisderivaatat kantamuuttujien v suhteen ja C on $m \times (n-m)$ -matriisi, jonka alkioina ovat funktioiden g osittaisderivaatat ei-kantamuuttujien w suhteen.

Edellä esitettyssä kaavassa (2.91) redusoitu gradientti F_i kuvaa kohdefunktion i muutosta ei-kantamuuttujan suhteen. Vektori

$$(2.92) \quad \partial F / \partial x_j = (\partial F_1 / \partial x_j, \dots, \partial F_r / \partial x_j)$$

kuvaa marginaalista substituuutiota muuttujan x_j suhteen.

Merkitään hyötyfunktion approksimaatiota symbolilla U^* . Jos U^* on esimerkiksi lineaarinen, se on muotoa

$$(2.93) \quad U^*(f_1, \dots, f_r) = \lambda_1 f_1(x) + \dots + \lambda_r f_r(x).$$

Päätöksentekijälle esitetään (valikoiden) vektorit (2.92), ja päätöksentekijä ilmoittaa kannattaako, vastustaako vai onko välinpitämätön tällaisen muutoksen suhteen. Jos päätöksentekijä kannattaa esitettyä muutosta, muodostetaan rajoitus

$$(2.94) \quad \partial U^* / \partial x_j \geq \epsilon.$$

Jos päätöksentekijä vastustaa, on muodostettava rajoitus muotoa

$$(2.95) \quad \partial U^* / \partial x_j \leq \epsilon.$$

Muodostettava ongelma (ns. lambda-ongelma) on nyt

$$(2.96) \quad \max \epsilon$$

kun kaikki edellä muodostetut rajoitukset otetaan huomioon.

Tälle ongelmalle saadun rajoituksen perusteella tarkistetaan funktion U^* parametreja.

2.2.4 LAGRANGEN KERTOIMIIN PERUSTUVA MENETELMÄ

Lagrangen kertoimiin perustuvissa menetelmissä (Changkong & Haims, 1978; Sakawa, 1982) alkuperäinen monitavoiteoptimointiongelma (1.1) muunnetaan ongelmaksi

$$(2.97) \quad \begin{aligned} \max f_j(x) \\ g_i(x) &\leq b_i, \quad i = 1, \dots, p \\ f_i(x) &\geq \epsilon_i^k, \quad i=1, \dots, r, \quad i \neq j \\ x &= (x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

missä f_j on valittu ensisijainen objektifunktio, k viittaa iterointikierrokseen ja ϵ_i^k on vähimmäistaso kierroksella i , joka tavoitefunktioiden f_i , $i=1, \dots, r$, $i \neq j$, tulisi saavuttaa. Ongelman (2.97) ratkaisuna saadaan ei-dominoitu piste. Kierrokselle $k+1$ muuttujat ϵ_i^{k+1} määritellään päätöksentekijän kierroksella k saadun informaation perusteella. Algoritmi voidaan kirjoittaa

seuraavaan muotoon:

ALGORITMI 2.6

Vaihe 0: Valitaan jokin funktioista primäärikohdefunktioksi, olkoon valittu funktio f_j . Valitaan vähimmäistavoite-
tasot ϵ_i^0 , $i=1, \dots, r$, $i \neq j$. Asetetaan $k=0$.

Vaihe 1: Asetetaan $k=k+1$. Ratkaistaan ongelma (2.97). Merkitään saatua ratkaisua symbolilla y^k . Olkoot vastaavat Lagrangen kertoimet λ_{ij}^k , $i=1, \dots, r$, $i \neq j$.

Vaihe 2: Päätöksentekijä ilmoittaa marginaalisen substituution w_{ij}^k muuttujien f_j ja muiden muuttujien f_i välillä pisteessä y^k , esimerkiksi vastaavalla menettelyllä mitä GDF-algoritmissa on käytetty.

Vaihe 3: Jos algoritmin lopetuskriteerit täyttyvät, lopetetaan, muuten siirrytään vaiheeseen 4.

Vaihe 4: Muodostetaan suureet ϵ_{ij}^{k+1} seuraavasti:

$$\epsilon_{ij}^{k+1} = \epsilon_{ij}^k - \delta(w_{ij}^k - \lambda_{ij}^k),$$

missä δ voi olla ennalta valittu askelpituus tai se voidaan määrittää muodostamalla hyötyfunktioille lokaali approksimaatio pisteen y^k ympäristössä ja optimoimalla se.

Tämä jälkeen siirrytään vaiheeseen 1.

Vaiheessa 3 lopetuskriteerinä voi olla se, että kertoimet w_{ij}^k ovat (riittävän lähellä) nollia tai erotukset $(w_{ij}^k - \lambda_{ij}^k)$ ovat (riittävän lähellä) nollia tai ei löydetä sellaista sallittua suuntaa, johon haluttaisiin siirtyä. Edellä luetelluista lopetuskriteereistä viimeisen toteaminen voi olla hankalaa.

2.2.5 REFERENSSIPISTEMENETELMÄ

Referenssipistemenetelmä on alunperin puolalaisen matemaatikon Wierzbickin kehittämää monitavoiteoptimointimetodi (Wierzbicki, 1978; Steuer, 1986; Steuer & Choo, 1983). Tässä menetelmässä etsitään ratkaisulle referenssipisteeksi esimerkiksi $z^* = y^u + \epsilon$, missä y^u on utopiapiste ja $\epsilon_i > 0$ kaikilla i , ja projisoida piste $(f_1(x), \dots, f_r(x))$ ei-dominoitujen pisteiden joukkoon referenssipistettä apuna käyttäen. Tällöin ratkaistaan ongelma

$$(2.98) \quad \min \alpha$$

$$\alpha \geq \lambda_i(z_i^* - f_i(x)), \quad i = 1, \dots, r$$

$$x \in X, \quad \sum \lambda_i = 1.$$

Tällä menetelmällä voidaan tuottaa ei-dominoituja (myös ei-tuettuja) ratkaisuja riippumatta funktioiden f_i ja g_i laadusta. Saadut ratkaisut eivät kuitenkaan ole kaikissa tilanteissa yksikäsitteisiä. Yksikäsitteisiä ratkaisuja saadaan tekemällä optimoinnista kaksivaiheinen siten, että etsitään ongelmalle (2.98) saatujen ratkaisujen joukosta x' , joka on ongelman

$$(2.99) \quad \min \sum (z_i^* - f_i(x))$$

$$\alpha^* \geq \lambda_i(z_i^* - f_i(x)), \quad i = 1, \dots, r$$

$$x \in X, \quad \sum \lambda_i = 1$$

ratkaisu. Tässä α^* on ongelmaa (2.98) ratkaistaessa saatu α :n arvo. Nyt itse asiassa ensimmäisessä vaiheessa käytetään optimoinnissa L_∞ -metriikkaa, kun taas toissa vaiheessa käytetään L_1 -metriikkaa. Voidaan osoittaa (Steuer, 1986; Steuer & Choo,

1983), että käyttämällä (2.98):ssa ja (2.99):ssa esitettyä kaksi-vaiheista optimointia saadaan tuotettua ei-dominoitu ratkaisu aina, kun $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum \lambda_i = 1$.

Edellä esitetyissä kaavoissa (2.98) ja (2.99) voidaan käyttää referenssipisteenä z^* myös muita pisteitä kuin pistettä $y^u + \epsilon$ (Wierzbicki, 1978). Utopiapistettä voidaan esimerkiksi käyttää referenssipisteen määrittämisen lähtökohtana, mutta päätöksentekijä voi kuitenkin valita referenssipisteen omien mieltymystensä mukaisesti intuitiivisesti, jopa irrationaalisesti. Jos referenssipiste kuuluu joukoon S tai on joidenkin joukon S alkioiden dominoima, saadaan edellä esitettyjen kaavojen avulla myös ei-dominoituja ratkaisuja: tällöin saadut ratkaisut voidaan tulkita sellaisiksi, että ne ovat 'kauimpana' referenssipisteestä (käytetyn metriikan ja painovektorin suhteen). Täten ei-dominoituja ratkaisuja voidaan tuottaa valitsemalla referenssipisteeksi esimerkiksi nadir-piste.

Ei-dominoituja pisteitä voidaan tuottaa myös esim. maksimoimalla funktio

$$(2.100) \quad \sum \lambda_i f_i(x),$$

mutta tällöin ei saada tuotettua ei-tuettuja ei-dominoituja ratkaisuja, joita voidaan saada ratkaisuiksi referenssipistemetelmää käytettäessä.

Referenssipistettä käytetään apuna monissa monitavoiteoptimointimenetelmissä. Seuraavassa esitellään tälle idealle rakennettu referenssisuuntamenetelmä.

2.2.5.1 REFERENSSISUUNTAMENETELMÄ

Referenssisuuntamenetelmässä käytetään hyväksi edellä esitettyä Wierzbickin referenssipistemenetelmää (Korhonen & Laakso, 1986; Korhonen & Wallenius, 1988; Steuer, 1986). Tässä menetelmässä käytetään apuna funktiota $s(q, y, \lambda)$, jota nimitetään saavutettavuusfunktioksi. Tämä funktio $s(q, y, \lambda)$ on sellainen, että se projisoi pisteen q ei-dominoitujen pisteiden joukkoon S^p , kun ongelma

$$(2.101) \quad \min \{ s(q, y, \lambda) \}$$

$$y \in S$$

ratkaistaan. Tässä vektori λ on painovektori, $0 \leq \lambda_i \leq 1$, $\sum \lambda_i = 1$.

Jos funktioksi $s(q, y, \lambda)$ valitaan esimerkiksi

$$(2.102) \quad s(q, y, \lambda) = \max \{ \lambda_i(q_i - y_i) \} - \xi \sum y_i,$$

missä ξ on pieni positiivinen skalaari, on ratkaistava ongelma siis

$$(2.103) \quad \min \{ \alpha - \xi \sum y_i \}$$

$$\alpha \geq \lambda_i(q_i - y_i), \quad i=1, \dots, r$$

$$y_i = f_i(x), \quad i=1, \dots, r$$

$$x \in X,$$

jonka rajoitukset $\alpha \geq \lambda_i(q_i - y_i)$, $i=1, \dots, r$, voidaan kirjoittaa

myös muotoon $\alpha/\lambda_i + y_i \geq q_i, i=1, \dots, r$.

Jos halutaan projisoida pisteestä q suuntaan d lähtevä vektori ei-dominoitujen ratkaisujen joukkoon, ratkaistaan ongelma

$$\begin{aligned} (2.104) \quad & \min \{ \alpha - \xi \sum y_i \} \\ & \alpha/\lambda_i + y_i \geq q_i + t \cdot d_i, \quad i=1, \dots, r \\ & y_i = f_i(x), \quad i=1, \dots, r \\ & x \in X, \end{aligned}$$

missä t saa arvot väliltä $(0, \infty)$. Kirjoitetaan tämä kaava edelleen yleiseen muotoon

$$\begin{aligned} (2.105) \quad & \min \{ s(h, y, \lambda) \} \\ & h = q + t \cdot d \\ & y \in S. \end{aligned}$$

Tätä viimeksi esitettyä käytetään tässä menetelmässä apuna. Algoritmi on seuraava.

ALGORITMI 2.7

Vaihe 0: Valitaan mielivaltainen alkupiste y^0 ja asetetaan $k=1$.

Vaihe 1: Asetetaan $k=k+1$ ja $a=0$. Valitaan referenssipiste z^{*k} ja annetaan suuntavektorille arvoksi $d^k = z^{*k} - y^{k-1}$.

Vaihe 2: Ratkaistaan ongelma

$$\begin{aligned} (2.106) \quad & \min \{ s(h, y, \lambda) \} \\ & h = y^{(k-1)} + t \cdot d^k \\ & y_i = f_i(x), \quad i=1, \dots, r \\ & x \in X. \end{aligned}$$

Tämän ongelman ratkaisuna saadaan ei-dominoitujen pisteiden joukko Q^k .

Vaihe 3: Valitaan joukosta Q^k mieluisin ratkaisu. Merkitään tätä ratkaisua symbolilla y^k . (Valinnassa voidaan käyttää apuna esimerkiksi visuaalista esitystä, jossa eri funktioiden f_i , $i = 1, \dots, r$, arvot pisteestä y^{k-1} lähtien esitetään graafisesti tietokoneen näytölle, josta mieluisimman arvon valinta tehdään kursorilla.)

Vaihe 4: Jos $y^k \neq y^{k-1}$, siirrytään vaiheeseen 1, muuten siirrytään vaiheeseen 5.

Vaihe 5: Jos $a=0$, siirrytään vaiheeseen 6, muuten muodostetaan joukko P etsimällä pisteessä y^k sallittujen suuntien muodostaman kartion generoivat vektorit, (ts. etsitään ne vektorit, joiden avulla voidaan lausua kaikki sallitut suunnat pisteessä y^k). Siirrytään vaiheeseen 6.

Vaihe 6: Jos $P = \emptyset$, siirrytään vaiheeseen 7. Muuten asetetaan $k=k+1$ ja valitaan joukosta P jokin vektori ja asetetaan se d^k :n arvoksi, asetetaan $P = P \setminus \{d^k\}$ ja siirrytään vaiheeseen 2.

Vaihe 7: Jos $y^k = (f_1(x^k), \dots, f_r(x^k))$, on x^k ongelman optimiratkaisu, lopetetaan.

Jos päätöksentekijän hyötyfunktio U on pseudokonkaavi, X on suljettu, konvekksi ja rajoitettu sekä kaikki rajoitukset ovat jatkuvia ja differentioituvia, voidaan osoittaa (Korhonen & Laakso, 1985), että edellä esitetty algoritmi lopettaa toimintansa optimaalisen ratkaisun saavuttamisen jälkeen, kun

kaikki vaiheessa 5 muodostettuun joukkoon P kuuluvat vektorit on käyty läpi. Täten lineaarisissa ongelmissa voidaan saavutetun ratkaisun optimaalisuudesta varmistua. Jos kyseessä on epälineaarinen ongelma, saattaa joukon P alkioiden määrä olla ääretön, joten saavutetun ratkaisun optimaalisuudesta ei tällöin kaikissa tapauksissa saada varmuutta.

Tässä luvussa esitettyihin periaatteisiin perustuu suomalainen monitavoiteoptimointimenetelmä VIG.

2.2.6 STOKASTIIKKAAN PERUSTUVAT MENETELMÄT

Optimointiin on kehitetty joukko menetelmiä, jotka perustuvat stokastiikkaan. Näissä menetelmissä käytetään tavalla tai toisella satunnaislukuja hyväksi seuraavan pisteen valinnassa. Jos optimoitava funktio/rajoitukset ovat riittävä 'kauniisti' käyttäytyviä, eivät stokastiset menetelmät ole kovin tehokkaita iterointien määrällä ja suoritusajalla mitattuna muihin menetelmiin verrattuna. Sen sijaan stokastiikkaan perustuvat menetelmät soveltuvat hyvin käytettäväksi tilanteissa, joissa käsiteltävään ongelmaan liittyy epäsäännöllisyyttä: tarkasteltava alue X ei ole konvekksi tai yhtenäinen tai optimoitava funktio ei täytä oletuksia esimerkiksi (kvasi)konveksisuudesta. Stokastiikkaan perustuvista monitavoiteoptimointimenetelmistä esitetään seuraavassa kaksi esimerkkiä.

2.2.6.1 PAINOTETTU TCHEBYCHEFF-ALGORITMI

Painotetussa Tchebycheff-algoritmissa käytetään apuna kaavoja (2.98) ja (2.99), joten tämä menetelmä voidaan myös luokitella referenssipistemenetelmäksi (Steuer, 1986, Steuer & Choo, 1983). Tässä algoritmissa generoidaan aluksi joukko satunnaisia painovektoreita $(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$, $\sum \lambda_i = 1$, $\lambda \in [0,1]$. Käyttämällä kaavoja (2.98) ja (2.99) etsitään kutakin painovektoria vastaava ei-dominoitu ratkaisu. Näiden ratkaisujen joukosta päätöksentekijä valitsee mieluisimman. Seuraavassa vaiheessa generoidaan painovektoreita valittua ratkaisua vastaavan painovektorin ympäristöstä. Näin jatketaan kunnes ennalta määrätty määrä iteraatioita on suoritettu.

ALGORITMI 2.8

Vaihe 0: Valitaan otoskoko P , iteraatioiden määrä t ja pienennystekijä h , $0 < h < 1$. Asetetaan $k \leftarrow 0$ ja $[l_i^1, u_i^1] = [0, 1]$ kaikilla i . Etsitään utopiaratkaisu y^u , ja muodostetaan referenssipiste $z^* = y^u + \epsilon$, missä $\epsilon_i > 0$ kaikilla i .

Vaihe 1: $k \leftarrow k+1$. $\Lambda^1 = \{\lambda \in R^r, \lambda_i \in [l_i^k, u_i^k], \sum \lambda_i = 1\}$

Vaihe 2: Generoidaan satunnaisesti P painovektoria joukosta Λ^k . Ratkaistaan ongelmat (2.98) ja (2.99) näille vektoreille. Saatu tulos esitetään päätöksentekijälle, joka valitsee saatujen ratkaisujen joukosta mieluisimman. Merkitään tätä ratkaisua symbolilla $y^k = (y_1^k, \dots, y_r^k)$.

Vaihe 3: Muodostetaan vektori λ^k seuraavasti

$$\begin{aligned}
 (2.107) \quad \lambda_i^k &= (\sum 1/(z_j^* - y_j^k))^{-1}/(z_j^* - y_j^k), \text{ jos } z_j^* \neq y_j^k \quad \forall i \\
 &= 1, \quad \text{jos } z_j^* = y_j^k \\
 &= 0, \quad \text{muuten}
 \end{aligned}$$

Vaihe 4: Muodostetaan $\Lambda^{k+1} = \{\lambda \in R^r, \lambda_i \in [l_i^{k+1}, u_i^{k+1}], \sum \lambda_i = 1\}$, missä

$$\begin{aligned}
 [l_i^{k+1}, u_i^{k+1}] &= [0, h^k], & \text{jos } \lambda_i^k - h^k/2 \leq 0 \\
 &= [1 - h^k, 1], & \text{jos } \lambda_i^k + h^k/2 \geq 1 \\
 &= [\lambda_i^k - h^k/2, \lambda_i^k + h^k/2], & \text{muuten}
 \end{aligned}$$

vaihe 5: Jos $k < t$, siirrytään vaiheeseen 1, muuten mennään vaiheeseen 6.

Vaihe 6: Jos päätöksentekijä haluaa lopettaa iteroinnin, siirrytään vaiheeseen 7, muuten siirrytään vaiheeseen 1.

Vaihe 7: Ratkaisu $x \in X$, $y^k = (f_1(x), \dots, f_r(x))$.

2.2.6.2 VIERIVÄN PALLON MENETELMÄ

Toisena stokastiikkaan perustuvana menetelmänä esitellään melko tuore vierivän pallon menetelmä, joka ilmeisesti puree suhteellisen hankaliinkin monitavoiteoptimointitilanteisiin. Tässä menetelmässä yhdistetään puhdas satunnaishaku ja ohjattu yksiuulotteinen satunnaishaku (Sun, 1993). Aluksi generoidaan joukko satunnaisia ratkaisuja. Näitä ratkaisuja tarkennetaan satunnaisuuteen perustuvalla ohjatulla haulla. Puhtaalla satunnaishaualla generoidut pisteiden voidaan tulkita olevan eräänlaisten 'pallojen' keskipisteinä, joita vieritetään ohjatulla satunnais-

haulla utopiaratkaisua kohti, kunnes törmätään ei-dominoitujen ratkaisujen joukkoon. Tästä menetelmästä on kehitetty myös versio, jossa käytetään apuna referenssipistemenetelmää, mutta esitetään tässä Tchebycheff-metodiin perustuva algoritmi.

ALGORITMI 2.9

Vaihe 0: Olkoon $Q = \emptyset$. Generoidaan satunnaisesti ratkaisuja $x = (x_1, \dots, x_r)$, ratkaisuihin hyväksytään ne, jotka kuuluvat sallitulle alueelle X . Piste $z = (f_1(x), \dots, f_r(x))$ lisätään joukkoon Q , jos se ei dominoi mitään toista tämän joukon pistettä. Vastaavasti lisättäessä piste joukkoon Q , poistetaan Q :sta ne pisteet joita lisättävä piste dominoi. Pisteiden generointia jatketaan, kunnes a) ennalta määrätty määrä pisteitä on tutkittu, b) ennalta määrätty määrä sallitulle alueelle kuuluvia pisteitä on saatu generoitua tai c) joukkoon Q on saatu ennalta määrätty määrä pisteitä, jotka eivät dominoi toisiaan. Lisäksi etsitään (tai määrätään) ideaalipiste $z^* = (z_1^*, \dots, z_r^*)$. Asetetaan $k=0$, $[l_i^1, u_i^1] = [0, 1]$, $i=1, \dots, r$. Samoin valitaan kullakin iteraatiokierroksella päätöksentekijälle esitettävien ratkaisujen määrä p ja generoitavien painovektorien määrä q , $q \geq p$, pienennyskerroin h , iteraatiokierrosten maksimimäärä N .

Vaihe 1: $k \leftarrow k+1$. $\Lambda^k = \{\lambda \in \mathbb{R}^r, \lambda_i \in [l_i^k, u_i^k], \sum \lambda_i = 1\}$. Generoidaan joukosta Λ^k painovektoreita $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ q kappaletta.

Vaihe 2: Jokaiselle painovektorille $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ etsitään joukosta Q vektori $z_\lambda^0 = (f_1(x_\lambda^0), \dots, f_r(x_\lambda^0))$, joka on kaavassa (2.98) esitetyn ongelman ratkaisu tässä joukossa.

Käytetään pistettä x_1^0 alkupisteenä algoritmissa 2.10 esitetylle yksiulotteiselle satunnaishaulle, jossa etsitään (likimain) ei-dominoitua pistettä, ts. yritetään löytää sellainen piste $x_1 \in X$, että $z_1 = (f_1(x_1), \dots, f_r(x_1)) \in B(z_1^*, \epsilon) \cap S$, $\epsilon > 0$, ja z_1^* toteuttaa kaavassa (2.98) esitetyn ehdon (joukossa S tai lokaalisti). Joukkoa Q päivitetään yksiulotteisen suunnanhaun yhteydessä.

Vaihe 3. Jokaiselle painovektorille λ etsitään joukosta Q vektori z_1 , joka on kaavassa (2.98) esitetyn ongelman ratkaisu tässä joukossa. Merkitään näiden ratkaisujen joukkoa symbolilla P .

Vaihe 4: Valitaan joukon P vektorien joukosta p erilaisinta. Jos $k > 1$, lisätään z^{k-1} näiden vektorien joukkoon, ja esitetään nämä vektorit päätöksentekijälle. Esitettyjen ratkaisujen joukosta päätöksentekijä valitsee mieluisimman, merkitään tätä ratkaisua symbolilla z^k . Jos päätöksentekijä on tyytyväinen saatuun ratkaisuun tai $k=N$, lopetetaan. Muuten muodostetaan vektori λ^k seuraavasti

$$\begin{aligned}\lambda_i^k &= (\sum 1/(z_j^* - y_j^k))^{-1} / (z_j^* - y_j^k), \text{ jos } z_j^* \neq y_j^k \quad \forall i \\ &= 1, \quad \text{jos } z_j^* = y_j^k \\ &= 0, \quad \text{muuten.}\end{aligned}$$

Samoin muodostetaan välit $[l_i^{k+1}, u_i^{k+1}]$ seuraavasti

$$\begin{aligned}[l_i^{k+1}, u_i^{k+1}] &= [0, h^k], & \text{jos } \lambda_i^k - h^k/2 \leq 0 \\ &= [1-h^k, 1], & \text{jos } \lambda_i^k + h^k/2 \geq 1 \\ &= [\lambda_i^k - h^k/2, \lambda_i^k + h^k/2], & \text{muuten}\end{aligned}$$

ja siirrytään vaiheeseen 1.

Edellä esitetyn algoritmin vaihe 3 on välttämätön, sillä sen jälkeen kun kaikki painovektorit λ on käsitelty, saattaa jonkun vektorin λ kohdalla joukosta Q löytyä parempi ratkaisu kuin se, joka on saatu, kun ko. vektoria on käytetty alkupisteenä yksiulotteisessa haussa algoritmin vaiheessa 2.

Seuraavassa esitetään algoritmi, jota voidaan käyttää edellä esitetyn algoritmin vaiheessa 2 tehtävässä yksiulotteisessa haussa.

ALGORITMI 2.10

Vaihe 0: Olkoon joukko $Q \neq \emptyset$, ja olkoon piste x_1^0 alkupiste, $z_1^0 = (f_1(x_1^0), \dots, f_r(x_1^0)) \in Q$. Asetetaan laskureille alkuarvot $m=0$, $l=0$ ja $c=0$. Valitaan askelpituuden alkuarvo $s = (s_1, \dots, s_r)$, $s_i > 0$, $i=1, \dots, r$. Samoin valitaan arvot laajennus- ja supistuskertoimille α_1 ja α_2 , $\alpha_1 > 1$, $0 < \alpha_2 < 1$. Lisäksi valitaan käsiteltävien uusien satunnaisten pisteiden maksimimäärä N , pienennysten maksimimäärä C sekä kokonaisluvut t_1 ja t_2 , $t_1 < t_2$, joilla säädellään askelpituuden s pienentämistä tai kasvattamista.

Vaihe 1: Asetetaan $m=m+1$. Satunnaisesti generoidaan piste $p \in [0,1]^n$. Määritellään vektori $q = (q_1, \dots, q_n)$ seuraavasti: $q_i = x_1^{m-1} + 2(p_i - 0.5)s_i$, $i=1, \dots, r$. Asetetaan $l \leftarrow l+1$. Jos on $q \in X$, lasketaan $w = (f_1(q), \dots, f_r(q))$ ja siirrytään vaiheeseen 2, muuten siirrytään vaiheeseen 4.

Vaihe 2: Jos jokin joukon Q alkio dominoi pistettä q , siirrytään vaiheeseen 4. Muussa tapauksessa lisätään w joukkoon

Q ja poistetaan joukosta Q ne alkiot, joita w dominoi ja siirrytään vaiheeseen 3.

Vaihe 3: Jos w dominoi pistettä z^{m-1} tai se on ongelman (2.98) ratkaisu joukossa Q , asetetaan $x^m = q$, $z^m = w$.

Jos $l \leq t_1$, kasvatetaan askelpituutta asettamalla $s_i = \alpha_1 s_i$, $i=1, \dots, n$, asetetaan $l=0$ ja $c=c-1$ sekä siirrytään vaiheeseen 5.

Muuten siirrytään vaiheeseen 4.

Vaihe 4: Asetetaan $x^m = x^{m-1}$ ja $z^m = z^{m-1}$. Jos $l > t_2$, pienennetään askelpituutta asettamalla $s_i = \alpha_2 s_i$, $i=1, \dots, r$, $l = 0$ ja $c=c+1$. Siirrytään vaiheeseen 5.

Vaihe 5: Jos on $c \geq C$ tai $m \geq N$, asetetaan $x_\lambda = x^m$ ja $z_\lambda = z^m$ ja lopetetaan, muuten siirrytään vaiheeseen 1.

Edellisessä algoritmossa askelpituutta siis kasvatetaan jokaisen 'onnistumisen' jälkeen, ts. aina kun on löydetty parempi piste kuin edellinen. Näin kun jatkuvaa edistymistä havaitaan, kasvatetaan 'pallon' kokoa, jotta saataisiin 'pallo' vierimään nopeammin. Algoritmossa annetaan pienennyksille maksimimäärä, tosin kasvatettaessa 'pallon' kokoa vähennetään tehtyjen pienennysten määrää yhdellä.

Voidaan osoittaa (Sun, 1993), että kun iteraatioiden määrä kasvaa kohti ääretöntä, algoritmi 2.9 tuottaa todennäköisyydellä 1 ratkaisun, joka kuuluu johonkin pisteen z_λ^* ympäristöön $B(z_\lambda^*, \epsilon) \cap S$, ja piste z_λ^* on sellainen, että se toteuttaa kaavassa (2.98) esitetyn ehdon joko koko joukossa S tai lokaalisti mielivaltaisella $\epsilon > 0$.

2.2.7 EI-DOMINOITUJEN RATKAISUJEN GENEROINTI

Kokonaan oman ryhmänsä monitavoiteoptimointimenetelmien joukossa muodostavat metodit, joissa päätöksentekijän hyötyfunktioista ei algoritmin suorituksen missään vaiheessa haluta tietoa, vaan ei-dominoidut ratkaisut pyritään generoimaan. Nämä ratkaisut (tai niiden edustava osajoukko) esitetään päätöksentekijälle, ja niistä päätöksentekijä valitsee mieluisimman. Jos päätöksentekotilanne on riittävän yksinkertainen, voi tällaisen menetelmän käyttö olla mielekästä, varsinkin, jos päätöksentekijällä ei ole riittävän selkeää käsitystä tarkasteltavasta ongelmasta ja arviointi on mahdollista toistaa monta kertaa.

Jos sekä rajoitukset g_i , $i=1,\dots,p$, että kriteerifunktiot f_j , $j=1,\dots,r$, ovat lineaarisia, on koko ei-dominoitujen ratkaisujen joukon esittäminen päätöksentekijälle mahdollista. Tähän tarkoitukseen on kehitetty esim. ADBASE-ohjelma (Steuer, 1986). Ei-dominoitujen pisteiden joukon generointiin on olemassa myös muita menetelmiä (Hwang & Masud, 1979). Lisäksi nykyinen tietotekniikka tarjoaa hyvät mahdollisuudet edustavan ei-dominoitujen ratkaisujen joukon generointiin.

3. OPTIMOINTI EPÄVARMUUDEN VALLITESSA

Edellä luvussa 2.1 esitellyissä menetelmissä sivuttiin jo optimointia epävarmuuden vallitessa. Vertailtavissa vaihtoehtoisissa jokin muuttujista voi olla esimerkiksi kriteerimuuttujan odotusarvo, tällainen voi olla tilanne esimerkiksi luvussa 2.1.1 esitellyssä MAUT:ssa. Vastaavasti luvun 2.1.2 AHP:ssa epävarmuutta voidaan mallintaa erilaisten skenaarioiden avulla: tuloksena saadaan eri vaihtoehtojen järjestys eri skenaarioiden tilanteessa tai päätöksentekijä joutuu arvioimaan eri skenaarioiden todennäköisyyttä. Sen sijaan luvussa 2.2. on koko ajan oletettu, että päätösmuuttujien $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ ja kriteerimuuttujien $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_r) = (f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x}))$ välinen yhteys tunnetaan tarkasti.

Oletetaan nyt, että muuttujien $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ lisäksi on joukko ympäristö- tai häiriömuuttujia $\mathbf{w} = (w_1, \dots, w_k)$, joiden jakaumat oletetaan tunnetuksi. Optimointiongelma voidaan nyt kirjoittaa yleiseen muotoon

$$\begin{aligned}
 (3.1) \quad & \max E(q_1(f_1, \dots, f_r)) \\
 & : \\
 & \max E(q_s(f_1, \dots, f_r)) \\
 & E(h_i(g_i(\mathbf{x}, \mathbf{w}))) \leq 0, \quad i = 1, \dots, p,
 \end{aligned}$$

missä $f_i = f_i(\mathbf{x}, \mathbf{w})$, $i = 1, \dots, r$. Funktioiden h_i , $i = 1, \dots, p$, ja q_i , $i = 1, \dots, s$, muoto riippuu tarkasteltavasta ongelmasta. Pyrkimyksenä voi olla esimerkiksi kriteerimuuttujien $f_1, \dots, f_r$ odotusar-

vojen maksimointi ja/tai varianssin minimointi, kun muuttujien $w = (w_1, \dots, w_k)$ jakaumat ovat tunnettuja.

Tätä mallia voidaan käyttää myös silloin, kun muuttujan x_i valittuun arvoon liittyy epävarmuutta, ts. valittua muuttujan x_i arvoa ei voida tarkasti saavuttaa, jolloin w_i on muuttujaan x_i liitettävä virhetermi, jonka jakauma mahdollisesti riippuu x_i :n arvosta. Tällöin ei riitä se, että etsitään mieluisin arvo kullekin muuttujalle x_i , vaan on otettava huomioon myös se, millä tarkkuudella valittu x_i :n arvo voidaan saavuttaa. Tilanne on analoginen silloin, kun funktiot $f_i(x)$, $i=1, \dots, r$, eivät ole tarkkoja, vaan niihin liittyy jokin virhetermi, jonka jakauma tunnetaan.

Kaavassa (3.1) esitetty optimointiongelma on itse asiassa Bayesilainen päätöksentekotilanne, jossa muuttujien w oletettu jakauma on a priori-jakauma ja muuttujien x mahdolliset arvot muodostavat toimenpideavaruuden. Muuttujista w ei tehdä havaintoja, joten kyseessä on ei-data-ongelma (Berger, 1985).

Kaavan (3.1) optimointiongelma voidaan kirjoittaa edelleen muotoon

$$\begin{aligned}
 (3.2) \quad & \max F_1(x, w) \\
 & : \\
 & \max F_s(x, w) \\
 & G_i(x, w) \leq 0, \quad i=1, \dots, p,
 \end{aligned}$$

missä

$$(3.3) \quad F_i(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \int q_i(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_r(\mathbf{x})) p(\mathbf{w}) d\mathbf{w}, \quad i=1, \dots, s,$$

$$(3.4) \quad G_i(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = \int h_i(g_i(\mathbf{x}, \mathbf{w})) p(\mathbf{w}) d\mathbf{w}, \quad i = 1, \dots, p,$$

ja $p(\mathbf{w})$ muuttujien $\mathbf{w}$ tiheysfunktio. Oman erikoistapauksensa muodostavat ehdot $G_i(\mathbf{x}, \mathbf{w})$, jotka ovat muotoa

$$(3.5) \quad P(E(f(\mathbf{x})) > b_i) < \alpha.$$

Jos kaikki funktiot F_i ja G_j , $i=1, \dots, s$, $j=1, \dots, p$, ovat ratkaistavissa, palautuu ongelma luvussa 2 esitetyksi monitavoiteoptimointiongelmaksi. Tällainen tilanne syntyy esimerkiksi silloin, kun kaikki muuttujat $\mathbf{w}$ ovat diskreettejä. Tällöin joudutaan kyllä käsitteen 'dominanssi' sijasta käyttämään käsitettä 'stokastinen dominanssi'.

Jos funktioita F_i ja G_j , $i=1, \dots, s$, $j=1, \dots, p$, ei jostain syystä saada ratkaistua, voidaan niihin yrittää soveltaa jotain stokastisen optimoinnin menetelmää (kts. esim. Ermoliev & Wets, 1984). Ongelmallista tiheysfunktioita $p(\mathbf{w})$ voidaan esimerkiksi approksimoida diskreetillä funktiolla.

Toinen varsin hedelmällinen lähestymistapa epävarmuuden mallintamiseen on muodostaa erilliset monitavoiteoptimointiongelmat eri epävarmuustilanteisiin tai tehdä samaan ongelmaan useita eri kohdefunktioita, joissa epävarmuus on otettu huomioon (Korhonen, 1992; Korhonen & al., 1989). Tällöin eksogeenisten muuttujien jakautumaan ei jouduta ottamaan kantaa ongelmaa mallinnettaessa, vaan eksogeenisiin muuttujiin sisältyvän riskin huomioiminen jää päätöksentekijän ongelmaksi.

4. MONITAVOITEOPTIMOINTI VAKUUTUSYHTIÖSSÄ

Monitavoiteoptimointiin törmätään hyvin monilla elämän aloilla ja kirjallisuudesta löytyykin lukuisa joukko esimerkkejä ongelmista, joihin monitavoiteoptimointia on sovellettu tai voidaan soveltaa (kts. esim. Keeney & Raiffa, 1976; Saaty, 1982; Saaty, 1990; Vargas, 1990). Seuraavassa esitetään joitakin vakuutusyhtiössä mahdollisesti esille tulevia ja pohditaan edellä esitettyjen menetelmien käyttökelpoisuutta näiden ongelmien ratkaisussa. Esitetyt ongelmat pyrkivät olemaan sellaisia, että niihin liittyy jossain määrin vakuutusalan erityispiirteitä tai käsitellyllä asialla on erityistä merkitystä nimenomaan vakuutusosalalla. Voidaan tietenkin löytää lukuisa joukko monitavoiteoptimointiongelmia, joihin vakuutusosalallakin saattaa helposti törmätä, mutta jotka eivät ole erityisesti ominaisia tai merkityksellisiä vakuutusosalalla.

a) Tarkastellaan aluksi (yksinkertaistettua) tariffointiongelmaa. Yksittäisen vakuutuslajin kohdalla ollaan tekemässä päätöstä tulevan vuoden tariffeista ja kyseisen vakuutuslajin mainontaan käytettävistä kuluista. Kyseisen vakuutuslajin kohdalla halutaan samanaikaisesti kasvattaa markkinaosuutta, kasvattaa laji kannattavuutta ja vähentää suhteellisia kuluja. Yksinkertaistusti oletetaan, että muita tuloja ei ole kuin maksutulo. Kulut puolestaan koostuvat korvaus- ja liikeykuluista. Liikekulujen

oletetaan pysyvän vakiona mainoskuluja ja kannan määrästä riippuvia kuluja lukuunottamatta. Kannattavuutta kuvaavaksi tarkasteltaviksi suureiksi valitaan nyt vahinkosuhte ja kulusuhde. Tariffitason reaalista muutosta p mitataan prosentteina nykyisestä, mainoskuluja mitataan prosentteina q nykyisistä mainoskuluista. Lisäksi oletetaan, että muiden yhtiöiden kohdalla tariffitason muutos tämän lajin kohdalla on likimain nolla.

Ongelma voidaan nyt formuloida seuraavasti:

$$\max \text{ markkinaosuus} = y_1$$

$$\min \text{ vahinkosuhte} = y_2$$

$$\min \text{ kulusuhde} = y_3$$

valitsemalla muuttujille p ja q sopivat arvot. Oletetaan lisäksi, että kilpailu- ja imagosyistä tariffeja voidaan korottaa korkeintaan 10%. Mainoskuluista oletetaan, että ne voidaan korkeintaan kaksinkertaistaa, toisaalta ne voidaan alimmillaan pudottaa puoleen. Täten muuttujille p ja q saadaan rajoitukset:

$$p \leq 5\%$$

$$50\% \leq q \leq 200\%$$

Formuloidaan nyt malli, joka kuvaa markkinaosuuden, vahinkosuhteen ja kulusuhteen riippuvuutta muuttujista p ja q . Tämä malli on jossain määrin pelkistetty (ja mielivaltaisen): sitä käytetäänkin tässä apuna monitavoiteoptimoinnin mahdollisuuksien demonstroinnissa eikä malli pyrikään olemaan täysin todellisuutta kuvaava.

Maksutulon B muutosta voidaan kuvata yhtälöllä (Pentikäinen et al, 1989):

$$(4.1) \quad B(t+1) = B(t)r_m(t)(1+p)^{1-\alpha},$$

missä α kuvaa hintajoustoa ja p tariffin muutosta keskimääräiseen tariffitasoon verrattuna sekä $r_m(t)$ on kasvutekijä. Oletetaan jatkossa, että $r_m(t) = 1$.

Mainonnan vakuutusta kysyntään voidaan kuvata eräänlaisella S-käyrällä: vähäinen mainonta ei sanottavasti lisää myyntiä, mutta tietyn pisteen jälkeen mainonnan lisäys kasvattaa myyntiä suhteellisen jyrkästi, kunnes saavutetaan toinen käännepiste, jonka jälkeen myynnin kasvattaminen mainonnan avulla vaatii suhteellisen suurta mainospanostusta (Autio & al. 1974; O'Shaughnessy, 1984). Oletetaan nyt, että mainonnan vaikutusta myyntiin voidaan kuvata riittävän tarkasti lineaarisella yhtälöllä. Kuvataan mainonnan vaikutusta maksutuloon kaavalla $(1 + \beta \cdot (q-1))B$, ts. oletetaan, että nykyisellä mainonnan tasolla ei ole vaikutusta kannan kasvuun, sillä pystytään kompensoimaan poistuma, mainonnan lisääminen nykyiseltä tasolta lisää kantaa ja mainontaa vähennettäessä kanta pienenee. Yhdistetään kerroin $(1+\beta \cdot (q-1))$ edelliseen kaavaan, ja tulevan vuoden maksutulo (arvio)ksi saadaan

$$(4.2) \quad B(t+1) = B(t)(1+\beta \cdot (q-1))(1+p)^{1-\alpha}.$$

Täten markkinaosuutta vuonna $t+1$ voidaan mitata yhtälöllä

$$(4.3) \quad y_1 = m(t+1) = m(t)(1+\beta \cdot (q-1))(1+p)^{1-\alpha},$$

missä $m(t)$ on nykyinen markkinaosuus.

Olkoon nykyinen vahinkosuhde $k(t) = X(t)/B(t)$, missä $X(t)$ on vuoteen t kohdistuva korvausmeno. Tulevaan vuoteen kohdistuvalle korvausmenolle voidaan saada estimaatti suoraviivaisesti kertomalla nykyinen vahinkosuhde tulevan vuoden oletetulla maksutulolla, josta on eliminoitu tariffin muutoksen suora vaikutus $X(t+1) = k(t)B(t+1)/(1+p)$. Oletetaan nyt kuitenkin, että tariffin kasvu yli alan keskitason aiheuttaa 'hyvien' asiakkaiden poistumista kannasta: osa niistä asiakkaista, joille ei ole sattunut vahinkoja vaihtaa vakuutuksensa muihin yhtiöihin. Voidaan myös olettaa, että keskimääräistä korkeampi tariffi vaikeuttaa uusmyyntiä ja tämä saattaa aiheuttaa pientä herpaantumista asiakasvalinnassa joidenkin asiamiesten kohdalla. vahinkojen odotettavissa olevassa määrässä ja suuruudessa ei tapahdu muutoksia, vaikka kanta maksun muutoksen johdosta muuttuisikin. Otetaan tämä vaikutus huomioon kertomalla edellä esitetty suure kertoimella $\gamma^{\max(p-\epsilon, 0)}$, missä γ ja ϵ ovat parametreja. Täten suureeksi $k(t+1)$ saadaan:

$$(4.4) \quad y_2 = k(t+1) = \gamma^{\max(p-\epsilon, 0)} X(t+1)/B(t+1) = \gamma^{\max(p-\epsilon, 0)} k(t)/(1+p).$$

Kun tässä parametrille γ annetaan arvo 1, saadaan suureelle $k(t+1)$ yksinkertaisempi estimaatti $k(t)/(1+p)$.

Olkoot liikekulut $E(t) = S(t)+V(t)+W(t)$, missä $V(t)$ on mainoskulut, $W(t)$ kuvaa kannan määrästä riippuvaa kulujen osaa ja muut kulut on mätetty termiin $S(t)$. Liikekulusuhde on nyt $E(t)/B(t) = s(t)+v(t)+w(t)$, missä $s(t) = S(t)/B(t)$, $v(t) = V(t)/B(t)$ ja $w(t) = W(t)/B(t)$. Nyt edellä tehtyjen oletusten

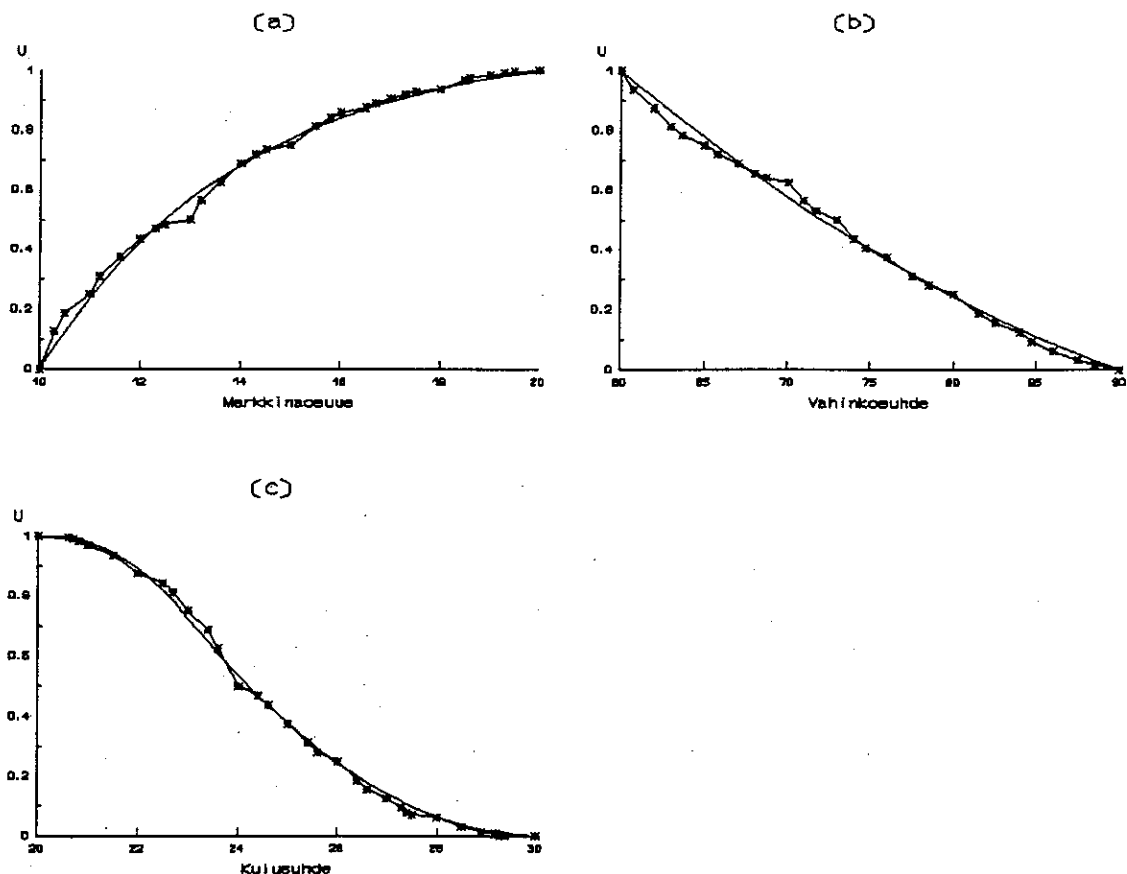
perusteella $S(t+1) = S(t)$, $V(t+1) = V(t)q$. Suureelle $W(t+1)$ käytetään approksimaatiota $W(t+1) = W(t)(1+\beta \cdot (q-1))(1+p)^{-\alpha}$, ts. kannan muutosta kuvaa maksutulon määrän muutos, josta on eliminoitu tariffin muutoksen suora vaikutus. Täten tulevan vuoden kulusuhteeksi saadaan

$$(4.5) \quad y_3 = r(t+1) \\ = (s(t) + v(t)q) / ((1+\beta \cdot (q-1))(1+p)^{1-\alpha}) + w(t) / (1+p).$$

Erään suomalaisen vakuutusyhtiön aktuaari suostui kokeilemaan tämän ongelman ratkaisemista MAUT:n avulla. Hänen hyötyfunktionsa vahinkosuhteen, markkinaosuuden ja kulusuhteen kohdalla generoitiin käyttämällä sivulla 16 esitettyä menettelyä, vahinkosuhteen oletettiin olevan välillä [60%, 90%], markkinaosuuden välillä [10%, 20%] ja kulusuhteen välillä [20%, 30%]. Hänen antamansa vastaukset on esitetty käyrinä seuraavassa kuviossa 4.1. Vastauksista nähdään, että hän on riskinkaihtaja markkinaosuuden suhteen, riskinottaja vahinkosuhteen kohdalla ja kulusuhteen kohdalla on tarkasteltavalla vaihteluvälillä havaittavissa aluksi riskinkaihtamista ja loppupuolella riskinottoa. Jokaiselle käyrälle on etsitty pienimmän neliösumman menetelmällä sopiva Approksimaatio, myös nämä käyrät on esitetty kuviossa 4.1. Vakiot k_1 , k_2 ja k_3 määritettiin sivulla 17 esitettyä menettelyä käyttäen: $k_1 = 0.124985$, $k_2 = 0.749756$ ja $k_3 = 0.288574$. Täten kyseinen henkilö pitää selvästi tärkeimpänä tavoitteena hyvää vahinkosuhdetta, kaikkein vähiten hän antaa arvoa markkinaosuudelle. Koska vakioiden summa on ykkösestä poikkeava, valitaan hyötyfunktion muodoksi multiplikatiivinen muoto (2.4). Vakio k ratkaistiin kaavasta (2.8) ja sen arvoksi saatiin $k = -0.490629$. Lopulliseksi hyötyfunktioksi saatiin täten

$$(4.6) \quad U(y) = -(1-0.2547 \cdot U_1(y_1)) \cdot (1-1.5282 \cdot U_2(y_2)) \cdot (1-0.5882 \cdot U_3(y_3)) / 0.4906 + 2.038201.$$

Oletetaan, että $m(t) = 0.15$, $k(t) = 0.75$ ja $r(t) = 0.25 = s(t) + v(t) + w(t) = 0.20 + 0.03 + 0.02$. Olkoon lisäksi $\gamma = 1.01$ ja $\epsilon = 100$.



KUVIO 4.1 Hyötyfunktioita

Kokeiltaessa suureiden p ja q etsintää tässä tilanteessa joillakin parametrien α ja β arvoilla käyttäen funktioina U_i , $i=1, 2, 3$ kuviossa 4.1 esitettyjä hyötyfunktioapproksimaatioita saatiin seuraavat ratkaisut.

α	β	p	q	Y_1	Y_2	Y_3
0.8	0.07	0.10	0.5	0.147	0.753	0.241
1.0	0.07	0.067	0.5	0.145	0.751	0.246
1.2	0.07	-0.036	0.5	0.146	0.751	0.247
0.8	0.08	0.10	0.73	0.150	0.753	0.242
1.0	0.08	0.062	2	0.162	0.751	0.250
1.2	0.08	-0.032	2	0.163	0.751	0.252
0.8	0.09	0.10	2	0.167	0.753	0.243
1.0	0.09	0.065	2	0.164	0.751	0.248
1.2	0.09	-0.032	2	0.165	0.751	0.250

Kuten tuloksista havaitaan, on ratkaisu hyvin riippuvainen parametrien valinnasta. Tuloksena saatava muuttujan p arvo riippuu selvästi parametrin α arvosta ja q :n arvoon taas vaikuttaa parametrin β arvo. Kuten tästä havaitaan, on monita-voiteoptimoinnissa(kin) kiinnitettävä erityistä huomiota mallin rakentamiseen ja mallin parametrien oikeellisuuden arvioimiseen, erityisesti kun käytetään menetelmää, joka lopulta tuottaa yhden ainoan 'oikean' ratkaisun. Jonkinlaisen herkkyyssanalyysin suorittaminen on useimmiten hyödyllistä, kuten tästäkin esimerkiksi nähdään.

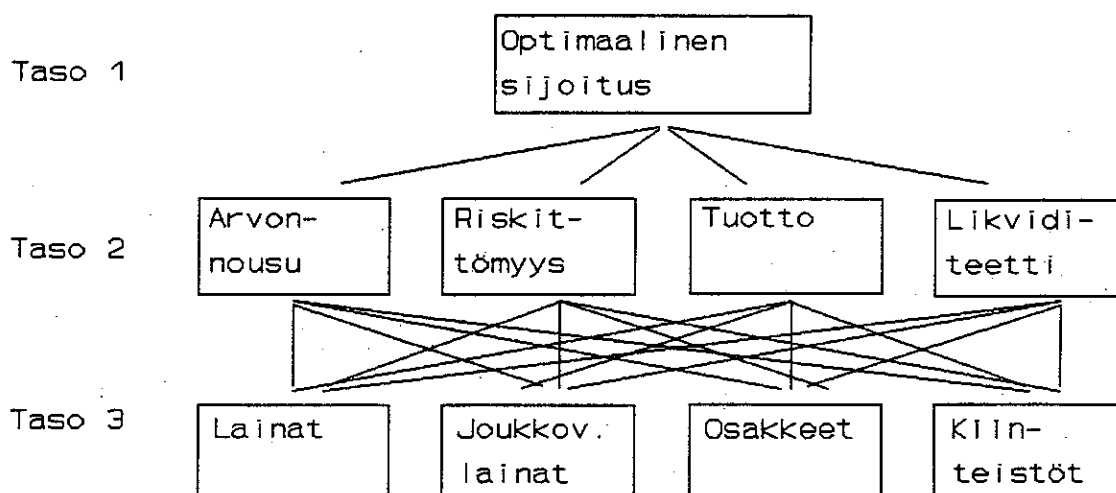
b) Tarkastellaan sijoitusongelmaa vakuutusyhtiössä. Vaikka sijoittaminen ei olekaan pelkästään vakuutusalaan liittyvää, on sijoittamisella vakuutussektorilla alan luonteesta johtuen suurempi merkitys kuin monilla muilla aloilla.

Muodostetaan sijoittamisesta luvussa 2.1.2 esitetyllä AHP:llä ratkaistava (yksinkertaistettu) monitavoiteoptimointiongelma. Oletetaan, että pyrkimyksenä on saada aikaan eräänlainen optimaalinen sijoitus, kun valittavat sijoitusvaihtoehdot ovat lainat, joukkovelkakirjalainat, osakkeet ja kiinteistöt.

Kriteereiksi valitaan sijoituksen

tuotto, riskittömyys, arvonnousu ja likviditeetti.

Tässä tilanteessa eri sijoitusvaihtoehtojen saamia painoarvoja voidaan käyttää apuna jaettaessa varoja eri sijoitustapojen kesken. Tämän ongelman hierarkkinen rakenne on esitetty seuraavassa kuviossa 4.2.



KUVIO 4.2 Sijoitusongelman hierarkkinen rakenne

Erään suomalaisen vakuutusyhtiön talousyksikössä työskentelevä henkilö suostui kokeilemaan tämän ongelman ratkaisemista AHP:n avulla. Arviointi tehtiin lokakuussa 1994 silloisessa taloudellisessa tilanteessa. Hänen suorittamansa eri vaihtoehtojen vertailu

eri kriteerien suhteen ja eri kriteerien keskinäinen vertailu on esitetty seuraavissa matriiseissa.

Kriteeri=ARVONNOUSU

	L	J	O	K
L	1	1	1/5	1/3
J	1	1	1/5	4
O	5	5	1	5
K	3	3	1/5	1

$$C_R = 0.057$$

$$w = (0.089, 0.089, 0.613, 0.208)$$

Kriteeri = RISKITTÖMYYS

	L	J	O	K
L	1	7	9	3
J	1/7	1	5	1/3
O	1/9	1/5	1	1/3
K	1/3	3	3	1

$$C_R = 0.109$$

$$w = (0.604, 0.125, 0.050, 0.221)$$

Kriteeri= TUOTTO

	L	J	O	K
L	1	1	1/7	3
J	1	1	1/6	3
O	7	6	1	7
K	1/3	1/3	1/7	1

$$C_R = 0.050$$

$$w = (0.130, 0.134, 0.677, 0.059)$$

Kriteeri = LIKVIDITEETTI

	L	J	O	K
L	1	1/7	1/7	3
J	7	1	1/3	7
O	7	3	1	8
K	1/3	1/7	1/8	1

$$C_R = 0.101$$

$$w = (0.078, 0.316, 0.562, 0.043)$$

Kriteeri= 'OPTIMAALINEN SIJOITUS'

	A	R	T	L
ARVONNOUSU	1	1/4	3	1
RISKITTÖMYYS	4	1	5	5
TUOTTO	3	1/5	1	3
LIKVIDITEETTI	1	1/5	1/3	1

$$C_R = 0.072$$

$$w = (0.097, 0.598, 0.214, 0.090).$$

Luvussa 2.1.2 esitetyllä menetelmällä voidaan laskea sijoitusvaihtoehtojen lainat, joukkovelkakirjalainat, osakkeet ja kiinteistöt painot 1 tason kriteerin 'optimaalinen sijoitus' suhteen:

$$C[1,3] = (0.405, 0.141, 0.286, 0.169).$$

Nyt siis lainat ja osakkeet olisivat ensisijaisempia sijoituskohteita joukkovelkakirjojen ja kiinteistöjen jäädessä vähemmälle huomiolle.

Toisena lähestymistapana sijoitusongelmaan tarkastellaan seuraavaa portfolio-ongelmaa (Perez, 1984; Quesada Sanches, 1988). Olkoon eri sijoitusvaihtoehtoja n kappaletta, ja oletetaan että sijoitusvaihtoehdon i tuotto on satunnaismuuttuja, jonka odotusarvon on μ_i ja varianssi σ_i^2 . Merkitään lisäksi sijoitusvaihtoehtojen i ja j tuottojen välistä korrelaatiota symbolilla ρ_{ij} . Olkoon a_i kohteeseen i sijoitettava osuus. Tästä saadaan monitavoiteoptimointiongelma

$$\begin{aligned} (4.7) \quad & \max \quad t = \sum a_i \mu_i \\ & \min \quad v = \sum a_i^2 \sigma_i^2 + \sum_i \sum_{j, i \neq j} a_i a_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j. \\ & 0 \leq a_i \leq 1, \quad i=1, \dots, n \\ & \sum a_i = 1. \end{aligned}$$

Nyt t on valitun sijoitustavan odotettu tuotto ja muuttuja v edustaa valittuun sijoitustapaan liittyvää riskiä.

Oletetaan nyt, että sijoitusvaihtoehtoja on 3 kappaletta, sekä

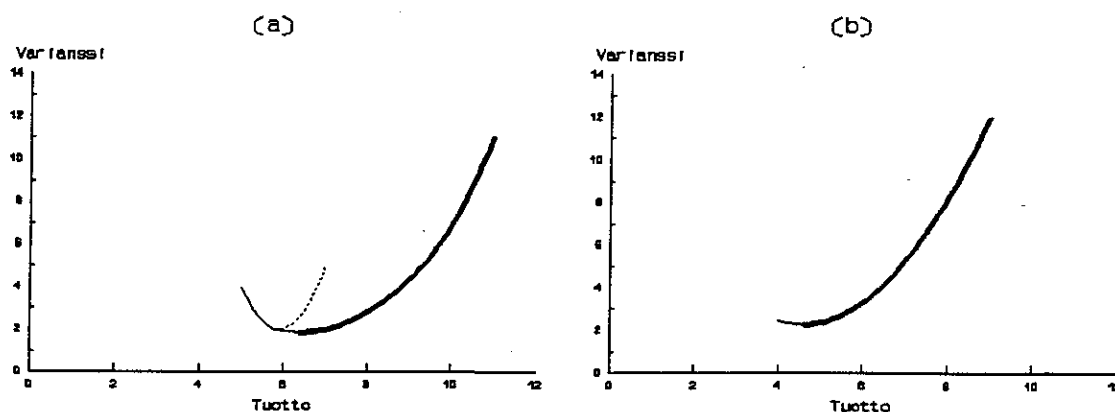
eri vaihtoehtoihin liittyvät odotetut tuotot ja vastaavat varianssit ovat seuraavat

sij.vaihtoehto	A	B	C
odotettu tuotto	7	5	11
varianssi	5	4	11

ja olkoon korrelaatiomatriisi $\rho = [\rho_{ij}]$

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ -0.2 & 1 & & \\ 0.21 & 0.32 & 1 & \end{bmatrix}$$

Kuviossa 4.3 (a) on yhtenäisellä viivalla esitetty minimivarianssiratkaisut, kun odotettu tuotto vaihtelee välillä [5, 9]. Tämän käyrän minimikohta on $(t,v) = (6.4, 1.9)$ ja tätä pistettä vastaava vektorin (a_1, a_2, a_3) arvon on $(0.409, 0.404, 0.097)$. Täten ei ole mielekästä lainkaan valita sellaisia sijoitusvaihtoehtoja, joissa tuotto jää pienemmäksi kuin 6.4, koska piste (t,v) dominoi näitä pisteitä. Kaikki ei-dominoidut ratkaisut on esitetty kuviossa 4.3 (a) vahvennetulla viivalla. Näennäisen houkutteleva tapa sijoittaa varovaisesti on sijoittaa pelkästään vaihtoehtoihin A ja B. Tämän sijoituskombinaation mahdolliset ratkaisut on esitetty kuviossa katkoviivalla. Kuten kuviosta nähdään, kaikki nämä ratkaisut ovat dominoituja, ts. ei kannata sijoittaa pelkästään vaihtoehtoihin A ja B, koska aina on löydettävissä parempi sijoituskombinaatio, jossa tuotto on suurempi, varianssi pienempi tai molempia.



KUVIO 4.3 Sijoitusongelman ei-dominoidut ratkaisut

Suure v pyrkii kuvaamaan sijoitukseen liittyvää riskiä. Kuitenkin edellä esitetyt tuotto- ja varianssioletukset ovat eri sijoitusvaihtoehtoihin liittyviä keskimääräisiä lukuja, jotka perustuvat joihinkin oletuksiin esim. talouden kehityksestä. Käytetään nyt luvun 3 lopussa esitettyä menettelyä, ja luodaan toinen 'pessimistinen' malli, jossa on esitetty tuotto- ja varianssioletukset pahimmassa tapauksessa. (Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että korrelaatiomatriisi ρ pysyy samana).

sij.vaihtoehto	A	B	C
odotettu tuotto	4	4	7
varianssi	6	5	12

Tämän mallin mukaiset ei-dominoidut ratkaisut on esitetty kuviossa 4.3 (b). Nyt päätöksentekijä voi esimerkiksi valita tämän 'pessimistisen' mallin perusteella minimitason tuotolle ja/tai maksimitason varianssille, ja tämän jälkeen valita ensiksi esitetyn mallin perusteella mielestään parhaan sijoitusvaihtoehdon niiden (ei-dominoitujen) ratkaisujen

joukosta, joiden kohdalla 'pessimistisen' mallin minimituotto- ja maksimivarianssiehdot toteutuvat. Tällä tavalla löydetään sijoitusvaihtoehto, jossa pahimmassakin tapauksessa oletettavasti saadaan jokin kohtuullinen minimituotto, ja/tai tuottoon liittyvä riski ei pahimmassakaan tapauksessa kasva liian suureksi.

c) Jälleenvakuutus

Tarkastellaan excess of loss- jälleenvakuutusta. Jos vahinkojen suuruuden alkuperäinen jakautumafunktio on $F(x)$, on jakautumafunktio nyt (Beard, Pentikäinen & Pesonen, 1984):

$$(4.8) \quad F_M(x) = \begin{cases} F(x), & \text{kun } x < M \\ 1, & \text{kun } x \geq M. \end{cases}$$

Momentit saadaan kaavasta

$$(4.9) \quad a_k = \int_0^M x^k dF(x) + M^k(1 - F(M))$$

Jos oletetaan, että jälleenvakuutusmaksu d riippuu suureesta M funktion

$$(4.10) \quad g(M) = \alpha \int_M^\infty x dF(x)$$

mukaisesti, missä α on vakio.

Merkitään kokonaisvahinkomenoa suureella z .

Nyt pyrkimyksenä voi olla esimerkiksi minimoida sekä kokonaisvahinkomenon odotusarvo, kokonaisvahinkomenon varianssi että jälleenvakuutusmaksut, jolloin monitavoiteoptimointiongelmaksi saadaan

$$\begin{aligned}
 (4.11) \quad & \min E(z) \\
 & \min \text{var}(z) \\
 & \min d.
 \end{aligned}$$

Toisena esimerkkinä seuraava ongelma, jossa ensimmäisenä tavoitteena on minimoida todennäköisyys, että korvausmeno ylittäisi jonkun rajan β , ja toisena tavoitteena on minimoida jälleenvakuutusmaksut. Tämä monitavoiteoptimointiongelma on siis seuraava:

$$\begin{aligned}
 (4.12) \quad & \min P(z > \beta) \\
 & \min d.
 \end{aligned}$$

Kolmas esimerkki on seuraava:

$$\begin{aligned}
 (4.13) \quad & \min E(z) \\
 & \min d \\
 & P(z > \beta) < \alpha,
 \end{aligned}$$

tässä siis minimoidaan korvausmenon odotusarvo ja jälleenvakuutusmaksut, rajoitukseksi on asetettu, että todennäköisyyden, jolla korvausmeno ylittää rajan β täytyy olla pienempi kuin α .

d) Tarkastellaan seuraavana monitavoiteoptimointiongelmana bonusjärjestelmän toimivuutta. Tämä tarkastelu perustuu Loimarannan (1983) artikkelissa esitettyihin käsitteisiin, ja kaikki perusolettamukset ovat samat.

Oletetaan, että bonusluokkia on n kappaletta. Olkoon m_{ij} todennäköisyys, jolla luokassa i oleva on seuraavalla kaudella luokassa j . Muodostetaan näistä todennäköisyyksistä matriisi $M = (m_{ij})$. Kuvataan vektorilla $a = (a_1, \dots, a_n)$ eri luokkien asymptoottista todennäköisyysjakaumaa, ts. a_i on todennäköisyys olla luokassa i , kun vakuutuskausien määrä kasvaa kohti ääretöntä. Vektori a saadaan ratkaistua ongelmasta:

$$(4.14) \quad a = aM$$

$$\sum a_i = 1.$$

Olkoon b_i tariffi luokassa a_i , $b = (b_1, \dots, b_n)$, ja olkoon (asymptoottinen) keskitariffi b^* :

$$(4.15) \quad b^* = \sum a_i b_i.$$

Oletetaan, että vahinkofrekvenssi on c , jolloin riskiä voidaan mitata riskimaksulla $c \cdot V$, missä V on keskivahinko. Jos keskivahinko on likimain vakio, riippuu riski pelkästään vahinkofrekvenssistä c . Voidaan pitää perusteltuna vaatimusta, että keskitariffi b^* on c :n kasvava funktio. Keskimaksun suhteellisen muutoksen ja riskin suhteellisen muutoksen suhdetta nimitetään bonusjärjestelmän tehokkuudeksi

$$(4.16) \quad \gamma = (dp^*/p^*)/(dc/c) = (dp^*/dc) \cdot c/p = (d \log b^*)/(d \log c).$$

Koska $b^* = \sum a_i b_i$, on

$$(4.17) \quad db^*/dc = \sum (da_i/dc) \cdot b_i.$$

Derivoimalla kaava (4.14), saadaan yhtälöryhmä

$$(4.18) \quad da/dc = M \cdot da/dc + a \cdot dM/dc$$

$$\sum da_i/dc = 0$$

josta tehokkuuden laskemisessa tarvittavat suureet (da_i/dc) voidaan ratkaista.

Bonusjärjestelmän tehokkuutta voidaan kasvattaa jyrkentämällä bonusskaalaa, mutta tällöin törmätään uuteen ongelmaan: maksujen vaihtelu eri luokkien välillä kasvaa hyvin suureksi. Tämä ei kuitenkaan ole toivottavaa, sillä vakuutuksenottajan kannalta on parempi, että maksujen vaihtelu eri vuosien välillä ei ole kohtuuttoman suurta. Kuvataan luokkien välistä vaihtelua varianssilla σ^2

$$(4.19) \quad \sigma^2 = \sum a_i (b_i - b^*).$$

Näin on saatu monitavoiteoptimointiongelma:

$$(4.20) \quad \max \gamma$$

$$\min \sigma^2$$

$$\sum a_i b_i = b^*$$

$$b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n,$$

missä keskimääräinen tariffi b^* on valittava parametri. Ehdolla $b_1 \geq b_2 \geq \dots \geq b_n$ taataan, että maksu ei kasva, kun luokissa siirrytään ylöspäin.

Loimarannan (1983) artikkelissa tarkasteltiin esimerkkinä Tanskan liikennevakuutuksen bonusjärjestelmää. Tässä järjestelmässä eri luokkien maksut olivat seuraavat

luokka	0	1b	1a	2	3
maksu	4/3	1	1	3/4	9/16.

Kunkin vahingottoman vuoden jälkeen tässä systeemissä pääsee luokista 1a ja 2 pykälän ylöspäin ja luokista 0 ja 1b siirto on kaksi luokkaa korkeammalle. Vain yhden vahingon aiheuttanut putoaa luokista 2 ja 3 luokkaan 1b, muuten vahinkoihin syyllistynyt päättyy luokkaan 0.

Oletetaan, että vahingot noudattavat Poisson-jakaumaa parametrilla c , jolloin i vahingon todennäköisyys p_i on

$$(4.21) \quad p_i = e^{-c} \cdot c^i / (i!), \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Matriisi M saa nyt muodon

$$(4.22) \quad M = \begin{bmatrix} 1-e^{-c} & 0 & e^{-c} & 0 & 0 \\ 1-e^{-c} & 0 & 0 & e^{-c} & 0 \\ 1-(1+c)e^{-c} & ce^{-c} & 0 & e^{-c} & 0 \\ 1-(1+c)e^{-c} & ce^{-c} & 0 & 0 & e^{-c} \\ 1-(1+c)e^{-c} & ce^{-c} & 0 & 0 & e^{-c} \end{bmatrix}$$

ja matriisi dM/dc on nyt

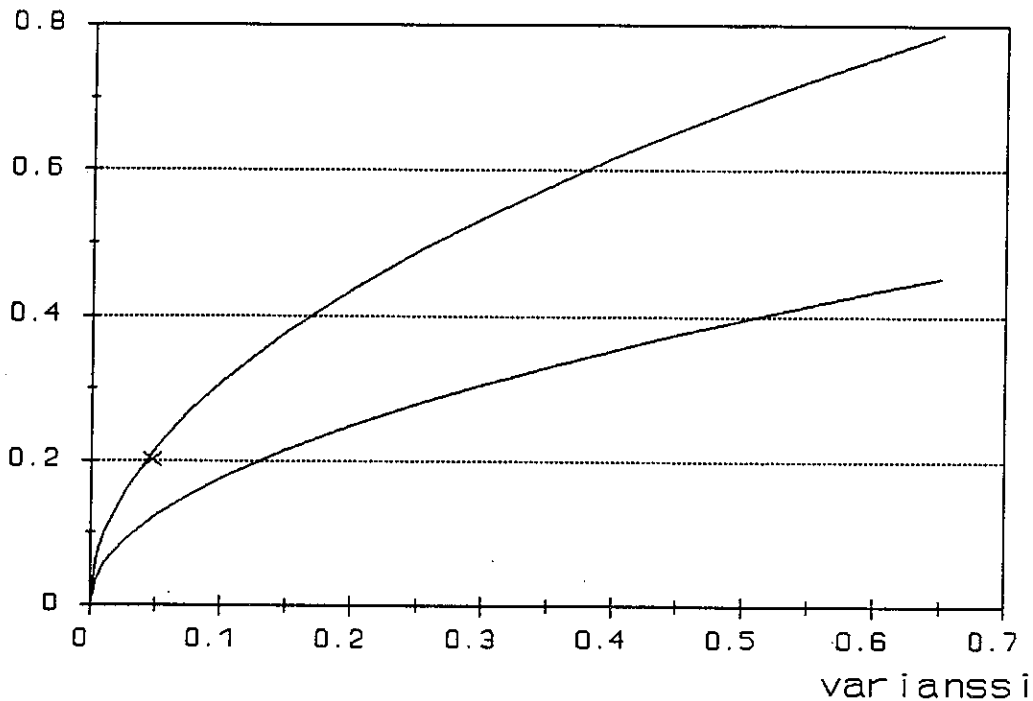
$$(4.23) \quad dM/dc = \begin{bmatrix} e^{-c} & 0 & -e^{-c} & 0 & 0 \\ e^{-c} & 0 & 0 & -e^{-c} & 0 \\ ce^{-c} & (1-c)e^{-c} & 0 & -e^{-c} & 0 \\ ce^{-c} & (1-c)e^{-c} & 0 & 0 & -e^{-c} \\ ce^{-c} & (1-c)e^{-c} & 0 & 0 & -e^{-c} \end{bmatrix}$$

Asetetaan parametrille c arvoksi $c = 0.2$. Kaavan (4.14) perusteella saadaan ratkaistua vektori $a = (0.04720, 0.13406, 0.03865, 0.14140, 0.63869)$. Keskitariffi on $b^* = 0.70096$. Kaavan (4.18) avulla saadaan vektoriksi $da/dc = (0.41653, 0.40220, 0.30238, 0.43546, -1.55658)$.

Ongelma (4.19) on ratkaistu käyttämällä keskitariffia $b^* = 0.70096$ ja vahinkointensiteettiä $c=0.2$. Ratkaisut kriteeriavuudessa on esitetty seuraavassa kuviossa 4.4. Kuvioon piirretyistä viivoista ylempi muodostaa ei-dominoitujen ratkaisujen joukon. Sallittujen ratkaisujen joukko on kuvioon piirrettyjen viivojen välissä. Ratkaisua $b = (4/3, 1, 1, 3/4, 9/16) \approx (1.333, 1, 1, 0.75, 0.563)$ vastaava piste $(\sigma^2, \gamma) = (0.046907, 0.20286)$ on merkitty kuvioon rastilla. Kuten kuviosta nähdään, on kyseinen piste dominoitu, tosin ratkaisu on suhteellisen lähellä ei-dominoitujen ratkaisujen joukkoa. Esimerkiksi pisteet $y^1 = (\sigma^2, \gamma) = (0.04697, 0.21124)$ ja $y^2 = (\sigma^2, \gamma) = (0.043259, 0.20286)$ dominoivat tätä pistettä, näitä pisteitä vastaavat maksut eri luokille ovat $b^1 = (1.260, 0.959, 0.959, 0.896, 0.5466)$ ja $b^2 = (1.238, 0.950, 0.950, 0.886, 0.553)$.

Tarkastellaan toisena bonusluokkaongelmana seitsemäluokkaista bonusjärjestelmää, jossa luokat ja maksut ovat seuraavat:

tehokkuus



KUVIO 4.4 Edellä esitetyn bonusjärjestelmän sallitut ratkaisut

luokka	0	1	2	3	4	5	6
maksu	1	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4.

Uudet vakuutukset sijoitetaan luokkaan 0, jokaisen vahingottoman vuoden jälkeen pääsee yhden pykälän ylöspäin, ja alaspäin joudutaan siten, että jokaista kauden vahinkoa kohti pudotaan kaksi luokkaa alemmaksi, mutta ei tietenkään luokan 0 alapuolelle. Oletetaan, että vahingot noudattavat kaavaa (4.21), ja käytetään parametrille c arvoja 0.045, 0.060, 0.090 saadaan seuraavat ratkaisut tehokkuudelle, varianssille, keskitariffille b^* ja asymptoottiselle todennäköisyysjakaumalle $a = (a_0, a_1, \dots, a_6)$, missä a_i on luokan i asymptoottinen todennäköisyysjakauma.

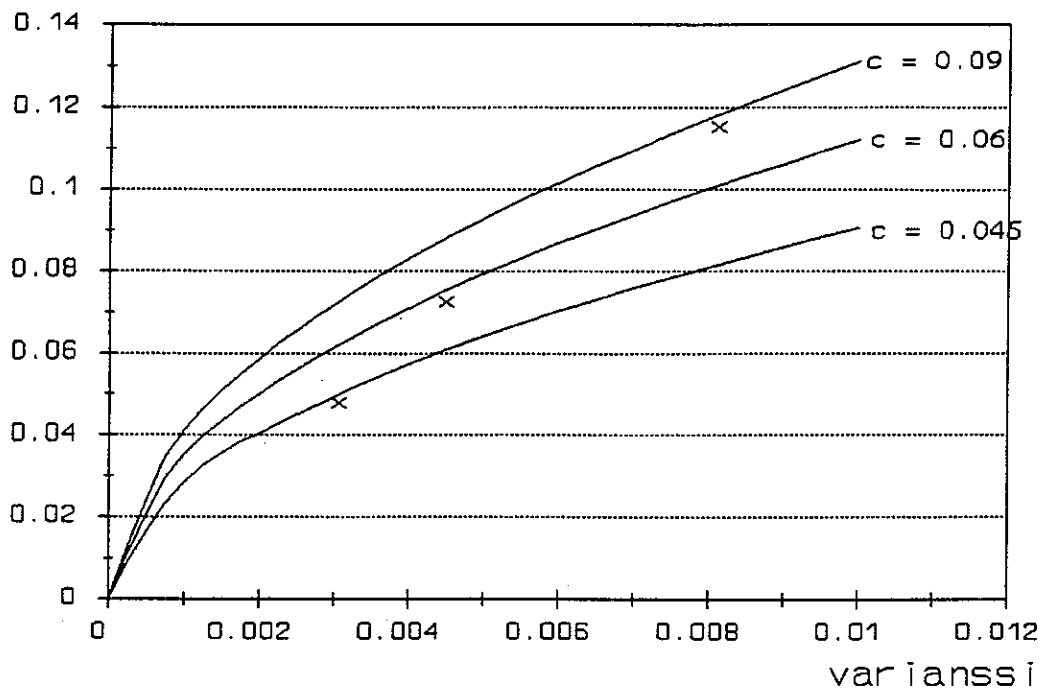
c	γ	σ^2	b*
0.045	0.04817	0.003058	0.4160
0.060	0.07262	0.004494	0.4226
0.090	0.11533	0.008104	0.4381

c	a ₀	a ₁	a ₂	a ₃	a ₄	a ₅	a ₆
0.045	.00023	.00047	.00321	.00486	.04362	.04170	.9059
0.060	.00058	.00111	.00577	.00848	.05731	.05397	.8728
0.090	.00216	.00377	.01323	.01831	.08286	.07572	.8039

Seuraavassa kuviossa 4.5 on esitetty näitä c-arvoja vastaavat ei-dominoitujen ratkaisujen joukot. Kuvioon on myös merkitty rastilla kunkin käyrän alle tätä bonusjärjestelmää vastaava piste (σ^2 , γ). Kuten kuviosta havaitaan, minkään c-arvon kohdalla tämä piste ei ole tehokas.

Suomalaisessa autovakuutuksessa käytetään joissakin tariffiluokissa tällaista bonusjärjestelmää. Lipsahtaen hieman monitoiteoptimoinnin ulkopuolelle esitetään seuraavassa vertailun vuoksi joidenkin autovakuutuksen tariffiluokkien vaunu- vahinkofrekvenssit (jotka siis vaikuttavat bonusluokkasijoittumiseen). Nämä luvut ovat vuosien 90-92 keskiarvoja. Samoin on esitetty bonusluokkajakaumat vuodelta 92, näitä muodostettaessa on uudet vakuutukset jätetty kokonaan pois. Koska joissakin tariffiluokissa on lisäksi bonusluokka 70%, on tämä väkivaltaisesti jouduttu yhdistämään luokkaan 60%, mikä kenties on hieman vääristänyt jakaumia. Verrattaessa näitä jakaumia edellä esitettyihin asymptoottisiin jakaumiin, voidaan joissakin tariffiluokkien kohdalla havaita jonkinlaista samankaltaisuutta näissä jakaumissa. (Luvut ovat peräisin julkaisusta SVK/Tilastovalioikunta: Auto-

tehokkuus



KUVIO 4.5 Edellä esitetyn bonusjärjestelmän ei-dominoidut pisteet joillakin parametrin c arvoilla

vakuutuksen tilastoraportti vuosilta 1990-92.)

vahinko-
frekvenssi

- | | | |
|----|--------|---------------------------------|
| 1) | 0.0609 | yksityiskäyttöiset henkilöautot |
| 2) | 0.0692 | pakettiautot |
| 3) | 0.0456 | yksityiskäyttöiset kuorma-autot |
| 4) | 0.0599 | ammattikäyttöiset kuorma-autot |
| 5) | 0.0883 | ammattikäyttöiset linja-autot |
| 6) | 0.0590 | erikoisautot |

bonusluokkajakaumat

	bonusluokka						
	0	1	2	3	4	5	6
1)	.00444	.00789	.01124	.01440	.03726	.05014	.87460
2)	.01102	.02061	.02698	.02991	.05560	.06174	.79411
3)	.01028	.02693	.03256	.04015	.05460	.05778	.77766
4)	.00398	.00759	.01102	.01565	.04762	.05791	.85618
5)	.00134	.00337	.01213	.01416	.04045	.05799	.87053
6)	.00782	.01298	.01814	.01897	.04077	.04893	.85236

e) Viimeisenä esimerkkinä tarkastellaan markkinointikanavien valintaa. Oletetaan, että vakuutusyhtiöllä on n kappaletta markkinointikanavia ja r kappaletta erilaisia vakuutuksia. Olkoon markkinointikanavan j lajin i markkinointiin käytettävä resurssien määrä x_{ij} . Merkitään symbolilla q_j markkinointikanavaan kohdistettuja minimiresursseja ja symbolilla p_j käytettävissä olevien resurssien maksimimäärää. Olkoot edelleen $g_1 = 0, \dots, g_s = 0$ ja $h_1 < 0, \dots, h_t < 0$ resurssien käyttöön liittyviä (mahdollisia) lisäehtoja. Merkitään edelleen symbolilla a_{ij} lajin i vakuutuksen markkinoinnin onnistumisen todennäköisyyttä kanavan j kautta yhtä resurssiyksikköä kohti. Olkoon edelleen suureet $b_1, \dots, b_r$ eri lajeihin liittyviä uuden vakuutuksen hankintaan liittyviä perustamiskustannuksia ja suureet $c_1, \dots, c_n$ tekijöitä, joilla eri markkinointikanavien resurssit saatetaan vektorin b alkioden kanssa yhteismitallisiksi.

Jos otetaan tavoitteeksi eri lajien uusmyynnin odotusarvon maksimointi ja resurssien käytön odotusarvon minimointi, saadaan monitavoiteoptimointiongelma:

$$\begin{aligned}
 (4.24) \quad & \max y_1 = \sum a_{1j} x_{1j} \\
 & : \\
 & \max y_r = \sum a_{rj} x_{rj} \\
 & \min y_{r+1} = \sum_i \sum_j (c_j x_{ij} + a_{ij} b_i x_{ij})
 \end{aligned}$$

$$q_i < \sum_j x_{ij} < p_i$$

$$g_1 = 0, \dots, g_s = 0$$

$$h_1 < 0, \dots, h_t < 0.$$

Kokeillaan tämän ongelman ratkaisemista joillakin (mielivaltaisilla) parametrien arvoilla. Oletetaan että $n=3$, $r=3$ ja olkoon matriisi $A = [a_{ij}]$ muotoa

$$A = \begin{bmatrix} 0.10 & 0.22 & 0.17 \\ 0.21 & 0.18 & 0.16 \\ 0.22 & 0.12 & 0.18 \end{bmatrix}$$

Lisäksi oletetaan, että $b = (0.2, 0.4, 0.1)$, $c = (0.8, 1, 1)$

$q_1 = 0$, $q_2 = q_3 = 500$ ja $p_1 = 1000$. Oletetaan lisäksi, että

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{31} + x_{32} + x_{33} = 2000$ (ja täten suureita p_2 ja p_3 ei tarvita). Täten optimointiongelmaksiksi saadaan

$$\max y_1 = 0.10 \cdot x_{11} + 0.21 \cdot x_{12} + 0.17 \cdot x_{13}$$

$$\max y_2 = 0.21 \cdot x_{21} + 0.18 \cdot x_{22} + 0.16 \cdot x_{23}$$

$$\max y_3 = 0.22 \cdot x_{31} + 0.12 \cdot x_{32} + 0.16 \cdot x_{33}$$

$$\min y_4 = 0.820 \cdot x_{11} + 0.042 \cdot x_{12} + 1.044 \cdot x_{13} + 0.888 \cdot x_{21} + 1.072 \cdot x_{22} \\ + 1.048 \cdot x_{23} + 0.817 \cdot x_{31} + 1.016 \cdot x_{32} + 1.018 \cdot x_{33}$$

$$0 \leq x_{11} + x_{21} + x_{31} \leq 1000$$

$$500 \leq x_{12} + x_{22} + x_{32}$$

$$500 \leq x_{13} + x_{23} + x_{33}$$

$$x_{12} + x_{22} + x_{32} + x_{13} + x_{23} + x_{33} = 2000$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i=1,2,3, \quad j=1,2,3$$

Etsitään muuttujille $x_{11}, x_{12}, \dots, x_{33}$ sopivat ratkaisut käyttäen VIG-ohjelmistoa, joka perustuu luvussa 2.2.5.1 esitettyyn

menetelmään. Koska ohjelmassa on mahdollista vaihtaa rajoituksia ja tavoitteita keskenään, tehdään optimointi aluksi yksiulotteisena.

Kun minimoidaan kulut y_4 , saadaan ratkaisu $y = (y_1, y_2, y_3, y_4) = (0, 0, 270, 2033)$, $x = (x_{11}, x_{21}, x_{31}, x_{12}, x_{22}, x_{32}, x_{13}, x_{23}, x_{33}) = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1500, 500)$. On tietysti selvää, että muuttujat x_{11} , x_{21} ja x_{31} tulevat nolliksi tässä tapauksessa.

Kun puolestaan maksimoidaan y_1 on ratkaisu $y = (515, 0, 0, 2905)$, $x = (1000, 1500, 500, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$. Tämänkään yksiulotteisen optimointiongelman ratkaisun lopputulos ei ole mikään yllätys.

Vastaavasti maksimoitiin muuttuja y_2 . Ratkaisuksi saatiin $y = (0, 530, 0, 3020)$, $x = (0, 0, 0, 1000, 1500, 500, 0, 0, 0)$. Samoin käytiin muuttujan y_3 kimppuun. Lopputulokseksi tuli $y = (0, 0, 550, 2852)$, $x = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1000, 500, 1500)$.

Vig on monitavoiteoptimointimenetelmä, jossa koko ajan liikutaan ei-dominoitujen ratkaisujen joukossa. Täten optimoitaessa kaikkia neljä tavoitetta yhtäaikaan vähintään yhtä tavoitetta y_1 , y_2 , y_3 tai y_4 on heikennettävä, kun siirrytään ratkaisusta toiseen. Seuraavassa on esitetty joitakin läpi käytyjä ratkaisuja:

$$y = (49, 128, 403, 2901), \quad x = (0, 216, 0, 395, 284, 0, 605, 0, 1500)$$

$$y = (201, 77, 337, 2900), \quad x = (0, 903, 0, 365, 0, 0, 634, 0, 1096)$$

$$y = (148, 222, 222, 2943), \quad x = (0, 676, 0, 1000, 0, 94, 0, 0, 1229)$$

Koska tämän esimerkin luvut ovat keksittyjä, ei päätöksentekijän hyötyfunktion maksimointi pääse tässä oikeuksiinsa: päätöksente-

kijä lopetti ongelman käsittelyn ratkaisuun

$y = (149, 78, 378, 2896)$, $x = (0, 668, 0, 371, 0, 0, 628, 0, 1332)$

uuvuttuaan ohjelman kokeilemiseen.

Kaikissa näissä ratkaisuissa esim. lajia 1 markkinoidaan vain kanavan 2 kautta ja lajia 3 ei markkinoida kanavan 2 kautta, mikä on hyvin odotettavissa oleva tulos. Tässä tilanteessa olisi ehkä mielekästä muuttaa ongelman asettelua ja antaa muuttujille x_{ij} nolasta poikkeavat alarajat.

LÄHDELUETTELO

- Autio, Holopainen, Kanerva, Mannermaa & Rinne: Markkinoinnin perustieto, Weilin+Göös, 1974
- Beard, Pentikäinen & Pesonen: Risk Theory, Chapman and Hall, 1984
- Berger James: Statistical Decision Theory and Bayesian Analysis, Springer-Verlag, New York, 1985
- Changkong & Haims: the interactive surrogate worth trade-off (iswt) method for multiobjective decision-making, teoksessa: Zionts: Multiple criteria problem solving, 1978, Springer verlag
- Ermoliev Yu. & Wets R. (toim.): Numerical Techiques for Stochastic Optimization, Springer verlag, New York, 1988
- Farquhar: Utility Assesment methods, Management Science, 1984, 30,no 11,1283-
- Fishburn: Nonlinear Preference and Utility Theory, Wheatsheaf books, 1988
- French: Interactive multi-objective programming: its aims, applications and demands, Journal of Operational Research Society, 1984, 35,no 9,827-
- Geoffrion & Dyer & Feinberg: An interactive approach for multi-criteria..., Management Science, 1972, 19,no 4,357-
- Hwang Ching-Lai & Masud Abu: Multiple objective decision making- methods and applications, Springer Verlag, Berlin, 1979

- Jacquet-Lagrange & Siskos: Assessing a set of additive utility functions for multicriteria decision making, the UTA method, European Journal of Operational Research, 1982, 10,151-164
- Keeney Ralph & Raiffa Howard: Decisions with multiple objectives: preferences and value tradeoffs, John Wiley & Sons, New York, 1976
- Kok & Lootsma: pairwise-comparison methods in multiple objective programming, with applications in a long-term...., European Journal of Operational Research, 1985, 22,44-55
- Korhonen, Moskowitz & Wallenius: Multiple criteria decision support - A review, European Journal of Operational Research, 1992, 63,361-375
- Korhonen: Johdatus monitavoitteiseen suunnitteluun, julkaisematon käsikirjoitus, 1994,
- Korhonen: A hierarchical method for ranking alternatives with multiple qualitative criteria, European Journal of Operational Research, 1986, 24,265-67
- Korhonen & Siljamäki & Wallenius: A Multiple Criteria Decision Support System VIG in Corporate Planning, NumPlan, 1989
- Korhonen & Wallenius: A pareto race, Naval Research Logistics, 1988, 35,615-23
- Korhonen & Laakso: A visual interactive method for solving the multiple criteria problem, European Journal of Operational Research, 1986, 24,277-87
- Loganathan & Sherali: A convergent interactive cutting-plane algorithm ..., Operations Research, 1987, 35,no 3,365-

- Loimaranta: Some Asymptotic Properties of Bonus Systems,
teoksessa: Särkämö: Liikennevakuutusmaksujen
määräytyminen, 1983
- Miettinen, Kaisa: On the Methodology of Multiobjective
Optimization with Applications, University of
Jyväskylä, 1994
- Musselman & Talavage: A tradeoff cut approach to multiple
objective optimization, Operations Research, 1980,
28, no 6, 1424-
- O'Shaughnessy, John: Competative Marketing, Allen & Unwin,
1984
- Oppenheimer: A proxy approach to multi-attribute decision
making, Management Science, 1978, 24, no 6, 675-
- Pentikäinen, Bonsdorff, Pesonen, Rantala & Ruohonen:
Insurance solvency and financial strength, Finnish
Insurance Training and Publishing Company Ltd,
Helsinki, 1989
- Perez: Administration of the Portfolio of an Insurance
Company, teoksessa: Transactions of the 22nd
Congress of Actuaries, Sydney, Australia 21-27
October 1984, 5, Actuarial Aspects of Investments,
Bookbuilders Ltd, 1984
- Pietiläinen Tuomo: EU-testin tulos yllätti kannastaan
epävarman, Helsingin Sanomat, 29.9.1994
- Quesada Sanches: Diversificacion como Estrategia del Plan de
Pensiones, teoksessa: Transactions of the 23rd
Congress of Actuaries, Helsinki, 5, Applications of
Modern Techniques to the Investment of Insu
- Roubens: Preference relations on actions and criteria in
multicriteria decision making, European Journal of

Operational Research, 1982, 10,51-55

Roy: Electre III: Un algorithme de classements fonde sur une representation floue es preferences en presence de criteres multiples, Cahiers du Centre d'Etudes de Recherche Opérationnelle, 1978, 20,no 1,3-

Roy & Bouyssou: Comparison of two decision-aid models applied to a nuclear power plant siting example, European Journal of Operational Research, 1986, 25,200-215

Roy & Vincke: Multicriteria analysis: survey and new directions, European Journal of Operational Research, 1981, 8,207-218

Roy & Wallenius: Nonlinear multiple objective optimization: An algorithm..., Mathematical Programming, 1992, 55,235-49

Saaty: The Analytic Hierarchy Process, RWS Publications, 1990

Saaty: Decision Making for Leaders, Lifetame Learning Publications, 1982

Sadagopan & Ravindran: Interactive algoritms for multiple criteria nonlinear programming problems, European Journal of Operational Research, 1986, 25,247-57

Sakawa: Interactive multiobjective decision making by sequential proxy optimization technique: SPOT, European Journal of Operational Research, 1982, 9,386-396

Shin & Ravindran: An interactive method for multiple-objective mathematical programming problem, Journal of Optimization Theory and Applications, 1991, 68,no 3,539-

Shin & Ravindran: interactive multiple objective optimization: survey I - continuous case, Computers

- operations research, 1991, 18, no 1
- Steuer Ralph: multiple criteria optimization, theory,
computation and application, John Wiley & sons, New
York, 1986
- Steuer & Choo: An Interactive Weighted Tchebycheff Procedure
for Multiple Objective Programming, Mathematical
Programming, 1983, 26,3
- Sun: Rolling Ball Method: An Interactive Adaptive Random
Search Procedure for Complicated Nonlinear MOP
Problems, julkaisematon käsikirjoitus, 1993,
- SVK/Tilastovalioikunta: Autovakuutuksen tilastoraportti
vuosilta 1990-92, 1993
- Vargas: An overview of the Analytical Hierarchy Process and
its applications, European Journal of Operational
Research, 1990, 48,2-8
- Vincke: Analysis of multicriteria decision aid in Europe,
European Journal of Operational Research, 1986,
25,160-68
- Wehrung: Interactive Identification and Optimizatio Using a
Binary Preference Relation, Operations Research,
1978, 26,no 2,323-
- White D.J.: Optimality and efficiency, John Wiley & sons, New
York, 1982
- Wierzbicki: The use of reference objectives in multiobjective
optimization, teoksessa: Fandel & Gal (toim.):
Multiple criteria decision making, Theory and
Application, 1978, springer Verlag
- Zahedi: The Analytical Hierachy Process - A Survey of the
Method and its Applications, Interfaces, 1986, 16,no
4,97-

