

# Korvausvastuun ennustejakauma bootstrap-menetelmän avulla

Suppea SHV-työ

Sari Ropponen

13.11.2008

## *Sisällysluettelo*

|   |           |
|---|-----------|
| <i>Abstract</i> .....                                       | <i>1</i>  |
| <i>1 Johdanto</i> .....                                     | <i>2</i>  |
| <i>2 Korvausvastuun arviointi</i> .....                     | <i>4</i>  |
| <i>2.1 Korvauskolmio lähtötietona</i> .....                 | <i>4</i>  |
| <i>2.2 Korvausvastuun arviointimenetelmiä</i> .....         | <i>5</i>  |
| 2.2.1 Chain-Ladder -menetelmä .....                         | <i>6</i>  |
| 2.2.2 Poisson-malli ylihajonnalla .....                     | <i>7</i>  |
| <i>3 Ennustevirhe ja varmuuslisän tarve</i> .....           | <i>9</i>  |
| <i>4 Korvausvastuun ennustejakauman muodostaminen</i> ..... | <i>10</i> |
| <i>5 Esimerkki</i> .....                                    | <i>14</i> |
| <i>6 Johtopäätökset</i> .....                               | <i>18</i> |
| <i>Lähteet</i> .....  | <i>19</i> |

## Abstract

For an insured the purpose of an insurance policy is to protect him/her against loss of income if an unlikely event occurs. According to the insurance policy an insurer compensates for the losses arising from the event. Typically there is a delay between the occurrence of the claim and claim payments. However, the insurer is responsible for claim amounts and must set up a reserve in respect of the claims still to be settled. The reserve is called claims reserve.

The idea of claims reserving is to obtain estimates of the future payments due to claims already occurred. As the ultimate level of claim amounts can never be known beforehand, the accuracy of the estimate of the claims reserve, i.e. prediction error, is of a great interest in risk management. A prudential margin is usually reserved in addition to the claims reserve to make sure the obligations to policyholders are met in all circumstances. When assessing the prudential margin it is more of interest to know all possible reserve outcomes, i.e. predictive distribution, in addition to the prediction error. The amount of the claims reserve with prudential margin could then be set to be adequate in, for example, 90 % of all possible outcomes.

This report considers estimating the claims reserve in non-life insurance. Prediction error is also described in the report, as well is discussed assessment of a prudential margin. The model used to estimate the claims reserve is the over-dispersed Poisson model, which is a stochastic model reproducing (under suitable constraints) the chain-ladder reserve estimates. As a stochastic model the over-dispersed Poisson model allows estimating the prediction error, unlike deterministic chain-ladder method. The both methods are described in the report.

As the prediction error and the predictive distribution may not be straightforward to calculate analytically, a two-stage process to approximate the predictive distribution considered by England & Verrall (1998) and England (2002) is described in this report. First bootstrap method is used to estimate the uncertainty caused by the estimation of the claims reserve. Bootstrap method is a particular resampling method which replaces theoretical inferences by repeatedly resampling the original data and making inferences from the resampled data sets (Pinheiro *et al.* 2000). After bootstrapping a simulation is used to obtain outcomes of future payments and to take into account the contingency of the future payments. As a result a large number of possible reserve outcomes are obtained. The values form the predictive distribution of which the prediction error as well as the claims reserve with the prudential margin can be assessed. An example data is used to obtain the predictive distribution according to the process and assessing the prudential margin in addition to the claims reserve.

## 1 Johdanto

Vakuutus sopimusten perusteella vakuutusyhtiölle syntyy velvollisuus korvata vahingosta aiheutuvat kustannukset samalla hetkellä kun vahinko sattuu. Yleensä kuitenkin kestää jonkin aikaa ennen kuin vahinko ilmoitetaan yhtiöön. Lisäksi esimerkiksi korvausten käsittely tai se, että kustannukset yleensäkin syntyvät vasta jonkin ajan kuluttua vahingon sattumisesta, aiheuttavat viiveen korvausten maksun ja vahingon sattumishetken välillä. Viive voi joissain tapauksissa, esimerkiksi eläkkeiden maksun osalta, olla useita vuosikymmeniä. Vakuutusyhtiölle on joka tapauksessa syntynyt velvollisuus korvata vahinko, ja näin ollen jo sattuneiden vahinkojen maksamattomat korvaukset on sisällytettävä tilinpäätöksessä yhtiön velkoihin riippumatta siitä, onko vahinko yhtiön tiedossa vai ei<sup>1</sup>. Tätä velkaa kutsutaan korvausvastuuksi.

Vakuutusyhtiö lain (18.7.2008/521) mukaan ”vastuavelan on aina oltava riittävä siten, että vakuutusyhtiö kohtuudella arvioiden selviytyy vakuutus sopimuksista aiheutuvista velvoitteestaan”<sup>2</sup>. Vakuutusyhtiöllä on oltava turvaavat laskuperusteet, joiden mukaisesti yhtiö laskee vastuavelan määrän, ja lisäksi laissa säädetään, millaisilla varoilla vastuvelka voidaan kattaa. Vakuutuksenottajien edut turvataan näin ollen varmistamalla, että vakuutusyhtiö arvioi korvausvastuunsa mahdollisimman oikean suuruiseksi ja että yhtiöllä on korvausvastuun täyttämiseksi tarvittava määrä varoja riittävän turvallisesti sijoitettuna. Myös yhtiön vakavaraisuuden arviointi edellyttää, että velat on arvioitu mahdollisimman oikein (Jacobsson 1992). Koska korvausvastuu tarkoittaa tuntematonta ja tulevaisuudessa realisoituvaa määrää, jonka yhtiö on velvollinen suorittamaan, on yhtiön riskienhallinnan kannalta tärkeää tietää myös, miten paljon toteutuva korvausvastuu voi vaihdella arvioidusta määrästä. Euroopan Unionissa valmisteltavana olevassa vakavaraisuusvaatimuksia koskevassa direktiivissä, Solvenssi II:ssa, korostuu entisestään se, että yhtiön on oltava tietoinen riskeistään. Yhtenä riskinä on se, riittääkö korvausvastuu sattuneiden vahinkojen korvausten suorittamiseen.

Korvausvastuun laskenta on tulevien korvausten ennustamista, jossa apuna käytetään tiedossa olevia maksettuja korvauksia ja muuta tuleviin korvauksiin liittyvää informaatiota. Lukuun ottamatta vahinkokohtaisesti varattavia korvauksia, korvausvastuu arvioidaan jollekin vakuutusten ryhmälle jonakin tilastollisena keskiarvona. Korvausvastuulle pyritään siis löytämään *estimaatti*, josta käytetään tässä yhteydessä myös nimitystä *ennuste*. Lisäämällä korvausvastuuseen vielä *varmuuslisä* varaudutaan siihen, että vaikka toteutuvat korvaukset vaihtelevat estimaateistaan

<sup>1</sup> Suoriteperusteisen kirjanpito käytännön mukaan meno kirjataan kokonaisuudessaan sen syntymishetkellä.

<sup>2</sup> Korvausvastuun lisäksi vastuavelkaan sisältyy muun muassa vakuutusmaksuvastuu, jolla tarkoitetaan voimassa olevien vakuutus sopimusten tulevien vakuutus tapahtumien suorituksia (VYL 9. luku).

joissain tapauksissa hyvinkin paljon, yhtiö pystyy edelleen selviytymään velvoitteistaan.

Koska korvausvastuu muodostaa merkittävän osan yhtiön veloista, on sen laskemiseksi vuosikymmenien ajan kehitetty useita erilaisia menetelmiä. Osa menetelmistä on *stokastisia* ja osa *deterministisiä*. Deterministisissä menetelmissä korvausvastuu arvioidaan suoraan käytössä olevista tilastoista jonkin algoritmin mukaisesti. Koska algoritmi ei ota huomioon korvausmenon taustalla olevaa satunnaisuutta, ei deterministisillä menetelmillä voida mitata toteutuvan korvausvastuun vaihtelua estimoidusta arvosta. Stokastiset mallit sen sijaan ottavat huomioon korvausvastuun määrään liittyvän satunnaisuuden, jolloin päästään arvioimaan myös tätä vaihtelua. Stokastisissa malleissa korvausten oletetaan noudattavan jotakin tiettyä jakaumaa, jolloin korvausvastuun määräksi asetetaan maksamattomien korvausten *odotusarvo*<sup>3</sup>. Mallin ja käytössä olevien tilastojen sovittamisen seurauksena saadaan estimaatti sekä korvausvastuun odotusarvolle että todellisen korvausvastuun vaihtelulle estimaatistaan. Vaihtelua kutsutaan *ennustevirheeksi* ja sitä mitataan esimerkiksi *hajonnan*<sup>4</sup> avulla. Mallien tarkoitus on kuvata tuntematonta mekanismia, joka tuottaa tilastojen havainnot (Hess & Schmidt 2002).

Koska stokastisilla malleilla voidaan arvioida odotusarvon lisäksi vaihtelevuutta, ne tarjoavat enemmän tietoa korvausvastuun riittävyteen liittyvästä riskistä kuin deterministiset mallit. Toisaalta stokastiset mallit tarjoavat usein vain yhden luvun, ennustevirheen, kuvaamaan vaihtelun määrää, mikä ei välttämättä anna riittävää kuvaa korvausvastuun riittävydestä. Lisätietoa saataisiin esimerkiksi siitä, että voitaisiin määrittellä suurin arvo, jonka korvausvastuu voi saada 75 %:n tai 90 %:n todennäköisyydellä. Esimerkiksi australialainen vahinkovakuutusyhtiö Insurance Australia Group määrittelee korvausvastuun ja varmuuslisän yhteismääräksi arvon, jonka korvausvastuu saa 90 %:n todennäköisyydellä (IAG 2008). Korvausvastuun jakaumasta, *ennustejakaumasta*, saataisiin mainitut korvausvastuun arvot, mutta ennustejakauman laskeminen analyttisesti on useissa stokastisissa malleissa hankalaa. Tietokoneiden laskentatehon ja -nopeuden kasvamisen myötä on sen sijaan tullut mahdolliseksi tuottaa ennustejakauma simuloinnin avulla (England & Verrall 2002). Yhdistämällä *bootstrap-menetelmä* ja *simulointi* voidaan korvata ennustejakauman analyttinen laskeminen ja tuottaa helposti arvio ennustejakaumasta. Ennustevirhe saadaan tällöin ennustejakauman hajontana.

Bootstrap-menetelmä on tilastollinen otantamenetelmä, jossa ideana on korvata teoreettiset päätelmät useasti toistetuilla empiirisillä päätelmillä. Menetelmällä voidaan esimerkiksi tutkia, kuinka paljon estimaatti vaihtelee odotusarvostaan. Tällöin havaittu tilasto korvataan uudella vastaavalla tilastolla, josta estimaatti lasketaan uudelleen samoin kuin alkuperäisestä tilastosta. Kun estimaatti on laskettu uudelleen useasta eri tilastosta, nähdään, kuinka paljon uudelleen lasketut estimaatit poikkeavat alkuperäisestä estimaatista. Poikkeamien perusteella saadaan arvio vaihtelun suuruudelle.

<sup>3</sup> Odotusarvolla tarkoitetaan todennäköisyyksillä painotettua keskiarvoa.

<sup>4</sup> Hajonta vastaa varianssin neliöjuurta. Jakauman tärkeimmät ominaisuudet voidaan ilmaista odotusarvon ja varianssin avulla.

Kiinnostusta simuloinnin hyödyntämiseen korvausvastuun tarkkuuden arvioimisessa on ollut alalla jo pitkään. Esimerkiksi Pentikäinen & Rantala (1992) käyttävät simulointia hyväksi tutkiessaan, millaista epävarmuutta eri tekijät aiheuttavat korvausvastuun arvioimiseen. Solvenssi II:n myötä simuloinnista ja ennustejakauman arvioimisesta on kuitenkin tullut entistä ajankohtaisempi aihe, sillä Solvenssi II mahdollistaa yhtiön omien sisäisten mallien käytön vakavaraisuusvaatimusten laskemisessa. Sisäisten mallien käyttäminen vaatii korvausmenon mallintamista ja lisäksi korvausvastuun riittävyden eli reserviriskin luotettavaa arvioimista. Euroopan komission teettämässä harjoituksissa<sup>5</sup>, joissa on testattu erilaisia tulevia vakavaraisuusvaatimusten laskentatapoja, on viime vuosina vaadittu sellaista pääoman määrää, jolla yhtiö selviää 99,5 %:n todennäköisyydellä yhden vuoden ajan.

Työssä tarkastellaan vahinkovakuutusyhtiön korvausvastuuta maksettujen korvausten perusteella arvioituna. Korvaukset mallinnetaan stokastisella mallilla, jossa oletetaan sattumisvuoden vahingoista vuosittain maksettujen korvausten olevan Poisson-jakautuneita ylihajonnalla (ks. alaluku 2.2.2). Korvausvastuun estimaatteja laskettaessa käytetään hyväksi determinististä chain-ladder -menetelmää, joka tuottaa tietyn rajoituksen saman korvausvastuun estimaatin kuin käytetty stokastinen malli. Korvausvastuulle tuotetaan ennustejakauma bootstrap-/simulointimenetelmällä, ja saadun ennustejakauman avulla tutkitaan korvausvastuun estimaatin tarkkuutta ja varmuuslisän tarvetta.

## 2 Korvausvastuun arviointi

### 2.1 Korvauskolmio lähtötietona

Oletetaan, että vakuutusyhtiön harjoittama vakuutustoiminta on jaoteltu riskeiltään samanlaisiin ryhmiin, joiden sisällä korvausvastuu voidaan arvioida saman mallin avulla, ja tarkastellaan tästä lähtien vain yhtä tällaista ryhmää<sup>6</sup>. Korvausvastuun laskennassa on yleistä esittää ryhmän tiedossa olevat maksetut korvaukset *korvauskolmiona* eli sattumis- ja kehitysjakson mukaan taulukoituna. Käytetään jaksona yhtä vuotta. Jos merkitään sattumisvuotta yleisesti indeksillä  $i$ , on vakuutusyhtiöllä käytössään tieto siitä, kuinka paljon sattumisvuodesta on maksettu korvauksia vuosina  $i, i+1, i+2, \dots$ . Näitä vuosia kutsutaan *kehitysvuosiksi* 1, 2, 3 ja niin edelleen, ja merkitään niitä yleisesti indeksillä  $j$ <sup>7</sup>. (Taylor 2000)

Taulukossa 1 on esimerkki korvauskolmiosta, jossa sattumisvuodet on merkitty yksinkertaisesti luvuilla 1, 2, ..., 6. Sattumisvuosi 1 vastaa vanhinta sattumisvuotta ja 6 tuoreinta havaittua sattumisvuotta. Riippuen siitä, mitä sattumisvuotta tarkastellaan, on

<sup>5</sup> Vuonna 2007 harjoitus QIS 3 (Quantitative Impact Study 3) ja vuonna 2008 QIS 4.

<sup>6</sup> Esimerkiksi henkilövakuutuksessa ja omaisuusvakuutuksessa vahinkojen selviäminen on luonteeltaan niin erilaista, että korvausvastuu on syytä arvioida näissä lajeissa erikseen.

<sup>7</sup> Kehitysvuosi kuvaa korvausten maksun viivettä sattumisvuodesta. Kehitysvuoden, kalenterivuoden ja sattumisvuoden välillä vallitsee yhteys kalenterivuosi = sattumisvuosi + kehitysvuosi - 1 =  $i + j - 1$ .

sille ehtinyt arviointihetkeen, eli kalenterivuoden 6 loppuun, mennessä kertyä yhdestä kuuteen kehitysvuotta. Korvauskolmiossa yhdessä solussa  $(i, j)$  on esitetty sattumisvuoden  $i$  inkrementaaliset korvaukset kehitysvuonna  $j$ . Inkrementaalisilla korvauksilla tarkoitetaan sitä, kuinka paljon sattumisvuoden  $i$  vahingoista on maksettu korvauksia kehitysvuoden  $j$  aikana. Merkitään näitä sattumisvuoden  $i$  inkrementaalisia korvauksia kehitysvuonna  $j$  yleisesti  $C_{ij}$ . Korvauskolmion diagonaalissa näkyy tietyn kalenterivuoden aikana korvauskolmiossa mukana olevien sattumisvuosien vahingoista maksetut korvaukset. Korvauskolmiossa voitaisiin inkrementaalisten korvausten sijaan esittää *kumulatiiviset korvaukset*, jolloin solussa  $(i, j)$  olisi sattumisvuodesta  $i$  kehitysvuoden  $j$  loppuun mennessä maksetut korvaukset yhteensä.

| Sattumis-<br>vuosi $i$ | Kehitys-<br>vuosi $j$ |       |       |     |     |     | Maksetut<br>korvaukset<br>yhteensä |
|------------------------|-----------------------|-------|-------|-----|-----|-----|------------------------------------|
|                        | 1                     | 2     | 3     | 4   | 5   | 6   |                                    |
| 1                      | 1 001                 | 854   | 568   | 565 | 347 | 148 | 3 483                              |
| 2                      | 1 113                 | 990   | 671   | 648 | 422 |     | 3 844                              |
| 3                      | 1 265                 | 1 168 | 800   | 744 |     |     | 3 977                              |
| 4                      | 1 490                 | 1 383 | 1 007 |     |     |     | 3 880                              |
| 5                      | 1 725                 | 1 536 |       |     |     |     | 3 261                              |
| 6                      | 1 889                 |       |       |     |     |     | 1 889                              |

**Taulukko 1.** Esimerkki korvauskolmiosta. Uloin diagonaali kertoo kalenterivuonna 6 maksetut korvaukset sattumisvuosilta 1-6 (kuvassa lihavoidut luvut). Tyhjät solut liittyvät tuleviin kalenterivuosiin.

Jos vahingot selviävät korvauskolmiossa näkyvien kehitysvuosien aikana – taulukon 1 tapauksessa kuudessa vuodessa – voidaan korvausvastuun arvioinnin ajatella tarkoittavan korvauskolmion tyhjien solujen täyttämistä arvioilla. Toisin sanoen pyritään arvioimaan, kuinka paljon tullaan maksamaan korvauksia sattumisvuosien vahingoista tulevina kehitysvuosina, kunnes vahingot ovat kokonaan selvinneet. Yleensä arvioksi määritellään maksamattomien korvausten odotusarvo, jolloin niiden summana saadaan korvausvastuun odotusarvo.

## 2.2 Korvausvastuun arviointimenetelmiä

Yleisimmin tunnettu korvausvastuun laskentamenetelmä lienee chain-ladder-menetelmä, joka on esitelty pääpiirteissään alaluvussa 2.2.1. Deterministisenä menetelmänä sillä ei pystytä arvioimaan, kuinka paljon toteutuvat korvaukset voivat poiketa menetelmällä saaduista ennusteista. Koska arvioitavana on tuntematon ja satunnainen määrä, on riskienhallinnan kannalta kuitenkin tärkeää arvioida myös ennustevirhe ja mahdollisesti koko ennustejakauma. Monet ovatkin yrittäneet löytää chain-ladder -menetelmälle perustelut stokastisen mallin kautta<sup>8</sup>. Renshaw & Verrall (1998) esittelevät erään stokastisen mallin, Poisson-mallin ylihajonnalla, joka tuottaa samat korvausvastuun estimaatit kuin chain-ladder-menetelmä, mutta josta sen

<sup>8</sup> Ks. Hess & Schimdt (2002) ja Mack & Venter (1999).

stokastisuuden vuoksi saadaan myös ennustevirhe. Tämä malli esitellään alaluvussa 2.2.2. Tarkat matemaattiset oletukset ja menetelmien kuvaukset löytyvät muun muassa lähteistä Renshaw & Verrall (1998), England & Verrall (2002, 2006), kun taas tässä työssä pitäydytään menetelmien yleisessä esittelyssä.

### 2.2.1 Chain-Ladder -menetelmä

Perinteinen chain-ladder -menetelmä käyttää kumulatiivista korvauskolmiota lähtötietona ja tuottaa arviot tyhjiille soluille korvauskolmiosta johdettujen *kehityskertoimien* avulla. Kehityskertoimet kuvaavat sitä, miten havaitut kumulatiiviset korvaukset ovat keskimäärin muuttuneet edellisestä kehitysvuodesta  $j-1$  kehitysvuoden  $j$  loppuun mennessä, ja ne lasketaan korvauskolmion kaikille kehitysvuosille lukuun ottamatta ensimmäistä kehitysvuotta. Kehityskertoimet määrittelevät vahinkojen keskimääräisen selviämisen olettaen, että vahingot selviävät korvauskolmiossa näkyvien kehitysvuosien aikana. Koska kaikkien sattumisvuosien oletetaan noudattavan kehityskertoimien mukaista selviämistä, saadaan kehityskertoimien ja arviointihetken kumulatiivisten korvausten avulla arviot tulevien kehitysvuosien kumulatiivisista korvauksista. Menetelmässä oletetaan, ettei tietyn sattumisvuoden korvausmeno vaikuta toisen sattumisvuoden korvausmenoon. Menetelmän heikkoutena on, että viimeisimmän havaitun kalenterivuoden korvaukset vaikuttavat vahvasti erityisesti tuoreimman sattumisvuoden tulevien korvausten ennusteisiin.

Taulukossa 2 on havainnollistettu chain-ladder -menetelmän ideaa taulukon 1 korvauskolmion tapauksessa. Sattumisvuosien 1–5 havaittujen kumulatiivisten korvausten perusteella kehitysvuonna 2 kumulatiiviset korvaukset ovat keskimäärin 1,9-kertaistaistuneet kehitysvuoden 1 kumulatiivisista korvauksista. Näin ollen arvioidaan, että sattumisvuodesta 6, josta on arviointihetkellä tiedossa vain ensimmäinen kehitysvuosi, on toisen kehitysvuoden loppuun mennessä maksettuja korvauksia yhteensä 3 588 ( $=1,9 \cdot 1889$ ). Vastaavasti siirryttäessä kehitysvuodesta 2 kehitysvuoteen 3 kumulatiiviset korvaukset keskimäärin 1,33-kertaistuvat sattumisvuosien 1–4 perusteella. Tästä saadaan sattumisvuodelle 5 ja vastaavasti sattumisvuodelle 6 arviot kehitysvuoden 3 kumulatiivisista korvauksista. Sattumisvuodelle 6 käytetään hyväksi aiempaa kehitysvuoden 2 arviota. Taulukossa 2 on esitetty kaikki kehityskertoimet ja niiden avulla saadut ennusteet kun laskentaa jatketaan edellä esitetyllä tavalla kehitysvuosi kerrallaan. Inkrementaaliset korvaukset saadaan sattumisvuodelle  $i$  peräkkäisten kehitysvuosien kumulatiivisten korvausten erotuksena. Ennustettujen tulevien inkrementaalisten korvausten summana saadaan puolestaan ennuste koko korvausvastuulle.



| Sattumis-<br>vuosi <i>i</i> | Kehitys-<br>vuosi <i>j</i> |              |              |              |              |              | Korvaus-<br>vastuu |
|-----------------------------|----------------------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------|--------------------|
|                             | 1                          | 2            | 3            | 4            | 5            | 6            |                    |
| 1                           | 1 001                      | 1 855        | 2 423        | 2 988        | 3 335        | 3 483        | 0                  |
| 2                           | 1 113                      | 2 103        | 2 774        | 3 422        | 3 844        | <b>4 015</b> | 171                |
| 3                           | 1 265                      | 2 433        | 3 233        | 3 977        | <b>4 454</b> | <b>4 652</b> | 675                |
| 4                           | 1 490                      | 2 873        | 3 880        | <b>4 781</b> | <b>5 354</b> | <b>5 592</b> | 1 712              |
| 5                           | 1 725                      | 3 261        | <b>4 333</b> | <b>5 339</b> | <b>5 980</b> | <b>6 245</b> | 2 984              |
| 6                           | 1 889                      | <b>3 588</b> | <b>4 768</b> | <b>5 875</b> | <b>6 579</b> | <b>6 871</b> | 4 982              |
| <i>Kehityskertoimet</i>     |                            | 1,90         | 1,33         | 1,23         | 1,12         | 1,04         |                    |

Korvausvastuu kaikista sattumisvuosista yhteensä 10 524

**Taulukko 2.** Chain-ladder- menetelmällä arvioidut tulevat kumulatiiviset korvaukset (lihavoidut luvut).

### 2.2.2 Poisson-malli ylihajonnalla

Poisson-malli ylihajonnalla on stokastinen malli, jossa ideana on mallintaa inkrementaalisten korvausten  $C_{ij}$  odotusarvo (Renshaw 1994)<sup>9</sup>. Odotusarvon lisäksi mallissa määritellään inkrementaalisten korvausten  $C_{ij}$  varianssi, joka kuvaa korvausten vaihtelua niiden odotusarvosta. Varianssi saadaan inkrementaalisten korvausten odotusarvosta kertomalla odotusarvo tuntemattomalla hajontaparametrilla  $\phi$ , joka on sama kaikille inkrementaalisille korvauksille. Mallissa ylihajonta tarkoittaa sitä, ettei varianssin tarvitse olla yhtä suuri kuin odotusarvo, minkä vuoksi se sopii paremmin kuvaamaan todellisia ilmiöitä kuin perinteinen Poisson-malli ilman ylihajontaa (Heikkinen 2005). Mallissa oletetaan, etteivät sattumisvuodesta  $i$  kehitysvuonna  $j$  maksetut korvaukset vaikuta toisen sattumisvuoden tai kehitysvuoden inkrementaalisten korvausten määrään – tosin sanoen, inkrementaalisten korvausten  $C_{ij}$  oletetaan olevan keskenään riippumattomia.

Sovittamalla malli korvauskolmion kanssa saadaan mallin parametreille estimaatit ja näistä inkrementaalisten korvausten odotusarvojen estimaatit<sup>10</sup>. Summaamalla tuleviin kehitysvuosiin liittyvät estimaatit saadaan puolestaan korvausvastuun odotusarvolle estimaatti. Mallin ylihajonta ei vaikuta parametrien eikä siis inkrementaalisten korvausten odotusarvojen estimaatteihin, vaan lisää niiden hajontaa (England & Verrall

<sup>9</sup> Poisson-malli ylihajonnalla (over-dispersed Poisson model) on yleistetty lineaarinen malli, jossa odotusarvo yhdistetään parametrien summaan linkkifunktion avulla. Mallissa käytetään logaritmista linkkifunktiota siten, että  $\log(m_{ij}) = \mu + \alpha_i + \beta_j$ , missä  $m_{ij} = E(C_{ij})$  (inkrementaalisten korvausten odotusarvo).

<sup>10</sup> Parametreille voidaan laskea kvasiuskottavuusestimaatit, minkä vuoksi odotusarvon ja varianssin lisäksi inkrementaalisille korvauksille ei tarvitse määritellä varsinaista jakaumaa. Kvasiuskottavuusestimaateilla päästään eroon Poisson-jakaumaan liittyvästä vaatimuksesta, että korvausten pitää olla positiivisia kokonaislukuja. Ks. mm. Renshaw (1994) ja Renshaw & Verrall (1998).

2006). Ennustevirheen arvioimiseksi on näin ollen estimoitava myös tuntematon hajontaparametri  $\phi$  korvauskolmiosta<sup>11</sup>. Edellä kuvatun Poisson-mallin parametrien estimoimiseksi ja mallin sopivuuden mittaamiseksi on olemassa tietokoneohjelmia kuten SAS ja R, minkä vuoksi mallin soveltaminen on helppoa (England & Verrall 1998).

Vaikka Poisson-mallia ylihajonnalla ei voida varsinaisesti sanoa stokastiseksi chain-ladder -menetelmäksi muun muassa erilaisten mallioletusten takia<sup>12</sup>, on mallilla ja chain-ladder -menetelmällä paljon yhteistä. Mallissa esimerkiksi inkrementaalisten korvausten odotusarvon muunnos on chain-ladder -tyyppinen siinä mielessä, että jokaiselle sattumisvuodelle  $i$  ja kehitysvuodelle  $j$  on oma parametrinsa (England & Verrall 2002). Näin ollen sekä sattumisvuosi että kehitysvuosi vaikuttavat inkrementaalisten korvausten odotusarvoon aivan kuten chain-ladder -menetelmässä<sup>13</sup>. Kehitysvuoden parametrien avulla voidaan kuvata vahinkojen selviämistä, jonka oletetaan chain-ladder -menetelmän tapaan olevan sama kaikille sattumisvuosille.

Jotta malli tuottaa samat inkrementaalisten korvausten estimaatit kuin chain-ladder-menetelmä, on korvauskolmiossa kaikkien sattumisvuosien kumulatiivisten korvausten oltava arviointihetkellä positiivisia. Lisäksi samasta kehitysvuodesta havaittujen inkrementaalisten korvausten summan on oltava positiivinen, ja tämän pitää päteä kaikille kehitysvuosille. Sen sijaan kaikkien inkrementaalisten korvausten  $C_{ij}$  ei tarvitse erikseen olla positiivisia, vaikkakin malli tuottaa aina positiiviset estimaatit korvausten odotusarvoille. (England & Verrall 1998)

Kuvassa 1 on tiivistetty korvausvastuun arvioinnin vaiheet kun käytetään stokastista mallia.

---

<sup>11</sup> Estimaattina käytetään Pearsonin hajontaparametria, ks. England & Verrall (2006) Appendix.

<sup>12</sup> Ks. Mack & Venter (1999)

<sup>13</sup> Chain-ladder -menetelmässä ennusteen arvo riippuu kehitysvuodesta kehityskertoimen välityksellä ja sattumisvuodesta arviointihetkellä havaittujen kumulatiivisten korvausten kautta.

#### Korvausvastuun arviointi

- Määritellään käytettävä malli (esim. Poisson-malli ylihajonnalla)
- Estimoidaan mallin parametrit (myös hajontaparametri  $\phi$ )
- Lasketaan parametrien estimaattien avulla estimaatit inkrementaalisten korvausten odotusarvoille (myös tuleville inkrementaalisille korvauksille)
- Tarkistetaan mallin sopivuus vertaamalla mallin antamia estimaatteja havaittuihin korvauksiin
- Lasketaan sattumisvuoden estimaattien summana sattumisvuoden korvausvastuu
- Lasketaan sattumisvuosittaisten korvausvastuiden summana koko korvausvastuu.

**Kuva 1.** Korvausvastuun arvioinnin eri vaiheet, kun käytetään stokastista mallia (mukailtu Pinheiron *et al.* 2000 esittämistä vaiheista).

### 3 Ennustevirhe ja varmuuslisän tarve

Koska tulevia korvauksia ei voida tietää varmuudella etukäteen, mallilla saatuun korvausvastuun arvioon liittyy aina jonkinasteisen virhe (Pantzopoulou 2003). Korvausvastuun arvioinnin jälkeen seuraava askel on kehittää arvio ennustevirheestä eli siitä, kuinka tarkasti mallin antamat estimaatit ennustavat toteutuvia korvauksia (England & Verrall 2002). Ennustevirheen suuruuden perusteella voidaan puolestaan arvioida, tarvitseeko korvausvastuuseen lisätä varmuuslisä, jotta yhtiö pystyy suoriutumaan siltä vaadituista korvauksista. Ennustevirhe voidaan esittää muodossa<sup>14</sup>

$$\text{ennustevirhe} = \text{prosessivirhe} + \text{estimointivirhe}.$$

Prosessivirheellä tarkoitetaan mallissa korvauksille oletettua vaihtelevuutta, ja se ottaa huomioon puhtaan satunnaisuuden aiheuttaman eron todellisten korvausten ja niiden odotusarvon välillä. Mallissa oletettu ylihajonta lisää prosessivirheen suuruutta. Estimointivirhe puolestaan tarkoittaa sitä, miten korvausvastuun odotusarvon estimaatti vaihtelee, jos mallin parametrien estimointi voitaisiin toistaa useita kertoja siten, että mallin sovituksessa käytetty korvauskolmio olisi joka kerta hieman erilainen, mutta edelleen saman mekanismin tuottama kuin mikä tuotti alkuperäisen korvauskolmion (England & Verrall 2002). Ennustevirheen ollessa suuri voi toteutuva korvausvastuu poiketa ennustetusta arvostaan huomattavasti, mikä antaa syyn varmuuslisän varaamiseen.

<sup>14</sup> Ennustevirhe saadaan ennustejakauman varianssin neliöjuurena. Ennustejakauman varianssi voidaan esittää estimointivarianssin ja prosessivarianssin summana, kuten Renshaw (1994) osoittaa.

Tarvittavan varmuuslisän suuruuden arvioimisessa pelkkä ennustevirhe ei välttämättä riitä. Hyödyllistä olisi esimerkiksi tietää, missä rajoissa toteutuva korvausvastuu voi vaihdella estimoidusta arvostaan tietyllä todennäköisyydellä, esimerkiksi 95 %:n todennäköisyydellä. Mitä pienempi ennustevirhe on, sitä kapeampi väli on ja sitä tarkempi on vastaavasti korvausvastuun estimaatti<sup>15</sup>. Toisaalta voidaan tarkastella korvausvastuun arvoa, jota pienempi korvausvastuu on esimerkiksi 75 %:n tai 90 %:n todennäköisyydellä, ja arvioida tätä kautta, kuinka suuri varmuuslisä korvausvastuun odotusarvoon pitäisi lisätä. Mitä pienempi ennustevirhe on, sitä lähempänä odotusarvoa mainitut korvausvastuun arvot ovat. Riippumatta käytettävästä arviointitavasta tavoitteena on varmistaa, että korvausten saajien edut on turvattu ja että tulevat korvaukset pystytään suorittamaan riittävän suurella todennäköisyydellä. (Ks. esim. Pinheiro *et al.* [2000] ja Björkwall *et al.* [2008])

Ennustevirheen arvioimiseksi riittäisi arvioida erikseen prosessivirhe ja estimointivirhe. Usein ennustevirheen arviointi onnistuu esimerkiksi tietokoneohjelmien avulla samalla, kun estimoidaan mallin parametrit (England & Verrall 1998). Sen sijaan varmuuslisän tarkempaan arvioimiseen tarvittavat todennäköisyydet ja korvausvastuun arvot vaativat korvausvastuun jakauman eli ennustejakauman määrittämistä. Koska korvausvastuu muodostuu inkrementaalisten korvausten summasta, joilla jokaisella on oma jakaumansa<sup>16</sup>, on ennustejakauman määrittäminen analyyttisesti erittäin raskasta (England & Verrall 2002). England & Verrall (1998) ja England (2002) esittelevät bootstrap-menetelmän ja simuloinnin yhdistelmän, jolla ennustejakauma voidaan arvioida helposti ja nopeasti ilman raskasta analyyttistä laskentaa. Bootstrap-menetelmällä saadaan arvio estimointivirheelle, kun taas simuloinnissa otetaan huomioon prosessivirhe (England 2002). Menetelmän tuloksena saadun ennustejakauman hajonta vastaa näin ollen ennustevirhettä, mutta samalla ennustejakaumasta saadaan arviot muistakin edellä esitetyistä todennäköisyyksistä ja korvausvastuun arvoista (England & Verrall 2002).

## 4 Korvausvastuun ennustejakauman muodostaminen

Bootstrap-/simulointimenetelmä muodostuu bootstrap-vaiheesta ja simulointivaiheesta, jotka toistetaan peräkkäin useita kertoja. Vaiheiden toistamisen tuloksena saadaan joukko korvausvastuun mahdollisesti toteutuvia arvoja, joiden avulla muodostetaan ennustejakaumasta arvio. Muun muassa England & Verrall (2002, 2006) esittelevät menetelmän yksityiskohtaiset vaiheet, kun taas tässä työssä keskitytään menetelmän yleiseen kuvaamiseen.

<sup>15</sup> Välin suuruuteen vaikuttaa olennaisesti myös jakauman parametrit ja niille estimoidut arvot.

<sup>16</sup> Kaikkien inkrementaalisten korvausten odotusarvo ja varianssi riippuvat sattumisvuodesta  $i$  ja kehitysvuodesta  $j$ .

## Bootstrap-vaihe

Korvauskolmiosta voidaan saada vain yhdet estimaatit mallin parametrien arvoista ja näin ollen myös tulevien inkrementaalisten korvausten odotusarvoista. Jotta estimointivirhettä päästään arvioimaan, muodostetaan bootstrap-vaiheessa alkuperäisistä havaituista korvauksista uusi korvauskolmio, josta lasketaan uudet estimaatit mallin parametreille ja tulevien inkrementaalisten korvausten odotusarvoille. Tällöin nähdään, miten estimaattien arvo muuttuu kun lähtötietona oleva tilasto muuttuu, ja saadaan käsitys estimointivirheen suuruudesta.

Uusien korvauskolmioiden muodostamisen taustalla on ajatus siitä, että alkuperäisten havaintojen paikkoja voidaan ikään kuin vaihtaa keskenään. Korvauskolmion tapauksessa tämä tarkoittaisi sitä, että inkrementaaliset korvaukset solussa  $(i, j)$  (ks. taulukko 1) olisivat yhtä hyvin voineet esiintyä jossakin toisessa solussa – toisin sanoen korvausten arvon ei pitäisi riippua sattumis- tai kehitysvuodesta. Koska tämä ei kuitenkaan päde<sup>17</sup>, käytetään hyväksi *mukautettuja jäännöksiä*. Mukautetuilla jäännöksillä tarkoitetaan havaittujen inkrementaalisten korvausten ja mallin tuottaman estimoidun arvon erotusta skaalattuna siten, ettei erotuksen arvo riipu sattumis- tai kehitysvuodesta<sup>18</sup>. Jäännösten paikkaa vaihdetaan poimimalla satunnaisesti uusi jäännösten joukko siten, että jokaisella jäännöksellä on yhtäläinen mahdollisuus tulla valituksi ja sama jäännös voidaan valita useita kertoja (England & Verrall 1998). Poimintamenetelmää kutsutaan otannaksi takaisinpanolla, ja sitä on havainnollistettu kuvassa 2. Uuteen joukkoon poimitaan niin monta jäännöstä kuin alkuperäisessä korvauskolmiossa on havaintoja. Tämän jälkeen lasketaan sellaiset inkrementaaliset korvaukset, joilla alkuperäisten estimaattien kanssa olisi saatu poimitut jäännökset (England & Verrall 1998). Lasketut korvaukset muodostavat uuden korvauskolmion.

<sup>17</sup> Poisson-mallissa ylihajonnalla oletetaan inkrementaalisten korvausten odotusarvon riippuvan sekä sattumisvuodesta  $i$  että kehitysvuodesta  $j$ .

<sup>18</sup> Jäännöksinä käytetään skaalattuja Pearsonin jäännöksiä

$$r_{ij} = \frac{C_{ij} - \hat{m}_{ij}}{\sqrt{\hat{\phi} \hat{m}_{ij}}},$$

missä  $\hat{m}_{ij}$  on inkrementaalisten korvausten odotusarvon  $m_{ij}$  estimaatti ja  $\hat{\phi}$  hajontaparametrin estimaatti (ks. England & Verrall 2006). Jäännökset mukautetaan ottamalla huomioon havaintojen ja estimoitavien parametrien lukumäärät. Mukautuksen vuoksi menetelmällä saatu estimointivarianssi on verrattavissa analyttisesti laskettuun estimointivarianssiin. Ks. esim. England & Verrall (1998, 2006). Pinheiro *et al.* (2000) ehdottavat puolestaan standardoitujen Pearsonin jäännösten käyttöä.

| Alkuperäiset jäännökset |                  |       | Poimitut jäännökset    |                  |       |
|-------------------------|------------------|-------|------------------------|------------------|-------|
| Sattumis-<br>vuosi $i$  | Kehitysvuosi $j$ |       | sattumis-<br>vuosi $i$ | Kehitysvuosi $j$ |       |
|                         | 1                | 2     |                        | 1                | 2     |
| 1                       | 2,04             | -0,35 | 1                      | -0,12            | 2,04  |
| 2                       | 0,41             | -0,12 | 2                      | -0,55            | -0,35 |
| 3                       | -0,55            |       |                        | -0,35            |       |
| 4                       |                  |       | 4                      |                  |       |

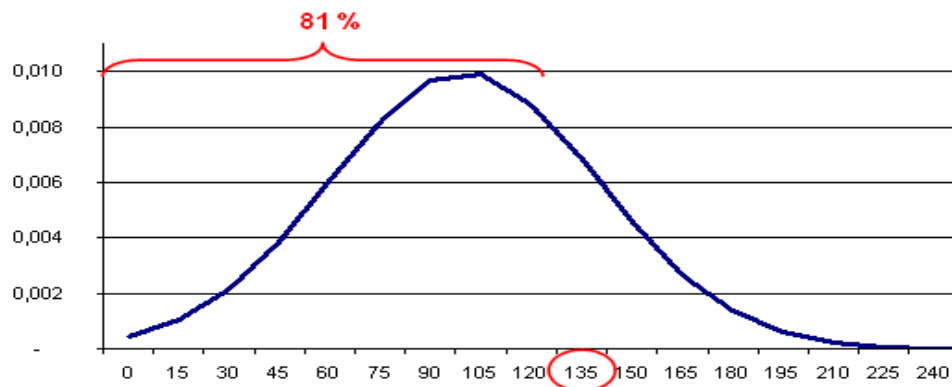
**Kuva 2.** Uuden jäännösten joukon muodostaminen (otanta takaisinpanolla). Satunnainen poiminta voidaan suorittaa tietokoneella.

Kun malli sovitetaan uuden korvauskolmion kanssa, saadaan uudet inkrementaalisten korvausten odotusarvojen estimaatit ja nähdään, kuinka paljon ne poikkeavat alkuperäisistä estimaateista. Estimaattien laskemisessa voidaan hyödyntää sitä, että chain-ladder -menetelmä ja Poisson-malli ylihajonnalla tuottavat samat inkrementaalisten korvausten estimaatit – estimaatit voidaan nimittäin laskea yksinkertaisemmin chain-ladder -menetelmällä mallin parametrien estimoinnin sijaan (England & Verrall 2006).

### Simulointivaihe

Bootstrap-vaiheessa tuotetaan uudet estimaatit tulevien inkrementaalisten korvausten odotusarvoille ja näiden summana korvausvastuun odotusarvolle. Ennustejakauman muodostamiseksi halutaan kuitenkin tietää, mistä todellisista arvoista ja todennäköisyyksistä korvausvastuun odotusarvo muodostuu. Näin ollen simulointivaiheessa poimitaan kaikille tuleville inkrementaalisisille korvauksille satunnaiset arvot jakaumista, jotka niille on mallissa oletettu (England 2002). Jakaumien odotusarvoina ovat inkrementaalisten korvausten odotusarvoille bootstrap-vaiheessa lasketut uudet estimaatit. Koska varianssin on oletettu olevan suhteessa odotusarvoon, määräytyy myös jakauman varianssi estimoidun odotusarvon mukaan<sup>19</sup>. Poimitut arvot kuvaavat korvausten mahdollisesti toteutuvia arvoja, ja niiden summana saadaan korvausvastuulle eräs mahdollisesti toteutuva arvo. Kuvassa 3 on havainnollistettu, miten jakaumasta poimitaan satunnaisesti havainto – kuvan mukainen poiminta tehdään kaikille tuleville inkrementaalisisille korvauksille.

<sup>19</sup> England (2002) laskee varianssin käyttämällä hajontaparametrille alkuperäistä estimaattia. Sen sijaan Björkwall *et al.* (2008) mainitsevat, että myös tuntematon hajontaparametri pitäisi estimoida uudelleen.



**Kuva 3.** Simulointi jakaumasta. Kuvassa on tullut poimituksi arvo 135, jota pienemmäksi korvaukset jäävät 81 %:n todennäköisyydellä. Jakauman korkeus kertoo, miten todennäköinen korvauksen määrä on – mitä korkeammalla jakauma on, sitä todennäköisempi määrä on.

Simulointi suoraan Poisson-jakaumasta ylihajonnalla on ongelmallista muun muassa sen vuoksi, ettei mallissa tarvitse rajoittua vain positiivisiin kokonaislukuihin kuten perinteisessä Poisson-jakaumassa (England 2002). Simulointi voidaan kuitenkin tehdä esimerkiksi toisesta jakaumasta, jossa varianssi ja odotusarvo ovat samat kuin alkuperäisessä mallissa on oletettu. Tällöin ennustejakauma muoto muuttuu odotusarvon ja varianssin säilyessä samana. (England 2002). Esimerkiksi jakauman valinnalla voidaan pyrkiä estämään se, että simulointi voi tuottaa joillekin sattumisvuosille negatiivisia korvausvastuita.

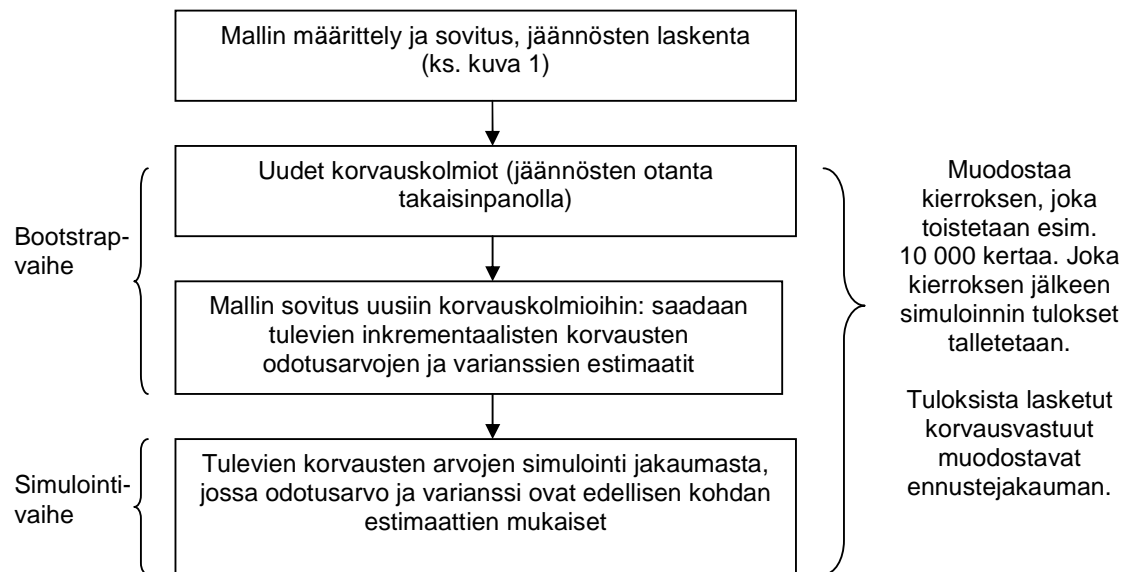
### Ennustejakauma

Bootstrap-vaihe ja sen perään suoritettu simulointivaihe muodostavat yhden kierroksen, joka toistetaan useita kertoja, esimerkiksi 10 000 kertaa. Joka kierroksen päätteeksi talletetaan simuloitujen tulevien korvausten perusteella lasketut sattumisvuosittaiset korvausvastuut ja koko korvausvastuu. Kun kaikki kierrokset on suoritettu, on tuotettu yhtä monta realisaatiota korvausvastuun todellisesta mutta tuntemattomasta arvosta kuin kierroksiakin on tehty. Realisaatiot antavat hyvän arvion ennustejakauman muodosta ja korvausvastuun toteutuvien arvojen todennäköisyyksistä. Esimerkiksi arvo, jota pienemmäksi 75 % kierrosten tuloksena saaduista korvausvastuun arvoista on jäänyt, vastaa arvoa, jota pienemmäksi toteutuvan korvausvastuun arvioidaan jäävän 75 %:n todennäköisyydellä. Kuvassa 6 on esimerkki bootstrap-/simulointimenetelmän tuloksista ja niiden muodostamasta ennustejakaumasta. Realisaatioiden keskiarvon pitäisi olla lähellä chain-ladder -menetelmän korvausvastuuarviota (England 2002).

Bootstrap-/simulointikierrosten aikana bootstrap-vaiheessa muodostetaan useita uusia korvauskolmioita ja lasketaan niiden perusteella uudet korvausten odotusarvojen estimaatit. Uusien estimaattien vaihtelu alkuperäisistä estimaateista kuvaa estimoinnin tuomaa virhettä ennustetun arvon ja toteutuvan arvon välillä. Simulointivaiheessa puolestaan otetaan huomioon prosessivirhe poimimalla satunnainen havainto suoraan korvausten jakaumasta. Kun simulointi on suoritettu tuhansia kertoja, voidaan ajatella kaikkien mahdollisten arvojen tulleen poimituksi siinä määrin kuin niiden

esiintyminen on todellisuudessa todennäköistä. Ennustevirheen suuruudesta kertoo se, kuinka laajalle ennustejakauman muodostavat korvausvastuun arvot jakautuvat keskiarvostaan. Ennustevirheen suuruus saadaan tulosten empiirisestä varianssista (England 2002).

Kuvassa 4 on yhteenveto bootstrap-/simulointimenetelmästä.



**Kuva 4.** Ennustejakauman tuottaminen bootstrap-/simulointimenetelmällä (England & Verrall 2006).

## 5 Esimerkki

Arvioidaan taulukon 1 esittämän (kuvitteellisen) vakuutuslajin korvausvastuu ja varmuuslisän tarve bootstrap-/simulointimenetelmällä tuotetun ennustejakauman avulla. Mallinnetaan korvauskolmion inkrementaaliset korvaukset alaluvussa 2.2.2 esitettynä Poisson-mallilla ylihajonnalla ja sovitetaan aluksi malli korvausten odotusarvojen estimaattien saamiseksi. Saadut estimaatit sattumisvuosien havaituille korvauksille on esitetty taulukossa 3, kun taas todelliset arvot ovat taulukon 1 mukaiset.



| Vahingon<br>sattumis-<br>vuosi <i>i</i> | Kehitysvuosi <i>j</i> |       |     |     |     |     |
|---|-----------------------|-------|-----|-----|-----|-----|
|   | 1                     | 2     | 3   | 4   | 5   | 6   |
| 1                                       | 958                   | 861   | 598 | 561 | 357 | 148 |
| 2                                       | 1 104                 | 993   | 689 | 647 | 412 |     |
| 3                                       | 1 279                 | 1 150 | 799 | 749 |     |     |
| 4                                       | 1 537                 | 1 383 | 960 |     |     |     |
| 5                                       | 1 717                 | 1 544 |     |     |     |     |
| 6                                       | 1 889                 |       |     |     |     |     |

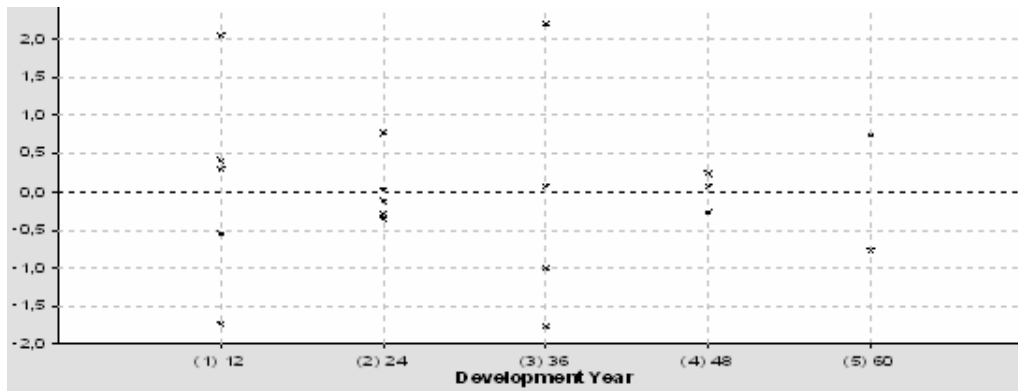
**Taulukko 3.** Mallilla saadut estimaatit havaittujen inkrementaalisten korvausten odotusarvoille.

Taulukossa 4 on esitetty estimaattien (taulukko 3) ja niitä vastaavien havaittujen korvausten (taulukko 1) perusteella lasketut mukautetut jäännökset kehitysvuosittain. Esimerkiksi kehitysvuodelle 3 on neljä jäännöstä, sillä neljälle sattumisvuodelle on arviointihetkeen mennessä havaittu kyseinen kehitysvuosi. Sen lisäksi, että jäännöksiä tarvitaan bootstrap-vaiheessa, voidaan niiden avulla tarkastella mallin sopivuutta. Mitä sopivampi malli on, sitä pienemmät ovat jäännökset ja sitä paremmin malli ”ennustaa” menneet vuodet. Mallinnettavaa ilmiötä hyvin kuvaavalla mallilla mukautettujen jäännösten keskiarvon tulisi olla nolla, eli jäännösten arvojen tulisi esiintyä satunnaisesti nollan molemmin puolin. Lisäksi jäännösten arvoista 95 %:lla poikkeaminen keskiarvosta saisi olla enintään  $\pm 2$ .<sup>20</sup> Kuvassa 5 on esitetty taulukon 4 jäännökset niin, että mallin sopivuutta voidaan arvioida.

| Vahingon<br>sattumis-<br>vuosi <i>i</i> | Kehitysvuosi <i>j</i> |       |       |       |       |      |
|---|-----------------------|-------|-------|-------|-------|------|
|   | 1                     | 2     | 3     | 4     | 5     | 6    |
| 1                                       | 2,04                  | -0,35 | -1,77 | 0,25  | -0,78 | 0,00 |
| 2                                       | 0,41                  | -0,12 | -1,00 | 0,08  | 0,74  |      |
| 3                                       | -0,55                 | 0,77  | 0,07  | -0,27 |       |      |
| 4                                       | -1,74                 | 0,02  | 2,20  |       |       |      |
| 5                                       | 0,29                  | -0,30 |       |       |       |      |
| 6                                       | 0,00                  |       |       |       |       |      |

**Taulukko 4.** Mukautetut jäännökset.

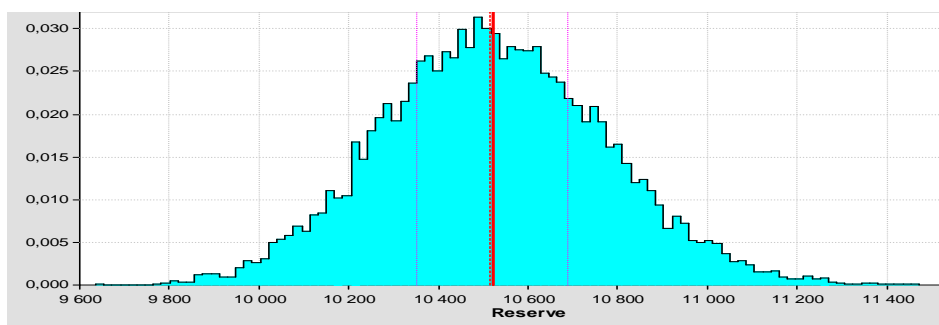
<sup>20</sup> Ks. mm. England & Verrall (2006). Sopivalle mallille skaalattujen/mukautettujen jäännösten oletetaan olevan kutakuinkin  $N(0,1)$ -jakautuneita.



**Kuva 5.** Jäännösten arvot. Vaaka-akselilla on kehitysvuosi sekä vuosina että kuukausina ja pystyakselilla on jäännöksen arvo.

Ennustejakauman muodostamiseksi suoritetaan 10 000 bootstrap-/simulointikierrosta. Jäännöksille tehdään näin ollen 10 000 kertaa otanta takaisinpanolla muodostaen yhtä monta uutta korvauskolmiota ja estimaattia kaikille tulevien inkrementaalisten korvausten odotusarvoille. Kaikkien tulevien korvausten jakaumista on tällöin yhtä monta estimaattia kuin on odotusarvojenkin estimaatteja. Simulointivaiheessa tuleville korvauksille poimitaan satunnainen arvo jokaisesta tällaisesta jakaumasta. Poimitut arvot kuvaavat korvausten mahdollisesti toteutuvia arvoja eivätkä enää niiden odotusarvoja. Koska Poisson-jakaumasta ylihajonnalla ei voida suoraan simuloida, suoritetaan simulointi normaalijakaumasta, jossa odotusarvo ja hajonta ovat samat kuin Poisson-mallissa ylihajonnalla.

Kuvassa 6 on esitetty bootstrap-/simulointikierrosten tulosten perusteella saatu korvausvastuun ennustejakauma. Mitä korkeampi palkki korvausvastuun arvon kohdalla on, sitä useammin arvo esiintyi kierrosten tuloksena eli sitä todennäköisemmäksi arvon toteutuminen katsotaan. Kuvassa 6 on punaisella viivalla esitetty tulosten keskiarvo 10 523, joka on bootstrap-/simulointimenetelmän estimaatti korvausvastuun odotusarvolle ja lähellä chain-ladder -menetelmän korvausvastuun estimaattia (ks. taulukko 2). Koska korvausvastuun arvot keskittyvät lähelle keskiarvoaan, on ennustevirhekin pieni.



**Kuva 6.** Korvausvastuun ennustejakauma 10 000:n bootstrap-/simulointikierroksen perusteella.

Taulukossa 5 on bootstrap-/simulointikierrosten tulokset sattumisvuosittain. Sattumisvuodelle voidaan laskea korvausvastuu ja muodostaa ennustejakauma samalla tavalla kuin koko korvausvastuullekin, mutta ottamalla huomioon vain kyseiseen sattumisvuoteen liittyvät tulevien inkrementaalisten korvausten tulokset. Taulukossa 5 on myös laskettu ennustevirhe suhteessa odotusarvoon.

| Sattumisvuosi   | Maksetut korvaukset | Korvausvastuun odotusarvo | Ennustevirhe | Ennustevirheen osuus odotusarvosta |
|-----------------|---------------------|---------------------------|--------------|------------------------------------|
| 1               | 3 483               | 0                         | 0            | 0%                                 |
| 2               | 3 844               | 171                       | 19           | 11%                                |
| 3               | 3 977               | 675                       | 38           | 6%                                 |
| 4               | 3 880               | 1 711                     | 65           | 4%                                 |
| 5               | 3 261               | 2 984                     | 94           | 3%                                 |
| 6               | 1 889               | 4 982                     | 157          | 3%                                 |
| <b>Yhteensä</b> | <b>20 334</b>       | <b>10 523</b>             | <b>249</b>   | <b>2%</b>                          |

**Taulukko 5.** Bootstrap-/simulointikierrosten tuloksista lasketut korvausvastuun odotusarvot, ennustevirheet ja ennustevirheen osuus odotusarvosta.

Kuvasta 6 nähdään, että korvausvastuun mahdollisesti toteutuvat arvot ovat melko tasaisesti jakautuneet odotusarvon ympärille eivätkä esimerkiksi painottuneet erityisesti odotusarvoa suurempiin arvoihin<sup>21</sup>. Näin ollen ei ole syytä olettaa korvausvastuun toteutuvan nimenomaan odotusarvoaan suurempana, vaan korvausvastuu voi yhtä hyvin jäädä odotusarvoaan pienemmäksi. Kuvassa on esitetty punaisella katkoviivalla korvausvastuun arvot, joita pienempiä ovat 25 % ja 75 % kierrosten tuloksina saaduista korvausvastuun arvoista. Tästä voidaan arvioida, että 75 %:n todennäköisyydellä korvausvastuu on pienempi kuin 10 690. Jotta yhtiö selviytyy 75 %:n todennäköisyydellä maksettavaksi tulevista korvauksista, olisi varmuuslisä tällöin 167 korvausvastuun odotusarvon ollessa 10 523. Jos halutaan varata turvaavammin, voidaan valita korvausvastuun ja varmuuslisän yhteismääräksi esimerkiksi 10 845, jota pienemmäksi 90 % tuloksina saaduista korvausvastuista on jäänyt. Tällöin varmuuslisän määräksi tulisi 322.

Jos ennustevirheen osuus korvausvastuun odotusarvosta on hyvin suuri, ei ole järkevää määritellä varmuuslisän ja korvausvastuun yhteismäärää suoraan edellä esitetyllä tavalla. Tällöin on selvitettävä syyt ennustevirheen suuruudelle ja tarkistettava käytetyn mallin sopivuus. Esimerkiksi England & Verrall (1998) suosittelevat käyttämään korvausvastuun ennusteen luotettavuutta arvioitaessa sattumisvuosittaisia ennustevirheitä koko korvausvastuun ennustevirheen sijaan. Taulukosta 5 nähdään, että esimerkkitapauksessa ennustevirheen osuus odotusarvosta jää erittäin pieneksi myös sattumisvuosittain tarkasteltuna, sillä käytetty aineisto on erittäin säännönmukaista.

<sup>21</sup> Symmetrisyys johtuu tässä tapauksessa siitä, että simulointi suoritettiin normaalijakaumasta. Toisella jakaumalla tulokset voivat painottua esimerkiksi odotusarvoa pienempiin määriin.

## 6 Johtopäätökset

Korvausvastuu on vakuutusyhtiön velkaa vakuutuksenottajille vahingoista, jotka ovat sattuneet, mutta joista ei ole maksettu kaikkia korvauksia. Korvausvastuu pyritään yleensä arvioimaan odotusarvon tasolle, ja se merkitään taseessa yhtiön velkoihin varmuuslisällä korotettuna. Odotusarvo estimoidaan jollakin sopivalla korvausvastuun laskentamenetelmällä, joista tunnetuin lienee deterministinen chain-ladder -menetelmä. Chain-ladder -menetelmällä ei kuitenkaan pystytä arvioimaan ennustevirhettä eli sitä, kuinka tarkasti menetelmän tuottama korvausvastuun arvio ennustaa toteutuvaa korvausvastuuta. Stokastisissa malleissa sen sijaan otetaan huomioon korvausvastuun satunnaisuus, ja näin ollen stokastisilla malleilla saadaan odotusarvon estimaatin lisäksi arvio estimaatin tarkkuudesta. Eräs stokastinen malli, jolla saadaan samat korvausvastuun estimaatit kuin perinteisellä chain-ladder -menetelmällä tietyin rajoituksin, on Poisson-malli ylihajonnalla.

Pelkkä ennusteen tarkkuuden mittaaminen ei välttämättä riitä, jos halutaan tietää tarkemmin, millainen riski korvausvastuun toteutumiseen liittyy ja kuinka suuri varmuuslisä pitäisi varata, jotta yhtiö pystyy varmemmin täyttämään velvollisuutensa. Tällaista tarkastelua varten tarvitaan ennustejakauma, josta saadaan hyvä arvio bootstrap-/simulointimenetelmällä. Menetelmä koostuu kahdesta vaiheesta: ensin tuotetaan uudet estimaatit ennustettavien inkrementaalisten korvausten odotusarvoille (bootstrap-vaihe), ja tämän jälkeen simuloidaan inkrementaalille korvauksille toteutuva arvo jakaumasta, jonka odotusarvona on ensimmäisessä vaiheessa saatu odotusarvo (simulointivaihe) (England 2002). Koska Poisson-malli ylihajonnalla tuottaa samat inkrementaalisten korvausten odotusarvojen estimaatit kuin chain-ladder-menetelmä (tietyin rajoituksin), voidaan laskentaa helpottaa laskemalla inkrementaalisten korvausten odotusarvojen estimaatit chain-ladder -menetelmällä sen sijaan, että ne saataisiin estimoiduilla mallin parametreilla. Simuloimalla havaintoja korvausten jakaumasta lopullisen korvausvastuun määrän saamiseksi vältetään ainakin osittain se chain-ladder -menetelmän ongelma, että tuoreimman sattumisvuoden korvausvastuu riippuu vain yhdestä havainnosta (Björkwall *et al.* 2008).

Bootstrap-/simulointimenetelmästä saadaan luotettava arvio ennustejakaumalle, jos käytettävissä olevassa korvauskolmiossa on riittävän monta sattumis- ja kehitysvuotta. Laajasta korvauskolmiosta saadaan nimittäin bootstrap-vaiheeseen kattava jäännösten joukko, josta voidaan poimia useita mahdollisimman erilaisia otoksia uusien korvauskolmioiden ja estimaattien tuottamiseksi simulointivaihetta varten. Vastaavasti myös laajalle korvauskolmiolle on oleellista tehdä riittävän monta bootstrap-/simulointikierrosta, jotta menetelmä on suoraan verrattavissa alla olevaan malliin. Tällöin kaikkien arvojen voidaan ajatella tulevan edustetuiksi siinä määrin kuin niiden esiintyminen on todennäköistä, eikä tulos painotu vain tiettyihin arvoihin.<sup>22</sup>

Bootstrap-/simulointimenetelmää voidaan soveltaa myös muille malleille kuin Poisson-mallille ylihajonnalla. Itse asiassa Poisson-mallia on totuttu käyttämään lähinnä vahinkojen lukumäärien mallintamisessa, kun taas esimerkiksi Mackin malli<sup>23</sup> voisi olla parempi korvausten mallintamisessa. Jotta menetelmän tulokset kuvaavat valittua

<sup>22</sup> Ks. mm. England & Verrall (2006) ja Björkwall *et al.* (2008)

<sup>23</sup> Mack's model, ks. mm. England & Verrall (2006).

mallia, on bootstrap-vaiheen otannassa käytettävät jäännökset valittava malliin sopiviksi (England & Verrall 1998). Riippuen siitä, mitä mallia lopulta käytetään ja tuottaako se samat estimaatit kuin chain-ladder -menetelmä, ei bootstrap-/simulointimenetelmässä voida aina oikaista käyttämällä chain-ladder -menetelmää (England & Verrall 2006). Käytettävä malli on puolestaan valittava siten, että sen oletukset sopivat mallinnettavalle ilmiölle. Väärin tehdyt tai sopimattomat mallioletukset näkyvät nimittäin myös ennustevirheessä ja bootstrap-/simulointimenetelmällä tuotetussa ennustejakaumassa, jotka jäävät myös virheellisiksi. Vastaavasti ennen mallin valitsemista ja sovittamista on varmistuttava käytettyjen tilastojen laadusta. Menetelmän tuloksia tulkittaessa on esimerkiksi oltava käsitys siitä, miten hyvin maksettujen korvausten perusteella voidaan yleensäkin tehdä päätelmiä tulevaisuudessa maksettavaksi tulevista korvauksista. Vaikka malli sopisikin kuvaamaan havaittuja korvauksia, ei se välttämättä pysty ennustamaan tulevia korvauksia, jos esimerkiksi korvausprosessissa on tapahtunut muutoksia (Pantzopoulou 2003).

Kun malli on valittu sopivaksi ja simuloiteja suoritetaan riittävän monta, saadaan bootstrap-/simulointimenetelmällä realistinen arvio korvausvastuun ennustejakaumasta. Ennustejakauman avulla saadaan tarkempi käsitys siitä, minkä suuruisia korvauksia yhtiölle voi tulevaisuudessa tulla maksettavaksi jo sattuneista vahingoista, joista se on vastuussa. Ennustejakaumasta voidaan arvioida korvausvastuun ja varmuuslisän yhteismäärää ja tätä kautta varautua paremmin korvausvastuun riittävyteen liittyviin riskeihin. Bootstrap-/simulointimenetelmän hyvä puoli on se, että sitä on helppo soveltaa sen yksinkertaisuuden vuoksi (England 2002).

## Lähteet

BJÖRKWALL, S., HÖSSJER, O. & OHLSSON, E. (2008): *Non-parametric and parametric bootstrap techniques for arbitrary age-to-age development factor methods in stochastic claims reserving*. Research Report 2008:2, Mathematical Statistic, Stockholm University (ISSN 1650-0377).

ENGLAND, P. (2002): *Addendum to "Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving"*. Insurance: Mathematics and Economics, 31, 461–466.

ENGLAND, P. & VERRALL, R. (1998): *Standard Errors of Prediction in Claims Reserving: A Comparison of Methods*, Workshop. General Insurance Convention & ASTIN Colloquium.

ENGLAND, P. & VERRALL, R. (2002): *Stochastic Claims Reserving in General Insurance*. Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries.

ENGLAND, P. & VERRALL, R. (2006): *Predictive Distributions of Outstanding Liabilities in General Insurance*. Annals of Actuarial Science, 1, II, 221–270.

HEIKKINEN, J. (2005): *Yleistetyt lineaariset mallit*. Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin Yliopisto, 6.9.–21.10.2005.

HESS, K. & SCHMIDT, K. (2002): *A Comparison of Models for the Chain-Ladder Method*. Insurance: Mathematics and Economics, 31, 351-364.

IAG (2008): *Annual report 2008*.

[http://www.iag.com.au/results/reports/2008/media/iag\\_annual\\_report\\_2008.pdf](http://www.iag.com.au/results/reports/2008/media/iag_annual_report_2008.pdf)

JACOBSSON, J. (1992): *Vakuutusyhtiön korvausvastuusta*. SHV-työ, Helsinki 31.8.1992.

MACK, T. & VENTER, G. (1999): *A Comparison of Stochastic Models that Reproduce Chain Ladder Reserve Estimates*. ASTIN Colloquium, Tokyo, Japan.

PANTZOPOULOU, E. (2003): *The Concept of Reserving and Reserving Methodologies in General Insurance*. Dissertation, Department of Actuarial Science, City University, London.

PENTKÄINEN & RANTALA (1992): *A Simulation Procedure for Comparing Different Claims Reserving Methods*. ASTIN Bulletin, Vol. 22, No. 2, 191-216.

PINHEIRO, P. J. R., ANDRARE E SILVA, J. M. & CENTENO, M. D. L. (2000): *Bootstrap Methodology in Claims Reserving*. Working Paper no. 11/00, Centre for Applied Maths to Forecasting & Economic Decision, Lisbon, Portugal.

RENSHAW, A. (1994): *On the Second Moment Properties and the Implementation of Certain GLIM Based Stochastic Claims Reserving Models*. Actuarial Research Paper No. 65, Department of Actuarial Science and Statistics, City University, London.

RENSHAW, A. & VERRALL, R. (1994): *A Stochastic Model Underlying the Chain-Ladder Technique*. British Actuarial Journal, 4, IV, 903-923.

TAYLOR, G. (2000): *Loss Reserving – An Actuarial Perspective*. Kluwer Academic Publishers, Boston / Dordrecht / London.