

**YLEINEN OSA**

**TEHTÄVÄ Y1** (10 pistettä)

Arvioi korvausvastuun kokonaismäärä Bornhuetter Ferguson -menetelmällä.

A priori –vahinkosuhte vuodesta riippumatta on 60%.

Maksettujen korvausten inkrementaalinen kolmio

vuosi	1	2	3	4
2 012	13 000	4 000	400	100
2 013	12 000	3 500	300	
2 014	10 000	3 000		
2 015	8 000			

Vakuutusmaksutuotot

vuosi	maksut
2 012	25 000
2 013	25 000
2 014	25 000
2 015	10 000

Tapauskohtaisten varausten kolmio

vuosi	1	2	3	4
2 012	1 000	500	0	0
2 013	200	200	200	
2 014	500	200		
2 015	700			

*Vastaus*

*SHV-työ Ropponen, Kollektiivinen Korvausvastuu, kappale 2.3.3 ja kappale 3.1.2.1.*

*(jatkuu seuraavalla sivulla):*

Maksettujen korvausten inkrementaalinen kolmio

vuosi	1	2	3	4
2 012	13 000	4 000	400	100
2 013	12 000	3 500	300	
2 014	10 000	3 000		
2 015	8 000			

Vakuutusmaksutuotot

vuosi	maksut
2 012	25 000
2 013	25 000
2 014	25 000
2 015	10 000

Tapauskohtaisten varausten kolmio

vuosi	1	2	3	4
2 012	1 000	500	0	0
2 013	200	200	200	
2 014	500	200		
2 015	700			

Muodostetaan kumulatiivinen **korvausmenokolmio** ja lasketaan Chain Ladder -kehitysjakauma.

A priori vahinkosuhteoletus 60%

	1	2	3	4	a priori kor- vausmeno	IBNS BF
2 012	14 000	17 500	17 400	17 500	15 000	0
2 013	12 200	15 700	16 000		15 000	86
2 014	10 500	13 200			15 000	175
2 015	8 700				6 000	1 310

Bornhuetter - Ferguson menetelmällä arvioitu korvausvastuu

**1 570**

ChainLadder	1.00	1.26	1.01	1.01
CL - jakauma	78 %	99 %	99 %	100 %

**TEHTÄVÄ Y2** (10 pistettä)

- Selitä lyhyesti, mikä on yleistetty ääriarvojakauma (GEV, *Generalized Extreme Value Distribution*)?
- Esitä GEV-jakauman todennäköisyysjakaumafunktio (*cumulative distribution function*).
- Mitkä kolme erikoistapausta GEV-jakaumalla on, ja millainen on jakaumafunktio kussakin tapauksessa?
- Millainen on ääriarvojakauman hännän käyttäytyminen kussakin kohdan (c) erikoistapauksista?
- Miten ääriarvojakaumaa voidaan estimoida ja mikä perusongelma estimointimenettelyihin liittyy?
- Miten yleistetty Pareto-jakauma liittyy ääriarvojen teoriaan (*Extreme Value Theory*)?

*Vastaus: Sweeting, luku 12 Extreme Value Theory*

**TEHTÄVÄ Y3** (10 pistettä)

Vakuutusyhtiö Näppärä harjoittaa yritysvaruuttamista. Näppärä on jakanut varuuttamansa yritykset kolmeen luokkaan, A, B ja C, varuuttaturvan kattavuuden perusteella. Yhtiö mallintaa luokkien vuosittaista muutosta Markovin ketju –mallilla, joka on muotoa:

	A	B	C
A	$1-\alpha-\alpha^2$	$\alpha$	$\alpha^2$
B	$\alpha$	$1-3\cdot\alpha$	$2\cdot\alpha$
C	$\alpha^2$	$\alpha$	$1-\alpha-\alpha^2$

Tässä  $\alpha$  on varuuttettavan yrityksen toimialaa kuvaava parametri.

- piirrä tilamalli
- määritä ne parametrin  $\alpha$  arvot, joilla yllä oleva matriisi on kelvollinen siirtymämatriisi  
Jos oletetaan, että  $\alpha = 0.1$ , niin
- laske Markovin ketjulle stationaarinen jakauma
- millä todennäköisyydellä yritys X on luokassa
  - A
  - B
  - C

vuonna 2023, jos yritys X kuuluu luokkaan B vuonna 2021, olettaen, että yllä esitetty siirtymämatriisi kuvaa yhtiön X siirtymistä luokasta toiseen.

*Pisteytys: a) 1.5 p, b) 2.5 p, c) 4 p ja d) 2 p.*

*Vastaus: Kaas & al. luku 6,*

b)  
- kussakin tilassa pysymistodennäköisyyden ja toisiin tiloihin siirtymistodennäköisyyksien summan pitää olla 1, siis

$$1-\alpha-\alpha^2 + \alpha + \alpha^2 = 1$$

$$\alpha + 1-3\cdot\alpha + 2\cdot\alpha = 1$$

$$\alpha^2 + \alpha + 1-\alpha-\alpha^2 = 1$$

*Toteutuu kaikilla  $\alpha$ :n arvoilla.*

- siirtymätodennäköisyyksien pitää olla välillä  $[0,1]$ . Siis

$$0 \leq \alpha \leq 1$$

$$0 \leq \alpha^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 1$$

$$0 \leq 2\alpha \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 1/2$$

$$0 \leq 3\alpha \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 1/3$$

$$0 \leq 1-\alpha-\alpha^2 \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \alpha \leq (5^{0.5}-1)/2.$$

$$\text{Siis } 0 \leq \alpha \leq 1/3.$$

c) kun  $\alpha = 0.1$ , on siirtymämatriisi  $P$

$$P = \begin{pmatrix} 0.89 & 0.1 & 0.01 \\ 0.1 & 0.7 & 0.2 \\ 0.01 & 0.1 & 0.89 \end{pmatrix}$$

Olkoon stationaarinen jakauma  $f = (f_A, f_B, f_C)$ .

Nyt  $f = f \cdot P$ , mistä saadaan yhtälöt:

$$(1) f_A = 0.89f_A + 0.1f_B + 0.01f_C$$

$$(2) f_B = 0.1f_A + 0.7f_B + 0.1f_C$$

$$(3) f_C = 0.01f_A + 0.2f_B + 0.89f_C$$

Lisäksi täytyy olla:

$$(4) f_A + f_B + f_C = 1$$

Ratkaisemalla  $f_B$  (1):stä ja (3):sta saadaan

$$0.11f_C - 0.22f_A = 0.01f_A - 0.02f_C$$

mistä edelleen

$$f_C = 0.23f_A / 0.13 = 1.79f_A$$

Yhtälön (2) perusteella

$$0.3 f_B = 0.1 f_A + 0.1 f_C$$

mistä edelleen

$$f_B = (0.1 + 0.1769)f_A / 0.3 = 0.923f_A$$

Yhtälön (4) perusteella

$$(1 + 0.923 + 1.769)f_A = 1. \text{ Täten}$$

$$f_A = 0.271$$

$$f_B = 0.25$$

$$f_C = 0.479.$$

Toinen tapa ratkaista:

Jos oletetaan, että  $f_A > 0$ , voidaan  $f_A$  :lle antaa jokin (mielivaltainen) arvo.

Ratkaistaan tämän jälkeen  $f_B$  ja  $f_C$ . Skaalataan tämän jälkeen saadut ratkaisut niin, että yhtälö (4) toteutuu.

d)

$$P \cdot P = \begin{pmatrix} 0.8022 & 0.16 & 0.0378 \\ 0.161 & 0.52 & 0.319 \\ 0.278 & 0.16 & 0.8122 \end{pmatrix}$$

Siis

$$(i) 0.161$$

$$(ii) 0.52$$

$$(iii) 0.319$$

Toinen tapa ratkaista:

lasketaan yhteen todennäköisyydet, että tilasta  $B$  siirrytään tilaan  $x$  reittiä  $B \rightarrow A \rightarrow x$ ,  $B \rightarrow B \rightarrow x$  ja  $B \rightarrow C \rightarrow x$ ,  $x=A, B, C$ .

## ERIKOISTUMISOSA – HENKIVAKUUTUS

### TEHTÄVÄ H1 (10 pistettä)

Henkivakuutusyhtiö Henki-Ihme tekee tilinpäätöksen. Sillä on sekä laskuperustekorkoisia (LPK) että sijoitussidonnaisia (UL) säästöhenkivakuutuksia. LPK-sopimukseen sisältyy kuoleman tapauksessa pieni säästöt ylittävä riskisumma. Henki-Ihme maksaa korvaukset hyvin pian vahinkotapahtuman jälkeen, joten sillä ei ole korvausvastuuta eikä se tee erillistä varausta riskisummille.

UL-sopimusten osalta vakuutusjärjestelmä ei osaa laskea sijoituskohteiden kurssikehityksestä johtuvaa hyvitystä sopimuksille. Tämän takia UL-kannalle hyvitetty tuotto arvioidaan olevan sama kuin UL-katteen nettotuotto (sijoitustoiminnan tuotot - kulut).

Vakuutusjärjestelmästä välitetään tuloslaskelmalle suoraan vastuuvelan muutos mutta yhtiön vastuullinen vakuutusmatemaatikko on havainnut järjestelmän toimivan epäluotettavasti vastuuvelan muutoksen laskennassa viimeisimmän ohjelmistopäivityksen myötä. Tämän takia aktuaaritoimi laatii vastuuvelan tarkastuslaskelman Thielen yhtälöä käyttäen ja analysoi vakuutusteknisen tuloksen korko-, riski- ja kustannusliikkeen avulla. Jos tarkastuslaskelma ja analyysi osoittavat, että vakuutusjärjestelmän tuottama vastuuvelka ei ole aktuaaritoimen mielestä oikealla tasolla, tehdään siihen korjaus.

Käytössäsi on vakuutusteknisen tuloksen tiedot sekä vastuullisen vakuutusmatemaatikon keräämiä tietoja vakuutuksiin liittyen.

Laadi annettujen lukujen ja muiden tietojen perusteella vastuuvelan tarkastuslaskelma ja analyysi (korko-, riski- ja kustannusliike) erikseen LPK ja UL. Perustele oletukset, joita mahdollisesti käytät laskelmissa.

Päättele laskelmien perusteella, tarvitseeko vakuutusjärjestelmien tuottamaa vastuuvelkaa korjata LPK- tai UL-kannan osalta. Alle 0,5 milj. euron eroja ei tarvitse korjata. Mikä on Henki-Ihmeen vakuutustekninen tulos tilikaudelta mahdollisten korjausten jälkeen?

milj. EUR	LPK	UL	YHT
Vakuutusmaksutulo	5,0	270,0	275,0
Sijoitustoiminnan tuotot	25,0	150,0	175,0
Korvauskulut	-1,7	-300,0	-301,7
Vastuuvelan muutos	3,8	-23,0	-19,2
Liikekulut	-10,0	-15,0	-25,0
Sijoitustoiminnan kulut	-7,5	-13,5	-21,0
<b>VAKUUTUSTEKENINEN TULOS</b>	<b>14,6</b>	<b>68,5</b>	<b>83,1</b>

milj. EUR	LPK	UL	YHT
Vastuuvelka 1.1.	800,0	2 500,0	3 300,0
Keskimääräinen säästö 1.1.	0,15	0,25	0,40
Vapautuneet säästöt	1,5	300,0	301,5
Hyvitetyt korot ja asiakashyvitykset	28,0	0,0	28,0
Riskimaksut	3,0	0,0	3,0
Kuormitustulo	32,0	75,0	107,0
Vakuutusten lukumäärä 31.12. (kpl)	5 000	12 000	17 000

*Vastaus: LPK-vastuuvelan muutoksen tulosvaikutus +3,5 (ei tarvitse korjata), UL-vastuuvelan tulosvaikutus -31,5 (tulee korjata). Tulos korjausten jälkeen 74,6.*

## TEHTÄVÄ H2 (10 pistettä)

Maailmalla riehuu koronapandemia, joka pelästyttää myös suomalaiset. Henki-Ihmeen asiakaspalveluun alkaa tulla puheluita, joissa asiakkaat kyselevät kuolemanvaraturvan perään. Tuotekehitysjohtajalla tulee kiireiset paikat laajentaa yhtiön valikoimaa niin, että asiakkaille pystytään myymään heidän haluamiaan turvia. Johtaja ottaa yhteyttä aktuaaritoimeen ja pyytää hinnoittelemaan uuden kuolemanvaravakuutus tuotteen, jota ensi vaiheessa tarjotaan yhtiön jo olemassa olevalle asiakaskunnalle bulkkituotteena, jotta se saataisiin nopeasti markkinoille ja ehdittäisiin mukaan markkinarakoon.

Tuotekehitysjohtaja on selvittänyt asiakaspalveluosaston kanssa asiakaskyselyn perusteella, että sopiva tarjottava vakuutussumma bulkkituotteelle olisi 150 000€.

Aktuaaritoimella on käytössä edellisen tehtävän mukaisten tietojen lisäksi seuraavat tiedot ja arviot:

- Vakuutuskannan havaittu kuolevuus 2 promillea
- Vakuutuksen myynti- ja voimaansattokulut 100€ / vakuutuskappale
- Vakuutusten hoitokulut 30€ / vakuutuskappale / vakuutusvuosi
- Kuolemantapauksen korvauskäsittely 250€ / korvauskappale
- Vakuutuskannan raukeavuus 8% / vuosi
- Riskihenkivakuutusjärjestelmään investointi 500t€

Yhtiö noudattaa hinnoittelussaan henkivakuutuksen turvaavuusperiaatetta ja katsoo, että sekä riskiliikkeen että kustannusliikkeen pitää olla itsessään turvaavasti hinnoiteltuja (ts. riskiliike ei subventoi kustannusliikettä tai toisinpäin). Hallitus on linjannut, että hinnoittelussa on käytettävä vähintään 20% turvaavuutta, joten se on vähimmäisedellytys myös tämän uuden tuotteen osalta. Lisäksi hallitus on linjannut, että vakuutusten myynnistä aiheutuvat kulut sekä uuden järjestelmän investointikustannus on kuolettava odotusarvoisesti viiden vuoden kuluessa.

Henki-Ihme määrittää riskihenkivakuutuksen vuosimaksun kaavan

$$B = \frac{(1 + \varphi) \cdot r + \varepsilon}{1 - \kappa}$$

mukaisesti. Määritä vuosimaksu laskemalla arvot kaavan parametreille annettujen tietojen perusteella noudattaen edellä esitettyjä periaatteita ja perustuen historiahavaintoihin seuraavissa tapauksissa:

- a) Tuotekehitysjohtajan arvion mukaan vakuutuksia saadaan myytyä nykyiselle vakuutuskanalalle välittömästi 10 000 kappaletta
- b) Aktuaaritoimi suhtautuu skeptisesti tuotekehitysjohtajan arvioon ja olettaa myynnin olevankin vain 2 000 kappaletta

Analysoi vakuutuksen hintaa em. tapauksissa asiakkaan ja yhtiön näkökulmasta turvaavuusvaatimukset huomioiden. Pitäisikö jotain muuttaa, jotta myynnin ja kannattavuuden tasapaino varmistettaisiin, ja jos niin mitä?

*Vastaus:*

*Maksun osien tulkitseminen ja maksun muodostaminen: Yksilöllisen henkivakuutuksen laskuperusteet SHV-tutkintoa varten (1988)*

*Tuloksen turvaavuuden ja kannattavuuden analysointi: Jussilan materiaalin hyödyntäminen*

## ERIKOISTUMISOSA – ELÄKEVAKUUTUS

### TEHTÄVÄ E1 (10 pistettä)

Työskentelet asiakasystävällisenä matemaatikkona työeläkevakuutusyhtiö Kuldakägözessä, ja Kuldakägözen asiakasyritys Kaugobriha on pyytänyt saada erittelyn arvioidusta vuoden 2021 työeläkevakuutusmaksustaan maksukomponenteittain, niin että he näkevät mikä euromäärä heidän maksustaan käytetään mihinkin. Kaugobrihan talousjohtajaa ihmetyttää, että kokonaismaksu on vuoden 2019 tasosta selvästi noussut, vaikka Kaugobrihan palkkasumma on ennallaan. Tehtäväsi on laskea kokonaismaksun ja kunkin maksukomponentin suuruus sekä euroina että prosentteina Kaugobrihan palkkasummasta, sekä kertoa, mihin tarkoitukseen mitäkin maksunosaa käytetään. Lisäksi sinun tulee kertoa, minkä vuoksi maksu on noussut vuoden 2019 tasosta. Käytettävissäsi on seuraavat tiedot sekä (tentin yhteydessä jaettu) vuoden 2021 laskuperusteiden liiteosa.

Arvion mukaan vuonna 2021 Kaugobrihan 201 työntekijästä 100 on 40-vuotiaita naisia, joiden yhteenlasketut vuosipalkat ovat 5 000 000 euroa ja 100 on 60-vuotiaita miehiä, joiden yhteenlasketut vuosipalkat ovat niin ikään 5 000 000 euroa, lisäksi töissä on yksi 66-vuotias toisesta työsuhteesta lakisääteisellä vanhuuseläkkeellä oleva mies, jonka vuosipalkka on 20 000 euroa.

Kaugobrihan palkkasumma oli 10 000 000 e vuonna 2019, ja vuoden 2019 palkkakerroin oli 1,417. Vakuutusmaksun työkyvyttömyyseläkeosan laskennassa käytettävät riskisuhteet ovat Kaugobrihalla olleet vuosina 2016-2019 aikajärjestyksessä arvoiltaan 1,8 (vuonna 2016), 0,3 (vuonna 2017), 2,0 (vuonna 2018) ja 3,0 (vuonna 2019).

**HUOM.** Tehtävään liittyen käytettävissä ovat tentissä jaettavat liitteet: TyEL laskuperusteet sekä Nx- ja Dx-lukujen taulukot.

*Vastaus:* Lasketaan maksun vanhuuseläke-, työkyvyttömyyseläke-, maksutappio-, hoitokustannus-, lakisääteisten maksujen ja tasausosa laskuperusteiden mukaisesti. Vanhuuseläkemaksu henkilötasolla sukupuoli- ja ikäkohtainen, työkyvyttömyyseläkemaksu henkilötasolla ikäkohtainen, lisäksi omavastuuasteen osalta maksuluokka vaikuttaa, muut maksunosat palkkasummaperusteisia. Tasausosan laskennassa huomioitava maksutappio-osan alennus ja maksuluokan vaikutus työkyvyttömyyseläkeosan kohdalla. Maksunosien käyttö eläkkeiden rahastointiin (vanhuus- ja työkyvyttömyyseläkkeet), vakuutusmaksujen luottotappioiden kattamiseen, liikekulujen kattamiseen, Eläketurvakeskuksen, työeläkeasioiden muutoksenhakulautakunnan ja Finanssivalvonnan kustannusten kattamiseen sekä yhteisesti kustannettaviin eläkkeiden tasausosiin. Maksun nousu aiheutuu työkyvyttömyyseläkeosaan vaikuttavan maksuluokan merkittävästä noususta.



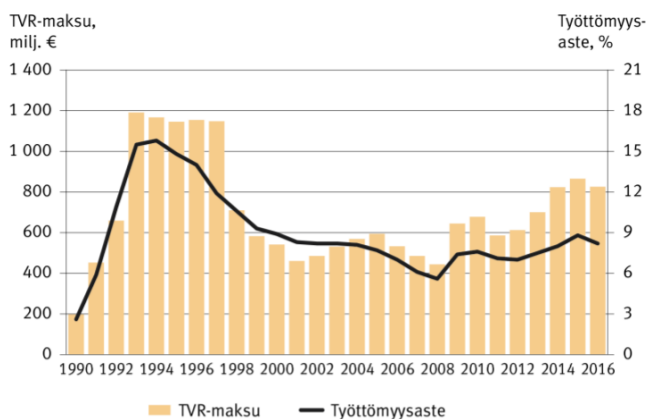
**TEHTÄVÄ E2** (10 pistettä)

- a. Laske alla olevan taulukon perusteella, mikä on YEL:n valtion osuus vuonna 2022 (luvut miljoonia euroja).

Vuosi	Eläkemeno*)		Maksutulo P	Hoitokulu H	maksut Pa	Rahasto By	Työtulosumma
	Hy						
2017	1 197,3		1 072,9	62,9	82,9	1 091,3	4 645,3
2018	1 243,2		1 064,8	64,0	82,2	1 079,2	4 613,4
2019	1 296,5		1 073,7	65,4	83,1	1 085,0	4 619,6
2020	1 347,0		1 067,1	60,8	84,7	1 082,7	4 609,9
2021	1 384,4		1 071,6	60,5	84,4	1 088,4	4 633,1
2022	1 436,4		1 083,0	61,9	85,6	1 097,6	4 683,8
2023	1 477,1		1 094,8	63,8	87,4	1 108,4	4 738,6
2024	1 522,9		1 111,8	65,8	88,3	1 124,0	4 813,8
2025	1 571,8		1 134,6	68,1	89,4	1 144,3	4 911,6
2026	1 633,9		1 151,0	70,7	90,4	1 157,7	5 028,7

\*) Sisältää aiempiin vuosiin kohdistuvia korjauksia.

- b. Oheinen kuva kertoo TVR-maksun kehityksestä.



Mikä TVR-maksu on? Anna esseevastaus.

Seuraavat kysymykset voivat olla hyödyksi. Miten TVR-maksu linkittyy työttömyyteen? Miksi sitä maksetaan? Millä perusteella se määräytyy? Miten se näkyy rahastoinnissa ja eläkemaksuissa?

**Vastaus:**

a. 424,4 M€, Kustannustenjako, kappale 2.3.

b. Kustannustenjako, kappale 2.5, erityisesti sivut 57, 62, 63. (Kappale 7.6.)

**ERIKOISTUMISOSA – VAHINKOVAKUUTUS****TEHTÄVÄ V1** (10 pistettä)

Kuvaa korvausvastuun arviointimenetelmä "Poisson-malli ylihajonnalla". Miten ko. malli soveltuu tilanteisiin missä korvauskolmio sisältää negatiivisia havaintoja?

*Vastaus: Ropposen työ, sivut 59-60*

**TEHTÄVÄ V2** (10 pistettä)

a) kuvaa rajoitetun omavastuun maksujärjestelmä.

b) vahinkovakuutusyhtiö Ketterä harjoittaa lakisääteistä tapaturmavakuutusta. Yhtiön korvauskulut tässä vakuutuslajissa olivat vuosina 2016-2020 yhteensä 565 miljoonaa euroa, mistä 44 % on ohimeneviä korvauksia, 38 % pysyviä korvauksia ja 18 % jakojärjestelmän kautta rahoitettavia korvauksia.

Yhtiöllä on lakisääteisessä tapaturmavakuutuksessa jälleenvakuutusuoja, joka korvaa jokaisesta yksittäisestä vahingosta miljoona euroa ylittävän osan. Jälleenvakuutusuojan vuosimaksu on 100 000 euroa, joka yhtiön aktuaarin arvion mukaan on kohtuullisen hyvin riskiä vastaava.

Alla on taulukoituna kymmenen suurinta vahinkoa vuosilta 2016-2020. Yhtiön aktuaarin arvion mukaan keskimäärin 80 % on tunnistettu, ja näistä tehdyt vahinkokohtaiset varaukset ovat melko luotettavia.

KETTERÄ				
Lakisääteinen tapaturmavakuutus				
Suurimmat vahingot vuosilta 2016-2020				
Tilanne 30.10.2021				
Luvut 1000 €				
sattumis- vuosi	maksetut korvaukset	korvaus- vastuu	yhteensä	
2017	155	565	720	
2020	65	545	610	
2020	372	208	580	
2018	202	318	520	
2019	87	388	475	
2019	162	298	460	
2019	53	397	450	
2016	420	0	420	
2017	88	296	384	
2020	44	329	373	

Rajoitetun omavastuun järjestelmän osuus lajin maksutulosta on 10 %.

Arvioi edellä esitettyjen tietojen pohjalta, mikä vakuutusnottajan rajoitetun omavastuun maksujärjestelmän mukaisen suurvahinkopromillen tulisi olla, jos vakuutusnottajan omavastuuraja on 400 000 euroa. Vakuutusnottaja toimii toimialalla, missä tariffiluokan maksupromille on 4.

Tee mahdollisesti tarvittavat lisäoletukset.

*Vastaus: Mira Kaupin SHV-työ: "Lakisäätöisen tapaturmavakuutuksen maksujen määräytymisestä", luku 6.5, sivut 29-31.*