

YLEINEN OSA

TEHTÄVÄ Y1 (10 pistettä)

Olkoon $\pi(X)$ vakuuttavaan riskiin X liitettävä vakuutusmaksu.

- a) Vakuutusten hinnoittelutapojen ominaisuuksia ovat:
- konsistenttisuus
 - additiivisuus
 - 'riistovapaus' (no rip-off)

Mitä nämä ominaisuudet tarkoittavat?

- b) Miten vakuutusmaksu $\pi(X)$ määrätään, jos se määrätään

- odotusarvoperiaatteen mukaisesti (expected value principle)
- varianssiperiaatteen mukaisesti (variance principle)

- c) Olkoon yhtiön X bonusjärjestelmä seuraava:

- bonusluokkia on viisi: A, B, C, D ja E. A on paras luokka ja E huonoin.
- vahingottoman vuoden jälkeen vakuutus siirtyy luokkaa ylemmäksi, jos mahdollista.
- jos luokissa B, C, D tai E olevalle vakuutuksenottajalle sattuu n vahinkoa, siirtyy vakuutus n luokkaa alemmaksi, mutta ei tietenkään luokkaa E alemmaksi.
- jos luokassa A olevalle vakuutuksenottajalle sattuu yksi vahinko, pysyy vakuutus luokassa A
- jos luokassa A olevalle vakuutuksenottajalle sattuu n vahinkoa, $n > 1$, siirtyy vakuutus $n-1$ luokkaa alemmaksi, mutta ei tietenkään luokkaa E alemmaksi.

Kunkin vakuutuksenottajan vahinkojen lukumäärän oletetaan noudattavan Poisson-jakaumaa parametrilla $\lambda = 0.4$.

- millainen on bonusjärjestelmän siirtymämatriisi?
- millainen on bonusjärjestelmän tasapainotila (stationaarinen jakauma, steady state distribution)?

Poisson-jakauman pistetodennäköisyysfunktio on $p(x = i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}$.

Pisteitys:

a) ja b) 3.5 p. yhteensä

c) vi 2.5 p

vii 4 p.

Vastaus:

a)+b) Kaas & al. luku 5.3 ja 5.4

c) Kaas & al. luku 6

c)

kun $\lambda = 0.4$, on

vah.lkm	vah.tod.näk.
0	0.6703
1	0.2681
2	0.0536
3	0.0072
4	0.000715008
5+	6.12433E-05

bonusluokka	bonusluokka	jos vahinkoja				
	jos ei vah.	1	2	3	4	5
A	A	A	B	C	D	E
B	A	C	D	E	E	E
C	B	D	E	E	E	E
D	C	E	E	E	E	E
E	D	E	E	E	E	E

ja siirtymämatriisi P on

	0.9384	0.0536	0.0072	0.0007	6.1243E-05
P =	0.6703	0	0.2681	0.0536	0.00793
	0	0.6703	0	0.2681	0.0616
	0	0	0.6703	0	0.3297
	0	0	0	0.6703	0.3297

Olkoon stationaarinen jakauma $\mathbf{f} = (f_A, f_B, f_C, f_D, f_E)$.Nyt $\mathbf{f} = \mathbf{f} \cdot P$, mistä saadaan yhtälöt:

(1) $f_A = 0.9384f_A + 0.6703f_B$

(2) $f_B = 0.0536f_A + 0.6703f_C$

(3) $f_C = 0.0072f_A + 0.2681f_B + 0.6703f_D$

(4) $f_D = 0.0007f_A + 0.0536f_B + 0.2681f_C + 0.6703f_E$

(5) $f_E = 6.1243 \cdot 10^{-5}f_A + 0.000793f_B + 0.0616f_C + 0.3297f_D + 0.3297f_E$

Lisäksi täytyy olla:

(6) $f_A + f_B + f_C + f_D + f_E = 1$

Ratkaisemalla yhtälöryhmä saadaan

$f_A = 0.8255$

$f_B = 0.0758$

$f_C = 0.0470$

$f_D = 0.0311$

$f_E = 0.0206$.

Toisaalta, voidaan myös (mielivaltaisesti) olettaa, että $f_A = 1$.

Tällöin (1)-(5):n perusteella saadaan:

fA	fB	fC	fD	fE	yht.
1	0.09182	0.05699	0.03762	0.02491	1.21134

Tästä (6):n perusteella saadaan yllä esitetty ratkaisu.

TEHTÄVÄ Y2 (10 pistettä)

- a) Tilastokeskuksen syksyllä 2023 julkaisema uutinen vertaili elinajanodotteita maakunnittain ja sukupuolittain:

Uutisia 20.10.2023

Elinajanodote korkein Ahvenanmaalla, lyhyin Kainuussa

Vastasyntyneiden elinajanodotteet olivat pisimmät Ahvenanmaan maakunnassa ajanjaksolla 2020–2022: pojilla 81,2 vuotta ja tytöillä 85,8 vuotta. Lyhyimmät elinajanodotteet olivat puolestaan Kainuussa: pojilla 77,5 vuotta ja tytöillä 82,6 vuotta. Tiedot selviävät [Tilastokeskuksen kuolleet-tilastosta](#).

Miehet ovat kirineet elinajanodotteessa naisia kiinni

Vuonna 2022 sukupuolten välinen ero vastasyntyneiden elinajanodotteissa oli 5,2 vuotta. Vastasyntyneiden poikien elinajanodote on viimeisten 30 vuoden aikana pidentynyt 7,0 vuodella ja tyttöjen 4,4 vuodella. Suurimmillaan sukupuolten välinen ero oli 1970-luvun loppupuolella, jolloin se oli yhdeksän vuotta.

65-vuotiaiden miesten elinajanodote oli 17,9 vuotta ja 65-vuotiaiden naisten 21,3 vuotta vuonna 2022. Verrattuna vuoteen 1990 on 65-vuotiaiden miesten elinajanodote pidentynyt 4,2 vuodella ja naisten vastaavasti 3,6 vuodella. Edellisvuoteen verrattuna 65-vuotiailla elinajanodotteet laskivat, miehillä 0,5 vuotta ja naisilla 0,6 vuotta. Lasku oli suurinta yli 35 vuoteen. Naisilla on ollut laskua jo kolmatta vuotta peräkkäin ja miehillä toista vuotta, joita ei myöskään kumpaakaan ole tapahtunut yli 35 vuoteen.

- i. Mitä tarkoitetaan *vastasyntyneen elinajanodotteella*?
 - ii. Miten näiden tietojen pohjalta arvioisit ahvenanmaalaisen vuonna 2054 syntyneen tytön ja kainuulaisen vuonna 2054 syntyneen pojan odotettavissa olevaa elinaikaa? Esitä arviosi ja perustele arviossa tekemäsi oletukset.
 - iii. Kuinka monta vuotta arvelisit vuonna 2022 40-vuotiaan miehen ehtivän olla eläkkeellä, jos hän jää vanhuuseläkkeelle alimmassa vanhuuseläkeiässään 67 vuotta vuonna 2049? Esitä arviosi ja perustele arviossa tekemäsi oletukset.
 - iv. Mitä mahdollisia syitä eroihin elinajanodotteissa Ahvenanmaan ja Kainuun välillä voisi olla?
- b) Kerro miten Lee-Carter-menetelmällä voidaan laatia kuolevuusennuste (millainen malli on ja miten sen parametrit voidaan estimoida).
- c) Laske alla olevan taulukon avulla ikävakioidut kuolevuussuhteet vakuutusyhtiö X:n asiakaskannan ikäkohorteille.

Koko väestö		
ikä	henkilöitä ikäkohortissa	kuolleita
65	34500	480
66	34000	505
67	35000	592
68	33000	655
Vakuutusyhtiö X:n vakuutetut		
ikä	henkilöitä ikäkohortissa	kuolleita
65	300	7
66	200	4
67	150	4
68	200	5

Miten kuolevuussuhteita voisi käyttää vakuutusyhtiö X:n korvausvastuun arvioinnissa?

Vastaus:

(a): M. Pesonen: Miksi oletamme kuolevuuden alenemisen jatkuvan?

(b)-(c): M. Kauppi: Lakisääteisen tapaturmavakuutuksen referenssikuolevuus

TEHTÄVÄ Y3 (10 pistettä)

Alla olevissa kolmiossa on Vahinkovakuutusyhtiö Onnen sairaskuluvakuutuksen maksetut korvaukset vuoden 6 loppuun mennessä tuhansina euroina.

Sattumis- vuosi	Vahinkomeno selviämisvuosittain					
	1	2	3	4	5	6
1	2 000	1 950	600	250	50	30
2	2 150	1 600	500	200	100	
3	2 100	1 700	400	250		
4	2 000	1 900	800			
5	2 200	1 500				
6	2 000					
Yhteensä	12 450	8 650	2 300	700	150	30

- Laske lajin korvausvastuu vuoden 6 lopussa Chain-Ladder –menetelmällä. Laita tarvittavat välivaiheet laskennasta näkyviin.
- Esitä menettely, jolla korvauksia voitaisiin ekstrapoloida esitettyjä vuosia pitemmälle. Huom! Ekstrapolointia ei tarvitse tehdä vaan menettelyn esittäminen riittää.
- Miten sijoitustoiminta ja inflaatio voidaan ottaa huomioon korvausvastuuta laskettaessa?

Vastausohje:

- a) Ropponen, luku 3.1.1, s. 20-27
- b) Ropponen, luku 3.1.1.3, s. 27-29
- c) Ropponen, luvut 2.4 ja 2.5, s. 16-19

ERIKOISTUMISOSA – ELÄKEVAKUUTUS**TEHTÄVÄ E1** (10 pistettä)

Työskentelet matemaatikkona työeläkeyhtiö Vipusessa. Vipusen asiakasyritys Isokonepajalla on alkuvuodesta 2023 kolme työntekijää jäänyt pysyväälle työkyvyttömyyseläkkeelle. Isokonepajan talousjohtaja laatii juuri tulevan strategiakauden (vuodet 2024-2029) budjettia, ja on huolissaan siitä, miten paljon nämä työkyvyttömyystapaukset vaikuttavat Isokonepajan työeläkevakuutusmaksuihin. Kerro Isokonepajan talousjohtajalle alla olevien tietojen perusteella, millaisia vaikutuksia yrityksen tulevien vuosien työeläkevakuutusmaksuihin on odotettavissa. Kerro myös, mitä epävarmuuksia tähän vaikutusten arvioon liittyy.

Isokonepajan työkyvyttömyystariffimaksu on 1,00 % palkkasummasta, eikä yrityksen ikärakenteen oleteta lähivuosina muuttuvat merkittävästi. Aiempina vuosina ennen vuotta 2023 yrityksen työkyvyttömyyseläkemeno on ollut keskimääräisellä tasolla, ja yritys on maksanut todellisuudessaakin työkyvyttömyystariffin suuruista työkyvyttömyysmaksua. Työkyvyttömyysmenon oletetaan jatkossa vuoden 2023 jälkeen olevan taas keskimääräisellä tasolla.

Isokonepajan palkkasummakehitys			palkkakerroin		
2029	5 970 261	arvio	2029	1,883	ennuste
2028	5 796 370	arvio	2028	1,829	ennuste
2027	5 627 544	arvio	2027	1,776	ennuste
2026	5 463 635	arvio	2026	1,726	ennuste
2025	5 304 500	arvio	2025	1,676	ennuste
2024	5 150 000	arvio	2024	1,637	
2023	5 000 000	arvio	2023	1,558	
2022	4 900 000		2022	1,501	
2021	4 500 000		2021	1,465	
vuonna 2023 myönnetyt työkyvyttömyyseläkkeet					
	rahastoidun eläkkeen vastuuvelka				
eläke1	40 000				
eläke2	120 000				
eläke3	90 000				

**1.7 VAKUUTUSMAKSUN TYÖKYVYTTÖMYYSELÄKEOSAN MÄÄRÄÄMISESSÄ
TARVITTAVIA KERTOIMIA JA ARVOJA**

* Vahvistettu 16.6.2022

* Voimaan 1.1.2023

$$m_v^k = \begin{cases} 5,5 & \text{kun } L_v^k \geq 5 \\ 4,5 & \text{kun } 4 \leq L_v^k < 5 \\ 3,5 & \text{kun } 3 \leq L_v^k < 4 \\ 2,75 & \text{kun } 2,5 \leq L_v^k < 3 \\ 2,25 & \text{kun } 2 \leq L_v^k < 2,5 \\ 1,75 & \text{kun } 1,5 \leq L_v^k < 2 \\ 1,35 & \text{kun } 1,2 \leq L_v^k < 1,5 \\ 1 & \text{kun } 0,8 \leq L_v^k < 1,2 \\ 0,65 & \text{kun } 0,5 \leq L_v^k < 0,8 \\ 0,35 & \text{kun } 0,2 \leq L_v^k < 0,5 \\ 0,1 & L_v^k < 0,2 \end{cases}$$

$$b_{2021}^0 = 0,05$$

$$b_{2021}^1 = 0,12$$

$$b_{2021}^2 = 0,28$$

$$b_{2020}^0 = 0,05$$

$$b_{2020}^1 = 0,12$$

$$b_{2020}^2 = 0,42$$

$$R_{2004}^F = 1,5 \text{ M€}$$

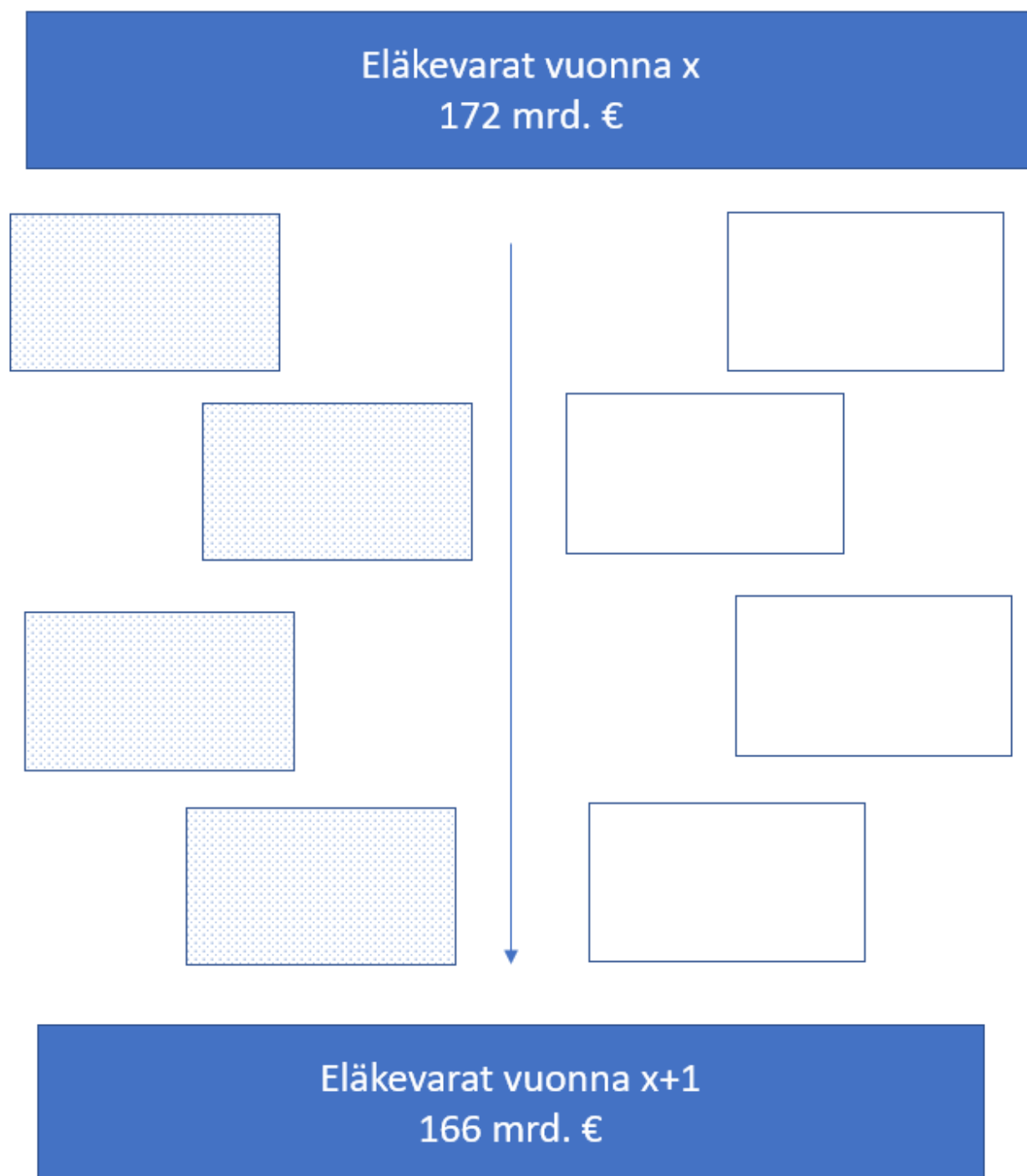
$$R_{2004}^V = 24,0 \text{ M€}$$

Vastaus:

Lakisääteisen työeläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa, kohta 4.2.2.2

TEHTÄVÄ E2 (10 pistettä)

- a) Täydennä kuvaan TyEL- ja YEL-järjestelmien rahavirrat eli kuhunkin neliöön kyseisiin järjestelmien tulo- tai menorahavirta ja nuolilla rahavirran kulku. Viivan vasemmalla puolella olevat ovat tulovirtoja ja viivan oikealla puolella menorahavirtoja.



- b) Alla olevassa kuvassa on esitetty kuvan otsikon mukainen kustannustenjaon erä. Mistä kyseinen erä koostuu ja miksi erä on ollut voimakkaassa kasvussa viime vuodet?

Toisten puolesta maksetut eläkeosat vuosina 2001–2020



Eläketurvakeskus | 13.12.2021 |

c) Määrittele kustannustenjaon suure (i) L^{ETK} sekä sen laskennassa käytettävät suureet

- (ii) ${}^2e_v \cdot g_v^m \cdot S_v^p$
- (iii) ${}^2e_v \cdot S_v^p$
- (iv) g_v^m

$$L_v^{ETK} = \begin{cases} {}^1e_v \cdot S_v^p; \\ {}^2e_v \cdot g_v^m \cdot S_v^p; \\ {}^2e_v \cdot S_v^p; \end{cases}$$

VASTAUS:

- a) Työeläkkeiden kustannustenjako ja Lakisääteisen työeläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa
- b) Työeläkkeiden kustannustenjako, 2.2.2
- c) Työeläkkeiden kustannustenjako, 2.6.3.

ERIKOISTUMISOSA – VAHINKOVAKUUTUS

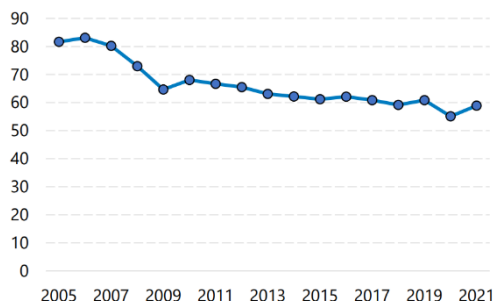
TEHTÄVÄ V1 (10 pistettä)

- Millaista vakuutusturvaa vakuutettu saa ns. pakollisesta lakisääteisestä työtaturmavakuutuksesta? Entä vapaaehtoisesta työtaturmavakuutuksesta?
- Mietit keski-suuren Suomalaisen rakennusyrityksen talousjohtajana yrityksesi työtaturmavakuutusta. Pohdi valintaa erikois- ja taulustotariffin välillä seuraavien Tapaturmavakuutuskeskuksen julkaisujen näkökulmasta:

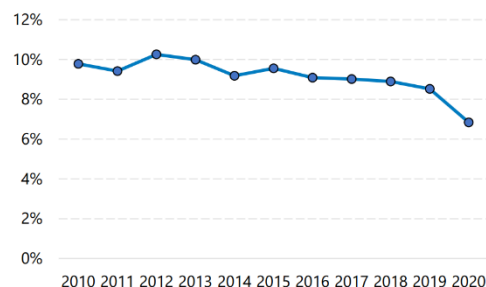
Rakentamisen toimialalla pitkään jatkunut työpaikkatapaturmien taajuuden laskutrendi taittuu, taajuus kääntyi jo nousuun 2021

Rakennusalan yritysten palkansaajille työpaikkatapaturmia sattui 13 445. Työpaikkatapaturmien taajuus oli viime vuonna 58,9, kun se vielä vuonna 2020 oli 55,1. Yhteensä rakennustyömailla vuonna 2021 sattui 11 582 työpaikkatapaturmaa palkansaajille, kun mukaan lasketaan kaikkien toimialojen työntekijät sekä 1 325 työpaikkatapaturmaa vakuutetuille yrittäjille.

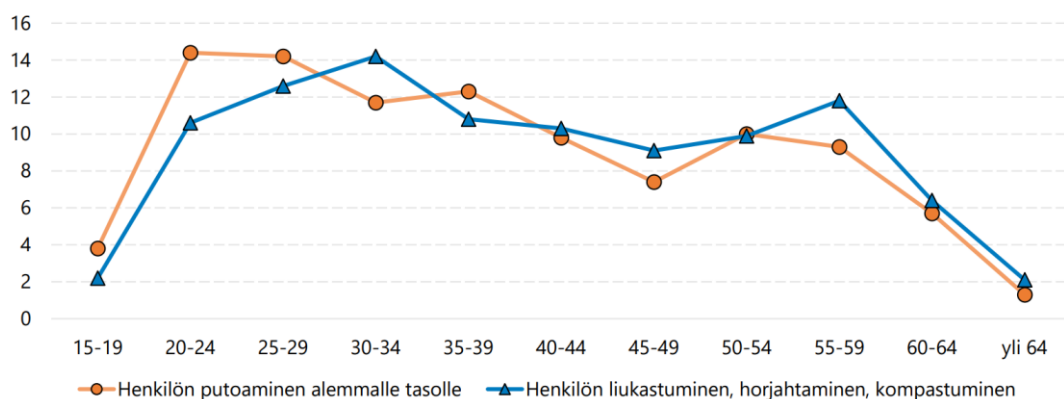
Kuva 2: Palkansaajien työpaikkatapaturmien taajuus rakentamisen päätoimialalla. (yksikkö työpaikkatapaturmaa per miljoona tehtyä työtuntia)



Kuva 5: Palkansaajien vähintään 30 päivän työkyvyttömyyteen johtaneiden työpaikkatapaturmien osuus rakentamisen päätoimialan työpaikkatapaturmista.



Kuva 8. Erilaisilla työmailla 2021 sattuneet kaatumiset ja putoamiset, %-jakauma ikäluokittain.



Tämän lisäksi tiedät, että historiassa yrityksessä on sattunut paljon vakavia työtaturmia, vaikka työntekijäsi ovat alaan verraten iäkkäitä.

MALLIVASTAUS

SHV-työ Kauppi 2005

a) Kappaleet: 2.2, 2.3, 3.1

5 pistettä

b) Kappale 6

5 pistettä

TEHTÄVÄ V2 (10 pistettä)

a)

- i. Liikennevakuutuslain (460/2016) 2 luvun 20 §:n 1 momentin mukaan vakuutusyhtiöllä on maksuperusteet liikennevakuutusmaksujen laskemista varten. Edelleen kyseisen momentin mukaan "maksuperusteita on sovellettava yhdenmukaisesti kaikkiin vakuutuksenottajiin". Mitä tällä tarkoitetaan?
- ii. mainitun pykälän 2 momentin mukaan "maksuperusteet on laadittava siten, että vakuutusmaksut ovat kohtuullisessa suhteessa vakuutuksista aiheutuvien, odotettavissa olevien kustannusten pääoma-arvoon". Mitä tällä tarkoitetaan?
- iii. miten yhtiön on valittava liikennevakuutusten hinnoittelussa käyttämänsä tariffitekijät ja millä ehdoilla yhtiön voi ottaa käyttöön uusia tariffitekijöitä?
- iv. miten vakuutuksenottajan vahinkohistoria on otettava huomioon liikennevakuutusten hinnoittelussa?

- b) Oletetaan, että yksittäisen autoilijan aiheuttamien vahinkojen lukumäärä noudattaa Poisson-prosessia $p_k(\lambda) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$, $k=0,1,2,\dots$

Parametri λ on gamma-jakautunut satunnaismuuttuja parametreina a ja τ , jolloin sen tiheysfunktio on

$$u(\lambda) = \frac{\tau^a e^{-\tau\lambda} \lambda^{a-1}}{\Gamma(a)}, \quad a, \tau > 0 \quad \left[\Gamma(a) = \int_0^\infty t^{a-1} e^{-t} dt; \Gamma(a+1) = a\Gamma(a) \right]$$

Osoita, että vakuutuksenottajan vahinkohistoriaa $(k_1, \dots, k_t)$ vastaava satunnaismuuttujan λ a posteriori -jakauma on gammajakauma parametreina $a+k$ ja $\tau+t$, missä $k = \sum_{i=1}^t k_i$.

Pisteytys:

a) 6 p.

b) 4 p.

Vastaus:

a) Liikennevakuutuslain (460/2016) 2 luvun 20 § ja perustelut (HE 123/2015)

b) Lemaire, s. 159-60