# Eläkemenoennusteen indeksiriippuvuudesta

**Suppea SHV-työ**

Roman Goebel

10. lokakuuta 2021

**Abstract**

The purchasing power of Finnish statutory earnings-related pensions is maintained by making annual index adjustments, which depend linearly on inflation and the development of general earnings levels, to accrued pension rights. A key part of the financial planning of pension systems is to forecast the time series of annual pension expenditure $E(t)$. As index adjustments have a direct impact on pension expenditure, assumed future index development is commonly used as a parameter in a pension expenditure forecast model.

This exercise presents a formula by which the effect of assumed future index adjustments on a pension expenditure forecast can be determined outside the forecast model. The determination of the quantities present in the formula itself is approached from the perspective of an inverse problem and a solution is presented to it.

While the problem set up deals with index adjustments, the solution leads to a number of interesting side results. From the quantities present in the formula, it can be deduced how pension rights develop in the forecast model. This information can be used both in the analysis of the forecast model and, for example, in examining the impact of the earnings trend of the forecast population. The quantities also provide a way of examining the intergenerational effects of changes in pension laws. The formula itself can also be applied to the study of the stochastic behaviour of index dependence.

# Sisällysluettelo

# 1 Johdanto

Vuodesta 2005 alkaen lakisääteiset työeläkkeet ovat karttuneet vuosittaisista ansioista *työuramallin* mukaisesti, eli kunkin vuoden ansioista lasketaan karttunut nimelliseläke. Tähän yleisperiaatteeseen on lukuisia poikkeuksia, kuten työkyvyttömyyseläkkeiden tulevan ajan eläkkeen laskenta, jossa tarkasteltavat vuodet kiinnittyvät vasta eläketapahtuman myötä muistuttaen eläkepalkkaan ja eläkeaikaan perustuvaa laskentatekniikkaa. Lisäksi eläkkeen alkumäärään määrän voi vaikuttaa varhennusvähennyksen tai lykkäyskorotuksen kaltaiset aikasidonnaiset tekijät. Myös maksussa oleva eläke voi muuttua esimerkiksi työkyvyttömyyseläkkeen kertokorotuksen tai leskeneläkkeen vähennyksen myötä.

Eläkkeiden ostovoima säilytetään tekemällä eläkeoikeuksiin vuosittain indeksitarkistukset, jotka riippuvat lineaarisesti inflaatiosta ja yleisen ansiotason kehityksestä. Indeksitarkistuksilla on suora vaikutus eläkemenoon.

Eläkejärjestelmien rahoitussuunnittelussa keskeinen osatehtävä on ennustaa vuosittaisen eläkemenon aikasarja $E(t)$ valituilla *indeksioletuksilla*, eli oletuksilla indeksilukujen tulevasta kehittymisestä. Ennuste laaditaan yleensä eläkemenoennustemallilla, jolle indeksioletukset annetaan parametreina. Ajoittain eläkemenoennustetta on tarve tarkastella muuttuneilla indeksioletuksilla tai joskus tarkastelun kohteena saattaa olla nimenomaan eläkemenoennusteen indeksiriippuvuus.

Tässä harjoitustyössä käsitellään tätä käytännön ongelmaa esittämällä kaava, jolla eläkemenon indeksitarkistukset voidaan siirtää ennustemallin ulkopuolelle. Kaavassa esiintyvien suureiden määrittämistä lähestytään inversio-ongelman näkökulmasta ja siihen esitetään ratkaisu. Menetelmä pyritään esittämään konkreettisena, mutta samalla riittävän yleisellä tasolla.

Osiossa 2 käsitellään työeläkkeiden indeksitarkistuksia ja niihin liittyvää lainsäädäntöä. Osiossa 3 määritellään, mitä tässä työssä tarkoitetaan eläkemenoennustemallilla sekä esitellään eläkemenoennusteen *faktorisaatiokaava* (4), joka on keskeinen oletus tässä työssä.

Harjoitustyön varsinainen päätulos on osiossa 4 esiteltävä menetelmä, jolla faktorisaatiokaavassa esiintyvät suureet voidaan laskea. Menetelmä perustuu lineaariyhtälöryhmän ratkaisuun, mutta asetelma on jonkin verran normaalia monimutkaisempi. Tämän vuoksi menetelmän perustelu esitetään liitteessä B, mutta siihen tutustuminen ei ole menetelmän soveltajalle välttämätöntä. Sen sijaan osiossa 5 kuvataan menetelmän soveltamista keinotekoiseen, mutta varsin todenmukaiseen, esimerkkiin perustuen. Esimerkki antaa hyvän käsityksen menetelmän toimivuudesta.

Kaavan sovelluksia käsitellään osiossa 6. Suureista voidaan päätellä, miten eläkeoikeudet kehittyvät ennustemallissa. Tätä informaatiota voidaan hyödyntää ennustemallin analysoinnissa. Myös eläkejärjestelmäkohtaisen keskimääräisen ansiotasokehityksen (ansioiden skaalaus) vaikutus voidaan siirtää ennustemallin ulkopuolelle.

Kaavaa voidaan soveltaa myös indeksiriippuvuuden stokastisen käyttäytymisen tarkasteluun, mikä on ollut varsinainen motiivi menetelmän kehittämiselle. Nykyiset indeksimääritelmät mahdollistavat yksinkertaisella tavalla tarkastelun rakentamisen inflaation ja yleisen ansiotasokehityksen mallinnuksen ympärille, mikä luo jo hyvän pohjan monipuoliselle Asset/Liability -mallinnukselle.

# 2 Työeläkkeiden indeksitarkistukset

Työeläkkeiden indeksitarkistukset ovat lakisääteisiä, mutta indeksointia koskevat säännöt ovat muuttuneet vuosien varrella. Alun perin TEL-järjestelmässä sekä vastaisia eläkeoikeuksia että maksussa olevia eläkkeitä tarkistettiin vain TEL-puoliväli-indeksillä. Myöhemmin näiden kahden ryhmän indeksitarkistukset eriytyivät.

Tässä työssä tarkastellaan selkeyden vuoksi voimassa olevan lainsäädännön mukaisia indeksejä.

## 2.1 Indeksitarkistusten määritelmät lainsäädännössä

Työeläkkeisiin sovellettavien indeksien määritelmistä ja vahvistamisesta säädetään työntekijän eläkelain (395/2006, TyEL, [1]) 6 luvussa. Muualla työeläkelainsäädännössä viitataan TyEL:n määritelmiin.

TyEL 96 § mukaan eläkettä laskettaessa vuosiansiot tarkistetaan eläkkeen alkamisvuoden tasoon *palkkakertoimella*, jossa palkkatason muutoksen painokerroin on 0,8 ja hintatason muutoksen painokerroin on 0,2. Palkkakertoimella tarkistetaan myös muut TyEL:n ansiorajat, rahamäärät ja rajamäärät sekä osittaisen varhennetun vanhuuseläkkeen jälkeen maksettavaa muuta eläkettä tai osittaisen varhennetun vanhuuseläkkeen jälkimmäistä eläkeosuutta laskettaessa osittaisen varhennetun vanhuuseläkkeen perusteen vielä myöntämättä oleva eläkeosuus.

TyEL 98 § mukaan maksussa oleva eläke tarkistetaan vuosittain tammikuun alusta lukien *työeläkeindeksillä*, jota laskettaessa palkkatason muutoksen painokerroin on 0,2 ja hintatason muutoksen painokerroin on 0,8.

TyEL 97 § ja 99 § mukaan palkkakertoimen ja työeläkeindeksin perusteena käytetään Tilastokeskuksen laskemien ansiotaso- ja kuluttajahintaindeksin vuotuisia muutoksia edellisen kalenterivuoden kolmannella vuosineljänneksellä.

TyEL 100 §:n mukaan sosiaali- ja terveysministeriö antaa asetuksella palkkakertoimen ja työeläkeindeksin kullekin kalenterivuodelle viimeistään kaksi kuukautta ennen sen kalenterivuoden alkua, josta niitä sovelletaan.

Palkkakerrointa ja työeläkeindeksiä kutsutaan *TyEL-indekseiksi*.

## 2.2 Indeksilukujen laskenta ja vahvistaminen

TyEL-indeksit ovat pistelukuindeksejä, jotka johdetaan alla määritellyillä kaavoilla (1) ja (2) Tilastokeskuksen julkaisemasta *kuluttajahintaindeksistä* ja *ansiotasoindeksistä.* Tarkastelussa on mainittujen indeksien suhteellinen vuosimuutos edeltävän vuoden kolmannen neljänneksen tilanteessa. Käytäntönä on, että Eläketurvakeskus suorittaa indeksilukujen laskennan ennen sosiaali- ja terveysministeriön päätöstä asetuksen antamisesta. TyEL-indeksien laskennassa ansiotason muutos perustuu aina ennakolliseen tietoon. Mahdollinen ennakollisen tiedon tarkentumisesta syntyvä virhe tulee tavallisesti korjatuksi laskettaessa TyEL-indeksilukuja seuraavalle vuodelle. [4]

Esityksen yksinkertaistamiseksi otetaan pistelukuindekseille käyttöön vuotta $v$ koskien seuraavat merkinnät:

| | |
|---|---|
| $W_v$ | vuoden $v-1$ kolmannen neljänneksen ennakollinen ansiotasoindeksi |
| $P_v$ | vuoden $v-1$ kolmannen neljänneksen kuluttajahintaindeksi |
| $I_v^W$ | vuoden $v$ palkkakerroin |
| $I_v^P$ | vuoden $v$ työeläkeindeksi |

Edellä olevilla merkinnöillä palkkakerroin toteuttaa yhtälön

$$\frac{I_v^W}{I_{v-1}^W} = 0,8 \times \frac{W_v}{W_{v-1}} + 0,2 \times \frac{P_v}{P_{v-1}}, \tag{1}$$

ja työeläkeindeksi toteuttaa yhtälön

$$\frac{I_v^P}{I_{v-1}^P} = 0,2 \times \frac{W_v}{W_{v-1}} + 0,8 \times \frac{P_v}{P_{v-1}}. \tag{2}$$

Nämä yhtälöt toimivat myös indeksilukujen rekursiivisina määritelminä vuodesta 2017 alkaen, jolloin $I_{2017}^W = 1,389$ ja $I_{2017}^P = 2534$. Ennen vuotta 2017 indeksilukujen laskennassa huomioitiin myös työntekijän työeläkevakuutusmaksun muutos, mikä jossain määrin vaikeutti mallintamista [6, s. 62].

Palkkakertoimen ja työeläkeindeksin ja palkka- ja hintainflaation keskinäisiin riippuvuuksiin palataan stokastisen eläkemenoennusteen yhteydessä osiossa 6.4.

## 2.3 Eläkkeen indeksitarkistus

Täsmennetään jatkoa varten terminologia ja merkinnät. Indeksillä $I$ tarkoitetaan pistelukuindeksiä $I_v$ vuosille $v = 0, \ldots, T$. Vuotta $v = 0$ sanotaan *lähtövuodeksi* ja pistelukua $I_0$ indeksin *lähtöarvoksi.* Jakolasku- ja muiden ongelmien välttämiseksi oletetaan, että kaikki indeksiluvut ovat positiivisia lukuja.

Indeksin perusteella voidaan määritellä vuosille $v = 1, \dots, T$ *indeksi-inflaatio* $i_v$ ja *indeksitekijä* $1 + i_v$ kaavoilla

$$i_v = \frac{I_v}{I_{v-1}} - 1 \quad \text{ja} \quad 1 + i_v = \frac{I_v}{I_{v-1}}.$$

Indeksi-inflaatiot ja indeksitekijät ovat lukujonoja. Kun kyse ei ole yksittäisen vuoden $v$ tarkastelusta, vaan koko lukujonosta, merkitään näitä symboleilla $i$ ja $1 + i$.

Indeksi-inflaation ja indeksitekijän välinen yhteys on ilmeinen. Kun indeksin lähtöarvo $I_0$ tunnetaan, saadaan myös alkuperäinen indeksi $I$ kumulatiivisesti kaavalla

$$I_v = I_0 \cdot (1 + i_1) \cdots (1 + i_v).$$

Kun pisteindeksi $I$ tunnetaan, suureen $E$ indeksoinnilla vuodesta $x$ vuoteen $y$, missä $x, y = 0, \dots, T$ tarkoitetaan suureen $E$ kertomista *indeksointikertoimella*

$$r(x, y, I) = \frac{I_y}{I_x} = (1 + i_{x+1}) \cdots (1 + i_y).$$

Indeksoinnissa lähtöarvo $I_0$ supistuu pois, joten indeksointi voidaan määritellä, kun tunnetaan $i$ tai $1 + i$.

Työeläkkeiden indeksitarkistukset ovat kaksivaiheisia. Työeläke lasketaan eri vuosien $x$ tasoisista tiedoista. Eläkkeen laskennan yhteydessä kaikki eläkkeeseen vaikuttavat ansiot, rahamäärät ja rajamäärät korotetaan eläkkeen alkamisvuoden $y$ tasoon palkkakertoimella $I^W$. Tämän jälkeen eläkettä korotetaan maksuvuoden $t$ tasoon työeläkeindeksillä $I^P$. Tämä johtaa tarkastelemaan kaksivaiheisia indeksointikertoimia

$$r(x, y, t, I^W, I^P) = \frac{I_y^W}{I_x^W} \frac{I_t^P}{I_y^P} = (1 + i_{x+1}^W) \cdots (1 + i_y^W) \cdot (1 + i_{y+1}^P) \cdots (1 + i_t^P). \quad (3)$$

Tässäkin tapauksessa indeksointikerroin määräytyy yksikäsitteisesti, kun tunnetaan $i^W$ ja $i^P$ tai $1 + i^W$ ja $1 + i^P$.

# 3 Eläkemenoennusteet

Eläkejärjestelmien rahoitussuunnittelussa keskeinen osatehtävä on ennustaa vuosittaisen eläkemenon aikasarja $E(t)$. Eläkemenoennustetta tarvitaan lyhyellä aikavälillä esimerkiksi budjetoinnissa ja likviditeetin hallinnassa. Pitkän aikavälin eläkemenoennustetta voidaan käyttää osana maksutason suunnittelua tai eläkeoikeuksiin liittyvien pääoma-arvojen arvioinnissa.

## 3.1 Eläkemenon ennustemalli

Eläkemenoa voidaan pitää monen eri ennalta tuntemattoman osatekijän vaikutuksesta syntyvänä stokastisena suurena. Käytännön syyt ajavat yleensä tarkastelemaan eläkemenoa kuitenkin valittuihin perusoletuksiin, tunnettuun lainsäädäntöön ja käytössä oleviin lähtötietoihin liittyvänä deterministisenä suureena. Oletusten valintaan liittyvä herkkyys saadaan esiin varioimalla oletuksia.

Tässä harjoitustyössä ei ole tarvetta antaa juurikaan yllä kuvattua tarkempaa määritelmää eläkemenon ennustemallille. Käytännössä ennustemalli on tietokoneohjelma, joka tuottaa lähtötietoihin, oletuksiin ja tunnettuun lainsäädäntöön liittyvän eläkemenoennusteen. Ennustemallit ovat tyypillisesti monimutkaisia, mikä johtuu sekä eläketurvan rakenteesta että lähtötietojen laajuudesta. Nykypäivän laskentatehosta huolimatta yksittäinen ajo voi kestää joitain sekunteja, minuutteja tai pidemmänkin aikaa.

Ainoa ennustemallille asetettava vaatimus on, että TyEL-indeksioletuksia on voitava vapaasti muuttaa. Menetelmän soveltamista helpottaa, jos ennustemallin tulokset kullakin indeksioletuksella voidaan tuottaa eräajona yhteen taulukkoon. Ajojen suorittaminen yksitellen ja tulosten manuaalinen kokoaminen on työläämpää, mutta haittaa siitä ei ole.

## 3.2 Indeksitarkistusten vaikutus eläkemenoennusteeseen

Tarkastellaan eläkemenon ennustemallia $E$, joka tuottaa annetulla indeksioletuksella $I = (I^W, I^P)$ vuosittaisen eläkemenon $E(t, I) = E(t, I^W, I^P)$ vuosille $t = 0, \ldots, T$ muiden oletusten säilyessä ennallaan. Indeksioletuksella tarkoitetaan tässä palkkakertoimen ja työeläkeindeksin pistelukujen vuosien $v = 0, \ldots, T$ ennusteiden muodostamaa lukujonoparia $(I_v^W, I_v^P)$. Jakolasku- ja muiden käsitteellisten ongelmien välttämiseksi sovitaan edelleen, että kaikki pisteluvut ovat positiivisia lukuja.

Oletetaan, että on olemassa suureet $E(x, y, t)$, joilla ennustemallin tuottama eläkemenoennuste voidaan kaikilla indeksioletuksilla $I = (I^W, I^P)$ esittää muodossa

$$E(t, I) = \sum_{0 \leq x \leq y \leq t} E(x, y, t) \cdot r(x, y, t, I), \tag{4}$$

missä $r(x, y, t, I) = r(x, y, t, I^W, I^P)$ on määritelty kaavassa (3).

Suuretta $E(x, y, t)$ kutsutaan tässä työssä *indeksoimattomaksi eläkemenokomponentiksi* ja sen voidaan intuitiivisesti ajatella tarkoittavan sitä osaa vuonna $t$ maksettavasta eläkemenosta, joka on karttunut vuonna $x$ ja alkanut vuonna $y$. Suure $r(x, y, t, I)$ vastaa määritelmänsä perusteella indeksioletukseen $I$ liittyvää *indeksointikerrointa*, jolla vuonna $x$ karttunut, vuonna $y$ alkanut nimelliseläke indeksoidaan maksuvuoden $t$ tasoon.

Kaavaa (4) kutsutaan tässä työssä *faktorisaatiokaavaksi*. Tarkastellaan ensin sen rakennetta ja merkitystä. Kaavassa kutakin lukua $t$ vastaavien summattavien määrä on *kolmioluku*

$$n(t+1) = (t+1)(t+2)/2.$$

Kaavassa esiintyvät suureet $E(x, y, t)$ eivät riipu tarkasteltavasta indeksioletuksesta $I$. Toisaalta kaavassa esiintyvät indeksointikertoimet voidaan suoraviivaisesti laskea mille tahansa indeksioletukselle $I$ kaavalla (3). Näin ollen, jos suureet $E(x, y, t)$ tunnetaan, kaavan (4) avulla voidaan myös $E(t, I)$ laskea mille tahansa indeksioletukselle $I$. Suureiden $E(x, y, t)$ lukumäärä koko tarkastelujaksolla $t = 0, \ldots, T$ on *tetraedriluku*

$$m(T+1) = (T+1)(T+2)(T+3)/6.$$

Kaavassa indeksioletuksina annetaan myös lähtövuoden $t = 0$ indeksit ja kaava tuottaa eläkemenon myös lähtövuodelle. Käytännössä ensimmäinen ennustevuosi on $t = 1$ ja vuoden $t = 0$ eläkemeno ja indeksien lähtöarvot ovat entuudestaan tunnettuja. Vuosi $t = 0$ on sisällytetty kaavaan eheyden vuoksi, mutta välttämätöntä se ei ole. Sen sijaan välttämätöntä on, että suureet $E(x, y, t)$ voidaan määrittää myös, kun $x = 0$. Suureen $E(0, y, t)$ tulkitaan tarkoittavan lähtövuoteen mennessä karttunutta eläkettä, ja kun myös $y = 0$, eläkkeen tulkitaan olleen jo lähtöhetkellä maksussa.

Tässä työssä kaavaa (4) pidetään nimenomaan oletuksena, mikä tarkoittaa, että tulokset on kunkin eläkemenoennustemallin kohdalla erikseen validoitava. Oletus on heuristisesti jokseenkin perusteltavissa eläkkeenlaskentaa koskevien sääntöjen perusteella, jotka eläkemenoennustemallikin pyrkii huomioimaan. Laskettaessa yksittäiselle henkilölle maksettavaa eläkettä, ansiot ja vapaakirjat muunnetaan eläkkeen alkuvuoden tasoon palkkakertoimella ja siitä eteenpäin eläkettä indeksoidaan työeläkeindeksillä. Myös työkyvyttömyyseläkkeen tulevan ajan ansiot indeksoidaan palkkakertoimella, kuten myös muut rahamäärät.

Suureet $E(x, y, t)$ kuvaavat koko eläkemenoa. Siksi perinteinen mielikuva henkilötason eläkekarttumasta voi johtaa vääriin ennakkokäsityksiin – etenkin juuri työkyvyttömyyseläkkeiden osalta. Eräissä tilanteissa jotkin suureista $E(x, y, t)$ saattavat olla myös negatiivisia, mitä ei pidä tulkita virhetilanteeksi.

Kuten yllä todettiin, kaavaa (4) käyttäen eläkemenoennuste voidaan laskea toisilla indeksioletuksilla ennustemallin ulkopuolella. Tämä mahdollistaa indeksioletusten nopean muuttamisen esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmistolla. Muita sovelluskohteita ovat esimerkiksi eläkemenon laskentatehokas simulointi useilla eri indeksioletuksilla. Lisäksi suureen $E(x, y, t)$ tarkastelu voi auttaa tarkastelemaan itse mallin toimintaa esimerkiksi animoimalla. Voidaan tavallaan ajatella, että lähtötiedot ja muut perusoletukset kuin TyEL-indeksioletukset koodautuvat näihin suureisiin. Sovelluskohteisiin palataan myöhemmin tässä työssä.

# 4 Eläkemenokomponenttien laskenta

Suureiden $E(x, y, t)$ laskenta on mahdollisesti otettu huomioon ennustemallia jo suunniteltaessa tai niiden laskenta voidaan mahdollisesti kevyellä testaustyöllä tuoda mallin sisälle, jolloin niitä ei tarvitse laskea mallin ulkopuolella.

Tässä harjoitustyössä esiteltävä päätulos on menetelmä, jolla kaavassa (4) esiintyvät suureet $E(x, y, t)$ voidaan laskea ennustemallia mitenkään muuttamatta, kun tunnetaan ennustemallin tulokset sopivilla indeksioletuksilla. Tehtävää lähestytään siis *inversio-ongelman* näkökulmasta [8]. Ongelma on samankaltainen kuin polynomifunktion kertoimien määrittäminen: jos polynomin arvot tunnetaan sopivassa pistejoukossa, polynomin kertoimet voidaan laskea. Lähestymistavassa on myös selviä yhtymäkohtia koneoppimiseen, jota on sovellettu Asset/Liability -mallinnuksen tehostamiseen [5].

**Vaihe 1.** *Kertakorotuskanta.* Suureiden $E(x, y, t)$ laskennassa apuna käytettävät indeksioletukset on syytä valita siten, että ne ovat mallin normaalin sovellusalueen piirissä, jotta ennustemallin tulokset ovat luotettavia. Niiden on katettava koko laskentajakso, eli vuodet $v = 0, \ldots, T$. Myös käytettävien indeksioletusten määrään kannattaa kiinnittää huomiota.

Valitaan[1] $a > 0$. Vuoteen $t = 0, \ldots, T$ kohdistuvalla *kertakorotuksella* tarkoitetaan tässä työssä sellaista indeksiä $I_v^t$, joka voidaan johtaa muotoa

$$i_v^t = \begin{cases} a, & \text{jos } 0 < t = v \\ 0, & \text{muulloin} \end{cases}$$

olevasta indeksi-inflaatiosta ja indeksin lähtöarvosta $I_0^t$. Silloin, kun kertakorotus kohdistuu lähtövuoteen $t = 0$, indeksi on lähtöarvon tasolla koko tarkastelujakson.

Muodostetaan seuraavaksi kertakorotuksien avulla jokaista lukuparia $(X, Y)$, missä $0 \leq X \leq Y \leq T$, kohti vuosille $v = 0, \ldots, T$ indeksioletus $I_{(X,Y)}$, jonka palkkakerroin $I_{(X,Y)}^W = I^X$ ja työeläkeindeksi $I_{(X,Y)}^P = I^Y$. Näin muodostettua indeksioletusperhettä $I_{(X,Y)}$ kutsutaan tässä työssä *kertakorotuskannaksi* ja sen jäsenten lukumäärä on kolmioluku $n(T + 1)$.

**Vaihe 2.** *Eläkemenokomponenttien laskenta.* Tavoitteena on esittää kaikilla $0 \leq x \leq y \leq t \leq T$ kaava suureille $E(x, y, t)$. Kiinnitetään tarkastelu yhteen vuoteen $t = 0, \ldots, T$ ja merkitään kyseisen vuoden $t$ eläkemenoa indeksioletuksella $I_{(X,Y)}$ laskettuna lyhyesti

$$E(t, I_{(X,Y)}) = E(X, Y).$$

Parien $(x, y)$ ja indeksioletusten välille saadaan merkintöjen kautta luonnollinen

[1] Luku $a$ voi olla esimerkiksi 2/100, joka ei asettane millekään eläkemenoennustemallille laskennallisia haasteita.

vastaavuus $(x, y) \leftrightarrow (X, Y)$. Määritellään tätä vastaavuutta hyödyntäen

$$E(x, y, t) = s(x, y, t)/a^2, \tag{5}$$

missä apusuure $s(x, y, t)$ määritellään neljässä eri tapauksessa alla esitetyin lausekkein. Menetelmän perustelu esitetään liitteessä B.

**Tapaus** 1°**:** $x < y < t$.

$$E(X, Y) - E(X, Y + 1) + E(X + 1, Y + 1) - E(X + 1, Y).$$

**Tapaus** 2°**:** $x = y < t$.

$$E(X, Y) - E(X, Y + 1) + (1 + a)(E(0, Y + 1) - E(0, Y)).$$

**Tapaus** 3°**:** $x < y = t$.

$$E(X,Y)-E(X+1,Y)+(1+a)(E(X+1,X+1)-E(X,X)+E(0,X)-E(0,X+1)).$$

**Tapaus** 4°**:** $x = y = t$.

$$a((1 + a)E(0, 0) - E(X, Y)).$$

# 5 Esimerkki

Tarkastellaan menetelmän soveltamista keinotekoisen eläkejärjestelmän euromääräiseen eläkemenoennusteeseen vuosille 2021–2100; merkitään näitä $t = 1, \ldots, 80$. Ennusteen lähtövuosi on 2020; merkitään sitä $t = 0$. Pysäytetään aluksi ennustepopulaation ansiokehitys, jotta menetelmän joustavuus tulee paremmin ilmi.

**Vaihe 1.** *Eräajo kertakorotuksilla.* Valitaan parametri $a = 1$. Muodostetaan ennustemallin eräajon ohjaustiedosto osiossa 4 määritellyn kertakorotuskannan jäsenistä $I_{(X,Y)}$, missä $0 \leq X \leq Y \leq 80$. Näitä jäseniä on yhteensä $81 \cdot 82/2 = 3\,321$ kappaletta. Yksittäinen jäsen $I_{(X,Y)}$ vastaa indeksioletusta, jossa palkkakerroin kaksinkertaistuu lähtövuoden tasosta vuonna $X$ ja vastaavasti työeläkeindeksi kaksinkertaistuu lähtövuoden tasosta vuonna $Y$. Jos kuitenkin $X = 0$ tai $Y = 0$, vastaava indeksi on koko ennustejakson ajan lähtövuoden tasolla.

Eräajon tulostaulukossa T1 rivit 1–3 321 vastaavat eri indeksioletuksia ja sarakkeet 1–80 vuosia $t = 1, \ldots, 80$; toisin sanoen jokaisella rivillä on yksittäisen eläkemenoennusteen euromääräinen aikasarja. Taulukossa on yhteensä $3\,321 \cdot 80 = 265\,680$ solua, mutta seuraavassa vaiheessa suureiden $E(x, y, t)$ laskentaan näistä tarvitaan vain $81 \cdot 82 \cdot 83/6 - 1 = 91\,880$ solua. Luku poikkeaa osiossa 3.2 määritellystä tetraedriluvusta $m(81)$ yhdellä siksi, että lähtövuoden $t = 0$ eläkemenoa ei nyt tarkastella.

Liitteessä A esitetään taulukosta T1 lyhennelmä, joka rajoittuu vain vuosiin 2021–2024, jotka vastaavat vuosia $t = 1, \ldots, 4$. Taulukossa muuttujat on numeroitu käyttäen todellisia vuosia. Lisäksi lyhennelmään on olennaisen korostamiseksi rajattu vain ne solut, joita seuraavassa vaiheessa tarvitaan suureiden $E(x, y, t)$ laskentaan. Taulukon rivit on järjestetty nousevaan järjestykseen ensin $Y$-muuttujan ja sitten $X$-muuttujan suhteen, jotta taulukosta muodostuu yhtenäinen. Tällöin taulukon ensimmäinen rivi vastaa indeksioletusta $I_{(0,0)}$, jossa eläkemenoennuste on koko ennustejakson ajan lähtövuoden indeksitasossa. Muilla riveillä eläkemeno on parametrin $a = 1$ valinnasta johtuen karkealla mittapuulla noin kaksinkertainen.

**Vaihe 2.** *Eläkemenokomponenttien laskenta.* Lasketaan taulukkoon T2, esimerkiksi taulukkolaskentaohjelmistossa, jokaiselle $t = 1, \ldots, 80$ ja jokaiselle kolmikolle $(x, y, t)$, missä $0 \leq x \leq y \leq t$, suure $E(x, y, t)$ osiossa 4 esitetyn kaavan (5) ja taulukon T1 arvojen perusteella. Kaavassa (5) esiintyvän apusuureen $s(x, y, t)$ lauseke valikoituu kolmikon $(x, y, t)$ osoittaman tapauksen 1°–4° perusteella. Lausekkeesta riippuen, $E(x, y, t)$ on enintään kuuden taulukon T1 arvon lineaarikombinaatio, mistä johtuen arvojen laskenta on huomattavan nopeaa.

Taulukon T2 lukujen tulkinnasta ja käyttötarkoituksesta on kerrottu jo osiossa 3.2 kaavan (4) yhteydessä. Tarkastellaan lyhyesti asiaa kuitenkin myös tämän esimerkin lukujen avulla. Liitteessä A taulukosta T2 esitetään lyhennelmä, jonka rakenne vastaa taulukon T1 lyhennelmää. Jokainen taulukon T2 lyhennelmän luku on myös laskettavissa taulukon T1 lyhennelmän luvuista (ja toisinpäin), mikä ilmentää taulukoiden T1 ja T2 välistä dualiteettia.

Taulukon T2 sarakesummat esiintyvät taulukon T1 ensimmäisellä rivillä, joka vastaa eläkemenoennustetta lähtövuoden indeksitasossa. Taulukon T2 ensimmäisen rivin lukujen voi puolestaan intuitiivisesti ajatella tarkoittavan eläkemenoennustetta, joka liittyy lähtövuoden lopun korvausvastuuseen, eli ennen ensimmäistä ennustevuotta alkaneisiin eläkkeisiin. Koska luvut ovat taulukon muihin lukuihin nähden suuria, voi tästä päätellä, että tässä keinotekoisessa esimerkissä on kyse varsin pitkään toimineesta eläkejärjestelmästä. Ensimmäisen rivin aikasarja on myös vasemmalta oikealle laskeva, mikä kielii siitä, että eläkekannassa eläkkeiden päättyvyys dominoi eläkemenoa korottavia tekijöitä, kuten mahdollisia työkyvyttömyyseläkkeiden kertakorotuksia.

Taulukon T2 jokaisella muulla rivillä arvo, joka on ensimmäisenä vasemmalta, on suuruudeltaan noin puolet seuraavasta. Tämä johtuu siitä, että ensimmäisenä maksuvuotena eläke on maksussa keskimäärin vain noin puolen vuoden ajan. Vastaavasti taulukon T2 jokaisen sarakkeen alin luku on selvästi pienin. Näissä eläkemenokomponenteissa eläkkeet ovat sekä karttuneet että maksussa vain osan vuotta, jolloin meno muodostuu luonnollisesta syystä pienemmäksi.

Taulukon T2 rivien järjestyksestä johtuen seassa on myös rivejä, joissa luvut ovat huomattavasti muita suurempia. Näillä riveillä $x = 2020$, eli ne liittyvät eläkemenoon, joka on karttunut ennen ensimmäistä ennustevuotta; pääsääntöisesti siis usean vuoden ajan.

Ennustemallin analysointiin palataan myöhemmin luvussa 6.3, jossa on myös kuva taulukon T2 sarakkeesta, joka liittyy vuoteen 2070.

**Vaihe 3.** *Tulosten tarkastelu.* Menetelmän soveltaminen edellyttää aina validointia, sillä käytetty eläkemenoennuste ei välttämättä toteuta kaavaa (4). Validointi voidaan suorittaa esimerkiksi vertaamalla tuloksia ennustemallin tuloksiin toisilla indeksioletuksilla. Muilta osin menetelmällä on matemaattinen perusta, joka on dokumentoitu tämän harjoitustyön liitteessä B.

Ennusteen laadintahetkellä palkkakertoimen ja työeläkeindeksin odotettiin vuosina 2021–2024 kehittyvän taulukon T3 mukaan. Koska lähtövuoden 2020 palkkakerroin (1,446) ja työeläkeindeksi (2617) tunnetaan, voidaan indeksointikertoimet $r(x, y, t, I)$ helposti muodostaa ja esittää taulukkoa T2 vastaavassa rakenteessa.

Indeksointi voidaan suorittaa ennustemallin ulkopuolella kaavan (4) avulla, eli kertomalla taulukon T2 arvot vastaavilla indeksointikertoimilla ja laskemalla näin saadusta taulukosta sarakesummat. Taulukossa T3 on esitetty nämä tulokset ja verrattu niitä ennustemallilla samoilla indeksioletuksilla muodostettuun eläkemenoon, joka esitetään sarakkeessa "Indeksointi mallissa". Vuosien 2021–2024 osalta sarakkeen "Indeksointi ulkopuolella" tulokset on laskettavissa liitteessä A esitetyn taulukon T2 lyhennelmän lukujen ja indeksointikertoimien avulla. Taulukossa on myös esitetty vastaavat tulokset jokaisen vuosikymmenen 2030–2100 alussa, mutta näiden laskentaan tarvitaan koko taulukko T2 ja koko validoinnissa käytetty indeksioletus.

Eläkemenomallinnukseen liittyy aina epävarmuutta, eikä todellisiin eläkejärjestelmiin liittyviä laskentatuloksia yleensä käsitellä tässä keinotekoisessa esimerkissä käytetyssä eurosenttien tarkkuudessa. Taulukon T3 tulosten vertailu osoittaa, että ero on tämän esimerkin tapauksessa lyhyellä aikavälillä mitätön, mikä viittaa siihen, että kyseinen ennustemalli toteuttaa kaikilta osin kaavaa (4) koskevan oletuksen. Pidemmän aikavälin erot syntynevät pienistä kumuloituvista epätarkkuuksista ennustemallin lukuisissa liukulukuoperaatioissa. Joka tapauksessa erot ovat moniin käyttötarkoituksiin riittävän pieniä.

Huolimatta siitä, että esimerkki käsittelee keinotekoista eläkejärjestelmää, lukujen taustalla on huomattavan yksityiskohtainen eläketurvan mallinnus. Luvut on laadittu käyttäen apuna julkisten alojen eläketurvaa toimeenpanevan Kevan laatimaa valtion eläkejärjestelmän eläkemenoennustemallia, joka sisältää kaikki eläkelajit kattavan työeläkejärjestelmän perusturvan ohella julkisen sektorin lisäeläketurvan ja sotilaseläkejärjestelmän mallinnuksen. Ennustemalli esimerkiksi huomioi kaikki johdanto-osion ensimmäisessä kappaleessa esimerkinomaisesti luetellut eläketurvan piirteet.

Menetelmä osoittautuu siis varsin sovelluskelpoiseksi ainakin Kevan kyseisen eläkemenoennustemallin tapauksessa. Havaittua laskentatarkkuutta voitaneen pitää hyvänä ja samalla on saatu empiiristä lisänäyttöä ennustemallin johdonmukaisesta toiminnasta indeksoinnissa.

# 6 Sovelluksia

Tarkastellaan lopuksi eräitä kaavan (4) käytännönsovelluksia. Näistä merkittävin lienee stokastinen eläkemenoennuste. Tässä työssä esiteltyjen sovellusten lisäksi kaavalla on myös muita sovelluksia, joista mainittakoon esimerkiksi eläkevastuun kehitysennuste sekä siihen liittyvä stokastinen tarkastelu.

## 6.1 Indeksioletusten muuttaminen

Eläkemenoennusteet laaditaan vakiintuneeseen tapaan muun ulkopuolisen tahon, esimerkiksi Eläketurvakeskuksen tai valtiovarainministeriön, laatimien indeksioletusten mukaisesti. Indeksitarkistusten siirtäminen varsinaisen eläkemenoennustemallin ulkopuolelle taulukkolaskentaohjelmiston puolelle tuo joustavuutta ennusteiden päivittämiseen, sillä se ei enää vaadi osaamista eläkemenoennustemallin suorittamisesta.

## 6.2 Ennustepopulaation ansiokehitys

Ansiot vaikuttavat suoraan vuosittaiseen eläkekarttumaan. Eläkemenoennusteen laadinnassa voidaan huomioida esimerkiksi ikä- ja ammattirakenteen muuttuminen ja sen vaikutus ennustepopulaation ansiokehitykseen. Ennustepopulaation ansiokehitykseen voi vaikuttaa myös yleinen ansiotasokehitys. Tätä palkkainflaatiota kuvastavaa kehitystä voidaan mallintaa skaalaamalla ansioita yleisellä ansiotasoindeksillä tai ennustepopulaatioon voidaan soveltaa muutakin vuosittaista ansioiden skaalaustekijää $S = S_v$.

Osion 5 esimerkissä ennustepopulaation ansiokehitys oli pysäytetty. Riittävää olisi ollut, että ennustepopulaation ansiokehitys olisi säilytetty samana eri indeksioletuksilla, vaikkakaan ei välttämättä pysähtyneenä. Ennustepopulaation ansiokehitys voidaan kuitenkin vielä tässä vaiheessa palauttaa toisella tavalla.

**Vaihe 4.** *Ennustepopulaation ansiokehitys.* Koska suureessa $E(x, y, t)$ parametrin $x$ tulkitaan liittyvän vuonna $x$ karttuvaan eläkemenoon, päädytään populaation ansiokehityksen osalta eläkemenoennusteeseen, joka on muotoa $E(t, I, S)$ ja toteuttaa yhtälön

$$E(t, I, S) = \sum_{0 \leq x \leq y \leq t} E(x, y, t) \cdot r(x, y, t, I) \cdot S_x. \tag{6}$$

Kaavassa (6) suureet $E(x, y, t)$ ovat samat kuin kaavassa (4), mikäli $S$ on annettu suhteessa alkuperäiseen ansiokehityksen oletukseen.

Esimerkkitilanteessa eläkemenokomponentit $E(x, y, t)$ oli laadittu pysäytetyllä ansiokehityksellä. Ennusteen laadintahetkellä kyseisen keinotekoisen ennustepopulaation ansioihin odotettiin vaikuttavan vuosina 2021–2100 ansioiden skaalaustekijä, josta esimerkkejä on taulukossa T4. Lähtövuoden skaalaustekijä on 1.

Taulukossa T4 on verrattu aikaisempaan tapaan mallin ulkopuolella kaavalla (6) saatuja laskentatuloksia mallin laskentatuloksiin, jotka esitetään sarakkeessa "Skaalaus mallissa". Tällä kertaa luvut sisältävät sekä indeksoinnin taulukon T3 indeksiluvuilla että ansioiden skaalauksen taulukon T4 skaalaustekijöillä. Sarakkeen "Skaalaus ulkopuolella" luvut on aikaisempaan tapaan laskettavissa 2021–2024 käyttäen taulukon T4 lyhennelmän lukuja, indeksointikertoimia ja ansioiden skaalaustekijöitä. Taulukossa on myös esitetty vastaavat tulokset jokaisen vuosikymmenen 2030–2100 alussa, mutta näiden laskentaan tarvitaan koko taulukko T2 ja koko validoinnissa käytetty indeksioletus ja ansioiden skaalaustekijät koko ennustejakson ajalta. Kuten osion 5 esimerkin vaiheessa 3, tässäkin tapauksessa menetelmän tarkkuutta voitaneen pitää riittävänä.

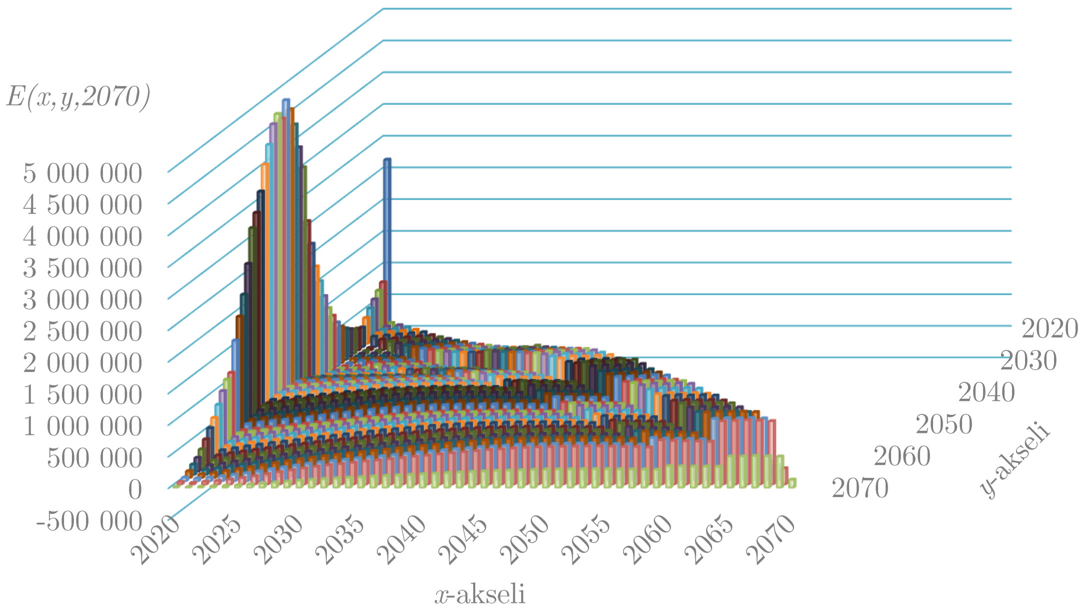
## 6.3 Eläkemenoennustemallin analysointi

Edellä kuvattu menetelmän laajennus populaation ansiokehityksen eläkemenovaikutuksen laskentaan vahvistaa suureisiin $E(x, y, t)$ liittyvää tulkintaa, vaikka kyse on puhtaasti mallin tuloksista lasketuista suureista.

Suureiden $E(x, y, t)$ tarkastelu tuo uusia mahdollisuuksia eläkemenoennustemallin toiminnan tarkasteluun, mikäli malli ei ole tätä informaatiota aikaisemmin tuottanut. Luonnollinen tapa tarkastella suureita on esittää ne $(x, y)$-koordinaatiston päälle sijoitettuina pylväinä ja animoida kuvaajaa $t$-parametrin avulla.

Kuvassa 1 on esitetty aiemmin osiossa 5 käsiteltyyn esimerkkiin liittyvä indeksoimaton eläkemeno vuonna 2070, joka on yhteensä noin 715,9 miljoonaa euroa. Kuvasta erottuu vielä vuonna 2070 selvästi sekä eläkemeno, joka on alkanut ennen vuotta 2021 että eläkemeno, joka on karttunut ennen vuotta 2021, mutta alkaa myöhemmin. Kuvasta erottuu myös työkyvyttömyyseläkkeiden tulevan ajan ansioihin liittyvä viiden vuoden karttumajakso. Todettakoon, että eräät arvot suoralla $x = y$ ovat negatiivisia, mikä tässä kuvakulmassa peittyy kuvan taakse.

Huomionarvoista on, ettei esimerkin taustalla oleva eläkemenoennustemalli todellisuudessa käsittele kuvassa 1 esitettyjä suureita, vaan ne on johdettu eläkemenoennustemallin lopputuloksista. Menetelmä mahdollistaa eläkemenoennustemallin analysoinnin uudella tavalla.




Kuva 1: Vuoden 2070 indeksoimattomat eläkemenokomponentit.

Eläkemenoennuste muuttuu lähtötietojen muuttuessa. Lisäksi eläkemenoennustemallia muutetaan usein lakimuutosten yhteydessä tai jo tehtäessä lakimuutosten kustannusarvioita. Kahden eri eläkemenoennustemallin $E(t)$ ja $E'(t)$ vertailu voidaan palauttaa vastaavien suureiden $E(x, y, t)$ ja $E'(x, y, t)$ vertailuksi. Tämä johtuu kaavan (4) lineaarisuudesta ja eläkemenokomponenttien yksikäsitteisyydestä, joka käy ilmi liitteessä B esitetystä perustelusta. Tällä tavoin voidaan tarkastella esimerkiksi lakimuutosten sukupolvivaikutuksia, sillä vastaisten karttumien ja eläkemenojen ajallinen yhteys käy ilmi eläkemenokomponenteista.

## 6.4 Stokastinen eläkemenoennuste

Tähän asti tässä tekstissä on tarkasteltu determinististä eläkemenoennustemallia, joka liittää valittuun indeksioletukseen $I$ eläkemenoennusteen $E(t, I)$, joka toteuttaa kaavan (4). Eläkemenoennustemallin stokastisoinnilla tarkoitetaan tässä tekstissä sen epävarmuuden kuvaamista, joka tuntemattomista vuosittaisista palkka- ja hintainflaatioista siirtyy indeksioletusten kautta eläkemenoennusteeseen. Muilta osin eläkemenoennustemallia pidetään edelleen täysin deterministisenä. Kaava (4) palauttaa eläkemenoennusteen stokastiikan tarkastelun indeksointikertoimiin liittyvän stokastiikan tarkasteluksi. Tarkastelu voidaan toteuttaa eläkemenoennustemallin ulkopuolella.

Osiossa 2 määriteltyjä indeksejä $W, P, I^W, I^P$ vastaavia indeksi-inflaatiota ja indeksitekijöitä merkitään $w, p, i^W, i^P$ ja $1 + w, 1 + p, 1 + i^W, 1 + i^P$. Suuretta $w$

kutsutaan *palkkainflaatioksi* tai *yleiseksi ansiotasokehitykseksi* ja suuretta $p$ *hintainflaatioksi* tai vain *inflaatioksi*. Tässä työssä ei syvennytä varsinaiseen palkka- ja hintainflaation mallinnukseen[2]. Oletetaan palkka- ja hintainflaatiot kuvatuksi diskreettiaikaisena stokastisena prosessina $(\boldsymbol{w}_v, \boldsymbol{p}_v)$, $v = 1, \ldots, T$, jonka ei edellytetä olevan riippumaton. Kaavat (1) ja (2) voidaan esittää muodossa

$$\begin{pmatrix} 1 + \boldsymbol{i}_v^W \\ 1 + \boldsymbol{i}_v^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \boldsymbol{w}_v \\ 1 + \boldsymbol{p}_v \end{pmatrix},$$

mistä seuraa, että TyEL-indeksi-inflaatiot $(\boldsymbol{i}_v^W, \boldsymbol{i}_v^P)$ saadaan lineaarimuunnoksena

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{i}_v^W \\ \boldsymbol{i}_v^P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,2 & 0,8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{w}_v \\ \boldsymbol{p}_v \end{pmatrix}$$

vastaavista palkka- ja hintainflaatioista.

Prosessit $(\boldsymbol{w}_v, \boldsymbol{p}_v)$ ja $(\boldsymbol{i}_v^W, \boldsymbol{i}_v^P)$ ovat stokastisilta ominaisuuksiltaan keskenään hyvin samankaltaiset, sillä niiden välinen muunnos on lineaarinen ja kääntyvä. Esimerkiksi, jos ensin mainitulla prosessilla on olemassa odotusarvo $\mathbb{E}(\boldsymbol{w}_v, \boldsymbol{p}_v) = (w_v, p_v)$, niin tällöin myös vastaavalla TyEL-indeksi-inflaatioiden prosessilla on odotusarvo $\mathbb{E}(\boldsymbol{i}_v^W, \boldsymbol{i}_v^P) = (i_v^W, i_v^P)$. Samoin inflaatioita vastaavien indeksitekijöiden $(1 + \boldsymbol{w}_v, 1 + \boldsymbol{p}_v)$ ja $(1 + \boldsymbol{i}_v^W, 1 + \boldsymbol{i}_v^P)$ jakaumat ovat samankaltaiset, eivätkä ominaisuuksiltaan juurikaan poikkea edellisistä.

Stokastisen analyysin merkitys tulee esiin, kun siirrytään tarkastelemaan indeksoinnin vaikutusta eläkemenoennusteeseen. Jo siirtyminen indeksi-inflaatioista pistelukuindekseihin on stokastisessa tarkastelussa yleisessä tilanteessa varsin epätriviaali, mikä johtuu eri vuosien indeksitekijöiden mahdollisista keskinäisistä riippuvuuksista kaavoissa

$$\boldsymbol{I}_v^W = I_0^W \cdot (1 + \boldsymbol{i}_1^W) \cdots (1 + \boldsymbol{i}_v^W) \quad \text{ja} \quad \boldsymbol{I}_v^P = I_0^P \cdot (1 + \boldsymbol{i}_1^P) \cdots (1 + \boldsymbol{i}_v^P).$$

Sama korostuu määriteltäessä kaavalla (3) määriteltyjen indeksointikertoimien suorat stokastiset vastineet

$$\boldsymbol{r}(x, y, t, \boldsymbol{I}) = \frac{\boldsymbol{I}_y^W}{\boldsymbol{I}_x^W} \frac{\boldsymbol{I}_t^P}{\boldsymbol{I}_y^P} = (1 + \boldsymbol{i}_{x+1}^W) \cdots (1 + \boldsymbol{i}_y^W) \cdot (1 + \boldsymbol{i}_{y+1}^P) \cdots (1 + \boldsymbol{i}_t^P). \tag{7}$$

Edelleen, kaavan (4) stokastinen vastine on kaava

$$\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{I}) = \sum_{0 \le x \le y \le t} E(x, y, t) \cdot \boldsymbol{r}(x, y, t, \boldsymbol{I}), \tag{8}$$

[2]Hintainflaatiota on tarkasteltu esimerkiksi autoregressiivisenä AR-mallina [7, s. 11–12], jolloin luonteva askel palkkainflaation liittämiseen tarkasteluun voisi olla vektoriautoregressiivinen VAR-malli. Katso myös [6, s. 65–69].

josta samalla käy ilmi, että $\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{I})$ on lineaarikombinaationa itsekin stokastinen aikasarja. Toisaalta eläkemenoennusteen stokastiikan tarkastelu palautuu pitkälti indeksointikertoimet määrittävän stokastisen prosessin $\boldsymbol{r}(x, y, t, \boldsymbol{I})$ tarkasteluksi.

Kaavan (7) oikea laita osoittaa, että indeksointikerroin on tulo eri ajankohtiin liittyvistä satunnaismuuttujista. Mikäli eri ajankohtiin liittyvien indeksitekijöiden välillä on riippuvuuksia, on esimerkiksi mahdollista, että vaikka eläkemenoennusteella olisi odotusarvo olemassa, niin siitä huolimatta

$$\mathbb{E}(\boldsymbol{E}(t, \boldsymbol{I})) \neq E(t, I),$$

missä $I$ tarkoittaa odotusarvoisiin indeksi-inflaatioihin $(i_v^W, i_v^P)$ liittyvää indeksioletusta $(I^W, I^P)$. Toisin sanoen, sellaisessakin tilanteessa, että tarkastelluilla stokastisilla prosesseilla odotusarvot ovat olemassa, *eläkemenon odotusarvo voi poiketa sellaisesta eläkemenosta, jonka ennustemalli liittää odotusarvoiseen palkka- ja hintainflaatiokehitykseen.*

Edellä oleva antaa aiheen harkita eläkemenoennusteen stokastista simulointia. Kaavan (8) johdosta tämä on suoraviivaista, mikäli palkka- ja hintainflaatiota voidaan simuloida. Indeksointikertoimien realisaatioiden laskenta on tehokkainta pisteindeksien kautta kaavan (7) keskimmäisellä muodolla. Joissain tilanteissa kaava (8) voi tarjota mahdollisuuden esittää eläkemenon stokastinen prosessi suoraan aukikirjoitettuna stokastisena prosessina, joka pohjautuu vastaavaan palkka- ja hintainflaation stokastiseen prosessiin.

Tarkasteluun voidaan melko suoraviivaisesti liittää myös samanaikainen sijoitustuottojen stokastiikan tarkastelu, mikä luo pohjan monipuoliselle Asset/Liability -mallinnukselle.

# Lähdeluettelo

[1] Työntekijän eläkelaki (395/2006). Viitattu 11.9.2021.

[2] Anton, Howard. *Elementary Linear Algebra.* Wiley, 7. painos, 1993. ISBN: 0-471-30569-3

[3] Knuth, Donald E. "Two Notes on Notation", *The American Mathematical Monthly* 99.5 (1992), s. 403–422, JSTOR, `www.jstor.org/stable/2325085`

[4] Merilä, Ville. "Työntekijän eläkelain mukaiset indeksiluvut vuodelle 2021". Muistio, 15.10.2020, Eläketurvakeskus. Viitattu 11.9.2021: `www.etk.fi/wp-content/uploads/2020/10/IT21loes.pdf`

[5] Morgan, Edward. "Using Machine Learning to Accelerate ALM Calculations". *European Actuarial Days 2021*, 2–3.6.2021. Esitelmä. Viitattu 11.9.2021.

www.actuview.com/video/Using-Machine-Learning-to-Accelerate-ALM-Calculations/1da11f3612518a8881af1cdb9898e226

[6] Pennanen, Teemu. ja Hilli, Petri. *Eläkevakuuttaminen epävarmassa sijoitusympäristössä: Kassavirtaperusteinen riskienhallinta*. Taloustieto Oy, 2012. ISBN: 978-951-628-555-2 (PDF)

[7] Risku, Ismo ja Kaliva, Kasimir. "Sijoitusriskien ja rahoitustekniikan vaikutus TyEL-maksun kehitykseen", *Eläketurvakeskuksen keskustelualoitteita* 2009: 6. Eläketurvakeskus ISSN: 1795-3103 urn.fi/URN:NBN:fi-fe2015112620000

[8] Salo, Mikko. "Inversio-ongelmat: matematiikkaa ja sen sovelluksia", *Arkhimedes*, 2006: 5, s. 20–25. ISSN: 0004-1920 urn.fi/URN:NBN:fi:ELE-1290572

# Liite A: Taulukot

**Osio 5: Vaihe 1.** *Eräajo kertakorotuksilla.*

Taulukko T1: Eräajon tulokset (lyhennetty)

| **E(X,Y,t)** | | **t** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Y** | **X** | **2021** | **2022** | **2023** | **2024** |
| **2020** | **2020** | 1 597 141 598,83 | 1 600 487 108,43 | 1 602 208 736,58 | 1 599 289 612,60 |
| **2021** | **2020** | 3 166 874 416,27 | 3 117 658 529,14 | 3 066 674 451,14 | 3 010 699 362,59 |
| **2021** | **2021** | 3 193 987 984,39 | 3 199 220 362,16 | 3 199 536 040,39 | 3 189 031 439,73 |
| **2022** | **2020** | | 3 172 373 109,05 | 3 121 218 920,84 | 3 065 068 598,67 |
| **2022** | **2021** | | 3 308 061 057,25 | 3 308 040 335,78 | 3 297 190 031,27 |
| **2022** | **2022** | | 3 200 676 384,42 | 3 202 703 865,77 | 3 193 876 440,63 |
| **2023** | **2020** | | | 3 178 434 881,45 | 3 122 221 614,70 |
| **2023** | **2021** | | | 3 420 136 450,40 | 3 409 156 032,86 |
| **2023** | **2022** | | | 3 316 540 661,61 | 3 307 589 826,59 |
| **2023** | **2023** | | | 3 204 131 596,95 | 3 196 943 462,11 |
| **2024** | **2020** | | | | 3 174 213 509,55 |
| **2024** | **2021** | | | | 3 509 207 163,20 |
| **2024** | **2022** | | | | 3 409 331 397,94 |
| **2024** | **2023** | | | | 3 300 355 927,46 |
| **2024** | **2024** | | | | 3 198 308 868,72 |

**Osio 5: Vaihe 2.** *Eläkemenokomponenttien laskenta.*

Taulukko T2: Eläkemenokomponentit (lyhennetty)

| **E(x,y,t)** | | **t** | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **y** | **x** | **2021** | **2022** | **2023** | **2024** |
| **2020** | **2020** | 1 569 732 817,44 | 1 517 171 420,71 | 1 464 465 714,56 | 1 411 409 749,99 |
| **2021** | **2020** | 27 113 568,13 | 54 126 115,18 | 53 959 825,69 | 53 789 355,46 |
| **2021** | **2021** | 295 213,26 | 588 464,74 | 584 644,01 | 579 880,61 |
| **2022** | **2020** | | 27 435 717,84 | 54 880 154,01 | 54 812 985,56 |
| **2022** | **2021** | | 867 557,52 | 1 740 681,21 | 1 747 384,36 |
| **2022** | **2022** | | 297 832,44 | 595 125,39 | 592 646,12 |
| **2023** | **2020** | | | 24 021 609,56 | 48 059 235,49 |
| **2023** | **2021** | | | 842 500,15 | 1 690 441,01 |
| **2023** | **2022** | | | 832 605,79 | 1 670 894,00 |
| **2023** | **2023** | | | 285 876,21 | 571 324,35 |
| **2024** | **2020** | | | | 21 670 500,62 |
| **2024** | **2021** | | | | 827 294,92 |
| **2024** | **2022** | | | | 803 481,36 |
| **2024** | **2023** | | | | 794 082,25 |
| **2024** | **2024** | | | | 270 356,48 |

**Osio 5: Vaihe 3.** *Tulosten tarkastelu.*

Taulukko T3: Vertailu eläkemenoennustemallin tuloksiin (indeksointi)

| Vuosi | Palkka-kerroin | Työeläke-indeksi | Indeksointi ulkopuolella | Indeksointi mallissa | Ero |
|---|---|---|---|---|---|
| **2021** | 1,465 | 2631 | 1 605 895 363,61 | 1 605 895 363,61 | 0,00 |
| **2022** | 1,501 | 2675 | 1 636 814 833,97 | 1 636 814 834,03 | -0,06 |
| **2023** | 1,535 | 2718 | 1 665 885 939,24 | 1 665 885 939,70 | -0,46 |
| **2024** | 1,571 | 2769 | 1 695 172 518,53 | 1 695 172 520,24 | -1,71 |
| **2030** | 1,847 | 3112 | 1 830 536 168,91 | 1 830 536 359,27 | -190,36 |
| **2040** | 2,464 | 3796 | 1 818 775 878,22 | 1 818 780 475,82 | -4 597,60 |
| **2050** | 3,287 | 4630 | 1 696 600 533,18 | 1 696 627 670,41 | -27 137,22 |
| **2060** | 4,385 | 5648 | 1 602 408 310,85 | 1 602 482 629,69 | -74 318,85 |
| **2070** | 5,850 | 6889 | 1 589 832 502,20 | 1 589 972 344,85 | -139 842,65 |
| **2080** | 7,804 | 8402 | 1 579 994 545,66 | 1 580 189 517,21 | -194 971,55 |
| **2090** | 10,411 | 10248 | 1 622 743 502,38 | 1 622 970 753,85 | -227 251,47 |
| **2100** | 13,888 | 12500 | 1 642 793 958,52 | 1 643 030 659,40 | -236 700,89 |

**Osio 6.2: Vaihe 4.** *Ennustepopulaation ansiokehitys.*

Taulukko T4: Vertailu eläkemenoennustemallin tuloksiin (indeksointi ja ansioiden skaalaus)

| Vuosi | Skaalaus-tekijä | Skaalaus ulkopuolella | Skaalaus mallissa | Ero |
|---|---|---|---|---|
| **2021** | 1,0232 | 1 605 902 206,88 | 1 605 902 206,88 | 0,00 |
| **2022** | 1,0488 | 1 636 863 830,41 | 1 636 863 830,22 | 0,19 |
| **2023** | 1,0750 | 1 666 054 846,77 | 1 666 054 845,69 | 1,08 |
| **2024** | 1,1019 | 1 695 579 933,05 | 1 695 579 929,79 | 3,26 |
| **2030** | 1,3240 | 1 837 359 603,28 | 1 837 359 437,24 | 166,04 |
| **2040** | 1,8194 | 1 875 226 623,08 | 1 875 223 251,34 | 3 371,74 |
| **2050** | 2,5003 | 1 910 544 185,56 | 1 910 523 709,91 | 20 475,64 |
| **2060** | 3,4360 | 2 142 189 357,32 | 2 142 127 615,71 | 61 741,61 |
| **2070** | 4,7219 | 2 690 652 583,65 | 2 690 517 360,15 | 135 223,50 |
| **2080** | 6,4889 | 3 585 220 781,37 | 3 584 987 010,83 | 233 770,55 |
| **2090** | 8,9173 | 4 993 922 881,89 | 4 993 566 258,29 | 356 623,60 |
| **2100** | 12,2544 | 6 853 535 173,93 | 6 853 034 924,55 | 500 249,39 |

# Liite B: Menetelmän perustelu

Jatketaan osioiden 3 ja 4 merkinnoillä. Kun kaavaa (4) sovelletaan kertakorotuskantaan $I_{(X,Y)}$, saadaan kullakin $t = 0, \ldots, T$ lineaarinen yhtälöryhmä

$$E(t, I_{(X,Y)}) = \sum_{0 \leq x \leq y \leq t} E(x, y, t) \cdot r(x, y, t, I_{(X,Y)}),$$

jossa on $n(t+1)$ tuntematonta $E(x, y, t)$ ja sama määrä parein $(X, Y)$ indeksoituja yhtälöitä. Kiinnitetään tarkastelu yhteen vuoteen $t = 0, \ldots, T$ ja lyhennetään merkinnät muotoon

$$E(X, Y) = \sum_{0 \leq x \leq y \leq t} E(x, y) \cdot r(x, y, X, Y). \tag{9}$$

Yhtälöryhmän (9) kerroinmatriisi saadaan kutakin yksittäistä indeksioletusta vastaavista indeksointikertoimista, ja tässä kertakorotuskannan tapauksessa se on

$$r(x, y, X, Y) = \frac{I_y^W}{I_x^W} \frac{I_t^P}{I_y^P} = \begin{cases} (1+a)^2 & \text{jos } x < X \leq y \text{ ja } y < Y \leq t \\ (1+a) & \text{jos joko } x < X \leq y \text{ tai } y < Y \leq t \\ 1 & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Tässä siis matriisin $r$ rivit merkitään parein $(x, y)$, missä $0 \leq x \leq y \leq t$ ja sarakkeet parein $(X, Y)$, missä $0 \leq X \leq Y \leq t$. Kyse on siis neliömatriisista, jonka dimensio on $n(t+1) \times n(t+1)$.

Matriisin $r$ yllä olevassa esityksessä on järjestysrelaatiokaavoja. Näiden käsittelyä helpottaa *Iversonin sulkeiksi* kutsuttu merkintä, joka liittää kaavaan $P$ sen vapaiden symboleiden funktion $[P]$, joka saa arvon 0 tai 1, katso esimerkiksi [3]. Tässä merkinnässä esimerkiksi *Kroneckerin delta*-symboli voidaan esittää muodossa

$$\delta_{x,y} = [x = y] = \begin{cases} 1 & \text{jos } x = y \\ 0 & \text{muulloin} \end{cases}.$$

Matriisi $r$ voidaankin Iversonin sulkeiden avulla kirjoittaa muodossa

$$r(x, y, X, Y) = (1+a)^{\rho(x,y,X,Y)}, \tag{10}$$

missä

$$\rho(x, y, X, Y) = [x < X \leq y] + [y < Y] = [x < X][X \leq y] + [y < Y].$$

Kaavassa (10) esiintyvä eksponentti $\rho(x, y, X, Y)$ saa arvot $0, 1, 2$. Eksponentit hallitaan kaavalla, joka pätee kokonaisluvuille $k = 0, 1, 2$:

$$(1+a)^k = 1 + ka + \frac{k(k-1)}{2} a^2 = 1 + (a - \frac{a^2}{2})k + \frac{a^2}{2} k^2. \tag{11}$$

Yhtälöryhmän (9) ratkaisun työläs osuus on sellaisen matriisin $r$ kanssa samankokoisen neliömatriisin $s$ konstruoiminen, joka toteuttaa kaavan

$$\sum_{0\le X\le Y\le t} r(x,y,X,Y)\cdot s(X,Y,x',y') = a^2\delta_{x,x'}\delta_{y,y'}, \tag{12}$$

missä myös $0\le x'\le y'\le t$. Koska kyse on äärellisuloitteisista neliömatriiseista, kaavasta (12) seuraa[3], että $r$ on kääntyvä ja sen käänteismatriisi on $s/a^2$. Näin ollen eläkemenokomponentit saadaan suoraan yhtälöryhmän (9) yksikäsitteisestä ratkaisusta, joka on

$$E(x,y) = \sum_{0\le X\le Y\le t} E(X,Y)\cdot s(X,Y,x,y)/a^2.$$

Tarkastelu jaetaan neljään eri tapaukseen sen perusteella, missä osassa lukua $t$ vastaavaa poikkileikkauskolmiota piste $(x',y')$ sijaitsee. Eri tapauksissa tarkastellaan yhtä tai useampaa (enintään kuutta) pisteeseen $(x',y')$ liittyvää pistettä, joita tässä työssä kutsutaan nimellä $(i,j)$-*siirtymät*, missä $i,j=0,1$. Nämä määritellään seuraavasti[4]:

$$(x'+i,y'+j) = \begin{cases} (x'+i,y'+j) & \text{jos } 0\le x'+i\le y'+j\le t \\ (0,y'+j) & \text{jos } 0\le y'+j< x'+i\le t \\ (x'+i,x'+i) & \text{jos } 0\le x'+i\le t< y'+j \\ (0,0) & \text{jos } t<y'+j \text{ ja } t<x'+i \end{cases}.$$

**Tapaus** $1^\circ$**:** $x'<y'<t$.

Todetaan aluksi, että kaikilla luvuilla $\alpha$,$\beta$ ja $\rho$ pätee alla listatut algebran kaavat.

$$\sum_{i,j=0,1}(-1)^{i+j} = 0 \tag{13a}$$

$$\sum_{i,j=0,1}(-1)^{i+j}(\rho+\alpha i+\beta j) = 0 \tag{13b}$$

$$\sum_{i,j=0,1}(-1)^{i+j}(\rho+\alpha i+\beta j)^2 = 2\alpha\beta \tag{13c}$$

Yhdistämällä kaava (11) ja kaavat (13a), (13b) ja (13c), saadaan kokonaisluvuille $0\le\rho+\alpha i+\beta j\le 2$ kaava

$$\sum_{i,j=0,1}(-1)^{i+j}(1+a)^{\rho+\alpha i+\beta j} = \alpha\beta a^2. \tag{14}$$

[3] Katso esimerkiksi [2, s. 61].

[4] Vaihtoehtoisesti määritelmässä voisi tukeutua sopivalla tavalla modulaariaritmetiikkaan.

Tarkastellaan seuraavaksi neljää pistettä $(x'+i, y'+j)$, missä $i, j = 0, 1$. Määritellään näitä pisteitä apuna käyttäen

$$s(X, Y, x', y') = \sum_{i,j=0,1} (-1)^{i+j} \delta_{X,x'+i} \delta_{Y,y'+j}.$$

Yhtälön (12) vasen puoli on tällöin

$$\sum_{i,j=0,1} (-1)^{i+j} r(x, y, x'+i, y'+j) = \sum_{i,j=0,1} (-1)^{i+j} (1+a)^{\rho(x,y,x'+i,y'+j)}.$$

Nyt $\rho$ on funktio, joka saa arvon 0,1 tai 2. Lisäksi

$$\rho(x, y, x'+i, y'+j) = \rho(x, y, x', y') + i(\delta_{x,x'} - \delta_{y,x'}) + j\delta_{y,y'}, \tag{15}$$

joten merkinnöillä

$$\begin{array}{rcl} \rho & = & \rho(x, y, x', y') \\ \alpha & = & \delta_{x,x'} - \delta_{y,x'} \\ \beta & = & \delta_{y,y'} \end{array}$$

ja kaavalla 14 saadaan

$$\sum_{i,j=0,1} (-1)^{i+j} (1+a)^{\rho(x,y,x'+i,y'+j)} = (\delta_{x,x'} - \delta_{y,x'}) \delta_{y,y'} a^2 = \delta_{x,x'} \delta_{y,y'} a^2.$$

Yllä viimeinen yhtälö johtuu oletuksesta $x' < y'$, jolloin $\delta_{y,x'} \delta_{y,y'} = 0$. Siis kaava (12) pätee.

**Tapaus** $2^\circ$**:** $x' = y' < t$.

Tarkastellaan samaan tapaan $(i, j)$-siirtymiä $(x'+i, y'+j)$, missä $i, j = 0, 1$. Tapauksesta $1^\circ$ poiketen normaalein laskusäännöin määritelty $(x'+i, y'+j)$ ei enää olisi kolmiopiste, kun $i = 1$ ja $j = 0$. Siksi tässä siis on määritellään $(x'+1, y'+0) = (0, y')$. Muilta osin määritelmät ovat normaalien laskusääntöjen mukaan.

Määritellään näitä pisteitä apuna käyttäen

$$s(X, Y, x', y') = \sum_{i,j=0,1} (-1)^{i+j} \delta_{X,x'+i} \delta_{Y,y'+j} (1+a)^i.$$

Yhtälön (12) vasen puoli on tällöin

$$\sum_{i,j=0,1} (-1)^{i+j} r(x, y, x'+i, y'+j)(1+a)^i.$$

Kaavan (15) vastine on nyt

$$\rho(x,y,x'+i,y'+j) = \rho(x,y,x',y') + i([x' \le x] - [x' \le y]) + j\delta_{y,y'}.$$

Kun lisäksi huomioidaan tekijän $(1+a)^i$ eksponentti $i$, voidaan merkinöillä

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & [x' \le x] - [x' \le y] + 1 = [y < x'] + [x' \le x] \\ \beta & = & \delta_{y,y'} = [y' = y] \end{array}$$

edellinen lauseke muuntaa kaavan (14) muotoon. Ehdosta $x \le y$ sekä tapauksen $2°$ lisäehdosta $x' = y'$ seuraa

$$\alpha\beta = [y < x'][y' = y] + [x' \le x][y' = y] = [x' = x][y' = y] = \delta_{x,x'}\delta_{y,y'}.$$

Näin ollen saadaan kaava (12).

**Tapaus $3°$:** $x' < y' = t$.

Tässä tapauksessa tarkastellaan enintään kuutta pistettä ryhmiteltynä kahteen ryhmään. Ryhmän I pisteet ovat muotoa $(x'+i, y')$, missä $i = 0,1$. Ryhmän II pisteet ovat muotoa $(x'+i+j, x'+j)$, missä $i,j = 0,1$.

Määritellään

$$s(X,Y,x',y') = \sum_{i=0,1} (-1)^i \delta_{X,x'+i}\delta_{Y,y'} + \sum_{i,j=0,1} (-1)^{i+j}(1+a)\delta_{X,x'+i+j}\delta_{Y,x'+j}.$$

Käsitellään ensin ryhmää I. Todetaan, että luvuille $P_i = 0,1$ ja $Q = 0,1$ pätee kaavat

$$\sum_{i=0,1} (-1)^i (P_i + Q) = P_0 - P_1$$

$$\sum_{i=0,1} (-1)^i (P_i + Q)^2 = 3(P_0 - P_1) + 2(P_0 - P_1)(1 - Q).$$

Merkitään $P_i = [x < x'+i \le y]$, $Q = [y < y']$ ja $k_i = \rho(x,y,x'+i,y')$, jolloin siis

$$k_i = \rho(x,y,x'+i,y') = P_i + Q.$$

Nyt, koska $x' < y'$ ja $x \le y$, niin

$$P_0 - P_1 = [y = x'] - [x = x'].$$

Lisäksi, koska $y' = t$ ja $y \le t$, niin

$$1 - Q = 1 - [y < y'] = [y \ge t] = [y = t] = [y = y'].$$

Siis

$$(P_0 - P_1)(1 - Q) = [y = x'][y = y'] - [x = x'][y = y'] = [x = x'][y = y'].$$

Ryhmän I osalta saadaan siis

$$\sum_{i=0,1} (-1)^i k_i = [y = x'] - [x = x'] \tag{16a}$$

$$\sum_{i=0,1} (-1)^i k_i^2 = 3([y = x'] - [x = x']) + 2[x = x'][y = y']. \tag{16b}$$

Käsitellään sitten ryhmää II. Todetaan, että luvuille $P_i = 0, 1$ ja $Q_i = 0, 1$ pätee kaavat

$$\sum_{i,j=0} (-1)^{i+j} (1 + Q_i + jP_i) = P_1 - P_0$$

$$\sum_{i,j=0} (-1)^{i+j} (1 + Q_i + jP_i)^2 = 3(P_1 - P_0) + P_1 Q_1 - P_0 Q_0.$$

Merkitään $Q_0 = [x < x']$ ja $P_0 = [x = x']$, $Q_1 = [y < x']$ ja $P_1 = [y = x']$ sekä $k_{i,j} = \rho(x, y, x' + i + j, x' + j) + 1$, jolloin

$$k_{i,j} = \rho(x, y, x' + i + j, x' + j) + 1 = 1 + Q_i + jP_i.$$

Lisäksi selvästikin $P_0 Q_0 = 0$ ja $P_1 Q_1 = 0$.

Ryhmän II osalta saadaan siis

$$\sum_{i,j=0,1} (-1)^{i+j+1} k_{i,j} = [x = x'] - [y = x'] \tag{17a}$$

$$\sum_{i,j=0,1} (-1)^{i+j+1} k_{i,j}^2 = 3([x = x'] - [y = x']). \tag{17b}$$

Yhtälöiden (16a) ja (17a) perusteella

$$\sum_{i=0,1} (-1)^i k_i + \sum_{i,j=0,1} (-1)^{i+j+1} k_{i,j} = 0.$$

Vastaavasti yhtälöiden (16b) ja (17b) summa on

$$\sum_{i=0,1} (-1)^i k_i^2 + \sum_{i,j=0,1} (-1)^{i+j+1} k_{i,j}^2 = 2[x = x'][y = y'] = 2\delta_{x,x'}\delta_{y,y'}.$$

Samalla periaatteella, jolla kaava (14) muodostuu kaavasta (11), saadaan kaava (12).

**Tapaus** $4°$**:** $x' = y' = t$.

Tässä tapauksessa tarkastellaan enintään kahta pistettä $(x'+i, y'+i)$, missä $i = 0, 1$. Siirtymien määritelmien mukaan nämä ovat $(t, t)$ ja $(0, 0)$. Määritellään nyt

$$s(X, Y, x', y') = \sum_{i=0,1} (-1)^{1-i} a(1+a)^i \delta_{X,x'+i} \delta_{Y,y'+i}.$$

Koska $r(x, y, 0, 0) = 1$ ja koska

$$r(x, y, t, t) = (1+a)^{1-\delta_{x,t}} = 1 + (1-\delta_{x,t})a = 1 + a - a\delta_{x,t},$$

yhtälön (12) vasen puoli on

$$a(1+a)r(x, y, 0, 0) - ar(x, y, t, t) = a(1+a) - a(1+a-a\delta_{x,t}) = a^2\delta_{x,t}.$$

Nyt, koska $x \leq y \leq t$, niin $\delta_{x,t}\delta_{x,t} = \delta_{x,t}\delta_{y,t}$. Koska lisäksi $x' = t$ ja $y' = t$, niin

$$a^2\delta_{x,t} = a^2\delta_{x,t}\delta_{x,t} = a^2\delta_{x,t}\delta_{y,t} = a^2\delta_{x,x'}\delta_{y,y'}.$$

Tässäkin tapauksessa on siis osoitettu kaava (12).