WORKING PAPERS ISSN 0781-4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

23

Pertti Savijoki

LIIKENNEVAKUUTUKSEN YKSITTÄISEN VAHINGON SUURUUSJAKAUMAN APPROKSIMOINNISTA (1988)

ABSTRACT

Savijoki, P. (1988) On the approximation of the claim size distribution in Motor Third Party Liability Insurance.

The distribution of the size of an individual claim in the Finnish Motor Third Party Liability Insurance is considered. The distribution is approximated by means of the Gram-Charlier A-series. The tail of the distribution is approximated by certain well known continuous distributions. In this context the intensity function and conditional mean exceedance, i.e. the average amount by which an individual claim exceeds a given magnitude, are also dealt with.

1 JOHDANTO

Tässä työssä sovelletaan eräitä tunnettuja jakaumien approksimointimenetelmiä liikennevakuutuksen yksittäisen vahingon suuruusjakaumaan. Vahinkojakaumaa tarkastellaan sekä kaikki vahingot sisältävänä että toisaalta keskittyen sen häntään eli kiinteän rajan ylittävän vahingon osan jakaumaan.

Liikennevakuutuksen yksittäisen vahingon suuruusjakauma on useiden muiden vahinkojakaumien tavoin sellainen, että se on kohtalaisella tarkkuudella approksimoitavissa logaritminormaalijakaumalla. Työssä approksimoidaan yksittäisen vahingon koon logaritmin jakaumaa normaalijakaumalla sekä normaalijakaumasta muuntamalla saaduilla Gram-Charlierin A-sarjoilla. Lisäksi approksimoidaan erikseen vaikeiden ja lievien vahinkojen jakaumia sekä tarkastellaan näiden sekoitusta.

Jakauman häntää approksimoidaan eräillä tunnetuilla jatkuvilla jakaumilla. Hännän osalta tarkastellaan lisäksi jakauman intensiteettiä sekä kiinteän rajan yli menevän vahingon osan ehdollista odotusarvoa. Lopuksi käsitellään häntäjakauman käyttöä jälleenvakuutusmaksujen määräämisessä.

2
YKSITTÄISEN LIIKENNEVAHINGON SUURUUSJAKAUMAN APPROKSIMOINTI

2.1
APPROKSIMOINTI LOGARITMINORMAALIJAKAUMALLA

Liikennevakuutuksen yksittäisen vahingon suuruusjakauma on tyypillinen, positiivisella reaaliakselilla määritelty, positiivisesti vino jakauma. Tällaisten jakaumien approksimoinnissa käytetään varsin yleisesti logaritminormaalijakaumaa. Oletetaan, että yksittäisen liikennevahingon koko on satunnaismuuttuja Z. Sen jakauman ensimmäisenä approksimaationa käytetään tässä työssä logaritminormaalijakaumaa. Logaritminormaalijakauman soveltamisesta vahinkovakuutukseen on kirjoitettu runsaasti artikkeleita. Seuraavassa viitataan kahteen, joissa sovellutusalueena on liikennevakuutus.

Benckert [2] tarkastelee ruotsalaisen aineiston avulla liikennevakuutuksen yksittäisen vahingon koon jakaumaa ja approksimoi sitä logaritminormaalijakaumalla. Benckert toteaa, että yhteensopivuuden aikaansaamisessa ilmenneet vaikeudet saattavat johtua siitä, että kaikkia vahinkoja käsitellään yhdessä. Henkilö- ja omaisuusvahinkojen erottaminen toisistaan saattaisi Benckertin mukaan parantaa approksimaation tarkkuutta.

Bennet and Johnson [4] käsittelee erään Yhdistyneiden Kuningaskuntien vakuutusyhtiön liikenne- ja autovakuutusvahinkoja. Vahingoista muodostetaan kaksi aineistoa siten, että toiseen kuuluvat kolmansille osapuolille aiheutuneet henkilö- ja omaisuusvahingot sekä palo- ja varkausvahingot. Toiseen kuuluvat edellisten lisäksi myös vahingon aiheuttaneen ajoneuvon omaisuusvahingot. Näistä muodostetaan vahinkojakaumat, joita approksimoidaan logaritminormaalijakaumalla. Bennet and Johnson toteaa, että jakauman lopussa yhteensopivuus on parempi kuin alussa.

Tarkastellaan seuraavaksi lähemmin edellä esitettyä oletusta yksittäisen liikennevahingon suuruusjakauman logaritminormaalisuudesta. Jos satunnaismuuttujan Z jakauma on logaritminormaali niin luonnollisen logaritmin $X = \log(Z)$ jakauma on normaali. Myöhemmin tarkastellaankin muuttujaa X soveltaen normaalijakaumalle kehitettyjä menetelmiä. Normaalisuusoletusta voi-

daan tarkastella keskeisen raja-arvolauseen avulla seuraavasti. Oletetaan, että Z voidaan ilmaista n:n satunnaismuuttujan tulona $Z = Z_1 Z_2 \ldots Z_n$. Yksittäisen vahingon markkamäärän ajatellaan siis olevan dekomponoitavissa tekijöihin, joiden jokaisen vaikutus lopulliseen vahingon määrään on multiplikatiivinen. Muuttujat voisivat kuvata esimerkiksi kuljettajan tai ajoneuvon ominaisuuksia, tie- ja sääolosuhteita jne. Ottamalla edellisestä yhtälöstä puolittain logaritmi saadaan yhtälö

$$\log(Z) = \sum_{i=1}^{n} \log(Z_i).$$

Keskeisen raja-arvolauseen mukaan oikean puolen summa lähestyy normaalijakaumaa varsin yleisten ehtojen vallitessa, kun summan termien lukumäärä kasvaa rajatta. Dekomponoinnin olemassaolokysymykseen tai muuttujien Z_i määrittelyyn ei tässä puututa.

2.2 APPROKSIMOINTI GRAM-CHARLIERIN A-SARJOILLA

Otetaan aluksi käyttöön eräitä merkintöjä. Olkoon $X = \log(Z)$, missä satunnaismuuttuja Z on yksittäisen liikennevahingon koko. Merkitään X:n kertymäfunktiota S(x):llä. Merkitään X:n i. origomomenttia a_i:llä sekä i. keskusmomenttia μ_i:llä (jos ovat olemassa) sekä erityisesti odotusarvoa μ:llä ja varianssia σ^2:lla. Merkitään lisäksi X:n vinoutta γ_1:llä ja huipukkuutta γ_2:lla.

Määritellään vielä X:n kumulantit. Jos X:n karakteristisen funktion $\phi(t)$ luonnollinen logaritmi on hyvin määritelty ja sillä on Taylor-kehitelmä

$$\log \phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\kappa_n}{n!} (it)^n \qquad (|t| < \delta)$$

niin kertoimia κ_n kutsutaan jakauman kumulanteiksi.

Siirrytään tarkastelemaan Gram-Charlierin A-sarjoja. Satunnaismuuttujan $X = \log(Z)$ normaaliapproksimaatiota voidaan yrittää parantaa muilla menetelmillä, jotka perustuvat normaalijakaumaan. Tällaisia ovat muiden muassa Gram-Charlierin A-sarjat, Edgeworthin kehitelmät sekä NP-menetelmä. Seuraavassa käsitellään Gram-Charlierin A-sarjoja.

Gram-Charlierin A-sarjat voidaan johtaa useilla eri tavoilla. Johnson and Kotz [10] (ss. 15-19) päätyy niihin seuraavasti. Olkoon $f(x)$ jatkuvan jakauman tiheysfunktio, jolla on kaikkien kertalukujen kumulantit (ja siten myös kaikkien kertalukujen momentit). Merkitään differentiaalioperaattoria D:llä ja n. kertaluvun differentiaalioperaattoria sen n. potenssilla. Olkoon

$$(2.1) \qquad g(x) = [\exp(\sum_{n=1}^{\infty} \epsilon_n \frac{(-D)^n}{n!})]f(x).$$

Muunnos (2.1) on sellainen, että jos $\kappa_1, \kappa_2, \ldots$ ovat $f(x)$:n kumulantit niin $g(x)$:n kumulantit ovat $\kappa_1+\epsilon_1, \kappa_2+\epsilon_2, \ldots$ ($\epsilon_1, \epsilon_2, \ldots$ ovat reaalilukuja).

Gram-Charlierin A-sarja saadaan kun kaavassa (2.1) valitaan $f(x)$:ksi normaalijakauman ($N(\mu,\sigma^2)$) tiheysfunktio ja lisäksi oletetaan, että $f(x)$:n ja $g(x)$:n odotusarvo ja hajonta ovat yhtä suuret. Sarjakehitelmä saadaan, kun kaavassa esiintyvä eksponenttifunktio kehitetään muodollisesti sarjaksi. Sovellutuksia varten kehitelmä katkaistaan sopivasti ja integroidaan yli välin $(-\infty,x)$, jolloin saadaan approksmaatiokaava kertymäfunktiolle. Katkaisemalla sarja siten, että mukaan tulevat kaikki korkeintaan kolmannen derivaatan sisältävät termit saadaan kehitelmä

$$(2.2) \qquad \int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \Phi(x) - (1/6)\cdot\epsilon_3 P_2(x)f(x).$$

Vastaava kehitelmä, jossa ovat mukana kaikki korkeintaan neljännen derivaatan sisältävät termit on

$$(2.3) \qquad \int_{-\infty}^{x} g(t)dt = \Phi(x) - [c_1\epsilon_3 P_2(x) - c_2\epsilon_4 P_3(x)]f(x),$$

missä $c_1 = 1/6$ ja $c_2 = 1/24$.

Kaavoissa (2.2) ja (2.3) $\Phi(x)$ on normeeratun normaalijakauman kertymäfunktio. Kertoimet ϵ_3 ja ϵ_4 ovat $g(x)$:n kumulantteja, jotka esitetään seuraavassa toisaalta momenttien sekä toisaalta vinouden, huipukkuuden ja hajonnan avulla.

$$\epsilon_3 = a_3 - 3a_1a_2 + 2a_1^3 = \gamma_1\sigma^3$$

$$\epsilon_4 = a_4 - 3a_2^2 - 4a_1a_3 + 12a_1^2a_2 - 6a_1^4 = \gamma_2\sigma^4.$$

Funktiot $P_n(x)$ ovat sellaisia polynomeja, että polynomit $(-1)^n P_n(x)$ ovat normaalijakauman kertymäfunktion suhteen ortogonaalisia ts.

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x)P_m(x)dS(x) = \begin{cases} 1, & \text{kun } n = m \\ 0, & \text{kun } n \neq m \end{cases}$$

ja polynomit ovat aidosti alaindeksinsä osoittamaa astetta (vrt. esim. Cramér [7], s. 131). Kaavoissa (2.2) ja (2.3) esiintyvien polynomien lausekkeet ovat

$$P_2(x) = -c + c(x - \mu)^2 \quad \text{ja}$$

$$P_3(x) = 3c^2(x - \mu) + c^3(x - \mu)^3,$$

missä $c = \sigma^{-2}$.

Katkaisematon Gram-Charlierin A-sarja on niin sanottu semikonvergentti sarja, jonka tarkkuus katkaistaessa voi joko huonontua tai parantua otettaessa mukaan uusia termejä.

Katkaistun sarjan eräänä huonona ominaisuutena voidaan mainita, että välttämättä ei päde $g(x) \geq 0$ kaikilla x. Funktion g(x) kumulantit määritellään kuitenkin edellä esitetyllä tavalla. Huolimatta siitä, että approksimaatiokaavat (2.2) ja (2.3) eivät välttämättä täytä kaikkia kertymäfunktion perusoletuksia ne saattavat käytännössä antaa soveltamiskelpoisia jakaumaapproksimaatioita.

Polynomien $P_i(x)$ ortogonaalisuudesta seuraa, että katkaistut kehitelmät (2.2) ja (2.3) antavat oikeat neljä ensimmäistä momenttia. Lisäksi niille pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t)dt = 1.$$

Seuraavassa tarkastellaan Gram-Charlierin A-sarjojen ja Edgeworthin sarjakehitelmien eroja. Katkaistuihin Gram-Charlierin A-sarjoihin (2.2) ja (2.3) päädyttiin muunnoksesta (2.1) siten, että mukaan otettiin kaikki korkeintaan tiettyä kertalukua olevat tiheysfunktion f(x) derivaatat. Edgeworthin sarja saadaan muunnoksesta (2.1) ottamalla mukaan kaikki korkeintaan tietyn indeksin omaavat ϵ-termit. Kehitelmä (2.2) on sama kuin vastaava Edgeworthin sarja. Kehitelmää (2.3) vastaava Edgeworthin kehitelmä saadaan valitsemalla kaikki termit, jotka sisältävät termejä ϵ_i, kun $i \leq 4$ (Edgeworthin kehitelmistä tarkemmin esim. kirjassa Beard, Pentikäinen and Pesonen [1], s. 107).

2.3 APPROKSIMOINTI SEKOITETULLA JAKAUMALLA

Kun tarkastellaan jonkin vakuutuslajin vahinkojakaumaa voidaan kysyä ovatko kaikki vahingot peräisin samasta yhtenäisestä jakaumasta vai onko kyseessä esimerkiksi kahden jakauman (kertymäfunktiot S_1 ja S_2) sekoitus

$$aS_1(x) + (1-a)S_2(x),$$

missä $0 \leq a \leq 1$. Esimerkiksi Hewitt and Lefkowitz [9] approksimoi liikennevakuutuksen henkilövahinkojen suuruusjakaumaa gamma- ja log-gammajakaumien sekoituksella. Sekoitus antaa sekoittamatonta jakauma-approksimaatiota paremman approksimaation sekä jakauman alussa että lopussa.

Tässä työssä käytettävä liikennevahinkojen tilastoaineisto jaetaan kahteen luokkaan siten, että yksi vahinko (sen koko vahinkomeno) kuuluu jompaan kumpaan luokkaan (tätä käsitellään tarkemmin osakappaleessa 4.2). Tällöin, jos n_1 ja n_2 ovat vahinkojen lukumäärät näissä luokissa sekä S_1 ja S_2 vastaavat kertymäfunktiot niin sekoitetun jakauman kertymäfunktio on

$$(2.4) \qquad \frac{n_1}{n_1+n_2} S_1(x) + \frac{n_2}{n_1+n_2} S_2(x).$$

3
YKSITTÄISEN LIIKENNEVAHINGON SUURUUSJAKAUMAN HÄNTÄ

3.1
HÄNTÄJAKAUMAN APPROKSIMOINTI

Olkoon yksittäisen vahingon koko satunnaismuuttuja Z ja sen kertymäfunktio S(z). Jakauman hännän kertymäfunktio on

$$(3.1) \qquad G(z) = P(Z \le z \mid Z \ge z_0) = \frac{S(z) - S(z_0)}{1 - S(z_0)},$$

kun $z \ge z_0$ ja hännän alkamispiste z_0 on vakio.

Liikennevakuutuksen yksittäisen vahingon suuruusjakauman hännän G(z) approksimointiin käytetään neljää jakaumaa, joiden kertymäfunktiot sekä parametrien estimaattorit tai niiden estimointimenetelmä esitetään seuraavassa.

I) Eksponenttijakauman

$$S(z) = \begin{cases} 1 - e^{-az} & , \text{ kun } z \ge 0 \\ 0 & , \text{ muulloin} \end{cases} \qquad (a > 0)$$

häntäjakauman kertymäfunktio on

(3.2)

$$G(z) = \begin{cases} 1 - e^{-a(z - z_0)} & , \text{ kun } z \geq z_0 \geq 0 \\ 0 & , \text{ muulloin} \end{cases} \qquad (a > 0).$$

Parametrin a maximum likelihood estimaattori on

$$\hat{a} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} z_i - nz_0},$$

missä n on häntään kuuluvien vahinkojen lukumäärä.

II) Kvasilognormaalijakauman (vrt. Shpilberg [11])

$$S(z) = \begin{cases} 1 - (z/\nu)^{\alpha+\beta\log(z)} & , \text{ kun } z \geq \nu \geq 0 \\ 0 & , \text{ muulloin} \end{cases}$$

häntäjakauman kertymäfunktio on

$$(3.3) \qquad G(z) = \begin{cases} 1 - (z/z_0)^{\alpha+\beta\log(z)} & , \text{ kun } z \geq z_0 \geq \nu \geq 0 \\ 0 & , \text{ muulloin.} \end{cases}$$

Parametrien α ja β estimoinnissa käytetään hyväksi sitä, että

$$(3.4) \qquad \log(1-G(z)) = a + b\log(z) + c(\log(z))^2,$$

missä $a = -\alpha\log(z_0)$, $b = \alpha + \beta\log(z_0)$ ja $c = \beta$. Kertoimet a, b ja c estimoidaan sovittamalla havaittuihin $\log(1-G(z))$:n arvoihin paraabeli pienimmän neliösumman keinolla.

III) Weibull-jakauman

$$S(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda z^{\alpha}} & , \text{ kun } z \geq 0 \\ 0 & , \text{ muulloin} \end{cases} \qquad (\alpha > 0,\ \lambda > 0)$$

häntäjakauman kertymäfunktio on

(3.5)

$$G(z) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda(z - z_0)^{\alpha}} & , \text{ kun } z \geq z_0 \geq 0 \\ 0 & , \text{ muulloin} \end{cases} \qquad (\alpha > 0,\ \lambda > 0).$$

Cohen [6] esittää parametrien α ja λ maximum likelihood estimaattien määräämiseksi seuraavan menettelyn. Iteroidaan ensin α:lle sopiva arvo yhtälöstä

$$\frac{s^2}{(\bar{z} - z_0)^2} + 1 = \frac{\Gamma(2/\alpha + 1)}{(\Gamma(1/\alpha + 1))^2},$$

missä $\bar{z}$ on otoskeskiarvo ja s otoshajonta sekä $\Gamma(z)$ gammafunktion arvo pisteessä z. Iteroidun a:n avulla saadaan parametrin λ arvoksi

$$\lambda = \left(\frac{\bar{z} - z_0}{\Gamma(1/a + 1)}\right)^{-a} .$$

IV) Pareto-jakauman

$$S(z) = \begin{cases} 1 - (\beta/z)^{a} & , \text{ kun } z \geq \beta > 0 \\ 0 & , \text{ muulloin} \end{cases} \qquad (a > 0)$$

häntäjakauman kertymäfunktio on

$$(3.6) \quad G(z) = \begin{cases} 1 - (z_0/z)^{a} & , \text{ kun } z \geq z_0 \geq \beta > 0 \\ 0 & , \text{ muulloin} \end{cases} \qquad (a > 0).$$

Parametrin a maximum-likelihood estimaattori on

$$\hat{a} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \log(z_i) - n\log(z_0)} ,$$

missä n on häntään kuuluvien vahinkojen lukumäärä.

Todetaan lopuksi, että Pareto-jakauma on kvasilognormaalijakauman erikostapaus, kun $\beta = 0$ ja eksponenttijakauma Weibull-jakauman erikoistapaus, kun $a = 1$.

3.2
JAKAUMAN INTENSITEETTI

Eräs keino vertailla jatkuvia jakaumia on tarkastella niiden intensiteettejä

$$\mu(z) = \frac{s(z)}{1 - S(z)},$$

missä s(z) on jakauman tiheysfunktio. Intensiteetillä on seuraava tulkinta: $\mu(z)dz$ on todennäköisyys, että satunnaismuuttujan Z arvo on välillä (z,z+dz) ehdolla, että $Z \geq z$. Jos satunnaismuuttuja Z on esimerkiksi elinikä niin intensiteetti on henkivakuutuksessa kuolevuus ja luotettavuusteoriassa vikaantumisaste (failure rate).

Kun satunnaismuuttuja Z on yksittäisen vahingon koko, intensiteetin voi ajatella kuvaavan vahingon "haluttomuutta ahmia lisäkorvausmarkkoja". Tällöin $\mu(z)dz$ on todennäköisyys, että vahinko kasvaa korkeintaan määrään z+dz ehdolla, että se jo on suuruudeltaan z.

Osakappaleessa 3.1 esitettyjen häntäjakaumien intensiteetit ovat

$$\mu(z) = a \qquad (z \geq z_0) \qquad \text{(Eksponentti)}$$

$$\mu(z) = a/z \qquad (z \geq z_0) \qquad \text{(Pareto)}$$

$$\mu(z) = -\frac{b + 2c\log(z)}{z} \qquad (z \geq z_0) \qquad \text{(Kvasilognormaali; vrt. kaava (3.4))}$$

$$\mu(z) = a\lambda(z - z_0)^{a-1} \qquad (z \geq z_0) \qquad \text{(Weibull).}$$

3.3
YLITTEEN EHDOLLINEN ODOTUSARVO

Olkoon yksittäisen vahingon koko satunnaismuuttuja Z ja sen kertymäfunktio S(z). Tarkastellaan satunnaismuuttujaa min(Z,M), missä M > 0 on jakauman katkaisupiste. Kiinteää rajaa z ≤ M suurempien vahinkojen ylitteen min(Z,M) - z ehdollinen odotusarvo on (vrt. Benktander and Segerdahl [3])

$$m(z,M) = E[\min(Z,M) - z \mid Z \geq z] =$$

$$= \frac{\int_z^M (1 - S(x))dx}{1 - S(z)} .$$

Odotusarvoa m(z,M) voidaan käyttää jakaumien vertailuun sekä esimerkiksi Excess of Loss jälleenvakuutuksen riskimaksujen laskemiseen (vrt. tämän osakappaleen loppu). Määritellään lisäksi katkaisemattoman jakauman ylitteen ehdollinen odotusarvo

$$(3.7) \qquad m(z) = \lim_{M\to\infty} m(z,M) = \frac{\int_z^\infty (1 - S(x))dx}{1 - S(z)},$$

joka toisin ilmaistuna on ehdollinen odotusarvo $E(Z - z \mid Z \geq z)$.

Bryson [5] käyttää m(z):sta nimitystä "conditional mean exceedance" ja kutsuu jakaumaa raskashäntäiseksi (kevythäntäiseksi), jos m(z) on z:n kasvava (vähenevä) funktio (z:n on oltava riittävän suuri, jolloin todella ollaan hännässä). Useimpia jakaumia ei voi luokitella raskas- tai kevythäntäisiksi. Eksponenttijakaumalle m(z) on vakio, joten se on sekä raskas- että kevythäntäinen jakauma. Jos jakauman intensiteetti on kasvava (vähenevä) niin jakauma on kevythäntäinen (raskashäntäinen) (vrt. Heilmann [8]).

Määritelmistä seuraa, että

$$(3.8) \qquad m(z,M) = m(z) - m(M)\,\frac{1 - S(M)}{1 - S(z)}\,.$$

Seuraavassa esitetään häntäjakaumien odotusarvot $m(z,M)$ ja $m(z)$ eksponentti- ja Pareto-jakaumien osalta (vrt. Benktander and Segerdahl [3]). Kun $z_0 \le z \le M$ niin eksponenttijakaumalle

$$m(z,M) = \frac{1 - \exp(-a(M - z))}{a}$$

ja Pareto-jakaumalle

$$m(z,M) = \frac{z(1 - (z/M)^{\alpha-1})}{\alpha-1}.$$

Kun $z \ge z_0$ niin eksponenttijakaumalle $m(z) = 1/a$ ja Pareto-jakaumalle $m(z) = z/(\alpha-1)$.

Kvasilognormaali- ja Weibull-jakaumille vastaavat odotusarvot lasketaan numeerisesti määritelmän (3.7) ja kaavan (3.8) avulla. Kvasilognormaalin jakauman osalta käytetään lisäksi hyväksi yhtälöä (3.4).

Tarkastellaan seuraavaksi odotusarvojen $m(z,M)$ laskemista empiiriselle jakaumalle. Olkoon $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ havaittujen vahinkojen jono nousevassa järjestyksessä. Katkaisemattoman jakauman ylitteen ehdollinen odotusarvo on tällöin (vrt. Heilmann [8])

$$m(z) = [\frac{1}{n-i} \sum_{k=i+1}^{n} z_k] - z ,$$

kun $z_i \leq z \leq z_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Vastaavasti on

$$m(z,M) = [\frac{1}{n-i} \sum_{k=i+1}^{n} \min(z_k , M)] - \min(z,M) ,$$

kun $z_i \leq z \leq z_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

Tämän osakappaleen lopuksi käsitellään ylitteen ehdollisten odotusarvojen $m(z,M)$ ja $m(z)$ käyttöä Excess of Loss jälleenvakuutuksen riskimaksun määräämisessä. Olkoon $n(z)$ z:n ylittävien vahinkojen lukumäärän odotusarvo (esimerkiksi vuodessa). Oletetaan, että vahinkojen lukumäärä ja yksittäisen vahingon koko ovat riippumattomia. Tarkastellaan Excess of Loss jälleenvakuutusta, joka kattaa välin (M_1,M_2), jolloin ensivakuuttajan omavastuu on M_1 ja jälleenvakuuttajan vastuun yläraja M_2-M_1. Vakuutuksen riskimaksu on tällöin (vrt. Benktander and Segerdahl [3])

$$\pi(M_1,M_2) = n(M_1)m(M_1,M_2) =$$

$$= n(0) \int_{M_1}^{M_2} (1 - S(z))dz .$$

Jos jälleenvakuuttajan vastuu on rajaton saadaan riskimaksuksi

$$\pi(M_1) = \lim_{M_2 \to \infty} \pi(M_1, M_2) = n(M_1)m(M_1) =$$

$$= n(0) \int_{M_1}^{\infty} (1 - S(z))dz \ .$$

Riskimaksu $\pi(M_1, M_2)$ voidaan esittää muodossa

$$\pi(M_1, M_2) = \pi(M_1) - \pi(M_2) \ .$$

4
EMPIIRISET TULOKSET

4.1
YLEISTÄ

Tässä kappaleessa sovelletaan kappaleissa 2 ja 3 esitettyjä menetelmiä tilastoaineistoon, joka käsittää vuosina 1977-81 Suomessa sattuneet, liikennevakuutuksen perusteella korvatut vahingot. Aineisto on saatu käyttöön Vakuutusalan Tilastokeskuksesta. Korvausmeno käsittää 31.12.1984 mennessä maksetut korvaukset, samaan ajankohtaan mennessä vahvistettujen pysyvien korvausten pääoma-arvot sekä 31.12.1984 keskeneräisinä olleiden vahinkojen vahinkokohtaiset varaukset.

Seuraava taulukko on laadittu tilastoaineistosta. Markkamäärät on korotettu liikennevakuutuksen korvaustasoindeksillä vuoden 1981 tasoon (korvaustasoindeksi on ansiotaso- ja kuluttajahintaindeksin geometrinen keskiarvo).

Satt. vuosi	Vahinkojen lukumäärä	Korvausmeno 1.000 mk
1977	77.700	463.100
1978	74.600	467.400
1979	81.700	476.300
1980	82.700	489.400
1981	89.000	514.400
	405.700	2.410.600

Osakappaleessa 4.2 tarkastellaan yksittäisen liikennevahingon suuruusjakauman approksimoinnin tuloksia yhden sattumisvuoden (1981) aineiston perusteella. Osakappaleessa 4.3 tarkastellaan jakauman häntää. Hännän approksimoinnissa käytetään viiden sattumisvuoden (1977-81) yhteistä aineistoa.

Osakappaleessa 4.4 tarkastellaan hännän approksimaatiojakaumien intensiteettejä ja osakappaleessa 4.5 ylitteen ehdollisia odotusarvoja m(z) ja m(z,M). Viimeisessä osakappaleessa 4.6 esitetään esimerkki Excess of Loss jälleenvakuutusmaksun laskemisesta.

4.2 VUONNA 1981 SATTUNEET LIIKENNEVAHINGOT

Tässä osakappaleessa sovelletaan kappaleessa 2 esitettyjä menetelmiä vuonna 1981 sattuneiden liikennevahinkojen tilastoaineistoon.

Myöhempiä tarkasteluja varten (vrt. 4.2.2 ja 4.2.3) vahingot jaetaan kahteen luokkaan, lieviin ja vaikeisiin vahinkoihin. Vahinkoa kutsutaan vaikeaksi silloin, kun sen perusteella maksetaan jatkuvaa eläkettä tai jotain seuraavista henkilökorvauslajeista: hautauskuluja, korvausta kivusta ja särystä, kuntouttamiskuluja, korvausta pysyvästä viasta tai haitasta, kertakorvausta lopullisen työkyvyttömyys- tai perhe-eläkkeen sijasta.

Muita kuin edellä määriteltyjä vahinkoja kutsutaan lieviksi. Niitä voidaan luonnehtia siten, että niiden perusteella maksetaan pelkästään omaisuuskorvauksia tai eräitä lieviksi katsottavia henkilökorvauksia kuten sairaanhoitokuluja. Käytetyssä luokittelussa tietty vahinko on kokonaisuudessaan joko vaikea tai lievä, sillä edellä mainittujen erien lisäksi yksittäiseen vaikeaan vahinkoon lisätään kaikki muukin korvausmeno, jota sen perusteella on maksettu.

Seuraava taulukko on laadittu vuonna 1981 sattuneiden liikennevahinkojen tilastoaineistosta.

	Vahinkojen lukumäärä	Korvausmeno 1.000 mk	Keskivahinko (mk)
Lievät vahingot	84.300	285.600	3.400
Vaikeat vahingot	4.700	228.800	48.700
Kaikki vahingot	89.000	514.400	5.800

Approksimaatiokaavoissa tarvittavan origomomentin a_n estimaattori on

$$\hat{a}_n = (1/N) \sum_{i=1}^{N} (\log(z_i))^n ,$$

missä z_i on i. vahingon korvausmeno ja N vahinkojen lukumäärä.

Seuraavassa taulukossa luetellaan myöhemmin esitettävissä kuvissa ja taulukoissa käytettävät lyhenteet ja niitä vastaavat kappaleen 2 kaavat sekä esitetään eräitä kommentteja.

Lyhenne	Kaava	Kommentti
H		Havaittu jakauma; S(x) = S(log(z)) (vrt. osakappale 2.1).
N		Normaaliapproksimaatio.
GC1	(2.2)	Gram-Charlierin A-sarja (vinoustermi mukana).
GC2	(2.3)	Gram-Charlierin A-sarja (vinous- ja huipukkuustermit mukana).
SEK	(2.4)	Lievien ja vaikeiden vahinkojen GC1-approksimaatioista sekoittamalla saatu approksimaatio.
dN%,dGC1%,...		Prosenttiluku, joka ilmaisee kuinka paljon approksimaatiojakauman kertymäfunktio eroaa havaitun jakauman kertymäfunktiosta yhdessä pistessä.

Kuvat 1 ja 2 esittävät tässä osakappaleessa tarkasteltavien, vuonna 1981 sattuneiden liikennevahinkojen jakaumia. Kuvassa 1 nähdään havaittu suhteellinen frekvenssijakauma erikseen kaikkien vahinkojen sekä lievien ja vaikeiden vahinkojen osalta. Kuvassa 2 nähdään vastaavat havaitut kertymäfunktiot. Kuva 2 (kuten myös kuvat 3-6) on piirretty siten, että keskiarvoon saakka esitetään kertymäfunktio S(x) ja sen jälkeen 1-S(x).

4.2.1
KAIKKI VUONNA 1981 SATTUNEET LIIKENNEVAHINGOT

Tässä osakappaleessa käsitellään kaikkia vuonna 1981 sattuneita liikennevahinkoja. Tarkastellaan satunnaismuuttujaa $X = \log(Z)$, missä Z on yksittäisen vahingon koko. Kuvassa 3 nähdään X:n havaittu kertymäfunktio sekä sen approksimaatioita. Havaittu jakauma alkaa noin arvosta $x = 10$ ($z \simeq 22.000$ mk) lähtien käyttäytyä siten, että approksimaatiot eivät pysty seuraamaan sen kulkua. Jakauman käyttäytymiseen mainitun pisteen oikealla puolella vaikuttaa lievien ja vaikeiden vahinkojen jakaumien erilainen sijainti ja muoto. Noin 99 prosenttia lievistä vahingoista on pienempiä kuin 22.000 mk. Toisaalta vaikeista vahingoista lähes 30 prosenttia on tätä suurempia (vrt. kuva 2 sekä taulukot 2 ja 3). Näin ollen vaikeiden vahinkojen vaikutus jakauman hännässä on varsin suuri ja ne aiheuttavat edellä todetun "epäsäännöllisyyden" havaittuun kertymäfunktioon.

Taulukossa 1 on havaitun kertymäfunktion ja sen approksimaatioiden arvoja sekä virheprosentteja. Kaikkien approksimaatioiden suhteellinen virhe jakauman alussa on varsin suuri. Kuitenkin jo ennen keskiarvoa virhe alkaa olla kohtuullinen. Approksimaation suhteellinen virhe jää kaikissa tapauksissa pysyvästi alle yhden prosentin arvosta $x = 11$ ($z \simeq 60.000$ mk) lähtien. Menetelmien väliset erot ovat varsin pienet. Kuvasta 3 nähdään, että Gram-Charlierin 2-sarja (mukana sekä vinous että huipukkuus) seuraa parhaiten jakauman loppuhäntää.

4.2.2
VUONNA 1981 SATTUNEET LIEVÄT LIIKENNEVAHINGOT

Tässä osakappaleessa käsitellään lieviä vahinkoja. Tarkastellaan satunnaismuuttujaa $X = \log(Z)$, missä Z on yksittäisen lievän vahingon koko. Kuvassa 4 nähdään X:n havaittu kertymäfunktio ja sen approksimaatioita. Vaikeiden vahinkojen poistaminen jakaumasta aiheuttaa sen, että jäljelle jäävien lievien vahinkojen kertymäfunktio on säännöllisempi kuin kaikkien vahinkojen kertymäfunktio.

Kuvan 4 ja taulukon 2 perusteella todetaan, että approksimaatiomenetelmät toimivat tässä hieman paremmin kuin koko aineiston osalta. Menetelmien väliset erot ovat varsin pienet. Pienten vahinkojen osalta approksimaatio on edelleen huono. Noin arvosta $x = 10$ ($z \simeq 22.000$) lähtien kaikkien menetelmien suhteellinen virhe jää pysyvästi alle yhden prosentin.

4.2.3
VUONNA 1981 SATTUNEET VAIKEAT LIIKENNEVAHINGOT

Tässä osakappaleessa käsitellään vaikeita vahinkoja. Tarkastellaan satunnaismuuttujaa X = log(Z), missä Z on yksittäisen vaikean vahingon koko. Kuvassa 5 on X:n havaittu kertymäfunktio ja sen approksimaatioita. Taulukosta 3 nähdään, että suhteelliset virheet ovat hieman suurempia kuin aiemmin käsitellyillä jakaumilla. Vasta arvosta x = 13,5 (z ≃ 730.000) lähtien jää kaikkien menetelmien virhe pysyvästi alle yhden prosentin. Gram-Charlierin approksimaatiot ovat lähellä toisiaan johtuen jakauman pienestä huipukkuudesta (0,36). Niiden antamat approksimaatiot ovat hieman normaaliapproksimaatiota paremmat.

4.2.4
LIEVIEN JA VAIKEIDEN VAHINKOJEN JAKAUMIEN SEKOITUS

Tässä osakappaleessa käsitellään kaikkien vahinkojen suuruusjakauman approksimointia lievien ja vaikeiden vahinkojen jakaumien sekoituksella. Sekoitus lasketaan kaavalla (2.4), jossa $S_1(x)$ on lievien ja $S_2(x)$ vaikeiden vahinkojen jakauman kertymäfunktion approksimaatio. Laskemalla mainittu sekoitus erikseen normaaliapproksimaatiolle sekä molemmille Gram-Charlierin sarjakehitelmille todetaan, että parhaimman approksimaation antaa Gram-Charlierin 1-kehitelmä (2.2). Erot muihin menetelmiin ovat kuitenkin varsin pienet.

Kuvassa 6 nähdään havaitun jakauman kertymäfunktio (kaikki vahingot) ja Gram-Charlierin 1-kehitelmien sekoitus sekä vertailun vuoksi sekoittamaton Gram-Charlierin 1-approksimaatio. Sekä kuvan 6 että taulukon 4 perusteella todetaan, että sekoittamalla saatu approksimaatio on parempi kuin suoraan, osakappaleessa 4.2.1 esitetyllä tavalla laskettu approksimaatio. Sekoitus seuraa havaittua kertymäfunktiota varsin hyvin aivan jakauman alkua ja loppuhäntää lukuunottamatta. Tekniikkana sekoittaminen on tässä sopiva, koska jakauma voidaan "jakaa osiin", jotka poikkevat toisistaan paitsi sijaintinsa myös muotonsa suhteen (vrt. kuva 2).

4.3
HÄNTÄJAKAUMAN APPROKSIMOINNIN TULOKSET

Seuraavassa tarkastellaan jakauman häntää ja sen approksimaatioita. Alla olevassa taulukossa luetellaan myöhemmin esitettävissä kuvissa ja taulukoissa käytettävät lyhenteet ja niitä vastaavat osakappaleen 3.1 kaavat.

Lyhenne	Kaava	Kommentti
H	(3.1)	Havaittu jakauma.
E	(3.2)	Eksponenttijakauma.
K	(3.3)	Kvasilognormaalijakauma.
W	(3.5)	Weibull-jakauma.
P	(3.6)	Pareto-jakauma.
dE%, dK%,...		Prosenttiluku, joka ilmaisee kuinka paljon approksimaatiojakauman kertymäfunktio eroaa havaitun jakauman kertymäfunktiosta yhdessä pisteessä.

Jakaumien parametrien estimaatit lasketaan osakappaleessa 3.1 esitetyllä tavalla ja tulokset esitetään taulukoiden yhteydessä.

Seuraavassa käsitellään osakappaleessa 3.1 esitettyjä jakaumia Pareto-jakaumaa lukuunottamatta. Kuvassa 7 nähdään vuosina 1977-81 sattuneiden liikennevahinkojen hännän havaittu kertymäfunktio sekä sen approksimaatioita. Tässä tarkastelussa häntään kuuluvat kaikki vahingot, jotka ovat vähintään 300.000 mk. Korvausmenot ovat vuoden 1981 tasossa. Tällaisia vahinkoja on yhteensä 954 kappaletta eli 0,2 prosenttia kaikista vuosina 1977-81 sattuneista liikennevahingoista. Suurimman vahingon kokonaiskorvausmeno on 4,3 Mmk.

Havaitun kertymäfunktion ja sen approksimaatioiden arvoja sekä suhteellisia virheitä on taulukossa 5. Loppuhännän osalta kaikkien jakaumien suhteellinen virhe on varsin pieni. Eksponenttijakaumalla virhe pysyy pitkään melko suurena. Weibull-jakauma

antaa hieman parempia tuloksia. Kvasilognormaalijakauma antaa kohtalaisen hyvän approksimaation lähes koko hännän osalta. Toisaalta approksimaatio on varsin huono aivan hännän alussa. Loppuhännässä virhe on kaikilla jakaumilla saman suuntainen ts. approksimoiva kertymäfunktio lähestyy ykköstä nopeammin kuin havaittu jakauma.

Seuraavaksi tarkastellaan hännän approksimointia Pareto-jakaumalla. Kuvassa 8 on jakauman hännän havaittu kertymäfunktio ja sen Pareto-approksimaatio kaksoislogaritmiasteikolla. Pareto-jakauman kuvaaja on tällöin suora. Tässä tarkastellaan vahinkoja, jotka ovat vähintään 1,1 Mmk. Tällaisten vahinkojen lukumäärä sattumisvuosina 1977-81 (vuoden 1981 tasossa) on 115. Pareto- jakauman parametrin a maximum likelihood estimaatti on 3,424.

Taulukossa 6 on havaitun kertymäfunktion ja sen Pareto-approksimaation arvoja eräillä argumentin z arvoilla. Suhteelliset virheet vaihtelevat sekä suuruudeltaan, että merkiltään johtuen siitä, että havaittu jakauma "heilahtelee" Pareto-jakaumaa kuvaavan suoran ympärillä. Vahinkojen kasvaessa approksimaatio paranee ja on loppuhännässä melko hyvä.

Seuraavassa vertaillaan eri jakaumien antamia approksimaatioita kahden taulukon avulla. Ensimmäisessä taulukossa esitetään tietyn rajan M ylittävien vahinkojen havaittuja lukumääriä sekä eri jakaumien antamia lukumääriä N(1 - G(M)). Tässä N on häntään kuuluvien vahinkojen lukumäärä eli Pareto-jakaumalla N = 115 ja muilla jakaumilla N = 954.

M (Mmk):	1,2	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5
Havaittu	90	39	12	7	5	3
Eksponentti	33,5	14,5	3,6	0,9	0,2	0,1
Kvasilognormaali	80,8	42,3	16,6	7,4	3,6	1,9
Weibull	92,0	48,1	17,2	6,4	2,5	1,0
Pareto	85,4	39,8	14,8	6,9	3,7	2,2

Eksponenttijakauman antamat lukumäärät ovat huomattavasti pienempiä kuin havaitut lukumäärät. Muut jakaumat antavat melko lähellä toisiaan olevia lukumääriä, joista useimmat ovat myös kohtalaisen lähellä havaittuja arvoja.

Kaikki käytetyt jakaumat ovat sellaisia, että valittiinpa kuinka suuri M tahansa niin yllä olevalla tavalla laskettu vahinkojen lukumäärä on aina positiivinen. Todellisuudessa vahinkojakauma on aina ylhäältä katkaistu tai voidaan tehdä sellaiseksi esimerkiksi jälleenvakuutuksen avulla. Seuraava tarkastelu antaa käsityksen siitä, mitä katkaisemattoman jakauman käyttö merkitsee. Alla olevaan taulukkoon on laskettu vahinkojen lukumääriä N(1 - G(M)) siten, että Pareto-jakaumalla N = 2.500 ja muilla jakaumilla N = 20.000. Luvun N arvot ovat suuruusluokaltaan 20 kertaa vuosina 1977-81 sattuneiden häntään kuuluvien vahinkojen lukumäärät. Lukumäärät voidaan näin ollen tulkita arvioiksi sadan vuoden aikana sattuvien vahinkojen lukumääristä.

M (Mmk):	10,0	20,0	50,0	100,0
Eksponentti	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Kvasilognormaali	0,2097	0,0028	0,0000	0,0000
Weibull	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000
Pareto	1,3044	0,1215	0,0053	0,0005

Neljän desimaalin tarkkuudella kaikki muut paitsi eksponenttijakauma antavat positiivisen lukumäärän yli 10 Mmk:n vahingoille. Pareto-jakauma antaa muita selvästi suurempia lukumääriä; esimerkiksi yli 10 Mmk:n vahinkoja 1,3 kappaletta, mikä voitaisiin N:n valinnan perusteella tulkita yli 10 Mmk:n vahinkojen keskimääräiseksi lukumääräksi sadan vuoden aikana (vuoden 1981 tasossa). Todellisuudessa tällaisia vahinkoja ei Suomessa koskaan ole sattunut, mutta saatua lukumäärää ei voida kuitenkaan pitää täysin epärealistisena.

4.4 HÄNNÄN APPROKSIMAATIOJAKAUMIEN INTENSITEETIT

Seuraavassa tarkastellaan intensiteettejä $\mu(z)$ vuosina 1977-81 sattuneiden liikennevahinkojen tilastoaineiston perusteella. Kuvassa 9 nähdään hännän approksimaatiojakaumien intensiteetit. Parametrien arvot ovat samat kuin taulukoissa 5 ja 6. Eksponenttijakauman intensiteetti on vakio. Muiden jakaumien intensiteetit ovat vähenevä funktioita. Tämä voidaan tulkita siten, että mitä suuremmaksi vahingon koko z on kasvanut sitä pienempi on todennäköisyys $\mu(z)dz$, että sen koko kasvaa korkeintaan määrään z+dz. Pareto-jakaumalla tämä todennäköisyys on loppuhännässä kaikkein pienin.

4.5
TILASTOAINEISTOSTA LASKETUT YLITTEEN EHDOLLISET ODOTUSARVOT

Seuraavassa käsitellään osakappaleessa 3.3 esitettyjä ylitteen ehdollisia odotusarvoja m(z) ja m(z,M) laskettuina samasta aineistosta kuin intensiteetit edellä. Kuvassa 10 nähdään havaitun jakauman ja sen eri approksimaatioiden ehdolliset odotusarvot m(z). Havaitun jakauman käyrästä nähdään esimerkiksi, että miljoonavahingot ovat keskimäärin noin 1,5 Mmk:n suuruisia. Eksponenttijakaumalle m(z) on vakio (n. 0,36 Mmk). Muille kolmelle jakaumalle odotusarvot m(z) ovat aidosti kasvavia, joten jakaumat ovat (aidosti) raskashäntäisiä.

Seuraavaksi tarkastellaan jakauman katkaisemisen vaikutusta ylitteen ehdolliseen odotusarvoon. Kuva 11 esittää odotusarvoja m(z ; 4,3) (tässä 4,3 Mmk on suurin havaittu yksittäinen korvausmeno vuosina 1977-81). Katkaiseminen aiheuttaa odotusarvojen m(z ; 4,3) taipumisen argumentin kasvaessa. Taipuminen on niin voimakasta, että kaikkien jakaumien katkaistut odotusarvot pysyttelevät suurelta osin havaitun odotusarvokäyrän alapuolella.

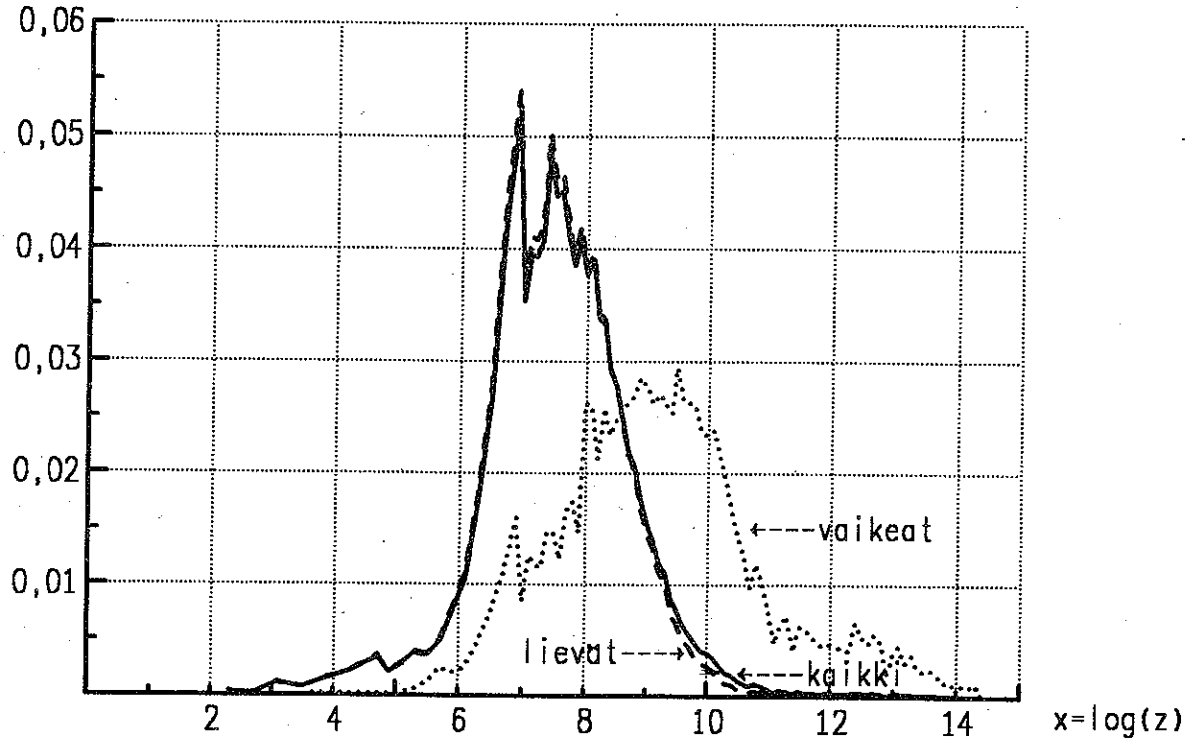
Kuvasta 12 nähdään katkaisupisteen M valinnan vaikutus Pareto-jakauman tapauksessa. Kuva esittää odotusarvoja m(z,M) eri katkaisupisteen M arvoilla. Jos Pareto-jakauma katkaistaan esimerkiksi 6 Mmk:n kohdalta niin 4 Mmk:n ylittävän vahingon odotusarvo on 5 Mmk:n suuruinen, kun katkaisemattoman jakauman odotusarvo on noin 5,6 Mmk (vrt. kuva 10).

4.6
SOVELLUTUSESIMERKKI: EXCESS OF LOSS JÄLLEENVAKUUTUKSEN MAKSU

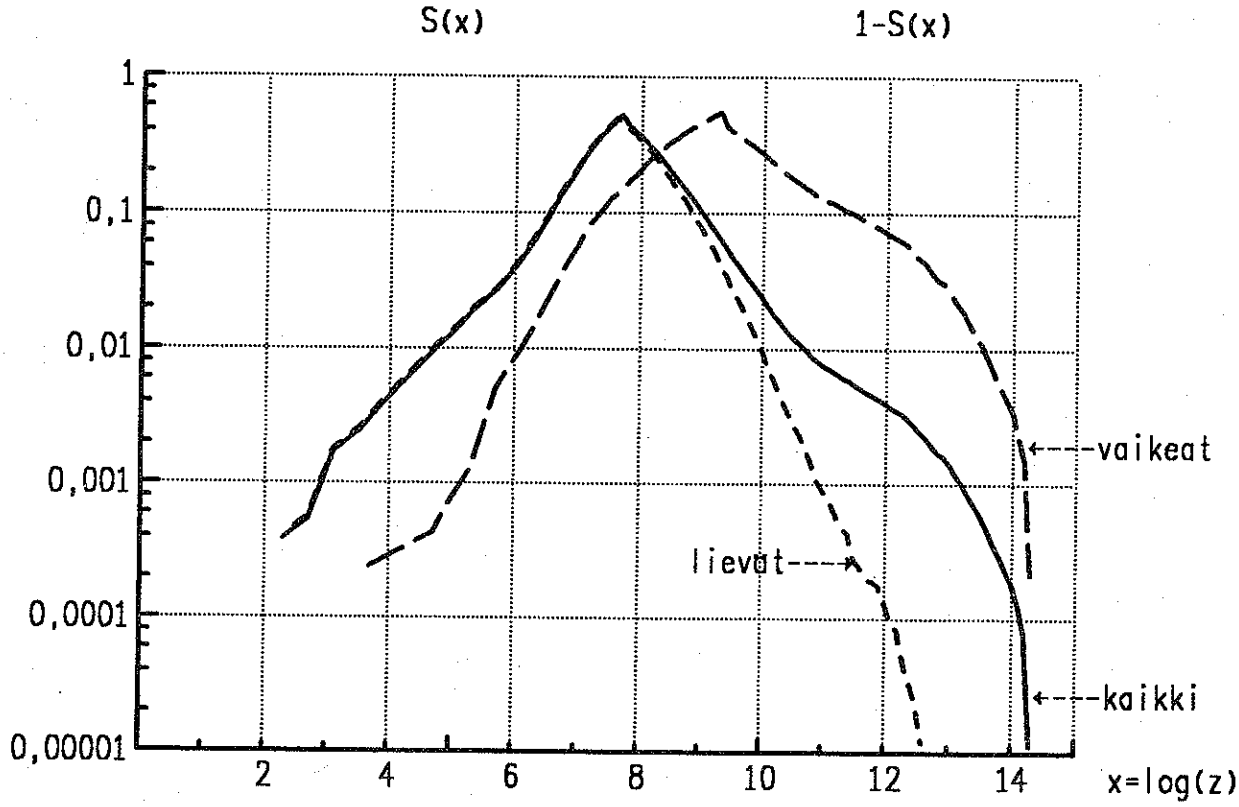
Eräänä sovellutuksena lasketaan sattumisvuosien 1977-81 aineistosta liikennevakuutuksen Excess of Loss jälleenvakuutuksen riskimaksuja $\pi(1,5 ; M)$, missä ensivakuuttajan omavastuu on 1,5 Mmk ja jälleenvakuuttajan maksimivastuu M-1,5 (Mmk).

Kuva 13 esittää riskimaksuja $\pi(1,5 ; M)$ M:n funktiona sekä havaitun jakauman että eksponentti- ja Pareto-jakaumien osalta. Vahinkojen lukumäärän odotusarvona n(1,5) käytetään aineistosta laskettua viiden vuoden keskiarvoa (n. 7,8 vähintään 1,5 Mmk:n vahinkoa vuodessa). Riskimaksut on jaettu koko liikennevakuutuksen vakuutusmaksutulolla vuonna 1981 (675 Mmk).

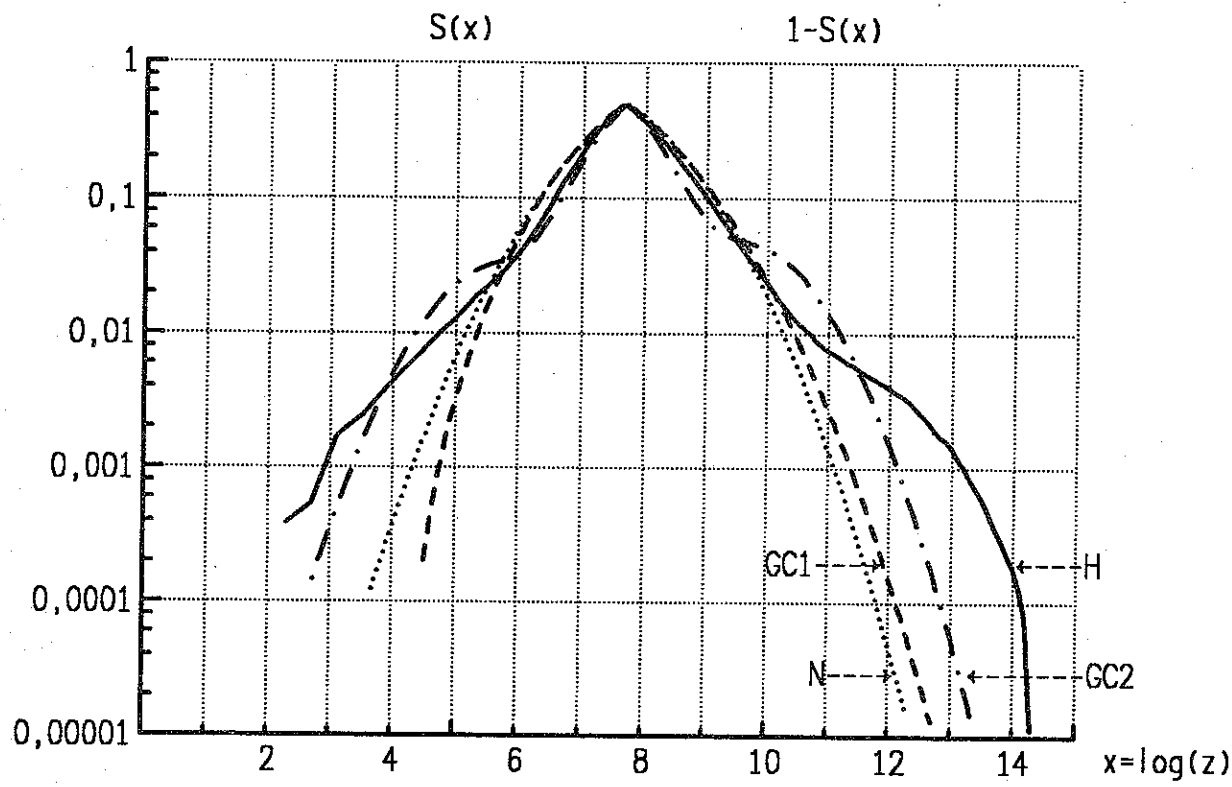
Pareto-jakauma antaa varsin hyvän approksimaation havaitulle riskimaksulle. Eksponenttijakauman antamat maksut ovat liian pieniä ja lisäksi jälleenvakuutusmaksu on käytännöllisesti katsoen vakio , kun M > 3 Mmk.



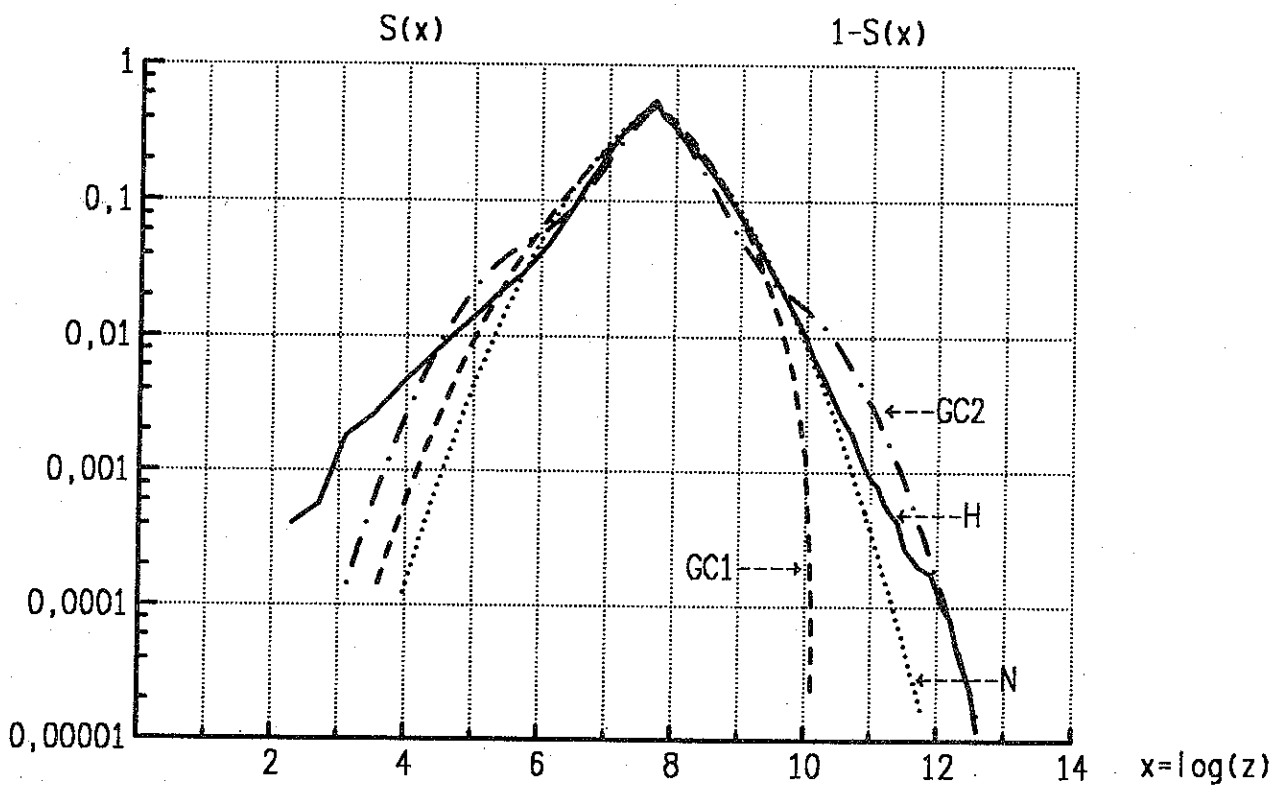
KUVA 1. Liikennevakuutuksen yksittäisen vahingon koon suhteellinen frekvenssijakauma sattumisvuonna 1981.



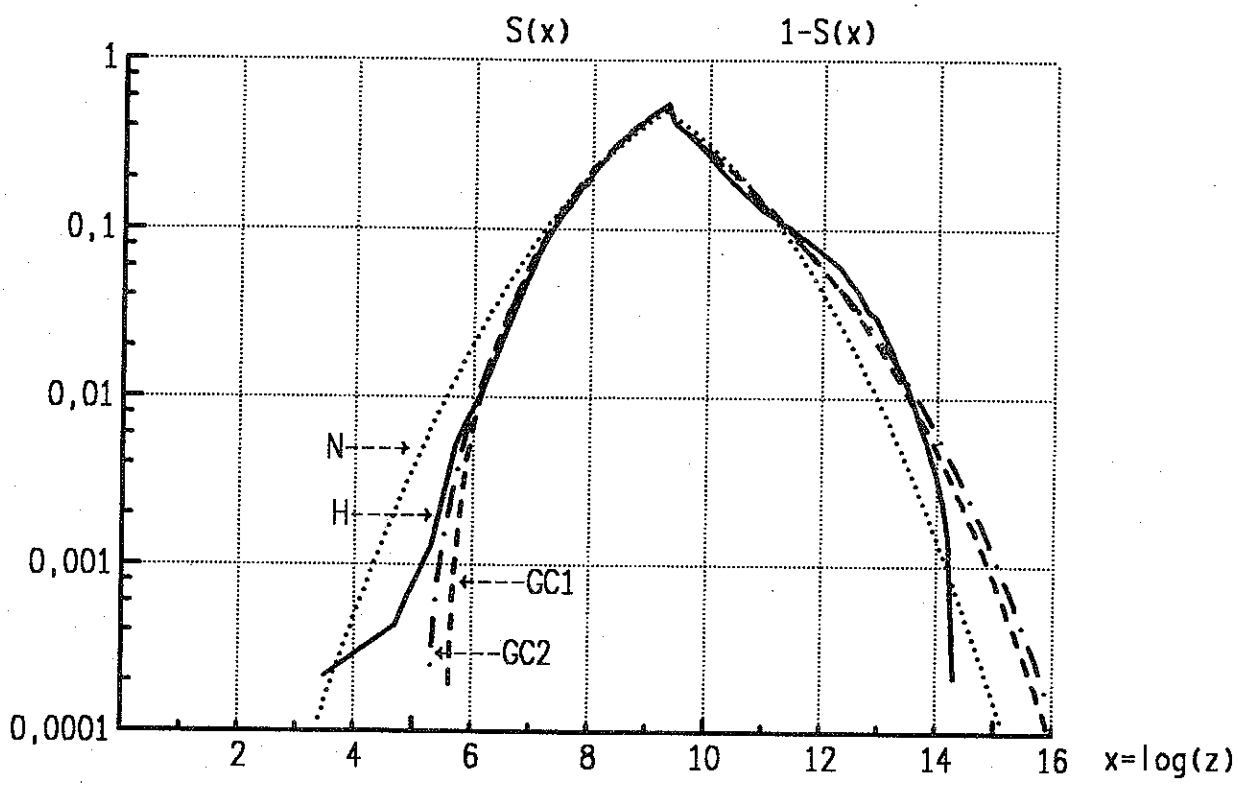
KUVA 2. Liikennevakuutuksen yksittäisen vahingon suuruusjakauman havaittu kertymäfunktio sattumisvuonna 1981.



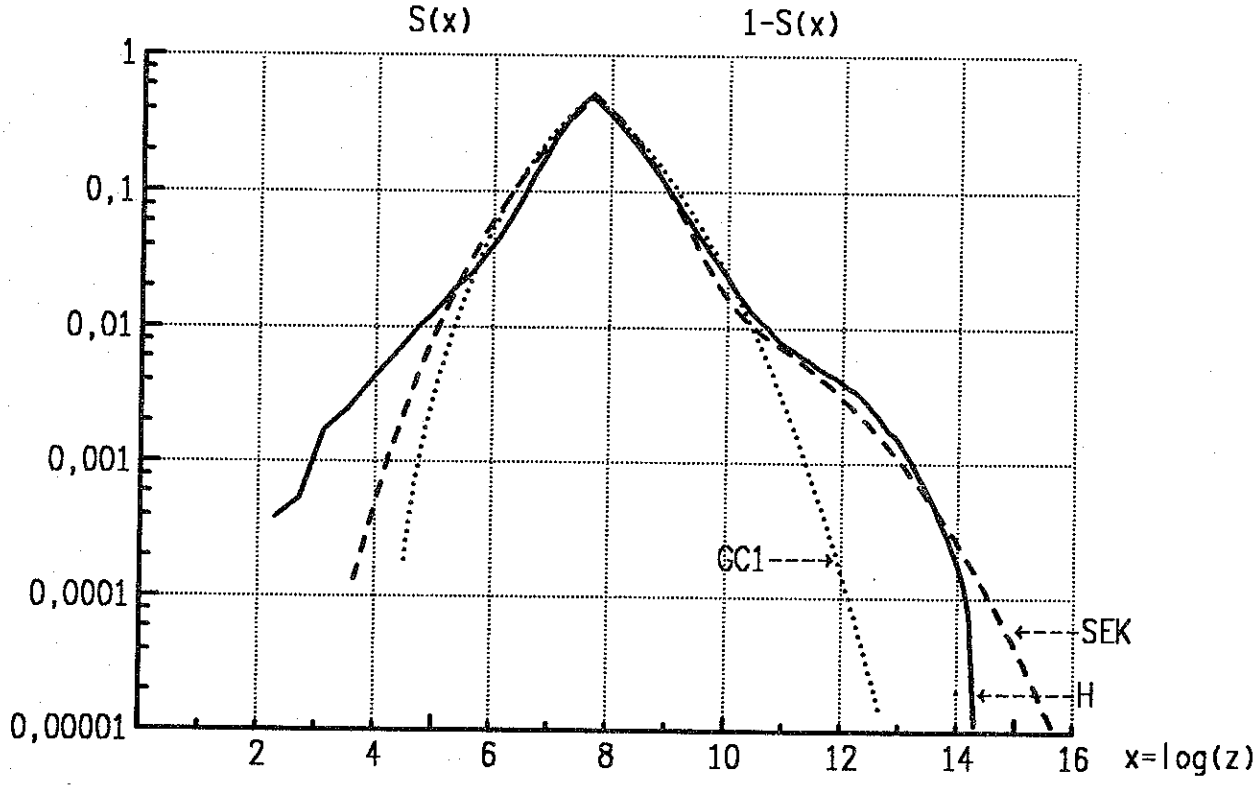
KUVA 3. Liikennevakuutuksen yksittäisen vahingon suuruusjakauman havaittu kertymäfunktio sattumisvuonna 1981 ja sen approksimaatioita.



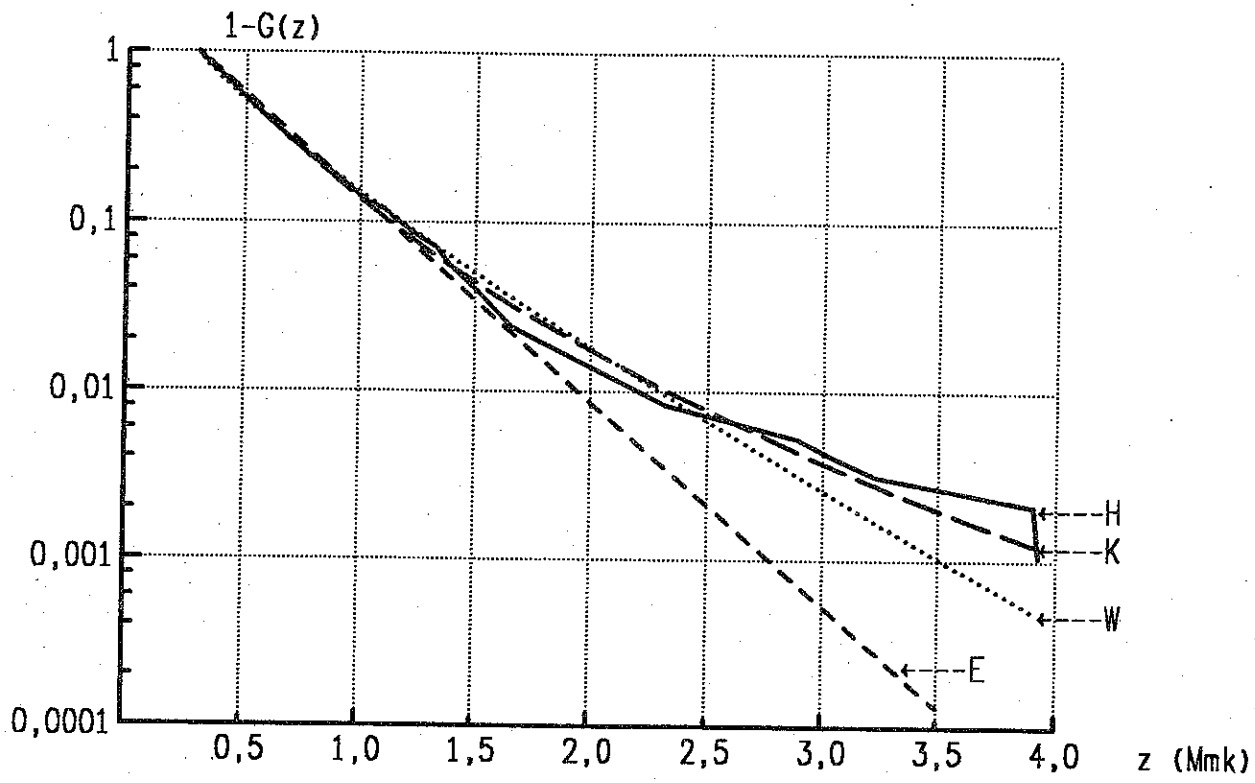
KUVA 4. Lievän vahingon suuruusjakauman havaittu kertymäfunktio sattumisvuonna 1981 ja sen approksimaatioita.



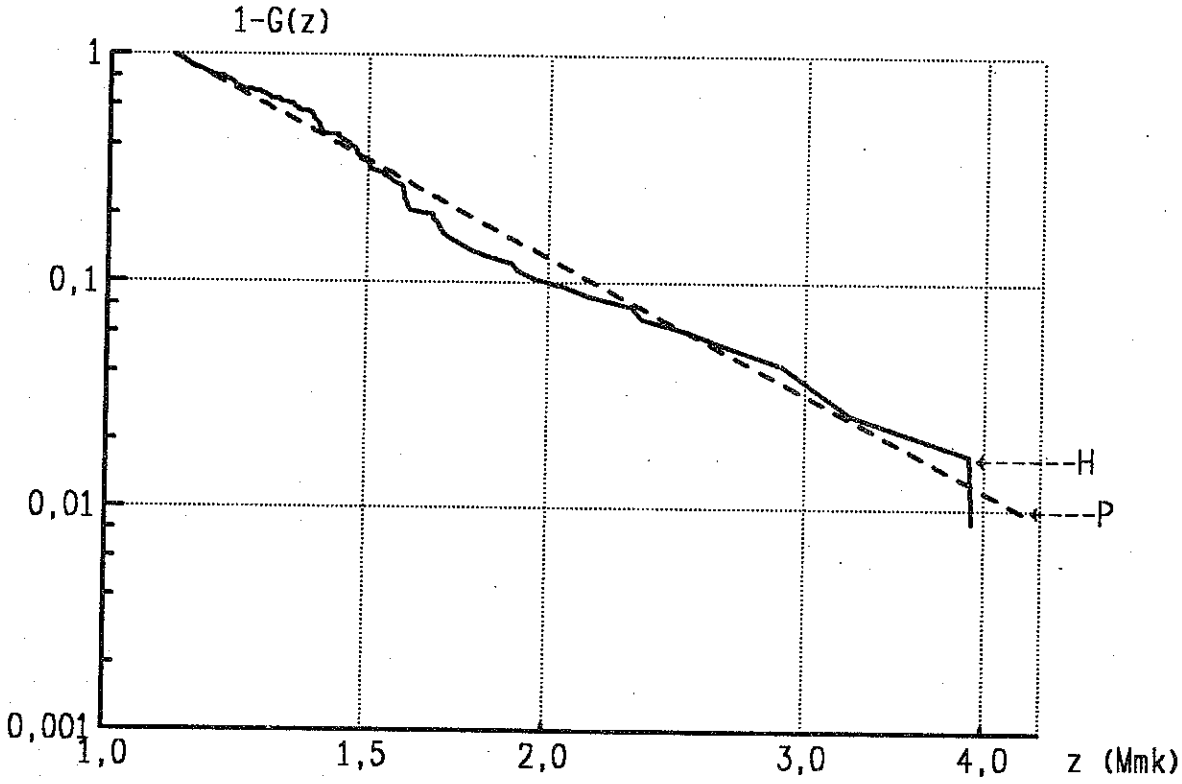
KUVA 5. Vaikean vahingon suuruusjakauman havaittu kertymäfunktio sattumisvuonna 1981 ja sen approksimaatioita.



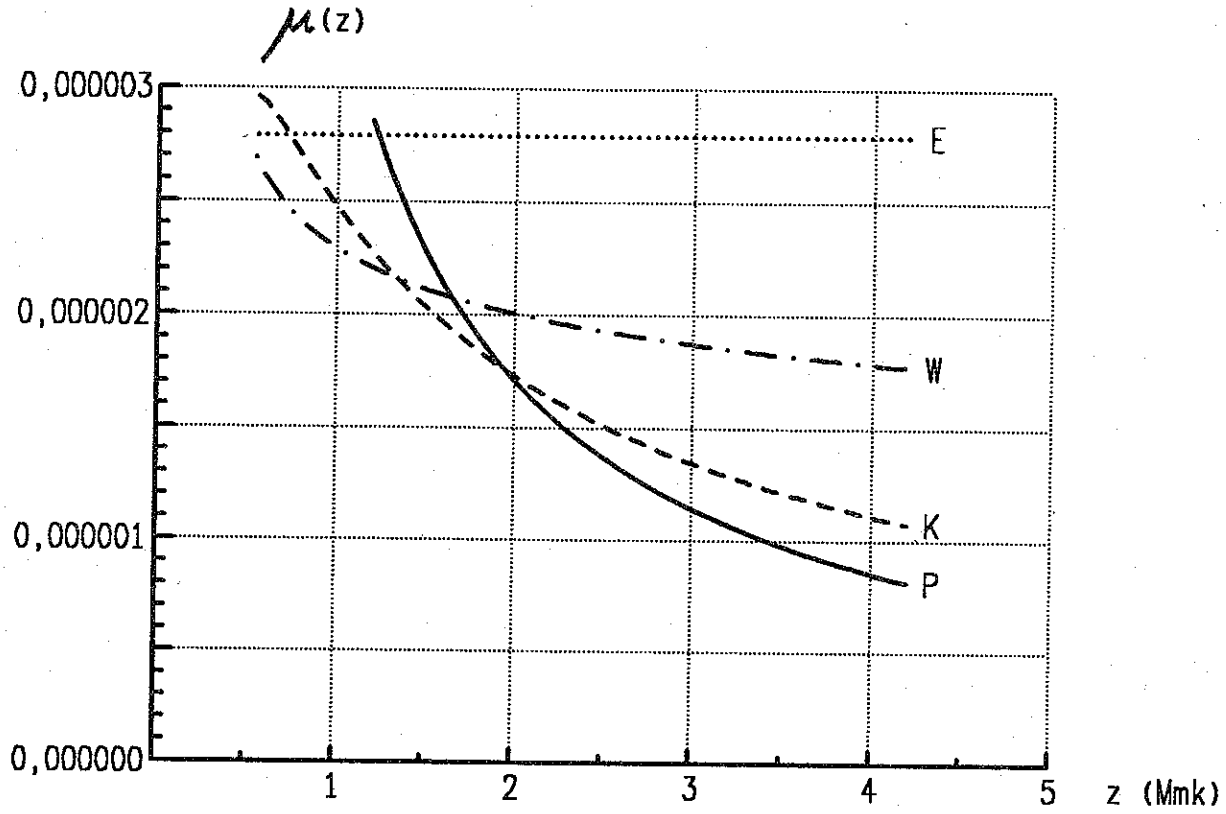
KUVA 6. Liikennevakuutuksen yksittäisen vahingon suuruusjakauman havaittu kertymäfunktio sattumisvuonna 1981 ja sen approksimaatio sekoitetulla jakaumalla.



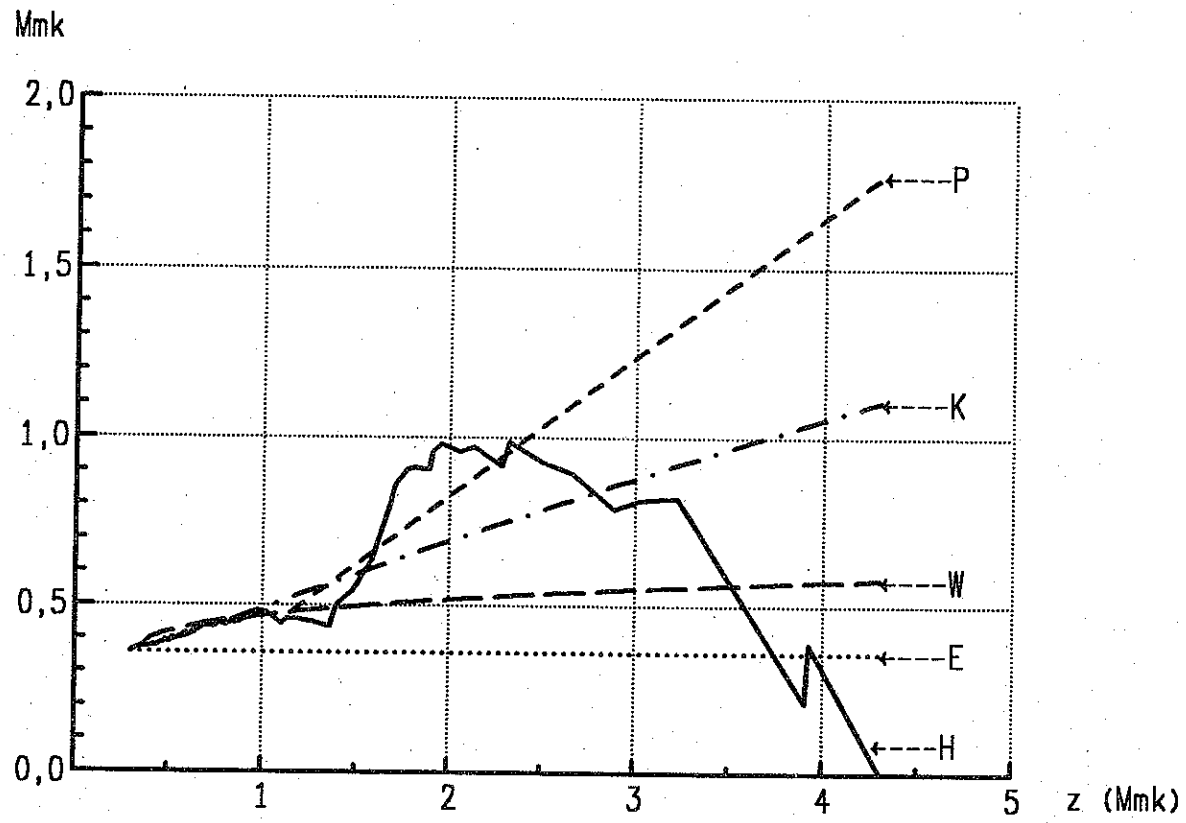
KUVA 7. Liikennevakuutuksen yksittäisen vahingon suuruusjakauman hännän kertymäfunktio sattumisvuosina 1977-81 ja sen approksimaatioita.



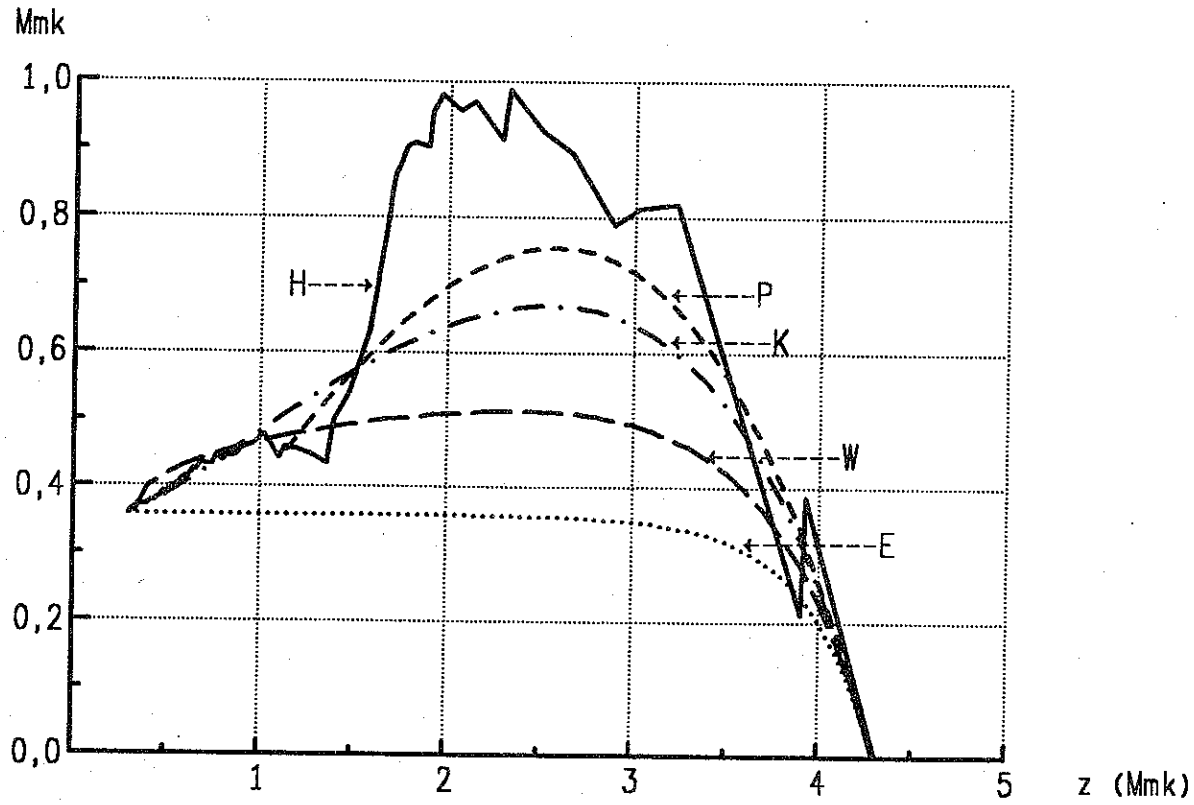
KUVA 8. Liikennevakuutuksen yksittäisen vahingon suuruusjakauman hännän kertymäfunktio sattumisvuosina 1977-81 ja sen Pareto-approksimaatio.



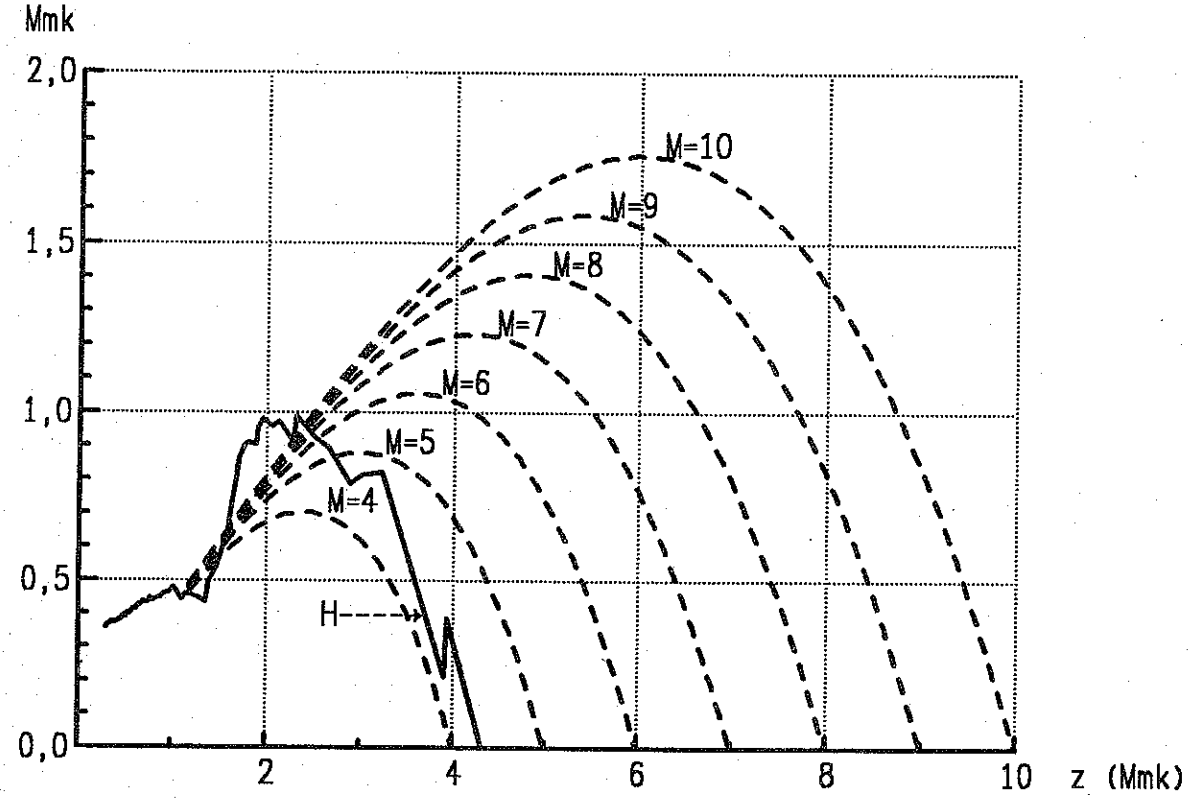
KUVA 9. Hannan approksimaatiojakaumien intensiteetit.



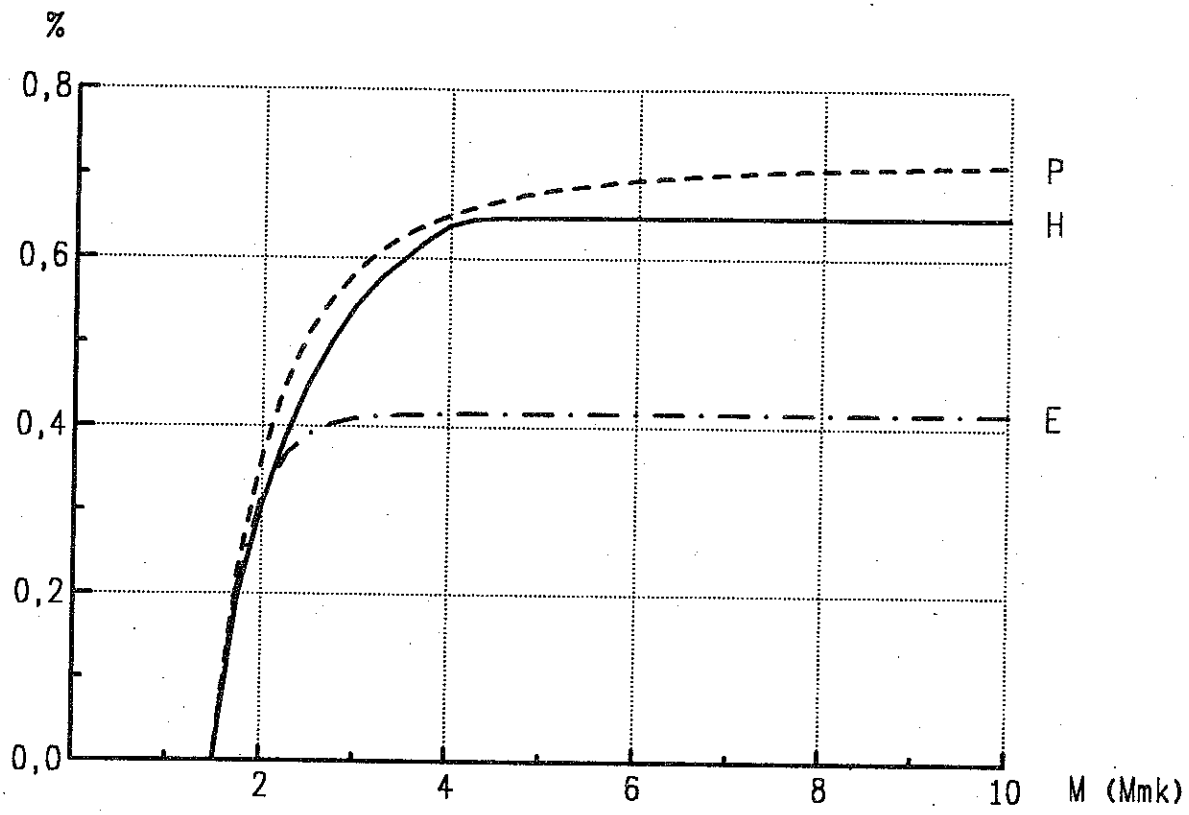
KUVA 10. Ehdolliset odotusarvot m(z).



KUVA 11. Ehdolliset odotusarvot m(z ; 4,3).



KUVA 12. Pareto-jakauman ehdolliset odotusarvot m(z,M).



KUVA 13. Excess of Loss-jälleenvakuutusmaksuja $\pi(1,5\ ;\ M)$ prosentteina maksutulosta.

TAULUKKO 1: KAIKKI VAHINGOT SATTUMISVUONNA 1981

z(mk)	x = log(z)	H	N	GC1	GC2	dN%	dGC1%	dGC2%
10	2,3	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	-99,9	-100,4	-92,4
74	4,3	0,0061	0,0009	-0,0001	0,0090	-84,8	-101,4	47,4
200	5,3	0,0183	0,0138	0,0088	0,0288	-24,6	-52,1	57,3
545	6,3	0,0627	0,0980	0,0937	0,0523	56,3	49,4	-16,6
1.097	7,0	0,2188	0,2559	0,2627	0,1871	16,9	20,1	-14,5
1.808	7,5	0,4316	0,4203	0,4342	0,4017	-2,6	0,6	-6,9
2.981	8,0	0,6349	0,6001	0,6135	0,6536	-5,5	-3,4	2,9
4.915	8,5	0,7980	0,7607	0,7664	0,8429	-4,7	-4,0	5,6
8.103	9,0	0,8982	0,8776	0,8750	0,9291	-2,3	-2,6	3,4
13.360	9,5	0,9516	0,9472	0,9407	0,9500	-0,5	-1,1	-0,2
22.026	10,0	0,9763	0,9809	0,9752	0,9578	0,5	-0,1	-1,9
36.316	10,5	0,9879	0,9943	0,9910	0,9715	0,6	0,3	-1,7
59.874	11,0	0,9925	0,9986	0,9972	0,9858	0,6	0,5	-0,7
98.716	11,5	0,9946	0,9997	0,9993	0,9947	0,5	0,5	0,0
162.755	12,0	0,9961	1,0000	0,9998	0,9985	0,4	0,4	0,2
268.337	12,5	0,9975	1,0000	1,0000	0,9997	0,3	0,3	0,2
442.413	13,0	0,9986	1,0000	1,0000	0,9999	0,1	0,1	0,1
729.416	13,5	0,9994	1,0000	1,0000	1,0000	0,1	0,1	0,1
1.202.604	14,0	0,9998	1,0000	1,0000	1,0000	0,0	0,0	0,0
1.794.075	14,4	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0	0,0	0,0

a_1 = 7,721 σ^2 = 1,208 ϵ_3 = 0,296

a_2 = 60,826 γ_1 = 0,223 ϵ_4 = 4,882

a_3 = 488,606 γ_2 = 3,343

a_4 = 4.004,882

TAULUKKO 2: LIEVÄT VAHINGOT SATTUMISVUONNA 1981

z(mk)	x = log(z)	H	N	GC1	GC2	dN%	dGC1%	dGC2%
10	2,3	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	-100,0	-99,9	-99,1
74	4,3	0,0065	0,0004	0,0015	0,0055	-93,6	-77,5	-15,1
200	5,3	0,0193	0,0096	0,0175	0,0323	-50,1	-9,1	67,7
545	6,3	0,0654	0,0903	0,0992	0,0731	38,1	51,6	11,8
1.097	7,0	0,2278	0,2620	0,2488	0,1956	15,0	9,2	-14,1
1.808	7,5	0,4488	0,4459	0,4194	0,4036	-0,6	-6,6	-10,1
2.981	8,0	0,6586	0,6425	0,6204	0,6590	-2,4	-5,8	0,1
4.915	8,5	0,8240	0,8069	0,8022	0,8550	-2,1	-2,6	3,8
8.103	9,0	0,9223	0,9143	0,9236	0,9475	-0,9	0,1	2,7
13.360	9,5	0,9711	0,9692	0,9810	0,9747	-0,2	1,0	0,4
22.026	10,0	0,9903	0,9911	0,9987	0,9840	0,1	0,9	-0,6
36.316	10,5	0,9972	0,9980	1,0012	0,9915	0,1	0,4	-0,6
59.874	11,0	0,9991	0,9996	1,0006	0,9968	0,1	0,1	-0,2
98.716	11,5	0,9997	0,9999	1,0002	0,9991	0,0	0,0	-0,1
162.755	12,0	0,9999	1,0000	1,0000	0,9998	0,0	0,0	0,0
179.872	12,1	0,9999	1,0000	1,0000	0,9999	0,0	0,0	0,0
198.789	12,2	0,9999	1,0000	1,0000	0,9999	0,0	0,0	0,0
219.696	12,3	1,0000	1,0000	1,0000	0,9999	0,0	0,0	0,0
268.337	12,5	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0	0,0	0,0
296.559	12,6	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0	0,0	0,0
362.217	12,8	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000	0,0	0,0	0,0

a_1 = 7,636 σ^2 = 0,995 ϵ_3 = -0,408
a_2 = 59,298 γ_1 = -0,411 ϵ_4 = 2,350
a_3 = 467,566 γ_2 = 2,372
a_4 = 3.740,221

TAULUKKO 3: VAIKEAT VAHINGOT SATTUMISVUONNA 1981

z(mk)	x = log(z)	H	N	GC1	GC2	dN%	dGC1%	dGC2%
33	3,5	0,0002	0,0002	-0,0005	-0,0002	-28,9	-326,4	-175,2
245	5,5	0,0026	0,0092	-0,0010	0,0013	259,5	-138,0	-49,2
665	6,5	0,0219	0,0418	0,0257	0,0257	90,4	17,4	17,3
1.097	7,0	0,0573	0,0783	0,0650	0,0619	36,6	13,5	8,0
1.808	7,5	0,1227	0,1350	0,1308	0,1243	10,1	6,6	1,3
2.981	8,0	0,2100	0,2150	0,2249	0,2166	2,4	7,1	3,1
4.915	8,5	0,3311	0,3172	0,3420	0,3349	-4,2	3,3	1,1
8.103	9,0	0,4664	0,4357	0,4702	0,4674	-6,6	0,8	0,2
13.360	9,5	0,6005	0,5604	0,5950	0,5978	-6,7	-0,9	-0,5
22.026	10,0	0,7261	0,6793	0,7045	0,7115	-6,5	-3,0	-2,0
36.316	10,5	0,8218	0,7821	0,7925	0,8009	-4,8	-3,6	-2,5
59.874	11,0	0,8739	0,8628	0,8590	0,8656	-1,3	-1,7	-1,0
98.716	11,5	0,9025	0,9203	0,9072	0,9104	2,0	0,5	0,9
162.755	12,0	0,9276	0,9573	0,9413	0,9414	3,2	1,5	1,5
268.337	12,5	0,9523	0,9790	0,9648	0,9630	2,8	1,3	1,1
442.413	13,0	0,9732	0,9906	0,9803	0,9780	1,8	0,7	0,5
729.416	13,5	0,9889	0,9961	0,9898	0,9879	0,7	0,1	-0,1
1.202.604	14,0	0,9966	0,9985	0,9952	0,9939	0,2	-0,1	-0,3
1.794.075	14,4	1,0000	0,9994	0,9975	0,9967	-0,1	-0,2	-0,3

a_1 = 9,258 σ^2 = 2,540 ϵ_3 = 2,186
a_2 = 88,249 γ_1 = 0,540 ϵ_4 = 2,350
a_3 = 866,213 γ_2 = 0,364
a_4 = 8.754,801

TAULUKKO 4: SEKOITETTU JAKAUMA SATTUMISVUONNA 1981

z (mk)	x = log(z)	H	GC1 kaikki	GC1 lievät	GC1 vaikeat	SEK	dSEK%	dGC1%
10	2,3	0,0004	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	-99,9	-100,4
74	4,3	0,0061	-0,0001	0,0015	-0,0005	0,0013	-78,0	-101,4
200	5,3	0,0183	0,0088	0,0175	-0,0020	0,0165	-10,0	-52,1
545	6,3	0,0627	0,0937	0,0992	0,0160	0,0948	51,1	49,4
1.097	7,0	0,2188	0,2627	0,2488	0,0650	0,2391	9,3	20,1
1.808	7,5	0,4316	0,4342	0,4194	0,1308	0,4042	-6,4	0,6
2.981	8,0	0,6349	0,6135	0,6204	0,2249	0,5995	-5,6	-3,4
4.915	8,5	0,7980	0,7664	0,8022	0,3420	0,7779	-2,5	-4,0
8.103	9,0	0,8982	0,8750	0,9236	0,4702	0,8997	0,2	-2,6
13.360	9,5	0,9516	0,9407	0,9810	0,5950	0,9607	1,0	-1,1
22.026	10,0	0,9763	0,9752	0,9987	0,7045	0,9832	0,7	-0,1
36.316	10,5	0,9879	0,9910	1,0012	0,7925	0,9902	0,2	0,3
59.874	11,0	0,9925	0,9972	1,0006	0,8590	0,9931	0,1	0,5
98.716	11,5	0,9946	0,9993	1,0002	0,9072	0,9953	0,1	0,5
162.755	12,0	0,9961	0,9998	1,0000	0,9413	0,9969	0,1	0,4
268.337	12,5	0,9975	1,0000	1,0000	0,9648	0,9981	0,1	0,3
442.413	13,0	0,9986	1,0000	1,0000	0,9803	0,9990	0,0	0,1
729.416	13,5	0,9994	1,0000	1,0000	0,9898	0,9995	0,0	0,1
1.202.604	14,0	0,9998	1,0000	1,0000	0,9952	0,9997	0,0	0,0
1.794.075	14,4	1,0000	1,0000	1,0000	0,9975	0,9999	0,0	0,0

n1 = 84.280
n2 = 4.696 (vrt. kaava (2.4))

TAULUKKO 5: SATTUMISVUOSIEN 1977-81 HÄNTÄJAKAUMA JA SEN APPROKSIMAATIOITA

z (mk)	H	E	K	W	dE%	dK%	dW%
300.247	0,001	0,001	0,029	0,002	-34,2	2.690,3	109,5
311.417	0,043	0,031	0,057	0,056	-27,0	33,5	29,2
324.582	0,085	0,066	0,090	0,104	-21,9	6,4	22,3
337.711	0,127	0,100	0,123	0,146	-21,2	-3,2	15,1
352.246	0,169	0,136	0,158	0,188	-19,6	-6,3	11,3
372.770	0,211	0,184	0,206	0,241	-12,8	-2,0	14,4
391.940	0,253	0,226	0,250	0,286	-10,4	-1,1	13,1
411.518	0,295	0,267	0,292	0,327	-9,2	-0,8	11,1
432.291	0,336	0,309	0,335	0,368	-8,3	-0,5	9,3
453.222	0,378	0,348	0,375	0,405	-8,1	-0,8	7,1
474.893	0,420	0,386	0,415	0,441	-8,1	-1,4	4,9
502.939	0,462	0,432	0,462	0,483	-6,5	-0,1	4,5
522.682	0,504	0,463	0,493	0,510	-8,2	-2,2	1,2
554.403	0,546	0,508	0,539	0,550	-6,9	-1,4	0,8
585.958	0,588	0,550	0,580	0,586	-6,5	-1,4	-0,3
625.576	0,630	0,597	0,626	0,627	-5,3	-0,7	-0,5
666.541	0,672	0,640	0,667	0,664	-4,7	-0,7	-1,2
722.138	0,714	0,692	0,716	0,707	-3,0	0,3	-0,9
772.971	0,756	0,733	0,753	0,742	-3,0	-0,3	-1,8
854.628	0,798	0,787	0,802	0,788	-1,3	0,5	-1,2
954.635	0,840	0,839	0,847	0,832	-0,1	0,9	-0,9
1.105.794	0,882	0,894	0,894	0,881	1,5	1,5	-0,1
1.301.869	0,923	0,939	0,933	0,923	1,7	1,0	-0,1
1.554.620	0,965	0,970	0,960	0,955	0,5	-0,5	-1,1
2.133.891	0,990	0,994	0,986	0,986	0,5	-0,3	-0,3
2.280.074	0,991	0,996	0,989	0,990	0,6	-0,1	-0,1
2.317.044	0,992	0,996	0,990	0,990	0,5	-0,2	-0,1
2.493.105	0,993	0,998	0,992	0,993	0,5	0,0	0,1
2.652.884	0,994	0,999	0,994	0,995	0,5	0,0	0,1
2.892.520	0,995	0,999	0,996	0,997	0,5	0,1	0,2
3.029.955	0,996	1,000	0,996	0,998	0,4	0,1	0,2
3.228.390	0,997	1,000	0,997	0,998	0,3	0,0	0,1
3.906.493	0,998	1,000	0,999	1,000	0,2	0,1	0,2
3.925.417	0,999	1,000	0,999	1,000	0,1	0,0	0,1
4.311.954	1,000	1,000	0,999	1,000	0,0	-0,1	0,0

N = 954

a = 0,000002790 (Eksponentti)

α = 0,8500 (Weibull)
λ = 0,00002033

a = -102,8983 (Kvasilognormaali)
b = 17,0908
c = -0,7084

TAULUKKO 6: SATTUMISVUOSIEN 1977-81 HÄNTÄJAKAUMA JA SEN PARETO-APPROKSIMAATIO

z (mk)	H	P	dP%
1.105.362	0,009	0,017	89,9
1.131.768	0,096	0,093	-2,9
1.169.689	0,183	0,190	3,9
1.215.030	0,270	0,289	7,1
1.283.599	0,357	0,411	15,2
1.370.569	0,443	0,529	19,3
1.390.649	0,530	0,552	4,1
1.471.552	0,617	0,631	2,2
1.538.730	0,704	0,683	-3,0
1.602.804	0,791	0,724	-8,4
1.887.836	0,878	0,843	-4,1
1.955.423	0,896	0,861	-3,9
2.058.254	0,904	0,883	-2,4
2.133.891	0,913	0,897	-1,8
2.280.074	0,922	0,918	-0,5
2.317.044	0,930	0,922	-0,9
2.493.105	0,939	0,939	0,0
2.652.884	0,948	0,951	0,3
2.892.520	0,957	0,964	0,7
3.029.955	0,965	0,969	0,4
3.228.390	0,974	0,975	0,1
3.906.493	0,983	0,987	0,4
3.925.417	0,991	0,987	-0,4
4.311.954	1,000	0,991	-0,9

N = 115

a = 3,424

KIRJALLISUUSVIITTEET

[1] Beard, R. E., Pentikäinen, T. and Pesonen, E. (1984) Risk Theory. Chapman and Hall, London.

[2] Benckert, L.-G. (1962) The Lognormal Model for the Distribution of One Claim. ASTIN Bulletin, Vol. 2, Part 1, 2-23.

[3] Benktander, G. and Segerdahl, C.-O. (1960) On the Analytical Representation of Claim Distributions with Special Reference to Excess of Loss Reinsurance. Transactions of the 16th International Congress of Actuaries, Vol. 1, 626-646.

[4] Bennet, M. C. and Johnson, P. D. (1984) The Treatment of Large Claims when Deciding on a Premium Stucture and on the Relationships Between the Premiums for the Different Groups. Proceedings of the 4 Countries ASTIN-Symposium, Akersloot, 175-202.

[5] Bryson, M. C. (1974) Heavy-Tailed Distributions: Properties and Tests. Technometrics, Vol. 16, No. 1, 61-68.

[6] Cohen, A. C. (1965) Maximum Likelihood Estimation in the Weibull Distribution Based on Complete and on Censored Samples. Technometrics, Vol. 7, No. 4, 579-588.

[7] Cramér, H. (1966) Mathematical Methods of Statistics, Eleventh Printing, Princeton University Press.

[8] Heilmann, W.-R. (1983) Characterizations of Claim Distributions by Reliability Techniques. Blätter der Deutschen Gesellschaft fur Versicherungsmathematik XVI, 13-19.

[9] Hewitt, C. C. and Lefkowitz, B. (1979) Methods for Fitting Distributions to Insurance Loss Data. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Vol. LXVI, 139-160.

[10] Johnson, N. L. and Kotz, S. (1970) Distributions in Statistics: Continuous Univariate Distributions-1. John Wiley&Sons, New York.

[11] Shpilberg, D. C. (1977) The Probability Distribution of Fire Loss Amount, The Journal of Risk and Insurance, Vol. XLIV, No 1, 103-115.

KIITOKSET

Lausun parhaimmat kiitokseni filosofian lisensiaatti Kalevi Loimarannalle työni aihetta koskevasta ehdotuksesta sekä erittäin arvokkaista kommenteista kirjoitustyön kestäessä.

Haluan myös esittää parhaat kiitokseni filosofian tohtori Heikki Bonsdorffille ja filosofian kandidaatti Jarmo Jacobssonille heidän työtäni koskevista arvokkaista kommenteista.