

|                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| SHV-Tentti                       | 25.11.2010 |
| Vakuutusmatematiikan sovellukset | STM        |

Y1. Arvio tuntemattomien vahinkojen IBNR:n odotusarvo ja yhden hajonnan suuruinen varmuusmarginaali seuraavasta kehityskolmiosta:

| SATTUMIS-<br>VUOSI | KEHITYSVUOSI |   |   |   |   | VAKUUTUS-<br>MAKSUT |
|--------------------|--------------|---|---|---|---|---------------------|
|                    | 0            | 1 | 2 | 3 | 4 |                     |
| 2005               |              |   | 2 | 1 | 0 | 100                 |
| 2006               |              | 9 | 3 | 0 |   | 110                 |
| 2007               | 20           | 8 | 1 |   |   | 120                 |
| 2008               | 25           | 7 |   |   |   | 130                 |
| 2009               | 23           |   |   |   |   | 120                 |

HUOM! Käytettävissä oleva kehityskolmio sisältää vain tilivuodet (experience years) 2007 - 2009. Voit olettaa vahinkojen lukumäärän noudattavan Poisson-jakaumaa.

*Vastausohje ja tarkempi pisteytys:*

*Mallivastaus:*

*Tapa 1: Täydennetään kehityskolmion vasen yläreuna hyödyntäen tuoreimpien vuosien Chain Ladder -kehityskertoimia. Tämän jälkeen voidaan laskea kehityskolmion IBNR soveltamalla perinteisesti Chain Ladder -menetelmää.*

*Tapa2 : Suhteutetaan kehitysvuosien vahinkokappaleet kyseisten vuosien maksuihin ja sovelletaan näin saatuja suhdelukuja kehityskolmion tuntemattomaan osaan.*

*Varmuusmarginaali saadaan ottamalla edellä lasketusta totaali vahinkokappaleiden IBNR-arvosta neliöjuuri.*

*Pisteytys:*

*Menetelmä kuvattu oikein: 4 pistettä*

*Kuvatun menetelmän tuottama IBNR laskettu oikein: 3 pistettä Varmuusmarginaali on määritelty ja laskettu oikein: 3 pistettä*

Y2. Vakuutusosakeyhtiö Sinisiivellä, joka myöntää kertamatkavakuutuksia, on seuraava kanta-asiakasohjelma: Asiakkaat on jaettu järjestyksessä neljään luokkaan: tavallinen, hopea-, kulta- ja platina-asiakas. Asiakkaat saavat etuja sen mukaan, missä luokassa ovat. Kanta-asiakkaat, jotka ostavat kaksi tai useampia matkavakuutuksia vuoden aikana, siirtyvät seuraavaksi ylempään luokkaan (tai pysyvät platina-asiakkaina, jos ovat ennestään), asiakkaat, jotka ostavat yhden matkavakuutuksen vuoden aikana, pysyvät luokassaan. Asiakkaat, jotka eivät osta matkavakuutusta vuoden aikana, siirtyvät yhtä alempaan luokkaan (tai pysyvät tavallisina asiakkaina, jos ennestään).

Olkkoon niitten kanta-asiakkaiden osuudet, jotka ostavat nolla, yhden tai vähintään kaksi matkavakuutusta järjestyksessä p0, p1 ja p2.

|                                  |            |
|----------------------------------|------------|
| SHV-Tentti                       | 25.11.2010 |
| Vakuutusmatematiikan sovellukset | STM        |

Kerro, miten kanta-asiakasohjelmaa voi mallintaa Markovin ketjulla ja tee siirtymämatriisi.

Sinisiiven aktuaari on laskenut, että 40 % kanta-asiakkaista ei osta yhtään matkavakuutusta, 40 % ottaa tasan yhden matkavakuutuksen ja 20 % ostaa vähintään kaksi matkavakuutusta vuodessa.

Laske kanta-asiakkaiden stationaarinen luokkajakauma.

Kanta-asiakasohjelman kustannus vuodessa asiakasta kohti on kussakin kanta-asiakasluokassa seuraava: tavallinen 0 €, hopea 10 €, kulta 20 € ja platina 30 €. Sinisiipi saa voittoa 10 € jokaisesta matkavakuutuksesta (ennen kanta-asiakasohjelman kustannuksia). Arvioi onko kanta-asiakasohjelma pitkän päälle kannattava Sinisiivelle ja laske paljonko vähintään on voitto tai tappio asiakasta kohti (olettaen, että ilman kanta-asiakasohjelmaa ei myytäisi vakuutuksia ollenkaan).

*Vastausohje ja tarkempi pisteytys:*

*Modern Actuarial Risk Theory luku 6.3.*

*a: max 3 p*

*b: stationaarinen jakauma 8/15, 4/15, 2/15 ja 1/15. max 4 p*

*c: voittoa vähintään 2/3 € per vakuutus, max 3 p*

- Y3. Miten kuolevuuden aleneminen voidaan huomioida
- a. lakisääteisessä työeläkevakuutuksessa sovellettavassa kuolevuusmallissa
  - b. lakisääteisen tapaturmavakuutuksen referenssikuolevuudessa?

Pohdi myös näiden mallien keskeisiä eroja sen suhteen, miten kuolevuuskehityksen muuttuminen voidaan näissä malleissa huomioida.

*Vastausohje ja tarkempi pisteytys:*

*Pisteet a) 4 p b) 4 p Keskeiset erot 2 p, yhteensä 10 p*

*a) Lähde: Lakisääteisen työeläkevakuutuksen vakuutustekniikka: Kappaleet 2.2.1.2, 2.2.2.2, 2.4.2*

*b) Lähde: Lakisääteisen tapaturmavakuutuksen referenssikuolevuus kappale 5 ja liite Keskeiset erot: Löytyy edellisistä kohdista*

V1. Määrittele matemaattisesti lakisääteisen tapaturmavakuutuksen maksujärjestelmä, millä on seuraavat ominaisuudet:

- ohimenevien korvausten maksupromille vastaa 3 edellisen vuoden palkkasummilla painotettua ohimenevien korvausten keskiarvoa (suhteessa palkkasummaan)
- ohimenevien korvausten laskennassa otetaan huomioon kollektiivinen korvausvastuu, mikä määritetään suhteessa edellisten 3 vuoden riskimaksuihin (vuosikohtaiset kollektiivikertoimet)
- ohimenevien korvausten maksupromille voi kasvaa maksimissaan 50%:a vuodessa ja tätä varten peritään varmuuslisää, mikä on suhteessa ohimeneviin korvauksiin
- pysyvien korvausten maksupromille vastaa laajemman referenssiaineiston pohjalta laskettujen vastuuluokkakohtaisten pysyvien korvausten maksupromillea painotettuna asiakkaan vastuuluokittaisella palkkasummajakaumalla
- korvausten hoitokulukuormitus määräytyy suhteessa ohimeneviin korvauksiin
- liikekulukuormitus sisältää kiinteän ja muuttuvan osuuden, missä muuttuva osuus on suhteessa ohimeneviin korvauksiin, pysyviin korvauksiin sekä palkkasummaan.

*Vastausohje ja tarkempi pisteytys:*

*Mallivastaus:*

- *Asiakkaan ohimenevien korvausten arvio saadaan summaamalla yhteen 3 edellisen vuoden ohimenevät korvaukset huomioimalla IBNR suhteessa 3 edellisen vuoden riskimaksuihin. Asiakkaan ohimenevien korvausten maksupromille saadaan suhteuttamalla asiakkaan ohimenevien korvausten arvio palkkasummaan, rajoittamalla vuosittainen kasvu 150 %:iin ja kuormittamalla ohimenevien korvausten arvio vuosittaisen kasvun rajoittamisen takia varmuusmarginaalilla.*
- *Asiakkaan pysyvien korvausten maksupromille saadaan laskemalla yleisten vastuuluokkakohtaisten pysyvien korvausten maksupromillien asiakkaan palkkasummilla painotettu keskiarvo.*
- *liikekulut ja korvausten hoitokulut saadaan kuormittamalla 2:lla eri parametrilla asiakkaan ohimenevien korvausten maksupromille sekä laskemalla yhteen vakio, osuus palkkasummasta ja asiakkaan arvioituista pysyvistä korvauksista*

*Pisteytys:*

- *Ohimenevien korvausten keskiarvo: 2 pistettä*
- *Ohimenevien korvausten IBNR: 2 pistettä*
- *Ohimenevien korvausten rajoitus ja rajoituksesta johtuva kuormitus: 1 piste*
- *Pysyvät korvaukset: 2 pistettä*
- *Korvausten hoitokulut: 1 piste*
- *Liikekulut: 2 pistettä*

V2. Alla olevassa kolmiossa on erään vahinkolajin maksetut korvaukset vuoden 5 loppuun mennessä.

| Sattumis-<br>vuosi | Maksetut korvaukset selviämivuositain |         |         |        |        |       | yhteensä |
|--------------------|---------------------------------------|---------|---------|--------|--------|-------|----------|
|                    | 0                                     | 1       | 2       | 3      | 4      | 5     |          |
| 0                  | 52 546                                | 28 729  | 9 186   | 7 816  | 4 885  | 3 102 | 106 264  |
| 1                  | 62 285                                | 36 210  | 11 601  | 8 250  | 5 336  |       | 123 682  |
| 2                  | 72 173                                | 41 126  | 11 041  | 8 543  |        |       | 132 883  |
| 3                  | 86 135                                | 41 224  | 11 050  |        |        |       | 138 409  |
| 4                  | 97 068                                | 53 408  |         |        |        |       | 150 476  |
| 5                  | 128 982                               |         |         |        |        |       | 128 982  |
| yhteensä           | 499 189                               | 200 697 | 142 878 | 24 609 | 10 221 | 3 102 |          |

Oletetaan, että vahingot selviävät täydellisesti kuuden vuoden aikana.

- Laske korvausvastuu vuoden 5 lopussa chain-ladder –menetelmällä.
- laske korvausvastuu vuoden 5 lopussa Mackin menetelmällä,  $\alpha = 1$  ja volyymikertoimet ovat  $p(0) = p(1) = \dots = p(5) = 1$ .

Aineistosta on laskettu seuraavat suureet:  $\hat{\sigma}^2 = 355.47$ ,  $\hat{t}^2 = 0.0597$ .

Tehtävän ratkaisuun voi hakea apua joistakin liitteessä esitetyistä kaavoista.

*Vastausohje ja tarkempi pisteytys:*

*Pisteytys: a:4 p., b:6 p.*

*ratkaisu:*

*a) Taylorijn kirjan luku 2.2.4*

*b) Taulorijn kirjan luku 9.9.2*

*Tuloksiksi tulee a: 203672 ja b: 161894*

H1. Henkivakuutusyhtiö Höyhen hinnoittelee vakuutuksensa yksilöllisen henkivakuutuksen laskuperusteiden mukaisesti ja laskee vakuutus sopimuksista aiheutuvan vastuuvankansa rekursiivisella tekniikalla. Ratkaise seuraavat tehtävät käyttäen tarvittaessa apunasi liitteistä löytyviä peruslukujen taulukkoa sekä kaavakokoelmaa.

a) Yritys Y ottaa 1.1.2010 työntekijälleen, 50-vuotiaalle Pekalle kertamaksuisen eläkevakuutuksen vakuutusyhtiö Höyhenestä. Eläkevakuutus on korkosidonnainen 4,5%:n laskuperustekorolla. Eläkemaksatus alkaa Pekan täyttäessä 60 vuotta 50.000€:n vuosieläkkeenä ja muuttuu Pekan täyttäessä 63 vuotta elinikäiseksi 30.000€:n vuosieläkkeeksi. Vakuutus sisältää vain eläkekorvauksen (siihen ei liity kuolemanvara- eikä työkyvyttömyysosia). Vakuutusmaksuun liittyy 5%:n  $\kappa$ -kuormitus josta puolet tuloutetaan välittömästi kertamaksun yhteydessä ja puolet vakuutussäästön vapautumisen yhteydessä. Muita kuormituksia ei peritä.

1) Laske kertamaksun suuruus.

2) Yritys Y takaisinostaa Pekan vakuutussäästöistä 50.000 euroa hetkellä 1.4.2010. Laske eläkevakuutus sopimuksesta aiheutuva vastuuvankka hetkellä 31.12.2010.

3) Vakuutus sopimusta muutetaan takaisinoston jälkeen niin, että eläkettä aletaan maksaa Pekan täytettyä 60 vuotta vakiosuuruisena, elinikäisenä eläkkeenä. Mikä on Pekan vuosieläkkeen suuruus takaisinoston jälkeen?

b) Pysyvän työkyvyttömyyden vakuutuksen riskimaksun hinnoitteluun on lisätty turvaavuutta niin, että nettovakuutusmaksu lasketaan laskuperusteen mukaisesta varmuuslisällisestä riskimaksusta lisäämällä vakuutetun ikään puolen vuoden ikäsiirto ylöspäin. Työkyvyttömyysvakuutukseen liittyy lisäksi 10%:n  $\kappa$ -kuormitus ja 10%:n  $\rho$ -kuormitus (riskimaksulle). Muita kuormituksia ei peritä.

50-vuotias Paula ottaa 1.1.2010 pysyvän työkyvyttömyyden vakuutuksen 100.000 euron vakuutus summalle. Vakuutusmaksu peritään puolivuositain etukäteen. Laske ensimmäisen vakuutusmaksun suuruus.

c) Aviopari, 35-vuotiaat Pekka ja Paula ottavat 1.1.2010 kuolemanvaravakuutuksen parivakuutuksena. Vakuutus summa on 150.000 euroa ja vakuutusmaksu maksetaan kerralla etukäteen viideksi vuodeksi. Vakuutukseen liittyy 10%:n  $\kappa$ -kuormitus, 10%:n  $\rho$ -kuormitus ja 0,10%:n  $\varepsilon$ -kuormitus.

1) Laske vakuutusmaksun suuruus.

2) Laske vakuutus sopimuksesta aiheutuvan maksunsiirtovarauksen suuruus hetkellä 31.12.2010.

*Vastausohje ja tarkempi pisteytys:*

*a) 4 pistettä*

*vastaukset:*

1) **260.220€**

(Yksilöllisen henkivakuutuksen laskuperusteet SHV-tutkintoa varten, peruslukujen taulukko)

2) **211.978€**

(1-kohdan tulokseen perustuen; Henkivakuutus rekursiivisella tekniikalla, laskuperuste SHV-tutkintoa varten)

3) **27.657€**

(2-kohdan tulokseen perustuen; Yksilöllisen henkivakuutuksen laskuperusteet SHV-tutkintoa varten, peruslukujen taulukko)

b) 2 pistettä

vastaus: **588€**

(Yksilöllisen henkivakuutuksen laskuperusteet SHV-tutkintoa varten, kaavakokoelma)

c) 4 pistettä

vastaukset:

1) **2.596€**

(Yksilöllisen henkivakuutuksen laskuperusteet SHV-tutkintoa varten, peruslukujen taulukko, kaavakokoelma)

2) **1.279€**

(1-kohtaan perustuen, ratkaisu voi vaihdella sen mukaan miten kuormitukset on tuloutettu -> erilaiset perustellut ratkaisut hyväksytään)

- H2. Henkivakuutusyhtiöllä H oli 1.1.2009 vastuullaan tuhat kappaletta perinteistä loppuunmaksettua 60-vuotiaan miehen kuolemanvaravakuutusta. Vakuutussummana on  $10^4$ ,  $10^5$  tai  $10^6$  euroa. Kaikki vakuutuskaudet ulottuvat vähintään vuoden 2011 loppuun ja tyypillinen jäljellä oleva vakuutusaika on 5 vuotta. Vuoden 2009 lopussa saatiin vakuutussumman mukaan luokiteltuna seuraavat havainnot.

| S      | N   | $V_{2008}$         | $V_{2009}$         |
|--------|-----|--------------------|--------------------|
| $10^4$ | 300 | $0,4 \times 10^6$  | $0,3 \times 10^6$  |
| $10^5$ | 600 | $7,2 \times 10^6$  | $6,1 \times 10^6$  |
| $10^6$ | 100 | $12,4 \times 10^6$ | $10,6 \times 10^6$ |

Taulukossa S tarkoittaa vakuutussummaa, N vakuutettujen lukumäärää,  $V_{2008}$  vastuovelkaa vuoden 2008 lopussa ja  $V_{2009}$  vastuovelkaa vuoden 2009 lopussa. Vastuuveloista on poistettu tulevia liikekuluja koskeva osuus. Vuonna 2009 korvattiin kuolintapauksista  $2 \times 10^6$  euroa. Sijoitustoiminnan tuottoja saatiin tarkasteltavalle vastuuelan osalle  $0,4 \times 10^6$  euroa.

Määrää mainituissa kuolintapauksissa vapautunut vastuovelka ja esitä laskelma vakuutuskannan vuoden 2009 riski- ja korkoliikkeen tuloksista. Yhtiön laskuperusteen mukainen korkoutuvuus on  $\delta = 0,03$  ja kuolevuus iässä  $x$  on  $\mu(x) = be^{cx}$ , missä  $b = 0,00005$  ja  $c = 0,1$ .

*Vastausohje ja tarkempi pisteytys:*

*Henkivakuutusyhtiön tulosanalyysin liite. Vapautunut vastuovelka on  $0.74 \times 10^6$ , korkoliikkeen tulos -  $0.2 \times 10^6$  ja riskiliikkeen tulos  $1.6 \times 10^6$ .*



E1. a) Oletetaan, että TyEL- ja MEL-järjestelmässä yhteisesti kustannettavien eläkkeiden kustannukset vuonna 2009 olivat (M€):

|                        |      |
|------------------------|------|
| Vanhuuseläkkeet        | 1520 |
| työkyvyttömyyseläkkeet | 220  |
| työttömyyseläkkeet     | 60   |
| osa-aikaeläkkeet       | 31   |
| perhe-eläkkeet         | 269  |

Lisäksi oletetaan, että järjestelmän piirissä on kolme eläkelaitosta A, B ja C, joiden kesken kustannukset tulisi jakaa. Näistä tiedetään (M€):

|                               | A    | B    | C    |
|-------------------------------|------|------|------|
| Vakuutettu palkkasumma v.2009 | 2218 | 5176 | 7390 |
| Vanhuuseläkevastuu 31.12.2009 | 2260 | 5275 | 7540 |
| VIU-vastuut 31.12.2009        | 2886 | 6737 | 9630 |
| Tasausmaksutulo v.2009        | 370  | 863  | 1233 |
| Tasausvastuu 31.12.2009       | 277  | 645  | 920  |
| 31.12.2008                    | 234  | 545  | 779  |

Perustekorko on 5 % ajalla 1.1.2009-31.12.2009.

Määritä kunkin edellä mainitun eläkelaitoksen osuus edellä mainituista yhteisesti kustannettavista eläkkeistä. Näitä ei tarvitse vastauksessa eritellä eläkelajeittain.

b) Pohdi lyhyesti miten seuraavat tekijät vaikuttaisivat toisaalta yksittäisen eläkelaitoksen vastuulla olevan vanhuuseläkemenon ja toisaalta yhteisesti kustannettavan vanhuuseläkemenon kehitykseen:

- eliniän pidentyminen
- keskimääräisen vanhuuseläkkeelle siirtymisiän kasvaminen
- TyEL-eläkelaitosten keskimääräisen vakavaraisuusasteen aleneminen
- vanhuuseläkkeiden lisärahastointi tasausvastuusta

*Vastausohje ja tarkempi pisteytys:*

*Pisteet*

*a) 6 p:*

*Tietää miten yhteisesti kustannettavat menot jaetaan: ve 1 p, muut 1 p Vanhuuseläkkeiden jakosuure qa oikein 1 p Muiden eläkkeiden jakosuure qb oikein 1 p Kunkin eläkelaitoksen osuus ve:stä oikein 1 p Kunkin eläkelaitoksen osuus muista eläkkeistä oikein 1 p*

*Lähde: Lakisääteisen työeläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa kappale 4.3.1 tai työeläkkeiden kustannustenjako kappale 2.2.1.2*

*b) 4 p: Kukin kohta 1 p*

*Lähde: Lakisääteisen työeläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa*

E2. a) Työeläkevakuutusyhtiön vastuuvélka on hetkellä 31.12.2012 seuraava:

|   |           |
|---|-----------|
| osaketuottosidonnainen lisävakuutusvastuu $\bar{V}^Q$ | 10.000 €  |
| tyel:n varsinainen vakuutusmaksuvastuu                | 200.000 € |
| tyel:n varsinainen korvausvastuu                      | 100.000 € |
| tasausvastuu $\bar{V}^T$                              | 50.000 €  |
| tasoitusvastuu  | 10.000 €  |

Vuoden 2013 perustekorko on 5 %, eläkevastuiden täydennyskerroin 1 %, rahastokorko on 3 % ja osaketuottokerroin  $j'$  on  $-0,1$ . Vastuuvélan osaketuottosidonnaisuus vuonna 2013 on 20 %.

Hetkellä 31.12.2013 ovat tilinpäätöksessä arvioidut vastuut

|   |           |
|---|-----------|
| tyel:n varsinainen vastuu $V^{VIU}(TP)$ | 330.000 € |
| tasausvastuu $V^{T^*}(TP)$              | 60.000 €  |
| tasoitusvastuu                          | 15.000 €  |

Suure  $V^{VIU}(TP)$  on arvio tyel:n vastuuvélasta, johon ei sisälly suure  $\Delta R'$  eikä  $V^{T^*}(TP)$ .

Laske tilinpäätösarvio osaketuottosidonnaisesta lisävakuutusvastuusta  $V^Q(TP)$  hetkelle 31.12.2013.

b) Tarkastellaan vapaamuotoista etuusperusteista eläkejärjestelyä. Kerro mitä tapoja on laskea perittävä maksutaso (standard contribution rate). Luonnehdi lyhyesti kutakin tapaa.

*Vastausohje ja tarkempi pisteytys:*

*a: Lakisääteisen työeläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa, luku 4.3.6 ja tyel-laskuperusteet 5.7, tulos 2.376 €. max 6 p*

*b: Modern Actuarial Theory and practice, luku 18.2.4, max 4 p*