

KORON JA KUOLLEISUUDEN
STOKASTINEN VAIHTELU



SHV-harjoitustyö

7.10.1992

Pentti Soininen

ABSTRACT

In this paper it is studied how the stochastic variance of the forces of interest and mortality change the formulae of discounting, prologation and term insurance derived with the deterministic model. The stochasticity of the mortality of Finnish life insurance has only a negligible effect on the formulae, but the stochasticity of the force of interest has a large effect especially in the long discounting and prologation periods. This stochasticity increases the average discounting and the prologation factor, the more so as the variance of the force of interest and discounting period grow.

The expected values have been derived by integrating over all the forces of interest on the infinite-dimensional Banach space of the continuous functions. The used Gauss measure of the space represents a process where the force of interest on a certain moment of time is normally distributed, the average being the force of interest of the previous moment when a finite number of moments is studied. When the number grows infinitely one gets the required expected value. The result is based on the functional analysis. In addition the integration with respect to the gamma measure on finite-dimensional spaces is studied. However, no respective result as for the Gauss measure can be derived for the gamma measure on any infinite-dimensional space.

The force of mortality is a different kind of process than the force of interest and therefore it cannot be integrated with respect to the same Gauss measure. The expected values containing the mortality can be more easily derived than those for the force of interest. However, the derived formulae are more complex.

The above-mentioned results for the force of interest and mortality can be compared to the expected values derived by stochastic differential equations. In the comparison it is found what kind of processes the forces are in the theory of the stochastic differential equations. At the same time an interpretation of the formula for the term insurance is developed.

SISÄLTÖ

MERKINTÖJÄ

JOHDANTO	1
1. TODENNÄKÖISYYS BANACH - AVARUUDESSA	3
2. GAUSSIN MITTA	7
3. AIKAKORKO	13
3.1. KORKOTUVUUS JAKAUTUNUT NORMAALISTI	13
3.2. VERTAILU STOKASTISEN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖN RATKAISUUN	16
3.3. GAMMAJAKAUMA	17
4. ELINKORKO	20
4.1. DISKONTTAUS SUOMALAISELLE LASKUPERUSTEKUOLLEISUUDELLA	22
5. KUOLEMANVARATURVA	24
6. PROLOGNOINTI	25
YHTEENVETO	27
LIITE: FUNKTIONAALIANALYYSIN TERMINOLOGIAA	28
KIRJALLISUUS	30

MERKINTÖJÄ

Jos f on jakautunut jakauman F mukaisesti, merkitään $f \div F$.

Jos aiemmin esiintymätön funktio f halutaan määritellä funktion g avulla, merkitään $f \equiv g$.

Olkoon (X, t) topologinen avaruus. B on funktori, joka liittää topologiseen avaruuteen sen Borel-joukot eli $B(X)$ on joukkoperheen t generoima σ -algebra.

JOHDANTO

Deterministisessä teoriassa diskonttaustekijä on

$$(0.1) \quad D(\delta, \mu, x, x+T) = \exp - \int_0^T (\delta(t) + \mu(x+t)) dt .$$

Tämän käyttö tarkkana diskonttaustekijänä edellyttää koko ajalta tarkkaa tietoa sekä korkoutuvuudesta että kuolevuudesta. Kuitenkin vaikka korkoutuvuuden δ keskiarvon käyttäytymiselle olisi tarkka malli, korkoutuvuus vaihtelee satunnaisesti keskiarvonsa ympärillä. Korkoutuvuutta voidaan käytännössä mitata lähes jatkuvasti. Kuolevuus μ eroaa korkoutuvuudesta siten, että sitä ei pystytä mittaamaan jatkuvasti. Populaation koon mukaan kuolevuus on havaittu vuoden tai viiden vuoden ikäryhmissä ja interpoloitu jatkuvaksi funktioksi. Eri vuosina kustakin ikäryhmästä saadaan erilaisia kuolevuuksia ja siten kunkin ikäryhmän kuolevuuden jakauma.

Edellä oleva diskonttaustekijä on johdettu vastuuvelan V Thielen differentiaaliyhtälöstä

$$(0.2) \quad V'(t) = (\delta(t) + \mu(x+t)) V(t) + \dots$$

Stokastisen differentiaaliyhtälön teorialla on sama lähtökohta, mutta se lisää yhtälöön korkoutuvuudelle ja kuolevuudelle satunnaispoikkeamina Brownin liikkeit W_δ ja W_μ

$$(0.3) \quad V'(t) = (\delta(t) + W_\delta(t) + \mu(x+t) + W_\mu(t)) V(t) + \dots$$

ja tämä yhtälö ratkaistaan.

Tässä työssä lähtökohta on kuitenkin toinen. Thielen differentiaaliyhtälöstä (0.2) ratkaistun diskonttaustekijän (0.1) arvo riippuu siitä, miten korkoutuvuus ja kuolevuus kehittyvät ajan mukana. Kutakin satunnaista funktioparia (δ, μ) vastaa jokin diskonttaustekijän arvo $D(\delta, \mu, x, x+t)$. Täten diskonttaustekijä on satunnaismuuttuja. Sen momentteja pystytään laskemaan integroimalla sitä parien (δ, μ) muodostaman funktioavaruuden jonkin todennäköisyysmitan suhteen.

Ääretönulotteisten avaruuksien integointiteoriaa on käsitelty tässä työssä käyttäen lähteenä pääasiassa Laurent Schwartzin kirjaa [1]. Se käsittelee integrointia mielivaltaisessa topologisessa avaruudessa ja siten sen lähestymistapa on liian yleinen tämän esityksen kannalta, johon riittää vain mitat Banach-avaruudessa. Schwartzin esityksestä onkin karsittu tämän työn kannalta epäoleellisia topologisen avaruuden käsitteiden määritelmiä ja ominaisuuksia. Kaksi muuta tässä työssä käytettyä teosta, jotka käsittelevät integrointia ääretönulotteisessa avaruudessa, on ollut Skorohodin [2] sekä Ledoux ja Talagrandin [3]. Ne puolestaan ovat tarvittavilta osin tämän työn kannalta liian suppeita eivätkä anna kaikkia tarvittavia vastauksia. Näiden kolmen teoksen ymmärtämiseksi pitää hallita funktionaalianalyysiä siinä määrin kuin sitä esitetään missä tahansa funktionaalianalyysin, topologian ja mitta- ja integraatioteorian alkeiskurssilla ja lisäksi siten kuin sitä on esittänyt esimerkiksi Kari Ylinen Turun yliopiston luentosarjassaan, joka on sisältänyt mitta- ja integraatioteoriaa topologisissa avaruuksissa [4] ja topologisia vektoriavaruuksia [5].

Tosin tästä työstä voi olla hyötyä myös sellaiselle, joka ei viitsi selvittää, mistä kaikesta teoriassa on kyse. Tällainen lukija voi huoletta hypätä ensimmäisen luvun yli ja lukea toisestakin vain merkinnät. Teorian esityksen jälkeen sen sovellukset ovat hyvin laskennallisia ja ne ovat hallittavissa tavallisen analyysin tiedoin.

Tämän työn tarkastelukulma on yksi vakuutus, jolloin maksun ajankohtaa voidaan pitää sovittuna. Jos tarkastelukulmaksi valittaisiin yhtiön näkökulma, pitäisi maksun tuloajankohtakin olla satunnaissuure. Tämä lähtökohta on esimerkiksi Norbergin artikkelissa [6]. Tämän näkökohdan lisääminen tämän työ näkökulmaan on teoreettisesti - ei välttämättä laskennallisesti - yksinkertaista, jos oletetaan, että maksu, korkoutuvuus ja kuolevuus ovat keskenään riippumattomia satunnaissuureita.

1. TODENNÄKÖISYYS BANACH - AVARUUDESSA

Määritelmä 1.1. Olkoon X Banach-avaruus. Avaruuden X todennäköisyyksmitta P Borel- σ -algebrassa $B(X)$ on Radonin todennäköisyys(mitta), jos jokaista lukua $\epsilon > 0$ ja mitallista joukkoa $Y \in B(X)$ kohti on olemassa sellainen avaruuden X kompakti joukko $K \subset Y$, että

$$(1.1) \quad P(X - K) < \epsilon.$$

Eri lähtökohdista lähtien Radonin mittoja tutkitaan esityksissä [1], [3] ja [4]. Ylisen [4] esityksestä on huomattava, että se rajoittuu lokaalisti kompakteihin Hausdorffin avaruuksiin, joita sovellusosassa tutkittavat avaruudet eivät ole. Mutta Schwartz toteaa ([1], s.60), että oletus on näennäisesti liian vahva ja se voidaan korvata lievemällä oletuksella, että avaruus on täysin säännöllinen, joita sovellusosan avaruudet puolestaan ovat. Tämä korvausmahdollisuus perustuu ensinnäkin siihen, että jokainen täysin säännöllinen avaruus X voidaan upottaa kompaktiin avaruuteen avoimeksi joukoksi Stone-Čechin kompaktifikaatiolla [7], ja että kompaktin avaruuden avoin joukko on lokaalisti kompakti; sekä toiseksi siihen, että avaruuden X ja sen Stone-Čechin kompaktifikaation alijoukkoon X keskittyneiden mittojen välillä on bijektiivinen vastaavuus. Täten kompaktifikaatiossa ei synny uusia mittoja. Siten Ylisen esityksen tulokset ovat käytettävissä tässä työssä.

Olkoot X ja Y mitta-avaruuksia ja f mitallinen kuvaus $X \rightarrow Y$ sekä P avaruuden X mitta. $f(P)$ on avaruuden Y mitta, jonka arvo joukolle $A \in B(Y)$ on $(f(P))(A) = P(f^{-1}(A))$.

Olkoon jatkossa I suunnattu joukko ja $i \rightarrow X_i$, $i \in I$, vähenevä verkko Banach-avaruuden suljettuja aliavaruuksia.

Merkitään luonnollista surjektiota $X \rightarrow X/X_i$, $x \rightarrow x + X_i$, merkinäällä π_i aina, kun $i \in I$. Olkoon X_j , $j \in I$, toinen suljettu aliavaruus, joka sisältyy avaruuteen X_i , eli $X_j \subseteq X_i$. Kuvaus π_{ij} määritellään kuvauksena $X/X_j \rightarrow X/X_i$, $x + X_j \rightarrow x + X_i$. Tällöin selvästi $\pi_i = \pi_{ij} \circ \pi_j$, kun $i \leq j$.

Määritelmä 1.2. Olkoon X Banach-avaruus, $(X_n)_{n \in I}$ vähenevä verkko avaruuden X äärelliskodimensioisia suljettuja aliavaruuksia ja P_n tekijäavaruuden X/X_n Borel- σ -algebrassa $B_n = B(X/X_n)$ määritelty todennäköisyys. Jos $m \leq n$ eli $X_m \supseteq X_n$ ja on voimassa yhteensopivuusehto $P_m = \pi_m(P_n)$, sanotaan perhettä $(P_n, X/X_n)_{n \in I}$ tai lyhyemmin vain kuvausta $(P_n)_{n \in I}$ sylinteritodennäköisyys(mitaksi).

Selvitetään termin sylinteritodennäköisyys alkuperä. Joukon $A \subseteq X$ sanotaan olevan sylinterijoukko, jos on olemassa Banach-avaruuden X sellainen äärelliskodimensionen suljettu aliavaruus X_i ja $B \subseteq X/X_i$, että $A = \pi_i^{-1}(B)$. Tällöin sylinteri A on ne avaruuden X vektorit a , joilla $a + X_i = B$. Joukkoa B nimitetään joukon A poikkileikkaukseksi tai kannaksi. Määritellään sylinterille A "todennäköisyysmitta" $P(A) = P_i(B)$ eli sylinterin "mitta" on sen poikkipinta-ala. Yhteensopivuusehdon avulla voidaan todeta helposti, että $P(A)$ ei riipu parista (X_i, B) . Edellä lainausmerkit korostavat sitä, että P ei välttämättä ole mitta siinä mielessä kuin kyseistä käsitettä käytetään mitta- ja integraatioteoriassa.

Todetaan, että edellisen määritelmän sylinteritodennäköisyys määrittelee projektiivisen systeemin todennäköisyysavaruuksia

$\{ (X/X_i, B_i, P_i, \pi_{ij}) \mid i, j \in I \}$ ([8], s.14). Toteamiseksi vaaditaan, että seuraavat kolme ehtoa toteutuvat:

- (i) $\pi_{ij}^{-1}(B_i) \subseteq B_j$, kun $i \leq j$, koska π_{ij} on jatkuva.
- (ii) $\pi_{ik} = \pi_{ij} \circ \pi_{jk}$, kun $i \leq j \leq k$ eli $X_i \supseteq X_j \supseteq X_k$. Tämä seuraa suoraan kuvausten π_{nm} määritelmästä.
- (iii) $P_i = \pi_{ij}(P_j)$ sisältyy sylinteritodennäköisyyden määritelmään.

Schwartz käyttää po. systeemille lisäadjektiivia tarkka ([1], s.74).

Luonnollinen kysymys on, milloin on olemassa Banach-avaruudessa X Radonin todennäköisyys, josta saadaan äärelliskodimensioisten tekijäavaruuksiensa todennäköisyydet luonnollisella surjektiolla eli kaavalla $\pi_n(P) = P_n$. Seuraava teoreema antaa välttämättömän ja riittävän ehdon.

Teoreema 1.3. (Prohorov) Olkoon X Banach-avaruus ja

$\{ (X/X_i, B_i, P_i, \pi_{ij}) \mid i, j \in I \}$ projektiivinen systeemi todennäköisyysavaruuksia. Välttämätön ja riittävä ehto sille, että on ole-

massa avaruuden X sellainen Radonin todennäköisyys P , että $\pi_n(P) = P_n$ aina, kun $n \in I$, on, että jokaista lukua $0 < \epsilon \leq 1$ kohti on olemassa sellainen avaruuden X kompakti joukko K_ϵ , että $P_n(\pi_n K_\epsilon) \geq 1 - \epsilon$ aina, kun $n \in I$. Jos verkko $(X_i)_{i \in I}$ on sellainen, että kuvaukset $(\pi_n)_{n \in I}$ erottavat avaruuden X pisteet, P on yksikäsitteinen.

Todistus. Yleisessä lokaalisti konveksissa Hausdorffin avaruudessa Schwartz ([1], s.81) ja Hilbertin avaruudessa eräs versio Skorohod ([2], s.5). ■

Tällaisenaan tämä teoreema ei ole kovin helposti sovellettavissa, mutta on keskeinen teorian kehittelyn kannalta ja antaa käsityksen Radonin todennäköisyyden olemassaolosta ja sen keskittyneisyydestä. Seuraava määritelmä erittelee erilaisia keskittymisen tyyppisiä.

Määritelmä 1.4. Olkoon X Banach-avaruus, $(P_n, X/X_n)_{n \in I}$ sen sylinteritodennäköisyys, $A \in B(X)$ ja $0 < \epsilon \leq 1$.

(a) Sanotaan, että $(P_n)_{n \in I}$ on sylinterisesti keskittynyt lukuun ϵ asti joukkoon A , jos $P_n(\pi_n A) \geq 1 - \epsilon$ jokaisella $n \in I$.

(b) Se on litteästi* keskittynyt lukuun ϵ asti joukkoon A , jos $P_n(\pi_n A) \geq 1 - \epsilon$ jokaisella suljetulla hypertasolla X_n .

(c) Olkoon Σ kokoelma Borel- σ -algebran $B(X)$ joukkoja. Sylinteritodennäköisyys on keskittynyt kokoelmaan Σ sylinterisesti (litteästi), jos jokaista $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen $A \in \Sigma$, että $(P_n)_{n \in I}$ on sylinterisesti (litteästi) keskittynyt lukuun ϵ asti joukkoon A .

Seuraava lause antaa riittävän ehdon Radonin todennäköisyyden olemasololle sylinterisesti keskittyneisyyden avulla.

Lause 1.5. Olkoon $(P_n)_{n \in I}$ refleksiivisen Banach-avaruuden X sylinteritodennäköisyys, joka on sylinterisesti keskittynyt avaruuden X palloihin. Silloin se määrittelee Radonin todennäköisyyden avaruudessa X .

Todistus. Schwartz ([1], s.204). ■

* Termi on suomennettu Ledouxin ja Talagrandin termistä flat concentration. Schwartz käyttää termiä scalar concentration. Koska hypertasoa vastaa yksikäsitteinen funktionaali, termien sisällöt ovat samat, mutta termi litteä havainnollisempi.

Tämä lause on kuitenkin liian heikko. Esimerkiksi sylinteritodennäköisyys, josta saadaan Gaussin todennäköisyys jokaiseen avaruuden X äärellisulotteiseen aliavaruuteen, ei ole sylinterisesti keskittynyt palloihin, sillä jokaisella $R > 0$

$$(1.2) \quad \left(\int_{-R}^R \exp \left(-\frac{1}{2} t^2 \right) dt \right)^n \rightarrow 0,$$

kun dimensio $n \rightarrow \infty$, joten koska jokainen pallo sisältyy johonkin kuution $[-R, R]^n$, tarvittavaa palloakaan ei löydy. Tästä huolimatta ko. sylinteritodennäköisyys määrittelee Radonin todennäköisyyden. Edellisestä lausekkeesta (1.2) näkyy, että ko. sylinteritodennäköisyys on litteästi keskittynyt palloihin ja siten myös kompakteihin joukkoihin, sillä litteästi keskittyneisyyden ehdossa riittää olla $n = 1$, joten valitsemalla R tarpeeksi suureksi saadaan integraali mielivaltaisen lähelle ykköstä.

Seuraava lause antaakin Radonin todennäköisyyden olemassaololle jatkuvien funktioiden avaruudessa ehdon litteästi keskittyneisyyden avulla. Sitä ennen määritellään kuitenkin uusi suppenemiskäsite.

Määritelmä 1.6. Olkoon X täysin säännöllinen topologinen avaruus ja (P_n) verkko avaruuden X äärellisiä Radonin mittoja. Sanotaan, että (P_n) suppenee kapeasti (narrowly) kohti äärellistä Radonin mittaa P , jos $P_n(F)$ suppenee kohti lukua $P(F)$ aina, kun F on jatkuva ja rajoitettu funktio $X \rightarrow R$. Määritelmän mukaan kapea topologia on karkein topologia, jonka suhteen äärellisten Radonin mittojen muodostaman vektoriavaruuden $M^1(X)$ verkkojen suppeneminen on pisteittäistä suppenemista rajoitetuissa funktioissa. Näinollen avaruuden $M^1(X)$ nolla-alkion kapean topologian mukainen ympäristökanta muodostuu joukoista $U(F_1, \dots, F_k; \epsilon) = \{ \mu \mid \mu \in M^1(X), |\mu(F_i)| < \epsilon, 1 \leq i \leq k \}$, jossa $\epsilon > 0$ ja $F_1, \dots, F_k$ ovat jatkuvia ja rajoitettuja funktioita $X \rightarrow R$.

Lause 1.7. Olkoon K kompakti topologinen avaruus, $C(K)$ siinä jatkuvien funktioiden Banach-avaruus tasaisen suppenemisen topologian suhteen (kaava (2.5)), $(P_n)_{n \in I}$ sen sylinteritodennäköisyys, A toinen suunnattu joukko ja $(p_a)_{a \in A}$ sellainen verkko avaruuden $C(K)$ projektioita suljetuille aliavaruuksille, joka suppenee tasaisesti jokaisessa avaruuden $C(K)$ kompaktissa joukossa kohti kyseisen kom-

paktin joukon identiteettikuvausta. Jos $(P_n)_{n \in I}$ on litteästi keskittynyt avaruuden $C(K)$

(a) tasaisen suppenemisen suhteen kompakteihin alijoukkoihin tai
 (b) konvekseihin ja heikosti kompakteihin alijoukkoihin,
 niin $(P_n)_{n \in I}$ määrittelee Radonin todennäköisyyden P avaruudessa $C(K)$ s.j.v.s.k. verkko Radonin todennäköisyyksiä $(p_\alpha(P))_{\alpha \in A}$ suppenee kapeasti kohti jotain Radonin mitta Q . Tällöin $P = Q$.

Todistus. P on määritelty sivulla 4 määritelmän 1.2 jälkeen. Schwartz on esittänyt lauseen yleisille topologisille avaruuksille ([1], s.253). ■

Edellinen lause ei ole niinkään hyödyllinen Radonin todennäköisyyden olemassaoloa todistettaessa, vaan integraalia laskettaessa silloin, kun muuta kautta tiedetään, että Radonin todennäköisyys P on olemassa. Tällöin nimittäin kapea suppeneminen merkitsee, että

$$(1.4) \quad \lim_{\alpha \in A} \int_{X_\alpha} F(f) d(p_\alpha(P)(f)) = \int_X F(f) dP(f)$$

aina, kun $F: C(K) \rightarrow \mathbb{R}$ on jatkuva ja rajoitettu. Jos Radonin todennäköisyys on olemassa, sen integraalit saadaan raja-arvoina äärellisulotteisissa avaruuksissa lasketuista todennäköisyyksistä. Raja-arvo kannattaa muodostaa käyttäen suunnatun joukon alijonoa.

2. GAUSSIN MITTA

2.1 Merkintöjä. Käytetään seuraavia merkintöjä.

$$(2.1) \quad \begin{aligned} T &\in \mathbb{R}^+, \\ K &= [0, T], \\ t_{ni} &= i T/2^n, \quad n \in \mathbb{N} \text{ ja } i = 0, 1, \dots, 2^n = N, \\ \Omega_n &= \{ t_{ni} \mid i = 0, \dots, 2^n \}, \\ C(K) &= X = \text{välillä } K \text{ jatkuvat reaalfunktiot}, \end{aligned}$$

Reaaliluvun T merkitys tässä työssä on, että se edustaa ajanhetkeä, josta diskonttaus suoritetaan nykyhetkeen 0 . Välin K jakopisteet Ω_n jakavat jakopisteiden Ω_{n-1} määrittämät osavälit siten, että kukin osaväli jaetaan kahteen yhtäsuureen osaväliin. Tässä esityksessä korkoutuvuus katsotaan jatkuvaksi funktioksi välillä K , vaikka se voi olla mahdollisesti hyvinkin voimakkaasti heilahteleva kuten Brownin liike. Toinen mahdollisuus olisi valita korkoutuvuusfunktio jonkin ehdon täyttäväksi mitalliseksi funktioksi. Kumpikin valinta on puolustettavissa reaalisaatiota ajatellen; onhan kumpikin vain approksimaatio todellisuudesta, jossa korkoutuvuus havaitaan ja määrätään vain äärellisen monta kertaa.

Avaruuden X projektio määritellään jokaiselle välin K äärelliselle osajoukolle $\Omega = \{ 0=t_0, t_1, \dots, t_{n-1}, t_n=T \}$, missä $t_{i-1} < t_i$, $i = 1, \dots, n$. Olkoon $f \in X$. Projektio $p_\Omega f$ on joukon $\{ (t, f(t)) \mid t \in \Omega \}$ pisteet yhdistävä murtoviiva

$$(2.2) \quad p_\Omega: f \rightarrow p_\Omega f = [t \rightarrow \frac{f(t_i) - f(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}}(t - t_{i-1}) + f(t_{i-1})],$$

kun $t \in [t_{i-1}, t_i]$. Merkitään

$$(2.3) \quad X_\Omega = \{ p_\Omega f \mid f \in X \},$$

joka on äärellisulotteinen ja $\dim X_\Omega = n$, kun alkuarvoa $f(0)$ pidetään kiinteänä. Erityisesti merkitään

$$(2.4) \quad p_{\Omega_n} = p_n \quad \text{ja} \quad X_{\Omega_n} = X_n.$$

$C(K) = X$ on Banach-avaruus normin

$$(2.5) \quad \|f\|_\infty = \sup_{t \in K} |f(t)|$$

suhteen. Tämän normin määräämää topologiaa kutsutaan myös tasaisen suppenemisen topologiaksi. Toinen topologia, jota avaruudessa X käytetään on heikko topologia $\sigma(X, X')$ eli karkein topologia, jonka suhteen kaikki kuvaukset $\mu' \in X'$, $f \rightarrow \int_K f(t) d\mu(t)$ ovat jatkuvia,

missä μ on välin K Radonin mitta (Rieszin esityslause). Radonin mittojen kannalta on samantekevää, kumpaa näistä topologioista

käytetään, sillä kummankin topologian suhteen avaruuden X Radonin mitat, mitalliset joukot ja niiden mitat ovat samat ([1], s.162).

2.2 Gaussin mitta ääretönulotteisessa avaruudessa. Määritellään kuvaus J kaavalla

$$(2.6) \quad J: L_2(K) \rightarrow X, \quad g \rightarrow \left[t \rightarrow \int_0^t g(u) du \right].$$

Kuvaus on hyvin määritelty ja itse asiassa $J(g)$ on jopa absoluutisesti jatkuva [9]. Merkitään

$$(2.7) \quad H = J(L_2(K)).$$

Koska $J(g)' = g$ Lebesguen mitan suhteen melkein kaikkialla (m.k.) [9], J on isomorfismi avaruuksien $L_2(K)$ ja H välillä. Avaruudessa H voidaan määritellä sisätulo

$$(2.8) \quad (f, g) = \int_K f'(t) g'(t) dt = (J^{-1}(f), J^{-1}(g)).$$

Koska $L_2(K)$ on Hilbertin avaruus, niin myös H on.

Jokaisessa avaruuden H äärellisulotteisessa avaruudessa H_0 , $\dim H_0 = d$, voidaan määritellä Gaussin mitta

$$(2.9) \quad \exp -\pi |x|^2 dx,$$

jossa $|\cdot|$ on euklidinen normi avaruudessa H_0 ja dx Lebesguen mitta. Nämä riippuvat siitä, millaista isomorfisimia $H_0 \rightarrow \mathbb{R}^d$ tarkastellaan. Schwartz todistaa ([1], s.364), että on olemassa sellainen Radonin mitta G avaruudessa X ns. Wiener-Lévy'n mitta, joka projisoituna avaruuden H äärellisulotteisiin aliavaruuksiin on Gaussin mitta (2.9). Yksiulotteisen tiheysfunktion (2.9) odotusarvo on nolla ja varianssi $1/2\pi$. Eksponentissa olevan kertoimen kiinnittäminen luvuksi $-\pi$ ei ole oleellista. Se tehtiin, jotta eksponentin kerroin olisi avaruuden dimensiosta riippumaton.

2.3 Gaussin mitta äärellisulotteisessa avaruudessa. Projisoidaan funktio f ja mitta äärellisulotteisiin avaruuksiin X_n (2.4). Sitä

varten tarkastellaan ensin avaruuden $L_2(K)$ ortonormeerattuja vektoreita. Näitä ovat kuvaukset

$$(2.10) \quad e_{2ni}: K \rightarrow R, t \rightarrow \begin{cases} (N/T)^{\frac{1}{2}}, & \text{kun } t \in [t_{ni-1}, t_{ni}] \\ 0 & , \text{ muulloin} \end{cases}$$

sillä niiden neliön integraalit yli välin $[t_{ni-1}, t_{ni}]$ ovat $(N/T)(T/N) = 1$. Integraalikuvauksessa J nämä kuvautuvat avaruuteen H kuvauksiksi

$$(2.11) \quad e_{\infty ni}(t) \equiv J(e_{2ni})(t) = \begin{cases} 0 & , t \in [0, t_{ni-1}] \\ (t - t_{ni-1})/\sqrt{(T/N)} & , t \in [t_{ni-1}, t_{ni}] \\ \sqrt{(T/N)} & , t \in [t_{ni}, T] \end{cases}$$

Olkoon $f \in X$ ja $f(t_{ni}) = f_{ni}$. Kaavan (2.2) mukaan

$$(2.12) \quad (p_n f)(t) = 1/\sqrt{(T/N)} \sum_{i=1}^N (f_{ni} - f_{ni-1}) e_{\infty ni}(t) .$$

Merkitään $t_n = t_{ni} - t_{ni-1}$. Tämän normin neliö kaavan (2.8) mukaan sekä vektorien (2.10) ortonormaalisuuden ja ominaisuuden $e_{\infty ni}' = e_{2ni}$ (m.k.) takia on

$$(2.13) \quad \|p_n f\|^2 = \sum_{i=1}^N (f_{ni} - f_{ni-1})^2 / t_n .$$

Kuten kaavan (2.9) jälkeen todettiin, Lebesguen mitta avaruudessa R^N riippuu isomorfismista, nyt $X_n \rightarrow R^N$. Kaksi isomorfismia on

$$\begin{aligned} F_1: p_n f &\rightarrow 1/\sqrt{t_n} (f_{n1}, f_{n2} - f_{n1}, f_{n3} - f_{n2}, \dots, f_{nN} - f_{nN-1})^T \text{ ja} \\ F_2: p_n f &\rightarrow (f_{n1}, f_{n2}, f_{n3}, \dots, f_{nN})^T , \end{aligned}$$

missä T merkitsee transpoosia. Näiden välillä on yhteys $F_1(p_n f) = A F_2(p_n f)$, kun $A = (\delta_{jk} - \delta_{j-1,k})/\sqrt{t_n}$, missä δ_{jk} on Kroneckerin delta, $i, j = 1, \dots, N$ ja $\delta_{0k} = 0$. Kuvausten välinen Jacobin funktionaalideterminantti on $\det A = t_n^{-\frac{1}{2}N}$. Näinollen lausekkeen (2.9) mukaan jatkuvan ja rajoitetun funktion $F: X \rightarrow R$ odotusarvo avaruudessa X_n vastaten normia (2.13) on

$$(2.14) \quad EG_n(F) = t_n^{-\frac{1}{2}N} \int_{K^N} F(p_n f) \exp \left[-\pi \sum_i (f_{ni} - f_{ni-1})^2 / t_n \right] \times \\ \times df_{n1} \dots df_{nN} .$$

Lause 2.4. Jatkuvan ja rajoitetun funktion $F \in C(C(K))$ avaruuden $C(K)$ Gaussin Radonin mitan G suhteen laskettu odotusarvo $EG(F)$ voidaan laskea raja-arvona

$$(2.15) \quad EG(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} EG_n(F) ,$$

Merkinnät on esitetty edellä kohdissa 2.1 = 2.3.

Todistus. Lauseen väite seuraa lauseesta 1.7, kun on todettu seuraavat seikat.

(i) Hilbertin avaruudessa H projektioiden p_n avulla voidaan määritellä Banach-avaruuden $C(K)$ sylinteritodennäköisyys, koska Hilbertin avaruudessa projektioita p_n vastaa kääntäen yksikäsitteisesti äärellisdimensioisten tekijäavaruuksien luonnolliset surjektiot $X \Rightarrow X/X_n$, missä X_n on suljetun aliavaruuden X_n ortogonaalikomplementti.

(ii) Sylinteritodennäköisyys on litteästi keskittynyt avaruuden $C(K)$ kompakteihin alijoukkoihin. (Ks. kaavan (1.2) jälkeinen huomio.)

(iii) Olkoon $F \subset C(K)$ kompakti. Todistetaan, että projektiojono (p_n) suppenee tasaisesti kohti identiteettikuvausta joukossa F . Sitä ennen todistetaan kuitenkin, että F on tasaisesti tasa-asteisesti jatkuva eli jokaista lukua $\epsilon > 0$ kohti on olemassa sellainen luku $\delta > 0$, että $\sup_{f \in F} |f(t) - f(u)| < \epsilon$ aina, kun t ja $u \in K$ sekä $|t-u| < \delta$:

Joukon F kompaktiudesta seuraa, että on olemassa sellaiset funktiot $f_1, \dots, f_m \in F$, että

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(f_i, \epsilon/3) ,$$

missä $B(f_i, \epsilon/3) = \{ f \in X \mid \|f - f_i\|_\infty < \epsilon/3 \}$. Toisaalta, koska joukon X funktiot ovat tasaisesti jatkuvia, on olemassa sellaiset luvut δ_i , $i = 1, \dots, m$, että $|f_i(t) - f_i(u)| < \epsilon/3$, kunhan $|t-u| < \delta_i$. Merkitään $\delta = \min \{ \delta_i \mid i = 1, \dots, m \}$. Olkoon sitten $f \in F$ ja i sellainen indeksi, että $f \in B(f_i, \epsilon/3)$. Tällöin

$$|f(t) - f(u)| \leq |f(t) - f_i(t)| + |f_i(t) - f_i(u)| + |f_i(u) - f(u)| \\ < \epsilon/3 + \epsilon/3 + \epsilon/3 = \epsilon ,$$

kun $|t-u| < \delta$. //

Olkoon n niin suuri, että $|t_{ni} - t_{ni-1}| < \delta$, $t \in K$ ja i sellainen indeksi, että $t \in [t_{ni-1}, t_{ni}]$. Tällöin

$$|p_n f(t) - f(t)| \leq |p_n f(t) - f(t_{ni-1})| + |f(t_{ni-1}) - f(t)| \leq \\ \leq |[f(t_{ni}) - f(t_{ni-1})](t - t_{ni-1})/(t_{ni} - t_{ni-1})| + \epsilon \leq 2\epsilon$$

riippumatta funktiosta $f \in F$ ja argumentista $t \in K$. Näinollen

$$\|p_n|_F - \text{id}|_F\|_{\infty, F} \equiv \sup_{f \in F} \sup_{t \in K} |p_n f(t) - f(t)| < 2\epsilon ,$$

kun n on riittävän suuri siten kuin edellä on mainittu, $\|\cdot\|_{\infty, F}$ on tasaisen suppenemisen normi joukossa F ja id tarkoittaa identiteettikuvausta. ■

2.5 Gammamitta. Avaruudessa X_Ω (kaava (2.3)) gammamitan suhteen laskettu funktion $F(p_\Omega f)$ odotusarvo on

$$(2.16) \quad E\Gamma_\Omega(F) = \int_{K^n} F(p_\Omega f) \prod_{i=1}^n \beta_i^{\alpha_i} f_i^{\alpha_i-1} \exp(-\beta_i f_i) / \Gamma(\alpha_i) df_1 \dots df_n ,$$

missä α_i ja β_i ovat muuttujien f_i odotusarvoista ja variansseista riippuvia parametrejä. Kirjallisuusluettelon teoksissa tätä ei ole käsitelty. Tätä ei pysty laajentaamaan ääretönulotteiseen avaruuteen yhtä luonnollisesti kuin Gaussin mitan kaavalla (2.9). Se, saadaanko tästä mitta Banach-avaruuteen $C(K)$, on vaikeusasteeltaan sellainen ongelma, ettei se kuulu tähän työhön. Tarve ongelman ratkaisulle kyllä on, koska Gaussin mitan käyttö kuolevuuteen on luonnotonta, sillä se antaa mahdollisuuden negatiiviseen kuolevuuteen. Tosin Kalevala tuntee Väinämöisen, joka syntyi 30-vuotiaana, mutta tätä ei voi pitää hyvänä perusteluna negatiivisen kuolevuuden hyväksymiselle.

3. AIKAKORKKO

Tarkastellaan edellisen kappaleen tuloksia valinnoilla $f = \delta =$ välillä K jatkuva korkoutuvuus ja $F = v$ määritellään kaavalla

$$(3.1) \quad v(\delta)(T) = \exp - \int_0^T \delta(t) dt.$$

Kuvaus $\delta \rightarrow \int_0^T \delta(t) dt$ on Borel-funktio ([1], s.140). Koska $f \rightarrow \exp -f$, $f \in X$, on jatkuva, niin myös v on Borel-funktio ja siten sitä voi integroida. Se on myös rajoitettu. Argumentti T merkinässä $v(\delta)(T)$ on vain muistuttamassa, mihin asti integrointi ulottuu. T on kiinteä eikä muuttuja.

Merkitään korkoutuvuuden alkuarvoa ja hajontaa jakopisteissä (2.1) seuraavasti.

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \delta_0 &= \delta(t_{n0}) \quad \text{ja} \\ \sigma_{ni} &= \sigma(\delta(t_{ni})). \end{aligned}$$

Odotusarvo avaruudessa X_n on

$$(3.3) \quad E_n(v) = \int \exp \left[- \sum_{i=1}^N \delta(t_{ni})(t_{ni} - t_{ni-1}) \right] dP(\delta(t_{ni})),$$

jossa integrandin potenssi on laskettu kaavasta (2.2) puolisuunnikassäännöllä ja itse asiassa tehty pieni virhe lausekkeen yksinkertaistamiseksi jättämällä potenssista pois $-\frac{1}{2}\delta_{n0}$ ja lisäämällä sinne $\frac{1}{2}\delta_{nN}$. Virheen voi korjata myös määrittelemällä projektio p_n hieman toisin kaavassa (2.2) ja toteamalla, että lauseen 2.4 paikansapitävyys ei ole kiinni tästä.

3.1. KORKOUTUVUUS JAKAUTUNUT NORMAALISTII

Merkitään $t = t_{ni} - t_{ni-1}$ ja oletetaan, että

$$(3.4) \quad \delta(t_{ni}) \div N(\delta(t_{ni-1}), \sigma_{ni}/t)(\delta) =$$

$$= (2\pi\sigma_{ni}^2 t)^{-\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\delta} \exp [-(\delta(t_{ni}) - \delta(t_{ni-1}))^2 / (2\sigma_{ni}^2 t)] d\delta(t_{ni}).$$

Vaikka tämä ei olekaan jakauma $N(0, 1/2\pi)$, voidaan tähän soveltaa lausetta 2.4, sillä tulokset ovat riippumattomia siitä, tutkitaanko muuttujia $\delta(t_{ni})$ vai $(\delta(t_{ni}) - \delta(t_{ni-1}))^2 / (2\sigma_{ni}^2)$. Nyt

$$(3.5) \quad E_n(v) = (2\pi\sigma_{ni}^2 t)^{-\frac{1}{2}N} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp -\left\{ \sum_{i=1}^N [\delta(t_{ni})t + (\delta(t_{ni}) - \delta(t_{ni-1}))^2 / (2\sigma_{ni}^2 t)] \right\} \pi d\delta(t_{nk}) \cdot$$

Tehdään translaatio $z_i = \delta(t_{ni}) - \delta(t_{ni-1})$, jonka Jacobin funktionaalideterminantti on yksi, joten

$$E_n(v) = (2\pi\sigma_{ni}^2 t)^{-N/2} \times$$

$$\times \int_{-\infty}^{\infty} \exp -\left\{ \sum_{i=1}^N \left[t \left(\sum_{j=1}^i z_j + \delta_0 \right) + z_i^2 / (2\sigma_{ni}^2 t) \right] \right\} \pi d\delta(t_{nk}) \cdot$$

Integroidaan mittojen $d\delta(t_{nk})$ suhteen järjestyksessä $k = N, N-1, \dots, 2, 1$. Tällöin [12]

$$E_n(v) = (2\pi\sigma_{ni}^2 t)^{-N/2} \cdot (2\pi\sigma_{ni}^2 t)^{N/2} \cdot e^{-\delta_0 T} \times$$

$$\times \exp[t^2 2\sigma_N^2 t/4] \exp[(2t)^2 2\sigma_{N-1}^2 t/4] \dots \exp[(Nt)^2 2\sigma_1^2 t/4] =$$

$$= \exp \left[-\delta_0 T + t^3/2 \sum_{i=1}^N [\sigma_i(N+1-i)]^2 \right] \cdot$$

Jos oletetaan, että $\sigma_i = \sigma$ kaikilla indekseillä i , niin [12]

$$(3.6) \quad E_n(v) = \exp \left[-\delta_0 T + (\sigma^2 T^3 / 2N^3) N(N+1)(2N+1)/6 \right]$$

ja lauseen 2.4 mukaan Wiener-Lévyyn mitan suhteen laskettu odotusarvo on

$$(3.7) \quad E(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} E_n(v) = \exp \left[-\delta_0 T + \sigma^2 T^3 / 6 \right] \cdot$$

Deterministisessä teoriassa $\sigma = 0$ ja muutenkin tunnetusti $E(v) = \exp -\delta_0 T$, joten $\exp \sigma^2 t^3/6$ aiheutuu korkoutuvuuden satunnaisuudesta.

Esimerkki 3.1. Olkoon $T = 10$ ja varianssi koko aikana $\sigma^2 T = 4 \%^2$. (Esimerkiksi kaavasta (3.4) voi todeta, että lausekkeen $\sigma^2 T$ dimensio on sama kuin lausekkeen δ^2 .) Poikkeama deterministisellä teorialla lasketusta aikakorosta on

$$\exp (1/6 \cdot 16 \cdot 10^{-4} \cdot 10^2) - 1 = 2,70 \% .$$

Esimerkki 3.2. Olkoon $T = 30$ ja varianssi koko aikana $\sigma^2 T = 6 \%^2$, niin poikkeama deterministisellä teorialla lasketusta aikakorosta on

$$\exp (1/6 \cdot 36 \cdot 10^{-4} \cdot 9 \cdot 10^2) - 1 = 71,6 \% .$$

Esimerkeistä näkee, että vakuutusten vastuisiin tarvittavat varauksen lisäykset deterministisellä teorialla lasketuista kasvavat hyvinkin paljon, jos huomioidaan koron hajonta. Mitä pidempiaikainen vastuu sitä suurempi vastuun lisäys.

Vakuutuksen riski on sitä suurempi, mitä suurempi on sen varianssi. Vinous ja kurtosis ovat myös olennaisia arvioitaessa aikakorona jakaumaa. Näitä varten lasketaan aikakorona momentit. Ne ovat yksinkertaisia

$$(3.8) \quad E(v(m\delta)) = \exp (-m\delta_0 T + m^3 \sigma^2 T^3/6) .$$

Täten varianssi on

$$(3.9) \quad \text{Var}(v) = \exp (-2\delta_0 T + \sigma^2 T^3/3) (\exp \sigma^2 T^3 - 1) .$$

Esimerkki 3.2 jatkuu. Esimerkin oletuksin ja lisäoletuksin $\delta_0 = 6\%$
 $\text{Var}(v) = 1,974 .$

3.2 VERTAILU STOKASTISEN DIFFERENTIAALIYHTÄLÖN RATKAISUUN

Normaalisti jakautunut korkoutuvuuden heilahtelu voidaan esittää myös stokastisen differentiaaliyhtälön avulla. Vertaillaan tällä menetelmällä saatavaa tulosta tulokseen (3.7). Tässä työssä ei käsitellä stokastista differentiaaliyhtälöä matemaattisen tarkasti, sillä se ei ole tämän työn tarkoitus ja tarkka esitys veisi tämän työn kannalta liian ison osan. Eksaktiin esitykseen tarvittavat oletukset löytyvät esimerkiksi esityksistä [10], [13] ja [14].

Oletetaan, että

$$(3.10) \quad d\left(\int_0^T \delta(u) du\right) = \delta_0 dt + \Omega(t) dW(t),$$

missä W on Brownin liike ja Ω sen hajonta. Tällöin kaavan (3.1) funktio $v(\delta)(T)$ toteuttaa Itô'n differentiointikaavan mukaan differentiaaliyhtälön [13]

$$(3.11) \quad d(v(\delta)(t)) = \{[-\delta_0 + \frac{1}{2} \Omega(t)^2] dt - \Omega(t) dW(t)\} v(\delta)(t)$$

tarpeeksi yleisin oletuksin, joihin tässä ei puututa. Yhtälöstä saadaan

$$(3.12) \quad d(\ln(v(\delta)(t))) = [-\delta_0 + \frac{1}{2} \Omega(t)^2] dt - \Omega(t) dW(t),$$

josta integroimalla alkuarvolla $v(\delta)(0) = 1$

$$(3.13) \quad v(\delta)(T) = \exp \left[-\delta_0 T + \frac{1}{2} \int_K \Omega(t)^2 dt \right].$$

sillä $\int_K \Omega(t) dW(t) = 0$.

Brownin liikkeen varianssina

$$(3.14) \quad \Omega(t)^2 = \sigma^2 t, \quad \sigma > 0,$$

joten saadaan

$$(3.15) \quad E(v) = \exp \left(-\delta_0 T + \frac{1}{4} \sigma^2 T^2 \right).$$

Tämä on kerrointa $\frac{1}{2}$ vaille saman näköinen kuin kuolevuuden jakaumasta $\delta(t_{ni}) \div N(\delta_0, \sigma)$ saatava (4.5), jos varianssit oletetaan olevan yhtä suuria joka pisteessä. Korkoutuvuuden jakauman $\delta(t_{ni}) \div N(\delta(t_{ni-1}), \sigma)$ mukainen kaava (3.7) saadaan valinnalla

$$(3.16) \quad \Omega(t)^2 = \sigma^2 t^2, \quad \sigma > 0.$$

Tuloksen (3.15) saa myös Dufresne [10] samaa kerrointa $\frac{1}{2}$ vaille olettamalla korkoutuvuudelle jakauman (Hän käyttää korkoutuvuudelle eri normeerausta.)

$$(3.17) \quad \delta(t_{ni}) \div \delta_0 + N^{\frac{1}{2}}(\delta(t_{11}) - \delta_0).$$

Näinollen Wiener-Lévy'n mitta kuvaa erilaista prosessia kuin useimmiten tässä yhteydessä esitetty stokastinen differentiaaliyhtälö; mitan kuvaaman prosessin korkoutuvuus on jakautunut normaalisti edellisen ajanhetken arvon ympärillä ja stokastisen differentiaaliyhtälön kuvaama korkoutuvuus odotusarvon ja lisäksi oletetaan korkoutuvuuksien riippumattomuus, mitä mitan tapauksessa ei tehdä.

3.3. GAMMAJAKAUMA

Oletetaan, että

$$(3.18) \quad \delta(t_{ni}) \div \beta_{ni}^{\alpha_{ni}} \delta(t_{ni})^{\alpha_{ni}-1} \exp(-\beta_{ni} \delta(t_{ni})) / \Gamma(\alpha_{ni}),$$

$$\equiv \Gamma(\alpha_{ni}, \beta_{ni}, \delta(t_{ni}))$$

missä α_{ni} ja β_{ni} ovat reaali-lukuja. Tunnetusti

$$(3.19) \quad E(\delta(ni)) = \alpha_{ni} / \beta_{ni} \quad \text{ja}$$

$$\sigma_{ni}^2 = \text{Var}(\delta(ni)) = \alpha_{ni} / \beta_{ni}^2 = E(\delta(ni)) / \beta_{ni} = E(\delta(ni))^2 / \alpha_{ni}.$$

Jos satunnaismuuttujat $\delta(t_{ni})$ ovat keskenään riippumattomia, niin (3.3) faktorisoituu, jolloin riittää laskea yksi sen tekijä, joka on lyhennysmerkinnöin

$$(3.20) \quad \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\delta t} \delta^{\alpha-1} e^{-\beta\delta} d\delta .$$

Tämä on Γ -jakauman momentit generoiva funktio ja yhtä kuin $(\beta / (\beta + t))^\alpha$. Siten

$$(3.21) \quad E_N(v) = \pi \prod_{i=1}^N (\beta_{ni} / (\beta_{ni} + t_{ni} - t_{ni-1}))^{\alpha_{ni}} .$$

Oletus keskinäisistä riippumattomuuksista ei välttämättä pidä paikkansa, mutta se ei ole välttämättä kovin vääräkään. Ilman tätä oletusta ongelma kävisi liian monimutkaiseksi. Iso-Britanniassa noin 50 vuoden ajalta havaitut perättäisten vuosien korkoutuvuudet ovat keskenään lähes korreloimattomia. Sen sijaan kahden vuoden välein havaitut korkoutuvuudet korreloivat selvästi [11].

Jos muuttujat $\{ \delta(t_{ni}) \mid i=1, \dots, N \}$ ovat jakautuneet siten, että niiden odotusarvot ja varianssit ovat samoja jokaisella osavälillä $\{ [t_{ni-1}, t_{ni}] \mid i=1, \dots, N \}$, voidaan alaindeksi i jättää pois ($\alpha_{ni} = \alpha_n$ ja $\sigma_{ni} = \sigma_n$). Merkitään myös välin K parametrejä $\alpha \equiv \alpha_1$ ja $\beta \equiv \beta_1$ sekä $\sigma^2 = \alpha/\beta^2$ ja $\delta_0 = \alpha/\beta = \alpha_n/\beta_n$. Jos korkoutuvuudelle oletetaan jakauma (3.17), niin

$$(3.22) \quad \sigma_{ni}^2 = N\sigma^2 ,$$

ja

$$(3.23) \quad \left[\sum_{i=1}^N \sigma_{ni}^2 \right]^{\frac{1}{2}} = N\sigma ,$$

Tällöin kaavan (3.19) mukaan

$$\alpha = (\delta_0 / \sigma)^2 ,$$

$$(3.24) \quad \beta = \delta_0 / \sigma^2 = (\alpha_n / \beta_n) n / (\alpha_n / \beta_n^2) = n \beta_n \quad \text{ja}$$

$$\alpha = \delta_0 \beta = \delta_0 n \beta_n = n \alpha_n .$$

Edelleen tästä saadaan

$$(3.25) \quad E_n(v) = (\beta_n / (\beta_n + T/n))^{\alpha_n} = (\beta / (\beta + T))^{\alpha} = \\ = (1 + T/\beta)^{-\alpha} = (1 + \sigma^2 T / \delta_0)^{-(\delta_0/\sigma)^2}.$$

Merkitään suhteellisen poikkeaman neliön käänteisarvoa $h \equiv (\delta_0/\sigma)^2$, jolloin

$$(3.26) \quad E_n(v) = (1 + \delta_0 T/h)^{-h}.$$

Tämä ei itse asiassa riipu indeksistä n . Kun poikkeama lähestyy nollaa eli h ääretöntä, malli lähestyy determinististä mallia ja

$$(3.27) \quad E_n(v) \rightarrow \exp -\delta_0 T,$$

mikä on deterministisen mallin tulos.

Tässä työssä ei voida todistaa, että lauseke (3.26) olisi minkään avaruudessa $C(K)$ määritellyn mitan suhteen laskettu odotusarvo. Mutta se on odotusarvo sen äärellisulotteisissa avaruuksissa. Koska todellisuudessa havainnot tehdään äärellisellä määrällä ajanhetkiä, kaava (3.26) kuvaa likimääräisesti todellisuutta. Kvanttifysiikassa Feynmanin kvantisointi funktionaali-integraalilla käyttää hyväkseen samanlaisia äärellisulotteisissa avaruuksissa laskettuja integraaleja, joissa annetaan avaruuksien dimension kasvua rajatta. Raja-arvona saadaan muillakin menetelmillä saatu aaltofunktio. Lisäksi funktionaali-integraalimenetelmällä saadaan uusia fysikaalisen systeemin approksimaatiomenetelmiä. Kuitenkaan ei ole voitu osoittaa, että po. raja-arvo eli aaltofunktio olisi peräisin mistään avaruuden $C(K)$ mitasta [2], ja siitä huolimatta menetelmä kuvaa todellisuutta. Näistä huomiosta herää yleisempikin kysymys, tarvitseeko yleensä todistaa, että äärellisulotteisissa avaruuksissa laskettujen odotusarvojen raja-arvo on jonkin avaruuden $C(K)$ mitan suhteen laskettu odotusarvo.

Γ -jakaumalla odotusarvoa (3.26) ei voi jakaa keskiarvosta ja toisaalta hajonnasta riippuviin tekijöihin kuten normaali-jakaumalla (3.7), joten käsiteltävän mallin poikkeama deterministisen mallin aikakorosta riippuu myös keskiarvosta δ_0 . Tämä poikkeama on

$$(3.28) \quad (1 + \delta_0 T/h)^{-h} \exp \delta_0 T.$$

Esimerkki 3.3. Jos $\delta = 10 \%$, $T = 30$ ja $\sigma = 3 \%$, niin (3.28) antaa poikeamaksi deterministisestä kaavasta 1,411.

Gammajakauman esimerkkivertailua Gaussin jakaumaan ei voida antaa, sillä prosessit ovat erilaisia, kuten kappaleessa 3.2 todettiin.

Muita tilastollisia suureita varten lasketaan momentit. Helposti saadaan

$$(3.29) \quad E(e^{-m\delta t}) = (1 + m\delta_0 T/h)^{-h}.$$

Täten esimerkiksi

$$(3.30) \quad \text{Var}(v) = (1 + 2\delta_0 T/h)^{-h} - (1 + 2\delta_0 T/h)^{-2h} = o(h^{-4}).$$

4. ELINKORKO

Edellisessä luvussa tarkasteltiin diskonttausta huomioiden vain korkoutuvuus ja siten se on sovellettavissa muuhunkin taloudelliseen toimintaan kuin vain henkivakuutustoimintaan. Henkivakuutuksessa diskonttauksessa oleellinen tekijä on myös vakuutettujen kuolevuus.

Olkoon $\mu(x)$ vakuutetun kuolevuus iässä x . Tällöin diskonttausfunktio on

$$(4.1) \quad D(\delta, \mu(x))(t) = v(\delta)(t) u(\mu(x))(t),$$

missä

$$(4.2) \quad u(\mu(x))(t) = \exp - \int_0^t \mu(x+y) dy =$$

= todennäköisyys, että x -vuotias elää vielä $(x+t)$ -vuotiaana.

Olkoon μ satunnaisfunktio, jonka odotusarvo ja hajonta tunnetaan. Koska δ ja μ ovat keskenään riippumattomia, D hajoaa kahdeksi näistä erikseen riippuvien funktioiden tuloksi ja toista näistä, funktiota v , käsiteltiin edellisessä luvussa, joten riittää nyt tarkastella enää funktiota u .

Jaetaan väli $K = [0, T]$ taas $2^n = N$:ään osaväliin kaavan (2.1) mukaan. Samoin toteamuksin kuin kaavan (3.3) yhteydessä saadaan nyt

$$(4.3) \quad E_n(u) = \pi \int_{i=1}^N \exp [-\mu(x+t_{ni})(t_{ni}-t_{ni-1})] dP(\mu(x+t_{ni})) ,$$

jossa kirjain P on otettu käyttöön merkitsemään myös kuolevuuden jakaumaa.

Korkoutuvuuden ollessa kyseessä jakauma P määräytyi mallista, jonka mukaan siirtymä $\delta(t_{ni}) - \delta(t_{ni-1})$ on jakautunut normaalisti. Tällainen malli ei kuvaa perättäisten vuosien kuolevuutta, koska $\mu(x+t_{ni})$ ei riipu kuolevuudesta $\mu(x+t_{ni-1})$ suurissa vakuutettujen joukoissa. Jos riippuvuutta on, niin se esiintyy pienissä joukoissa ja on sellaista, että jos jonain ajanjaksona on kuollut normaalia enemmän niin seuraavana jaksolla samasta ikäluokasta todennäköisesti kuolee normaalia vähemmän, koska ikäluokka oli pienentynyt aikaisemmin normaalia pienemmäksi. Kuolleisuuden ollessa kyseessä oleellinen muuttuja ei ole siirtymä, vaan poikkeama normaalista eli $\mu(x+t_{ni}) - \mu_{ni}$, jossa μ_{ni} on kuolleisuuden $\mu(x+t_{ni})$ odotusarvo, .

Täten, jos $\mu(x+t_{ni}) \div N(\mu_{ni}, s_{ni})$, odotusarvo (4.3) avaruudessa X_n on

$$(4.4) \quad E_n(u) = \pi \int_{i=1}^N (2\pi s_{ni}^2)^{-\frac{1}{2}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{ -(\mu(t_{ni})(t_{ni}-t_{ni-1}) + (\mu(t_{ni})-\mu_{ni})^2/(2s_{ni}^2)) \} d\mu(t_{ni}).$$

Tarkastellaan yhtä näistä tekijöistä ja jätetään alaindeksit pois yksinkertaisuuden vuoksi, merkitään keskiarvoa $\mu_{ni} = \mu_0$ ja

$t = t_{ni} - t_{ni-1}$. Tehdään translaatio $\mu(t_{ni}) = z + \mu_0$, jolloin yksi tekijä on

$$(2\pi s^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\mu_0 t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left(-\left(zt + z^2/2s^2 \right) \right) dz = \exp \left(-\mu_0 t + \frac{1}{2}s^2 t^2 \right).$$

Viimeiseen yhtäläisyyteen on käytetty kaavaa kaavakokoelmasta [12]. Täten

$$(4.5) \quad E_n(u) = \exp \sum_{i=1}^N \mu_{ni}(t_{ni} - t_{ni-1}) \exp \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N s_{ni}^2 (t_{ni} - t_{ni-1})^2.$$

Tässä kaavassa ei voi olettaa, että odotusarvot μ_{ni} ja hajonnat s_{ni} olisivat yhtäsuuria ja toiseksi $t_{ni} - t_{ni-1}$ on käytännössä 1 ... 5 vuotta, joten näistä syistä rajalle $n \rightarrow \infty$ käynti ei ole helppo eikä tarpeellinen.

Varianssi voidaan laskea samasta tilastosta kuin keskiarvokin. Varianssi on

$$(4.6) \quad \begin{aligned} \text{Var}_n(u) &= E(u^2) - E(u)^2 = \exp -2T/n \sum s_{ni} \times \\ &\times \{ \exp 2(T/n)^2 \sum s_{ni}^2 - \exp (T/n)^2 \sum s_{ni}^2 \}, \end{aligned}$$

koska $t_{ni} - t_{ni-1} = T/n$.

Jos taas

$$(4.7) \quad \mu(t_{ni}) \div \Gamma(\alpha_{ni}, \beta_{ni}, \mu(t_{ni})) ,$$

$$(4.8) \quad E_n(u) = \pi \prod_{i=1}^N (\beta_{ni} / (\beta_{ni} + t_{ni} - t_{ni-1}))^{\alpha_{ni}} ,$$

mikä johdetaan samoin kuin kaava (3.21).

4.1. DISKONTTAUS SUOMALAISILLA LASKUPERUSTE KUOLEVUUDELLA

Laskennallisena esimerkkinä tarkastellaan sitä, millaisen numeerisen arvon odotusarvo (4.5) saa, kun arvot otetaan suomalaisessa

henkivakuutustoiminnassa käytetystä laskuperusteesta [15]. Käytettävässä tilastossa kuolevuus on havaittu 5 vuoden pituisissa ikäryhmissä 15-19, 20-24, ... , 65-69 eli $T/n = 5$. Havaintoja on tehty yli 70-vuotiaillekin, mutta jätetään ne tästä käsittelystä pois. Havainnot käsittävät 13 tilivuotta 1972 - 1984. Käytetään havaintoikänä osavälin keski-ikää eli 17,5, 22,5, ... , 67,5.

Tilastoista laskettavat keskiarvot ja hajonnat ovat alla olevan taulukon mukaisia. Hajonta on laskettu suoraan kaavalla $\sum_i [m_i - E(\mu)]^2$, missä m_i on tilaston vuotuinen kuolevuus, eikä siinä ole huomioitu kuolevuuden alenevaa trendiä. Oikeampi tapa laskea olisi korvata $E(\mu)$ sellaisella keskiarvolla, jossa on huomioitu aleneva trendi. Koska tämän työn tekijä ei tiedä, miten aleneva trendi on laskettu, eikä sen huomioiminen vaikuta jäljempänä olevaan päätelmään, käytetään taulukon hajontaa.

Ikä	$E(\mu) \cdot 10^{-3}$	$\sigma \cdot 10^{-3}$	$\Sigma \cdot 10^6$	$\mu \cdot 10^{-3}$
15-19	0,7477	0,1607	0,32	0,5382
20-24	0,9785	0,1786	0,40	0,5896
25-29	0,8892	0,2068	0,53	0,6865
30-34	0,9877	0,1157	0,17	0,8690
35-39	1,3823	0,2483	0,77	1,2128
40-44	2,5315	0,8523	9,80	1,8603
45-49	4,4085	1,1653	16,97	3,0801
50-54	7,1269	1,4426	26,02	5,3777
55-59	12,2123	2,0668	53,40	9,7057
60-64	21,6046	4,0700	207,06	17,8580
65-69	49,9085	9,8029	1201,22	33,2140

Taulukko 3.1. Vuosien 1972-1984 tilastokertomuksien vuosittaisten kuolevuuksien keskiarvot ($E(\mu)$), hajonta (σ), hajonnan aiheuttama suhteellinen poikkeama-1 deterministisestä teoriasta (Σ) sekä tilastosta johdettu laskuperustekuolleisuus ilman varmuuskerrointa laskettuna välinsä keski-ikässä (μ). Laskuperustekuolleisuudessa on huomioitu tilaston osoittama aleneva trendi [15].

Suhteelliset poikkeamat - 1 ovat

$$(4.8) \quad \Sigma_i = \exp \frac{1}{2} \sigma_i^2 5^2 - 1$$

ja erittäin pieniä. Suurin 30 vuoden aikana syntyvä suhteellinen poikkeama deterministisestä teoriasta on ikävälillä 40 - 70 ja se on

$$(4.9) \quad \pi_{i=42,5}^{67,5} (1 + \Sigma_i) = 1 + 0,15 \% .$$

Täten voidaan sanoa, että kuolevuuden varianssista aiheutuva vastuvelan varauksen kasvattamistarve on olematon.

5. KUOLEMANVARATURVA

Edellinen johto diskonttaustekijälle D ((3.1), (3.3), (4.1) ja 4.3)) on elämänvaraturvan vastuukertamaksu. Johdetaan tässä luvussa esimerkkinä ja sovelluksena kuolemanvaraturvan vastuukertamaksun kaava. Muidenkin turvien vastuukertamaksut voidaan johtaa, mutta niihin paneutuminen ei ole tämän työn tarkoitus.

Vakuutus otetaan iässä x ja perillisille maksetaan korvauksena 1 rahayksikkö, jos vakuutettu kuolee ennen ikää w . Tällöin vastuukertamaksu on

$$(5.1) \quad A(K, x, w) = E_t E(v) ,$$

missä E_t on odotusarvon otto yli ikävälillä $[x, w]$ mahdollisesti tapahtuvan kuolinhetken. Olkoon $p(x, x+t)$ x -ikäisen vakuutetun jäljellä olevan iän jakaumafunktio. Tällöin kaavan (3.7) mukaan

$$(5.2) \quad A(K, x, w) = \int_0^{w-x} \exp [-\delta_0 t + 1/6 \sigma^2 t^3] dp(x, x+t) .$$

Jos $\delta(t_{ni}) \div N(\delta(t_{ni-1}), \sigma)$ ja $\mu(t_{ni}) \div N(\mu_{ni}, s_{ni})$, niin kaavan (4.5) mukaan

$$(5.3) \quad \begin{aligned} p(x, x+t) &= 1 - \exp \left[-(t/N) \sum_i \mu_{ni} + \frac{1}{2} (t/N)^2 \sum_i s_{ni}^2 \right] = \\ &= 1 - l(x, x+t) . \end{aligned}$$

Näinollen

$$(5.4) \quad A(K, x, w) = - \int_0^{w-x} d\{\exp [-\delta_0 t + 1/6 \sigma^2 t^3] l(x, x+t)\} dt -$$

$$- \int_0^{w-x} (\delta_0 - \frac{1}{2} \sigma^2 t^2) \exp [-\delta_0 t + 1/6 \sigma^2 t^3] l(x, x+t) dt.$$

Merkittään

$$(5.5) \quad D(x, x+t) = \exp [-\delta_0 t + 1/6 \sigma^2 t^3] l(x, x+t) = \\ = D_0(x, x+t) \exp [1/6 \sigma^2 t^3 + (t/n)^2 \sum_i s_{ni}^2] ,$$

missä D_0 on deterministisen teorian diskonttaustekijä, sekä elinkorkoa

$$(5.6) \quad a(x, w) = \int_0^{w-x} D(x, x+t) dt .$$

Tällöin

$$(5.7) \quad A(K, x, w) = 1 - D(x, w) - \delta_0 a(x, w) + \frac{1}{2} \sigma^2 \int_0^{w-x} t^2 D(x, x+t) dt.$$

Jos tässä $\sigma = s = 0$, jäljelle jäävä vastuukertamaksu on deterministisen teorian. Termi $\delta_0 a(x, w)$ on korkoutuvuuden diskontattu odotusarvo ja viimeinen termi, integraali, on puolet korkoutuvuuden stokastisessa differentiaaliyhtälössä esiintyvän varianssin odotusarvosta välillä $[x, w]$ kaavan (3.16) mukaan.

6. PROLOGNOINTI

Deterministisessä korkoutuvuuden mallissa prolognointi saadaan yksinkertaisesti merkin vaihdolla $-\delta_0 \rightarrow \delta_0$ ja prolognointitekijä on diskonttaustekijän käänteisarvo. Stokastisessa teoriassa prolognointitekijä on

$$(6.1) \quad E(v(-\delta)(T)) = E(v(\delta)(-T)) ,$$

eli prolognointitekijä saadaan diskonttaustekijästä ajankäännöllä $-T \rightarrow T$. (Saadaan myös deterministisessä teoriassa.) Tällöin kaavan (3.7) mukaan normaalisti jakautuneen korkoutuvuuden prolognointitekijä on (ks. myös [10])

$$(6.2) \quad E(v(-\delta)(T)) = \exp(\delta_0 T + 1/6 \sigma^2 T^3).$$

Esimerkki 6.1. Jos ajan T kuluttua maksettavaan yksikkösuoritukseen varaudutaan korkoutuvuudella $\delta \div N(\delta_d, \sigma_d)$, niin varaus on $\exp(-\delta_d T + \frac{1}{2} \sigma_d^2 T^2)$. Jos tämän varauksen kehittymistä ennustetaan korkoutuvuudella $\delta \div N(\delta_p, \sigma_p)$, niin kasvaneen varauksen odotusarvo on

$$(6.3) \quad \exp[(\delta_p - \delta_d)T + 1/6 (\sigma_p^2 + \sigma_d^2)T^3].$$

Jos ennustekorkoutuvuus $\delta_p = \delta_d$, niin odotusarvo on suurempi kuin yksi.

Jos taas $\delta \div \Gamma(\alpha, \beta)$, niin kaavan (3.25) mukaan

$$(6.4) \quad E(v(-\delta)(T)) = (1 - T/\beta)^{-\alpha}.$$

Edellisissä luvussa 2 diskonttauksen yhteydessä on lähdetty siitä, että varainmenoa varten tehtävän varauksen suuruus lasketaan Thie-len differentiaaliyhtälössä esiintyvällä diskonttaustekijällä, jolloin tulos on, että stokastisen mallin varauksen on oltava tekijän $\exp 1/6 \sigma^2 t^3$ verran suurempi kuin deterministisen mallin. Jos taas varauksen suuruus lasketaan vaatimuksesta, että varauksen pitää kasvaa tiettyyn arvoon tietyllä korkoutuvuudella, niin kaavojen (6.2) ja (6.4) mukaan varaukseksi riittää pienempi kuin deterministisen mallin varaus. Tämä on siitä merkillinen tulos, että stokastisuuden tuominen mukaan prolognointiin luulisi suurentavan varausvaatimusta: Onhan perättäisiltä vuosilta saatavat tuotot suurempia, jos vuotuiset tuotot ovat keskenään yhtäsuuria (esimerkiksi 10 % ja 10 %) kuin, jos ne vaihtelisivat siten että keskiarvo säilyy (esimerkiksi 0 % ja 20 %). Näinollen diskonttauksella saatava varaus vastaa varauksen suuruutta koskevaa ennakkokäsitystä.

YHTEENVETO

Tässä työssä on tarkasteltu, miten korkoutuvuuden ja kuolevuuden satunnaiset vaihtelut muuttavat diskonttauksen, prolognoinnin ja kuolemanvaraturvan lausekkeitä deterministisen teorian lausekkeihin verrattuna. Kuolevuuden satunnaisuuden merkitys suomalaisessa henkivakuutustoiminnassa todetaan mitättömäksi. Sen sijaan korkoutuvuudella on suuri merkitys erityisesti pitkällä tarkasteluajanjaksoilla. Satunnaisuuden mukaan tuominen diskonttaukseen suurentaa keskimääräistä diskonttaus- ja prolognointitekijää sitä enemmän, mitä suurempi varianssi ja pidempi diskonttausväli ovat.

Käytetyt korkoutuvuuden odotusarvot on johdettu olettamalla korkoutuvuuden olevan tarkasteltavalla ajanjaksolla jatkuva funktio ja integroimalla jatkuvien funktioiden ääretönulotteisessa Banach-avaruudessa yli kaikkien mahdollisten korkoutuvuuksien Gaussin mitan suhteen. Avaruuden mitta edustaa prosessia, jossa korkoutuvuus jonain hetkenä on normaalisti jakautunut keskiarvona edellisen ajanhetken korkoutuvuus, kun tarkastellaan äärellistä määrää ajanhetkiä. Ajanhetkien määrän annetaan kasvaa rajatta, jolloin saadaan haluttu odotusarvo. Odotusarvon kaavan johto pohjautuu funktionaalianalyysin tuloksiin. Lisäksi tutkitaan integrointia gamma-mitan suhteen äärellisulotteisissa avaruuksissa. Ei voida todistaa, että näissä avaruuksissa saatujen lausekkeiden raja-arvot olisi johdettavissa minkään ääretönulotteisen avaruuden mitan avulla. Siitä huolimatta tuloksille saadaan tyydyttävä tulkinta.

Kuolevuus ei ole samanlainen prosessi kuin korkoutuvuus, joten sitä ei voi integroida Gaussin mitan suhteen. Itse asiassa kuolevuuden sisältävät odotusarvot on helpompi johtaa kuin kuin korkoutuvuuden, mutta niiden kohdalla joudutaan tyytymään monimutkaisemmin laskettaviin lausekkeisiin.

Korkoutuvuuden ja kuolevuuden integroimalla johdettuja tuloksia pystytään vertailemaan stokastisen differentiaaliyhtälön avulla saatuihin odotusarvoihin ja selvittämään, millaisilla prosesseilla korkoutuvuus ja kuolevuus on kuvattavissa stokastisen differentiaaliyhtälön avulla. Samalla löytyy tulkinta kuolemantapausturvan vastuukertamaksun lausekkeelle.

LIITE

FUNKTIOANALYYSIN TERMINOLOGIAA

Tässä liitteessä esitetään lyhyesti tässä työssä esiintyviä funktionaalianalyysin käsitteitä lähinnä muistinpalautukseksi sellaisia lukijoita varten, jotka tuntevat ennestään funktionaalianalyysia.

Banach-avaruus on normiavaruus, joka on norminsa generoiman metriikan suhteen täydellinen.

Hilbert-avaruus on sisätuloavaruus, joka on norminsa generoiman metriikan suhteen täydellinen.

Topologinen avaruus on lokaalisti kompakti, jos sen jokaisella pisteellä on kompakti ympäristö. Normiavaruus on lokaalisti kompakti, jos ja vain jos se on äärellisulotteinen.

Topologinen avaruus on X täysin säännöllinen, jos sen jokaisella pisteellä x ja pisteen x ympäristöllä U on olemassa sellainen jatkuva kuvaus $f: X \rightarrow [0,1]$, että $f(x) = 0$ ja $f(X-U) = \{1\}$.

Vektoriavaruuden alijoukko C on konvekksi, jos kaikilla alkioilla $x, y \in C$ ja $0 \leq t \leq 1$, $tx + (1-t)y \in C$. Vektoriavaruus on lokaalisti konvekksi, jos sen jokaisella alkiolla on konvekksi ympäristö.

Banach-avaruus on refleksiivinen, jos se on algebrasomorfinen biduaalinsa kanssa. Biduaali on duaalin duaali.

Banach-avaruuden X heikko topologia $\sigma(X, X')$ on karkein topologia, jonka suhteen sen kaikki funktionaalit ovat jatkuvia.

Olkoot A ja B joukkoja. Funktiojoukko $\{f: A \rightarrow B\}$ erottaa joukon A pisteet, jos jokaista paria $(x, y) \in A^2$ kohti on olemassa joukon sellainen funktio f , että $f(x) \neq f(y)$.

$(I, \leq)$ on suunnattu joukko, jos $\leq$ on joukon I sellainen binäärirelaatio, että se on (i) transitiivinen, (ii) refleksiivinen ja

(iii) joukon I jokaisia alkioita m ja n kohti on olemassa sellainen alkio p , että $m \leq p$ ja $n \leq p$.

Jos A on joukko, I suunnattu joukko ja $f: I \rightarrow A$ kuvaus, sanotaan kuvausta f verkoksi ja merkitään $(f_n)_{n \in I}$.

Maininnat

Kiitän apulaisprofessori Kari Ylistä siitä suuresta avusta, jota hän antoi minulle selvittäessäni lukujen 1 ja 2 teoriaa.

Tämän työn aihe sai alkunsa Suomen Aktuaariyhdistyksen ja Rolf Nevanlinnan säätiön elokuussa 1991 Hyvinkäällä järjestämästä koulutustilaisuudesta Stochastic Models in Finance and Life Insurance.

KIRJALLISUUS

- [1] Schwartz, L.: Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical measures, Oxford Univ. Press (1973)
- [2] Skorohod, A.V.: Integration in Hilbert Space, Springer Verlag (1974)
- [3] Ledoux, M. and Talagrand, M.: Probability in Banach Spaces, Springer Verlag (1991)
- [4] Ylinen, K.: Mitat ja integrointi topologisissa avaruuksissa, luentosarja, Turun yliopiston matematiikan laitos (1981)
Ks. myös Bourbaki, N., Éléments de mathématique, Livre VI, Intégration, Hermann (1965)
- [5] Ylinen, K.: Topologiset vektoriavarauudet, luentosarja, Turun yliopiston matematiikan laitos (1980)
Ks. myös Bourbaki, N., Éléments de mathématique, Livre V, Espaces vectoriels topologiques, Hermann (1966)
- [6] Norberg, R.: Scand.Act.J. 1990, no 1-2, 14-33 (1990)
- [7] Berberian, S.K.: Lectures in Functional Analysis and Operator Theory, Springer Verlag (1973)
- [8] Rao, M.M., Stochastic Processes and Integration, Sijthoff and Noordhoff (1979)
- [9] Rudin, W.: Real and Complex Analysis, McGraw-Hill (1974)
- [10] Dufresne, D., Ins. Math. and Econ. 8, 187-201 (1989)
- [11] Waters, H.R., yksityinen tiedonanto liittyen hänen esityksensä Sickness Insurance, Some Simple Stochastic Interest Rate Models and the Present Value of the Profit on a Portfolio of Sickness/Life Insurance Policies, seminaari Stochastic Models in Finance and Life Insurance, Hyvinkää (1991)
- [12] Spiegel, M.R.: Mathematical Handbook, McGraw-Hill Book Co (1968)
- [13] Ruohonen, M.: Todennäköisyyslaskennan jatkokurssi, luentosarja, Turun yliopiston sovelletun matematiikan laitos (1977)
- [14] Gihman, I.I., Skorohod, A.V.: Stochastic Differential Equations, Springer Verlag (1972)
- [15] Koskinen, S., yksityinen tiedonanto, yhteenveto suomalaisten henkivakuutusyhtiöiden yksilöllisten henkivakuutusten vakuutettujen kuolevuudesta vuosina 1972-1984 (1991)