

1. Erään vakuutuslajin hinnoittelu perustuu kahteen tariffitekijään A ja B. Taustaoletuksena on, että yksittäisessä tariffitekijöiden arvojen määräämässä solussa jokaisen vakuutetun vuotuinen vahinkojen lukumäärä noudattaa samaa Poisson-jakaumaa. Kokonaisvahinkomäärät noudattavat yhdistettyä Poisson-jakaumaa siten, että yksittäisen vahingon suuruuden odotusarvo on sama kaikilla kannan vakuutetuilla. Lisäksi vakuutettujen vahingot ovat toisistaan kaikilta osin riippumattomia. Riskimaksujen määräämisessä muodostetaan ensin estimaatit vahinkojen lukumäärien odotusarvoille nojautuen summamalliin.

Vuoden 2010 hinnoittelu perustuu vuoden 2008 havaintoihin. Kummallakin tariffitekijällä on kaksi arvoa. Havainnot vuodelta 2008 ovat seuraavan taulukon mukaiset.

	B = 1	B = 2
A = 1	$n_{11} = 1\ 000$ $k_{11} = 200$ $s_{11} = 1\ 000$	$n_{12} = 300$ $k_{12} = 100$ $s_{12} = 500$
A = 2	$n_{21} = 700$ $k_{21} = 300$ $s_{21} = 1\ 000$	$n_{22} = 600$ $k_{22} = 400$ $s_{22} = 1\ 500$

Taulukossa n_{ij} on vakuutettujen lukumäärä, k_{ij} vahinkojen lukumäärä ja s_{ij} kokonaisvahinkomäärä tuhansina euroina solussa $(A,B) = (i, j)$. Kokonaisvahinkomäärät on oikaistu vastaamaan arvioitua vuoden 2010 kustannustasoa.

- a) Estimoi vahinkojen lukumäärien odotusarvot per vakuutettu käyttäen pienimmän neliösumman menetelmää ja tee tulokseen perustuva ehdotus vuoden 2010 riskimaksuiksi.
- b) Esitä suurimman uskottavuuden menetelmään perustuva tarkastelu vakuutettujen vahinkojen lukumäärien odotusarvojen estimoimiseksi. Riittävää on johtaa tarpeelliset konkreettiset yhtälöt numeerista laskentaa varten. (10p)
2. Erään vakuutuslajin kuukaudessa sattuvien vahinkojen lukumäärä noudattaa kaikkina kuukausina painotettua Poisson - jakaumaa odotusarvona 1000. Korvausvastuuperusteessa ja muissa laskelmissa tuntemattomien vahinkojen lukumäärät ennustetaan sattumiskuukausittain. Ennusteena käytetään ehdollista odotusarvoa kulloinkin käytettävissä olevien sattumis- ja tietoontulokuukausittaisten havaintojen suhteen. Olkoon $A(i, j)$ niiden vahinkojen lukumäärä, jotka sattuvat kuukautena i ja tulevat yhtiön tietoon kuukautena $i + j$ tai aiemmin, $i = 0, 1, \dots, l$, $j = 0, 1, 2, \dots$. Vahinkojen raportoimista koskevänä mallioletuksena on, että eri sattumiskuukausien korvaukset ovat toisistaan kaikilta osin riippumattomia ja että

$$\mathbb{E}(A(i, j + 1) | A(i, 0), A(i, 1), \dots, A(i, j)) = v(j)A(i, j),$$

missä $v(j)$ on chain ladder -kerroin. Aineistosta estimoidut kertoimet ovat osoittautuneet siksi stabiileiksi, että niihin voidaan suhtautua tunnettuina parametreina. Käytössä olevat estimaatit ovat

$$v(0) = 1.5, v(1) = 1.2 \text{ ja } v(2) = 1.05.$$

Kaikki vahingot tulevat yhtiön tietoon kolmen kuukauden kuluessa sattumisesta.

Vuoden 2009 marraskuun loppuun mennessä on samana vuonna sattuneita vahinkoja tullut yhtiön tietoon alla olevan taulukon mukaisesti. Vuoden 2009 vahingot sattumiskuukausittain

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
800	1200	1100	700	700	1000	1300	1200	900	1100	500	-

Ylempi rivi kertoo sattumiskuukauden (1 = tammikuu, 2 = helmikuu jne.) ja alempi raportoituneiden vahinkojen lukumäärän marraskuun lopussa.

- a) Laadi sattumiskuukausittain ennuste tuntemattomien vahinkojen lukumäärille tilinpäätöksessä 31.12.2009.
- b) Vakuutusala koettelevan lakon takia aktuaari varautuu tilanteeseen, jossa uusia vahinkoja ei oteta ollenkaan käsittelyyn joulukuussa. Seurauksena on, että tilinpäätöksessä 31.12.2009 tunnettuina ovat vain edellä esitetyn taulukon mukaiset vahingot. Laadi tästä lähtökohdasta sattumiskuukausittain ennuste tuntemattomien vahinkojen lukumäärille vuoden 2009 tilinpäätöksessä. (10p)

3.

- a) Yhtiön vastuuvakaperusteissa kollektiivinen korvausvastuu lasketaan kertoimilla suhteessa kahden edellisen vuoden vakuutusmaksutuottoihin ($IBNR = a \times VMTuotto(i) + b \times VMTuotto(i-1)$). Määritä vakiot a ja b Chain Ladder -menetelmällä seuraavan maksettujen korvausten kolmion avulla.

Sattumisvuosi	Kehitysvuosi				
	0	1	2	3	4
2005	1300	500	175	50	25
2006	1025	425	75	25	
2007	1200	350	50		
2008	900	300			
2009	800				

Vakuutusmaksutuotot ovat olleet historiassa seuraavat:

2005	2006	2007	2008	2009
1600	1400	1500	1400	1300

- b) Arvioi a-kohdassa määrittämäsi IBNR-perusteen toimivuutta, kun vuonna 2010 maksetut korvaukset jakaantuvat sattumisvuosille seuraavasti:

Sattumisvuosi	2006	2007	2008	2009	2010
2005	20	20	75	250	750

Vuoden 2010 vakuutusmaksutuotot ovat 1200 ja vahinkosuhteen arvioidaan olevan 100%.

(10p)

V1.

- a) Miksi bonus-malus -järjestelmiä käytetään?

Millä perusteilla bonus-malus -järjestelmien käyttöä voidaan kritisoida?

- b) Mitä tarkoitetaan bonus-malus -järjestelmän elastisuudella?

Mitä tarkoitetaan bonus-malus -järjestelmän asymptoottisella elastisuudella l. tehokkuudella?

Miksi ja miten järjestelmän tehokkuus muuttuu, jos maksuja muutetaan niin, että maksua korotetaan suhteellisesti sitä enemmän mitä alemmasta bonusluokasta on kysymys?

- c) Oletetaan, että bonusjärjestelmässä on kolme luokkaa.

Vahingottoman vuoden jälkeen siirrytään yksi luokka ylöspäin, jos mahdollista, muutoin pudotetaan luokka alaspäin, jos mahdollista.

Laske mallin stationaarinen jakauma.

- d) Missä tilanteessa alimmassa bonusluokassa olevan vakuutusnottajan kannatta c)-kohdassa esitetystä tilanteesta hakea korvaus, kun oletetaan, että

- kyseisenä vuonna ei enää satu vahinkoja,
- vuoden vakuutusmaksu maksetaan kokonaan vuoden alussa, ja
- diskonttauskerroin on α

jos tarkastelu-aika on

- 1) kaksi vuotta
- 2) ääretön,

kun lisäksi oletetaan, että vahinkofrekvenssi ei muutu, vahinkofrekvenssi ei riipu bonusluokasta ja vain tulevien vuosien vakuutusmaksut otetaan huomioon.

(10p)

V2.

Määrittele lyhyesti seuraavat lakisääteiseen tapaturmavakuuttamiseen liittyvät käsitteet:

- a) Suurvahinkopooli
- b) Ohimenevät ja pysyvät korvaukset
- c) Arvio- ja lopulliset varaukset
- d) Riskilisiä
- e) Kohtuullisuusperiaate
- f) Ammattitaudin sattumishetki
- g) Vakuutuksen pohjamaksu
- h) Tasoitusvakuutusmaksu
- i) Maksujärjestelmien yksilöllisyyden aste
- j) Puoli- ja täysyksilöllinen maksujärjestelmä

(10p)

H1. Laskuperusteen 'Yksilöllisen henkivakuutuksen perusteet' laskukaavat on muotoiltu niin sanottujen peruslukujen I, D, N, ja M avulla. Tarkastelemme peruslukuja jatkuvina funktioina $R^+ \rightarrow R^+$, missä lähtöjoukko edustaa vakuutetun ikää. Oletetaan, että kuolevuus $\mu: R^+ \rightarrow R^+$ ja korkoutuvuus $\delta = \ln(1+i)$ on annettu.

- Mitkä ovat peruslukujen I ja D määritelmät laskukaavoina?
- Miten I(x) on henkivakuutusmatematiikassa tapana tulkita?
- Johda laskuperusteessa annettu N-perusluvun likiarvokaava tarkasta arvosta

$$N(x) = \int_x^\infty D(t) dt = \lim_{M \rightarrow \infty} \int_x^M D(t) dt$$

käyttämällä integraalin likiarvona seuraavaa ns. Eulerin kaavaa ($b=a+nh$)

$$\int_a^b f(t) dt \approx h \left[\sum_{v=0}^n f(a+vh) - \frac{1}{2}(f(a) + f(b)) \right] - \frac{h^2}{12}(f'(b) - f'(a)) .$$

Voit pitää tunnettuna että $\lim_{M \rightarrow \infty} D(M) \cdot \mu(M) = 0$. Valitse $h=1$.

- Perustele miksi määräaikaisen elinkoron lauseke laskukaavojen luettelossa kuvaa määräaikaisen elinkoron pääoma-arvoa?
- Miten yksikkösummaisen kuolemanvaravakuutuksen vastuukertamaksu muodostetaan peruslukujen avulla? Päättele mikä on se funktio f, jonka avulla M-luvut saadaan ilmoitetuksi muodossa

$$M(x) - M(w) = \int_x^w f(t) dt \quad \text{kaikilla } x, w > 0 \quad ?$$

Toisin sanoen mikä on M-lukujen tulkinta? (10p)

H2. Tarkastellaan rekursiivisella tekniikalla toimivan henkivakuutuskannan muutosarvon (vakuutussäästön) kehitystä marraskuussa 2009. Muutosarvo alussa (=lokakuun lopussa) on 1 000 000 euroa ja kuolemantapauksessa maksettavien määrien summa 5 000 000 euroa. Vakuutukset ovat sijoitussidonnaisia. Valittavana on kaksi rahastoa, Alfa ja Beeta.

Koko kannan keskimääräinen I-lukujen suhde I(marraskuu)/I(lokaluu) on 0,997. Vakuutuksissa on ϵ -kuormitus, kuukautta kohti laskettu $\epsilon = 0,0001$. Muut kuormitukset ovat nollija. Oheisessa taulukossa on kuvattu vakuutuskannan relevantit tapahtumat tarkastelukaudella.

Täytä liitteen taulukkoon laskuperusteveloituksista ja -hyvityksistä sekä muista tapahtumista aiheutuvat muutokset ja muutosarvo kuun lopussa. Tee tarpeelliset laskut niin, että lukija näkee miten taulukkoon täytetyt luvut riippuvat toisistaan ja annetuista tiedoista. Kuinka paljon kannan säästöt (muutosarvot) muuttuivat pelkkien kurssimuutoksien vuoksi?

(10p)

Tilanne tai tapahtuma	Rahasto Alfa			Rahasto Beeta			Muutosarvo euroina
	Osuuksien lukumäärä	Arvo euroina	Osuuden hinta €	Osuuksien lukumäärä	Arvo euroina	Osuuden hinta €	
Alkutilanne 1.11.2009	100 000		4,0			10,0	1 000 000
Veloitus kuolemanvaraturvasta			4,0			10,0	
ε-kuormituksen veloitus			
Kuolemantapaus, summa 5000€, muutosarvo 1200 € kokonaan rahastossa B			4,1			9,5	
Siirto Beetasta Alfaan			4,2		-123 264	9,0	
Uusia maksuja 10 000 €		5 000	4,4			8,5	
Kuolevuushyvitys			4,5			8,0	
Lopputilanne 30.11.2009			4,5			8,0	

E1. Tarkastellaan ulkomaista täysin rahastoitua eläkejärjestelyä, jonka mukaan eläkepalkka on kolmen viimeisen vuoden keskipalkka ja eläkettä kertyy kultakin työssäolovuodelta 1,5 % eläkepalkasta. Etuutena on vain vanhuuseläke ja neljänneksen eläkevastuusta voi nostaa eläkkeelle siirtyessä. Työsuhteen päättyessä ennen eläkeikää muodostuu palvelusaikaa vastaava vapaakirja kolmen viimeisen vuoden keskipalkan perusteella. Eläkkeet ja vapaakirjat ovat elinkustannusindeksiin sidottuja. Vuotuinen vakuutusmaksu pyritään etukäteen tasaamaan kiinteäksi prosentiksi palkoista. Eläkejärjestelyn sijoitukset hajautetaan osakkeisiin ja joukkovelkakirjoihin. Kirjanpito perustuu käypiin arvoihin.

Selvitä,

- a) mistä johtuvia yli- tai alijäämiä voi kuvattuun eläkejärjestelyyn vuosittain tulla,
- b) periaatteet, miten ja missä järjestyksessä ne lasketaan
- c) miten tulosta voidaan suojata heilahteluilta.

(10p)

E2. Miten seuraaviin riskeihin on varauduttu TyEL-järjestelmässä ja miten riskiin varautuminen vaikuttaa TyEL-maksuun?

- a) eliniän kasvu
- b) sijoitustoiminnan tuottojen heilahtelu
- c) työkyvyttömyysalkavuuden pieneneminen
- d) vakuutusmaksun maksamatta jättäminen
- e) työeläkeyhtiön liikekulut ylittävät työeläkemaksun hoitokustannusosan tuoton

(10p)