Yrjö Tiira

Aktuaaritutkinnon riskiteoreettinen harjoitustyö

Tehtävä: Tutkittava pienten palovakuutuslaitosten jälleenvakuutusmaksimeja. Ylitejälleenvakuutus n = 1, 5, 10, 50, 100,... Perustana yhden vuoden katastrofitodennäköisyys esim. 0,01 ja 0,001. Tarkistuksen vuoksi lasketaan myös e^{-RU}-menetelmällä. Käytetään Varan jakautumaa. Tulos kirjoitettava muotoon $M = k(n, \varepsilon) \cdot U$, missä $k(n, \varepsilon)$ on funktio, jolle saadaan käyrä laskutulosten muodostamasta materiaalista ($\varepsilon = 0{,}01$ ja $0{,}001$). Suhdannevaihtelut otetaan huomioon siten, että $\lambda = 0$.

1. Vahinkojakautuma

Vahinkojakautuma koottiin 2 miljoonaa markkaa pienempien vahinkojen osalta Varan palovahinkotilastosta vuodelta 1957; suuremmat vahingot otettiin 1/7-painoisina vuosien 1951-1957 palovahinkotilastoista.

2. Jakautuman riskiteoreettinen käsittely

Jälleenvakuutusmenetelmänä oli tehtävän mukaan ylitejälleenvakuutus. Tutkittaviksi jälleenvakuutusmaksimeiksi valittiin 7 arvoa väliltä $60000 \leqq M \leqq 6000000$, joita vastaavat jakautumat $s_M(z)$ saatiin jakamalla vahinkotilasto koordinaatistoon vakuutussumman ja vahingon mukaan. Näin saatujen jakautumien 4 ensimmäistä momenttia on laskettu liitteen 1 taulukkoon 1. Lasku suoritettiin tämän jälkeen käyttäen normaalijakautumaoletusta sekä Esscherin kaavalla. Oletuksesta $\lambda = 0$ seuraa, ettei e^{-RU}-menetelmää voida käyttää.

Normaalijakautumaoletus

Normaalijakautumaoletuksesta seuraava perusyhtälö sai oletuksella $\lambda = 0$ muodon $U = y_\varepsilon \sigma \sqrt{m}$, jossa tehtävän mukaan käytettiin arvoja $y_{0,01} = 2.33$ ja $y_{0,001} = 3.09$. Lasketut U:n arvot ovat liitteen 1 taulukoissa 2. Liitteen 2 taulukoissa 1 on laskettu vastaavat $\frac{M}{U}$:n arvot. Havaitaan, että $\frac{M}{U}$ riippuu melko voimakkaasti M:n arvosta, kuitenkin niin, että pienillä M:n arvoilla ($M \leqq 600000$) voidaan yhtälön $M = k(n, \varepsilon) \cdot U$ katsoa olevan likimäärin voimassa. Liitteessä 3 on piirretty viiva $k = k(n)$ molemmille ε:n arvoille käyttäen neljää pienintä M:n arvoa vastaavien $\frac{M}{U}$:n arvojen keskiarvoja.

Esscherin kaava

Laskussa käytettiin arvoille $n \geqq 100$ Essherin kaavasta johdettua likimääräistä laskutapaa seuraavin laskukaavoin:

$$P = mm$$

$$T_2 = h^2 \cdot \frac{\alpha_2}{2m}, \quad T_3 = h^3 \cdot \frac{\alpha_3}{3m}, \quad T_4 = h^4 \cdot \frac{\alpha_4}{8m}$$

$$\frac{\Psi}{m} = T_2 + T_3 + T_4$$

$$W_0 = 2 \cdot \frac{\Psi}{m} + T_3 + 2T_4$$

$$W = \sqrt{Pw_o}$$

$$c = \frac{1}{6\sqrt{m}} \frac{\alpha_3}{\alpha_2^{3/2}} \left[1 - h \left(\frac{3\alpha_3}{2\alpha_2} - \frac{\alpha_4}{\alpha_3} \right) \right]$$

$$\varepsilon = e^{-P \cdot \frac{\psi}{m}} \left[A_o(w) - cA_3(w) \right]$$

$$\varkappa - 1 = \frac{1}{h} \left(2\,T_2 + \frac{3}{2} T_3 + \frac{4}{3} T_4 \right)$$

$$U = (\varkappa - 1) \cdot P$$

Menetelmä tuntui sopivan tehtävään hyvin mainituilla n:n arvoilla. Pienillä n:n arvoilla etenkin jos M on suuri on $\frac{\psi}{m}$:n sarjan suppeneminen heikkoa tai jopa olematonta, josta syystä arvoille $n \leq 50$ on käytetty Esscherin kaavaa sinänsä. Kysymykseen tulevat ψ-arvot on laskettu luokkasummina käyttäen kunkin välin keskipistettä lukuna z. Verrattaessa saatuja U:n arvoja normaalijakautumaoletuksella saatuihin arvoihin havaitaan melko hyvä yhteensopivuus lukuunottamatta pienempiä n:n arvoja. Koska taulukot 2 ja taulukot 3 liitteessä 1 osoittavat melkoista yhteensopivuutta, on samoin $\frac{M}{U}$-taulukoiden laita liitteessä 2. Tässäkin tapauksessa voidaan tehtävän mukaisen yhtälön $M = k(n, \varepsilon) \cdot U$ katsoa olevan voimassa vain pienemmillä M:n arvoilla. Liitteeseen 4 on piirretty liitteen 3 viivoja vastaavat viivat Esscherin kaavasta saatujen $\frac{M}{U}$:n arvojen pohjalla.

Lopuksi laskettiin oletuksella $\lambda = 0.1$ U:n arvot e^{-RU}-menetelmää käyttäen. Laskukaavoista $U = \frac{1}{R} \cdot \frac{2}{\log \varepsilon}$, $24\,m\lambda = 12\alpha_2 R + 4\alpha_3 R^2 + \alpha_4 R^3$ seuraavat U:n arvot ovat allaolevassa taulukossa.

M	60	150	300	600	1500	3000	6000
R	0.0047	0.0019	0.00098	0.00054	0.00028	0.00018	0.00010
U	980	2420	4700	8530	16400	25600	46100

Jonkinlaiseksi ohjeeksi pienten palovakuutuslaitosten jälleenvakuutusta varten esitettäköön taulukon muodossa edelläolevasta aineistosta (Esscherin kaava) otettu M:n prosentuaalinen osuus p_ε käytettävissä olevasta omasta pääomasta, edellyttäen että koko oma pääoma on tarvittaessa käytettävissä.

n	1-5	6-10	11-50	51-100	101-500	501-1000	1001-5000
P0.01	41	31	13	11	5.0	3.6	1.6
P 0.001	26	21	10	8.0	3.7	2.7	1.2

Taulukko on koottu siten, että ensinnäkin eri M:n arvoja vastaavista eri M/U:n arvoista on valittu pienin ja toiseksi kutakin n-väliä vastaavista näin saaduista luvuista on myös valittu pienin. Näin on saatu luvut "mahdollisimman varovaista" toimintaa varten.

Yrjö Tiira

Liite no 1. **VARAN palovahinkojakautumasta laskettuja eri jälleenvakuutusenitteitä vastaavia riskiteoreettisia suureita.**

Taulukko 1 (yksikkönä 1 000 mk)

M	m	α_2	α_3	α_4
60	12.694	502.23	24 228	1 242.9 $\cdot 10^3$
150	28.646	2 763.8	331 210	42 222 $\cdot 10^3$
300	50.266	9 522.6	2 287.9 $\cdot 10^3$	585 310 $\cdot 10^3$
600	80.708	27 748	12 338 $\cdot 10^3$	5 909.0 $\cdot 10^6$
1 500	120.390	77 674	72 569 $\cdot 10^3$	78 313 $\cdot 10^6$
3 000	144.658	147 580	263 820 $\cdot 10^3$	586 960 $\cdot 10^6$
6 000	173.732	306 340	10 864 $\cdot 10^5$	4 800.5 $\cdot 10^9$

Taulukot 2 (normaaliapproksimaatio)

U (ε = 0.01)

M \ n	1	5	10	50	100	500	1 000	5 000
60	52	117	165	369	522	1 170	1 650	3 690
150	122	274	387	866	1 220	2 740	3 870	8 660
300	227	508	719	1 610	2 270	5 080	7 190	16 100
600	388	868	1 230	2 750	3 880	8 680	12 300	27 500
1 500	643	1 450	2 050	4 590	6 430	14 500	20 500	45 900
3 000	895	2 000	2 830	6 330	8 950	20 000	28 300	63 300
6 000	1 290	2 880	4 080	9 120	12 900	28 800	40 800	91 200

U (ε = 0.001)

M \ n	1	5	10	50	100	500	1 000	5 000
60	69	155	219	490	692	1 550	2 190	4 900
150	162	363	514	1 150	1 620	3 630	5 140	11 500
300	302	674	953	2 130	3 020	6 740	9 530	21 300
600	515	1 150	1 630	3 640	5 150	11 500	16 300	36 400
1 500	861	1 930	2 720	6 090	8 610	19 300	27 200	60 900
3 000	1 190	2 650	3 750	8 390	11 900	26 500	37 500	83 900
6 000	1 710	3 820	5 410	12 100	17 100	38 200	54 100	120 900

Yrjö Tiira
Liite no 2.

Taulukot 1 (normaaliapproksimaatio)

M/U (ε = 0.01)

M \ n	1	5	10	50	100	500	1 000	5 000
60	1.149	0.514	0.363	0.163	0.115	0.0514	0.0363	0.0163
150	1.225	0.548	0.387	0.173	0.123	0.0548	0.0387	0.0173
300	1.319	0.590	0.417	0.187	0.132	0.0590	0.0417	0.0187
600	1.546	0.691	0.489	0.219	0.155	0.0691	0.0489	0.0219
1 500	2.331	1.033	0.731	0.327	0.233	0.103	0.0731	0.0327
3 000	3.352	1.499	1.060	0.474	0.335	0.150	0.106	0.0474
6 000	4.653	2.081	1.471	0.658	0.465	0.208	0.147	0.0658

M/U (ε = 0.001)

M \ n	1	5	10	50	100	500	1 000	5 000
60	0.867	0.388	0.274	0.123	0.0867	0.0388	0.0274	0.0123
150	0.923	0.413	0.292	0.131	0.0923	0.0413	0.0292	0.0131
300	0.995	0.445	0.315	0.141	0.0995	0.0445	0.0315	0.0141
600	1.166	0.521	0.369	0.165	0.117	0.0521	0.0369	0.0165
1 500	1.742	0.779	0.551	0.246	0.174	0.0779	0.0551	0.0246
3 000	2.527	1.130	0.799	0.357	0.253	0.113	0.0799	0.0357
6 000	3.508	1.569	1.109	0.496	0.351	0.157	0.111	0.0496

Taulukot 2 (Esscherin kaava)

M/U (ε = 0.01)

M \ n	1	5	10	50	100	500	1 000	5 000
60	0.723	0.408	0.308	0.133	0.108	0.0500	0.0357	0.0161
150	0.820	0.457	0.374	0.175	0.115	0.0534	0.0383	0.0172
300	0.865	0.475	0.358	0.157	0.123	0.0570	0.0408	0.0185
600	0.952	0.550	0.414	0.198	0.143	0.0664	0.0476	0.0217
1 500	1.316	0.802	0.579	0.290	0.210	0.0991	0.0710	0.0324
3 000	1.596	0.987	0.767	0.399	0.296	0.113	0.102	0.0466
6 000	1.869	1.190	0.960	0.527	0.394	0.191	0.140	0.0644

M/U (ε = 0.001)

M \ n	1	5	10	50	100	500	1 000	5 000
60	0.484	0.261	0.205	0.0995	0.0798	0.0372	0.0266	0.0121
150	0.545	0.299	0.239	0.125	0.0840	0.0398	0.0282	0.0129
300	0.563	0.312	0.229	0.123	0.0895	0.0424	0.0304	0.0139
600	0.620	0.361	0.270	0.142	0.104	0.0494	0.0354	0.0162
1 500	0.802	0.554	0.378	0.206	0.152	0.0729	0.0525	0.0242
3 000	0.974	0.638	0.506	0.275	0.212	0.103	0.0752	0.0348
6 000	1.152	0.767	0.640	0.355	0.279	0.139	0.102	0.0475

Taulukot 3 (Esscherin kaava)

U (ε = 0.01)

M \ n	1	5	10	50	100	500	1 000	5 000
60	83	147	195	450	555	1 200	1 680	3 720
150	183	328	401	859	1 310	2 810	3 920	8 730
300	347	631	839	1 910	2 440	5 260	7 350	16 200
600	630	1 090	1 450	3 030	4 200	9 040	12 600	27 700
1 500	1 140	1 870	2 590	5 180	7 140	15 100	21 100	46 300
3 000	1 880	3 040	3 910	7 520	10 100	21 500	29 400	64 400
6 000	3 210	5 040	6 250	11 400	15 200	31 500	42 800	93 100

U (ε = 0.001)

M \ n	1	5	10	50	100	500	1 000	5 000
60	124	230	292	603	752	1 610	2 260	4 970
150	275	501	627	1 200	1 790	3 770	5 310	11 700
300	533	963	1 310	2 440	3 350	7 070	9 850	21 600
600	968	1 660	2 220	4 240	5 780	12 200	16 900	37 000
1 500	1 870	2 710	3 970	7 280	9 860	20 600	28 600	62 100
3 000	3 080	4 700	5 930	10 900	14 200	29 000	39 900	86 200
6 000	5 210	7 820	9 380	16 900	21 500	43 200	58 800	126 200