

Kollektiivinen korvausvastuu

Sari Ropponen

14.9.2010

päivitetty 31.1.2013

Sisällysluettelo

1	JOHDANTO	1
2	KORVAUSVASTUUSEEN LIITTYVÄT KÄSITTEET VAHINKOVAKUUTUKSESSA	3
2.1	MERKINNÄT	3
2.2	VAHINGON SELVIÄMINEN JA KORVAUSVASTUU	5
2.2.1	<i>Vahingon selviämisprosessi</i>	6
2.2.2	<i>Korvausvastuun arviointi</i>	7
2.3	KORVAUSKOLMIO	8
2.3.1	<i>Vahinkojen lukumääräkolmio</i>	8
2.3.2	<i>Maksettujen korvausten korvauskolmio</i>	10
2.3.3	<i>Korvausmenokolmio</i>	12
2.4	KORVAUSINFLAATIO	16
2.5	SIJOITUSTOIMINTA JA KORVAUSVASTUUN DISKONTTAUS	18
3	KORVAUSVASTUUN ARVIOINTIMENETELMIÄ	19
3.1	DETERMINISTISET MENETELMÄT	19
3.1.1	<i>Chain-ladder -menetelmä</i>	20
3.1.1.1	Vahinkojen lukumäärät	20
3.1.1.2	Maksetut korvaukset	24
3.1.1.3	Käyräsovitus ja ekstrapolointi	27
3.1.2	<i>Bornhuetter-Ferguson -menetelmä</i>	29
3.1.2.1	Perinteinen Bornhuetter-Ferguson -menetelmä.....	30
3.1.2.2	Kokonaiskorvausmenon arviointi ja PPCI-menetelmä	34
3.1.3	<i>Hovisen menetelmä</i>	36
3.1.3.1	* Hovisen menetelmän eri versiot	38
3.1.4	<i>Determinististen menetelmien korvausvastuiden estimaatit</i>	39
3.2	STOKASTISET MALLIT	40
3.2.1	<i>Ennustevirheen hajonta ja varmuuslisä</i>	41
3.2.2	<i>Mackin malli</i>	44
3.2.2.1	Oletukset	44
3.2.2.2	Korvausvastuun odotusarvon estimointi.....	44
3.2.2.3	Ennustevirheen hajonnan estimointi	46
3.2.2.4	Oletusten testaaminen	50
3.2.3	<i>Bornhuetter-Ferguson -menetelmä stokastisena mallina</i>	53
3.2.3.1	Oletukset	53
3.2.3.2	Korvausvastuun odotusarvon estimointi.....	54
3.2.3.3	* Ennustevirheen hajonnan estimointi	54
3.2.3.4	Stokastisten mallien vertailua	58
3.2.4	<i>Poisson-malli ylihajonnalla</i>	59
3.2.5	<i>Mackin malli yleistettynä lineaarisena mallina</i>	61
4	KORVAUSVASTUUN ENNUSTEJAKAUMAN MUODOSTAMINEN BOOTSTRAP-MENETELMÄN JA SIMULOINNIN AVULLA	62
4.1	BOOTSTRAP-/SIMULOINTIMENETELMÄ	63
4.2	ESIMERKKI	68
5	YHTEENVETO	72
	LÄHTEET	75

1 Johdanto

Vakuutus sopimusten perusteella vakuutusyhtiölle syntyy velvollisuus korvata vahingosta aiheutuvat kustannukset samalla hetkellä, kun vahinko sattuu. Yleensä kuitenkin kestää jonkin aikaa ennen, kuin vahinko ilmoitetaan yhtiöön. Lisäksi esimerkiksi korvausten käsittely tai se, että kustannukset yleensäkin syntyvät vasta jonkin ajan kuluttua vahingon sattumisesta, aiheuttavat viiveen korvausten maksun ja vahingon sattumishetken välillä. Viive voi joissain tapauksissa, esimerkiksi eläkkeiden maksussa, olla useita vuosikymmeniä. Vakuutusyhtiölle on joka tapauksessa syntynyt velvollisuus korvata vahinko, ja näin ollen jo sattuneiden vahinkojen maksamattomat korvaukset on sisällytettävä tilinpäätöksessä yhtiön velkoihin riippumatta siitä, onko vahinko yhtiön tiedossa vai ei¹. Tätä velkaa kutsutaan korvausvastuuksi ja se muodostaa merkittävän osan vakuutusyhtiön veloista.

Vakuutusyhtiö lain (18.7.2008/521) mukaan ”vastuuvelan on aina oltava riittävä siten, että vakuutusyhtiö kohtuudella arvioiden selviytyy vakuutus sopimuksista aiheutuvista velvoitteestaan”². Vakuutusyhtiöllä on oltava turvaavat laskuperusteet, joiden mukaisesti yhtiö laskee vastuuvelan määrän, ja lisäksi laissa säädetään, millaisilla varoilla vastuvelka voidaan kattaa. Vakuutuksenottajien edut turvataan näin ollen varmistamalla, että vakuutusyhtiö arvioi korvausvastuunsa mahdollisimman oikean suuruiseksi ja että korvausten suorittamiseen tarvittavat varat ovat riittävän turvallisesti sijoitettuna. Myös yhtiön vakavaraisuuden arviointi edellyttää, että velat on arvioitu mahdollisimman oikein.

Koska korvausvastuu tarkoittaa tuntematonta ja tulevaisuudessa realisoituvaa määrää, jonka yhtiö on velvollinen suorittamaan, on yhtiön riskienhallinnan kannalta tärkeää pystyä arvioimaan, kuinka paljon toteutuvat korvaukset voivat poiketa arvioiduista määrästään. Myös vakuutusyhtiö lain vaatimus, että yhtiö selviytyy kohtuudella arvioiden velvoitteistaan, vaatii korvausvastuun riittävyden arvioimista. Lisäksi Euroopan Unionissa valmisteltavana olevassa vakavaraisuusvaatimuksia koskevassa direktiivissä, Solvenssi II:ssa, korostetaan entisestään yhtiön riskienhallintaa ja riskien, muun muassa korvausvastuun riittävyden, arvioimista.

Korvausvastuun laskenta on tulevien korvausten ennustamista, jossa apuna käytetään tiedossa olevia maksettuja korvauksia ja muuta sattuneisiin vahinkoihin liittyvää informaatiota. Korvausvastuulle lasketaan *estimaatti*, joka pyritään saamaan maksamattomien korvausten keskimääräiselle tasolle. Korvausvastuun estimaatin lisäksi varataan *varmuuslisä*, jolla varaudutaan siihen, että toteutuvat korvaukset ylittävät niiden estimaatin.

¹ Suoriteperusteisen kirjanpitokäytännön mukaan meno kirjataan kokonaisuudessaan sen syntymishetkellä.

² Korvausvastuun lisäksi vastuovelkaan sisältyy muun muassa vakuutusmaksuvastuu, jolla tarkoitetaan arviointihetkellä voimassa olevien vakuutus sopimusten tulevien vakuutus tapahtumien suorituksia (Vakuutusyhtiö lain 9. luku).

Korvausvastuun estimoimiseksi on olemassa useita erilaisia menetelmiä. Menetelmät on jaettu *deterministisiin menetelmiin* ja *stokastisiin malleihin*. Deterministisissä menetelmissä korvausvastuu arvioidaan suoraan käytössä olevista tilastoista jonkin algoritmin mukaisesti. Koska algoritmi ei ota huomioon korvausmenon taustalla olevaa satunnaisuutta, ei deterministisillä menetelmillä voida arvioida menetelmän tarkkuutta ja korvausvastuuseen liittyvää epävarmuutta. Stokastisissa malleissa sen sijaan tarkastellaan tuntematonta mekanismia, joka tuottaa havaitut korvaukset, ja niissä satunnaisuus otetaan huomioon olettaen korvausten noudattavan tiettyä jakaumaa. Mallin ja käytössä olevien tilastojen sovittamisen seurauksena saadaan estimaatti sekä korvausvastuun odotusarvolle että *ennustevirheen hajonnalle*. Ennustevirheen hajonnan avulla arvioidaan mallin tarkkuutta ja tarvittavan varmuuslisän määrää.

Koska stokastisissa malleissa voidaan estimoida korvausvastuun odotusarvon lisäksi ennustevirheen hajonta, saadaan niistä enemmän tietoa estimoidun korvausvastuun riittävydestä kuin deterministisissä menetelmissä. Toisaalta pelkkä ennustevirheen hajonnan estimointi ei usein riitä, vaan tarvitaan lisäksi oletus korvausvastuun jakaumasta, jota työssä kutsutaan *ennustejakaumaksi* (predictive distribution [6]). Ennustejakaumasta voidaan tarkastella ennustevirheen hajonnan lisäksi muun muassa luottamuskäyvälejä ja prosenttipisteitä. Ennustejakauman laskeminen analyttisesti on kuitenkin useissa stokastisissa malleissa haastavaa. Tietokoneiden laskentatehon ja -nopeuden kasvamisen myötä on tullut mahdolliseksi tuottaa arvio ennustejakaumasta esimerkiksi *bootstrap-menetelmän* ja *simuloinnin* avulla ilman analyttistä laskentaa.

Bootstrap-menetelmässä ideana on korvata teoreettiset päätelmät useasti toistetuilla empiirisillä päätelmissä. Menetelmällä voidaan esimerkiksi tutkia mallin tuottaman estimaattorin luotettavuutta suorittamalla estimointi useista samankaltaisista aineistoista [8].

Simuloinnissa puolestaan otetaan huomioon korvausten satunnaisuuden aiheuttama epävarmuus korvausvastuun estimoinnissa. Kiinnostusta simuloinnin hyödyntämiseen korvausvastuun arviointiin liittyvien epävarmuustekijöiden tutkimisessa on ollut alalla jo pitkään, ks. esimerkiksi [14]. Solvenssi II:n myötä simuloinnista ja ennustejakauman arvioimisesta on tullut entistä ajankohtaisempi aihe, sillä Solvenssi II mahdollistaa yhtiön omien sisäisten mallien käytön vakavaraisuusvaatimusten laskemisessa. Sisäisten mallien käyttäminen vaatii korvausten mallintamista ja lisäksi estimoidun korvausvastuun riittävyden luotettavaa arvioimista. Euroopan komission teettämässä harjoitussissa³, joissa on testattu erilaisia tulevia vakavaraisuusvaatimusten laskentatapoja, on viime vuosina vaadittu sellaista pääoman määrää, jolla yhtiö selviää 99,5 %:n todennäköisyydellä.

Työssä tarkastellaan vahinkovakuutuksen korvausvastuun arvioimista eri menetelmissä. Solvenssi II:n näkökulmasta työssä keskitytään näin ollen korvausvastuun *parhaan estimaatin* laskentaan. Luvussa 2 tarkastellaan vahinkovakuutusyhtiön vahinkojen selviämistä ja korvausvastuun arvioimisessa käytettyjä tilastoja. Alaluvussa 3.1 esitellään yleisimpiä deterministisiä korvausvastuun laskentamenetelmiä, kuten Chain-ladder -menetelmä ja Bornhuetter-Ferguson -menetelmä, ja alaluvussa 3.2 stokastisia malleja

³ Viimeisimmät ovat vuonna 2007 harjoitus QIS 3 (Quantitative Impact Study 3), vuonna 2008 QIS 4 ja vuonna 2010 QIS 5.

kuten Mackin [10], [12] muotoilemat stokastiset mallit Chain-ladder ja Bornhuetter-Ferguson -menetelmille. Stokastisten mallien yhteydessä tarkastellaan mallien tarkkuuden arvioimista sekä varmuuslisän määrittämistä. Luvussa 4 käsitellään korvausvastuun ennustejakauman tuottamista bootstrap-/simulointimenetelmällä, kun korvaukset on mallinnettu Poisson-jakaumaan perustuvalla, alaluvussa 3.2.4 esitellyllä stokastisella mallilla.

2 Korvausvastuuseen liittyvät käsitteet vahinkovakuutuksessa

2.1 Merkinnät

Työssä käytetään seuraavia merkintöjä

C_{ij}	vuonna i sattuneista vahingoista vuonna $i + j - 1$ maksetut korvaukset; inkrementaaliset korvaukset (vuotta j kutsutaan kehitysvuodeksi)
D_{ij}	vuonna i sattuneista vahingoista vuoden $i + j - 1$ loppuun mennessä maksetut korvaukset yhteensä; kumulatiiviset korvaukset
d_{ij}	yksittäinen kehityskerroin kehitysvuodesta $j - 1$ kehitysvuoteen j (ks. alaluku 3.1.1)
d_j	kehityskerroin kehitysvuodesta $j - 1$ kehitysvuoteen j (ks. alaluku 3.1.1)
$F(j)$	selviämisyajakauman arvo j . kehitysvuoden lopussa; esimerkiksi j . kehitysvuoden loppuun mennessä maksettujen korvausten osuus kokonaiskorvausmenosta U_i
$f(j)$	selviämisyajakauman tiheysfunktio; esimerkiksi tietyn sattumisvuoden vahingoista j . kehitysvuoden aikana maksettujen korvausten osuus kokonaiskorvausmenosta U_i , $\sum_{k=1}^j f(k) = F(j)$
i	sattumisvuosi
I_{ij}	sattumisvuoden i korvausmeno vuoden $i + j - 1$ lopussa (incurred claims, ks. alaluku 2.3.3)
j	kehitysvuosi
M_{ij}	vuonna i sattuneiden ja vuonna $i + j - 1$ raportoituneiden vahinkojen lukumäärä; inkrementaalinen vahinkojen lukumäärä

m_{ij}	inkrementaalisten korvausten odotusarvo Poisson-mallissa ylihajonnalla (ks. alaluku 3.2.4)
$MSE(\hat{R})$	keskineliövirhe (mean square error of prediction); ennustevirheen varianssi, kun $E(\hat{R}) = E(R)$
N_{ij}	vuonna i sattuneiden ja vuoden $i + j - 1$ loppuun mennessä raportoituneiden vahinkojen lukumäärä; kumulatiivinen vahinkojen lukumäärä
O_{ij}	vuonna i sattuneiden vahinkojen vuoden $i + j - 1$ lopun vahinkokohtaiset varaukset (ks. alaluvut 2.2 ja 2.3.3)
P_i	sattumisvuoden i vakuutusmaksutuotto
q_i	sattumisvuoden i kokonaiskorvausmeno suhteessa sattumisvuoden riskimittaan; esimerkiksi sattumisvuoden i vahinkosuhte (ks. alaluku 3.1.2)
R_i	vuonna i sattuneista vahingoista vuoden t jälkeen maksettavat korvaukset; sattumisvuoden i korvausvastuu vuoden t lopussa
R	vuoden t loppuun mennessä sattuneista vahingoista vuoden t jälkeen maksettavat korvaukset; korvausvastuu vuoden t lopussa
R_i^N	vuonna i sattuneiden ja vuoden t lopussa tuntemattomina olevien vahinkojen lukumäärä
R^N	vuoden t loppuun mennessä sattuneiden ja vuoden t lopussa tuntemattomina olevien vahinkojen lukumäärä
r_{ij}	sattumisvuoden i kehitysvuoden j havaittujen ja estimoitujen arvojen erotus (jäännös), mahdollisesti painotettu tai muokattu (ks. mm. kaava (48) ja (64))
s_h	sijoitustoiminnan vuosituotto-odotus, kun sijoitusten maturiteetti on h vuotta
$Sd(\hat{R})$	keskineliövirheen neliöjuuri (prediction error, root mean square error); ennustevirheen hajonta, kun $E(\hat{R}) = E(R)$
t	vuosi, jonka lopussa korvausvastuu arvioidaan; arviointivuosi (arviointihetkellä tarkoitetaan vuoden t loppua)

U_i	vuonna i sattuneista vahingoista maksetut korvaukset, kun vahingot ovat loppuunkäsiteltyjä; sattumisvuoden i kokonaiskorvausmeno ($U_i = D_{iJ}$, kun vahingot selviävät J vuoden aikana)
ϕ	hajontaparametri Poisson-mallissa ylihajonnalla (ks. alaluku 3.2.4)
λ_k	korvausinflaatio vuonna k

2.2 Vahingon selviäminen ja korvausvastuu

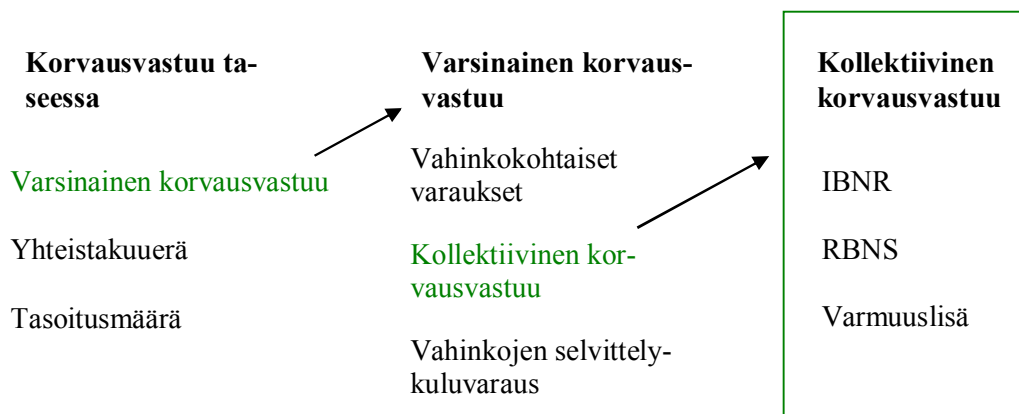
Vakuutusyhtiön taseessa korvausvastuu jakautuu varsinaiseen *korvausvastuuseen*, *yhteistakuuerään* ja *tasoitusmäärään*. Yhteistakuuerä on varaus sitä varten, että jokin lakisääteistä tapaturmavakuutusta tai liikennevakuutusta harjoittava vakuutusyhtiö ajautuu maksukyvyttömäksi eikä suoriudu korvausvelvoitteistaan. Tällöin muut kyseisiä vakuutuslajeja harjoittavat yhtiöt vastaavat korvausten suorittamisesta yhteisesti. Tasoitusmäärä on puolestaan sosiaali- ja terveysministeriön asetuksen mukaisesti laskettu määrä runsasvahinkoisten vuosien varalle (Vakuutusyhtiölain 9 luku 4 §). Yhteistakuuerä poistunee vakuutusyhtiöiden taseista vuoden 2010 lopussa. Tasoitusmäärää koskevia säännöksiä tullaan puolestaan uudistamaan Solvenssi II:n myötä.

Arviot sattuneiden vahinkojen vielä maksamatta olevista korvauksista sisältyvät varsinaiseen korvausvastuuseen, joka koostuu *vahinkokohtaisista varauksista*, *kollektiivisesta korvausvastuusta* ja *vahinkojen selvittelykuluvarauksesta*. Vahinkojen selvittelykuluvaraus sisältää arvion vuoden t loppuun mennessä sattuneiden vahinkojen maksettavaksi tulevien korvausten selvittelystä aiheutuvista kustannuksista⁴. Vahinkokohtaisilla varauksilla puolestaan tarkoitetaan *keskeneräisten vahinkojen* maksamattomia korvauksia, jotka on arvioitu erikseen jokaiselle vahingolle ottaen huomioon vahingon luonne, suuruus ja muut vahingon erityispiirteet. Kollektiivinen korvausvastuu tarkoittaa tietyille vahinkojen joukolle tilastollisin menetelmin yhteisesti estimoitua korvausvastuuta. Näin ollen, toisin kuin vahinkokohtaisista varauksista, kollektiivisesta korvausvastuusta ei voida määritellä, kuinka suuri osuus siitä kohdistuu millekin vahingolle.

Kollektiiviseen korvausvastuuseen sisältyy arvio *tuntemattomien vahinkojen* kokonaiskorvausmenosta, johon viitataan usein lyhenteellä IBNR, Incurred But Not Reported. Loppuosa kollektiivisesta korvausvastuusta muodostuu varmuuslisästä ja *tunnettujen vahinkojen* sellaisten maksamattomien korvausten estimaateista, joita ei ole varattu vahinkokohtaisesti. Tunnettujen vahinkojen kollektiivista korvausvastuuta merkitään lyhenteellä RBNS, Reported But Not Settled⁵.

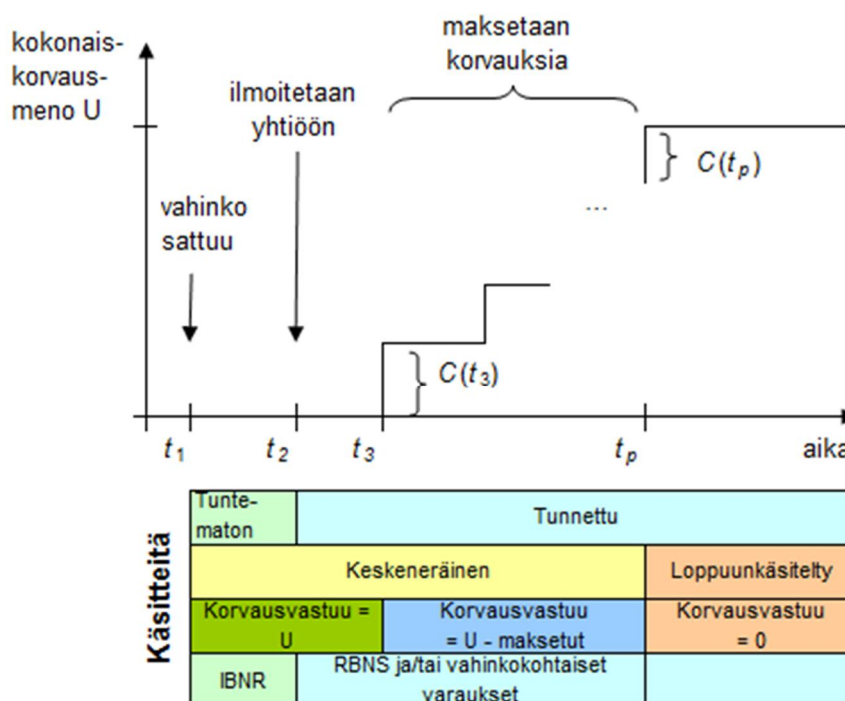
⁴ Vahinkojen selvittelykuluvarausta ei käsitellä työssä tarkemmin.

⁵ Tunnettujen vahinkojen kollektiiviselle korvausvastuulle on olemassa myös muita lyhenteitä kuten IBNER, Incurred But Not Enough Reported. Työssä on päädytty käyttämään lyhennettä RBNS, sillä se kuvaa paremmin vahinkojen käsittelyvaihetta kuin IBNER (ks. alaluku 2.2.1 ja kuva 1).



2.2.1 Vahingon selviämisen prosessi

Tarkastellaan vahingon selviämistä ja siihen liittyviä käsitteitä kuvan 1 esimerkkitapa- uksessa.



Kuva 1 Eräs realisaatio vahingon selviämisestä sekä vahingon korvausmenon ja korvausvas- tuun kehittymisestä.

Kuvassa 1 vahinko sattuu hetkellä t_1 . Vuotta, jonka aikana vahinko on sattunut, kutsu- taan *sattumisvuodeksi*. Vahinko ilmoitetaan vakuutusyhtiöön jonkin ajan kuluttua va- hingon sattumisesta hetkellä $t_2 \geq t_1$. Kulunutta aikaa vahingon sattumisesta sen rapor- toitumiseen $t_2 - t_1$ kutsutaan *raportoitusviiveeksi*. Raportoitusviiveen aikana va- hinko on *tuntematon vahinko*, kun taas vakuutusyhtiöön ilmoitettu vahinko on *tunnettu vahinko*.

Kun vahinko on ilmoitettu yhtiöön ja tarvittavat selvitystyöt on tehty, suoritetaan vahingosta korvaus $C(t_3)$ hetkellä t_3 ⁶. Kaikkia korvauksia ei välttämättä makseta samalla kertaa, vaan vahingon luonteesta riippuu, kuinka monessa erässä ja kuinka pitkän ajan kuluessa korvaukset suoritetaan⁷. Kuvan 1 esimerkissä välillä (t_3, t_p) maksetaan vahingosta useita korvauseriä, kunnes hetkellä t_p suoritetaan viimeinen korvaus. Sattumishetkestä viimeisen korvauserän suorittamiseen asti vahinko on *keskeneräinen*, ja vastaavasti viimeisen korvauserän maksamisen jälkeen siitä tulee *loppuunkäsitelty/suljettu*. Vahingon *kokonaiskorvausmenolla* tarkoitetaan loppuunkäsittelystä vahingosta maksettuja korvauksia yhteensä.

Kuvan 1 esimerkissä aikavälillä $[t_1, t_2)$ arvioidun korvausvastuun tulisi sisältää vahingon kokonaiskorvausmenon. Tämä sisältyy tuntemattomien vahinkojen kollektiiviseen korvausvastuuseen IBNR. Vahingon ollessa tunnettu mutta selviämislähteen keskeneräinen aikavälillä $[t_2, t_p)$ voidaan vahingosta maksamatta olevat korvaukset varata vahinkokohtaisena varauksena ja/tai sisällyttää ne kollektiivisen korvausvastuun tunnettujen vahinkojen osaan RBNS. Yleensä, jos vahingosta maksamatta olevien korvausten arvioidaan ylittävän etukäteen asetetun rajan, varataan rajan ylittävä osa vahinkokohtaisena varauksena, kun taas rajan alittavat korvaukset sisältyvät kollektiiviseen korvausvastuuseen. Hetkestä t_p lähtien vahinko on loppuunkäsitelty eikä siitä ole korvausvastuuta jäljellä.

2.2.2 Korvausvastuun arviointi

Korvausvastuu vuoden t lopussa on summa useiden kuvan 1 kaltaisten vahinkojen vuoden t jälkeen maksettavista korvauksista. Näistä jokainen vahinko on selviämislähteen eri vaiheessa – osa on vielä tuntemattomina, kun taas osa on lähes loppuunkäsiteltyjä. Vahingon selviämisvaiheesta, luonteesta ja suuruudesta riippuu, varataanko arvioidut, maksettavaksi tulevat korvaukset vahinkokohtaisena varauksena vai sisältyvätkö ne kollektiiviseen korvausvastuuseen. Joka tapauksessa korvausvastuun arviointiin sisältyy aina epävarmuutta, sillä vahingoista tulevaisuudessa maksettavia korvauksia ei voida tietää tarkasti etukäteen.

Vahinkokohtaisia varauksia tehtäessä voidaan ottaa mahdollisimman tarkalla tasolla huomioon vahingosta tiedetyt seikat, jotta varaus vastaisi mahdollisimman hyvin todellisia maksettavaksi tulevia korvauksia. Kaikkia vahinkoja ei kuitenkaan kannata varata vahinkokohtaisesti toisaalta tehokkuussyistä – jokaisen yksittäisen vahingon varaaminen vahinkokohtaisesti on erittäin työlästä – ja toisaalta, koska vahinkojen lukumäärän ollessa suuri vahinkokohtaisten varausten summa on usein epätarkempi estimaatti maksettavaksi tuleville korvauksille kuin kollektiivinen korvausvastuu⁸. Kollektiivisen korvausvastuun laskenta nimittäin nojautuu suurten lukujen lakiin – mitä enemmän ”samanlaisia” vahinkoja on, sitä lähempänä korvausten vahinkokohtainen keskiarvo on sen odotusarvoa. Näin ollen vahingoille, jotka selviävät keskimäärin saman prosessin

⁶ Kuvan 1 esimerkkiin liittyvillä merkinnöillä tarkoitetaan yhteen vahinkoon liittyviä määriä erotuksena alaluvussa 2.1 esitellyistä vastaavista suureista, joissa on kyse usean vahingon summista.

⁷ Esimerkiksi henkilövahinkojen eläkeluottojen korvauksia maksetaan kymmeniä vuosia, kun taas omaisuusvahingot selviävät huomattavasti nopeammin.

⁸ ks. [19] alaluku 3.1

mukaisesti ja noudattavat samankaltaista suuruuden jakaumaa, lasketaan yhteisesti kollektiivinen korvausvastuu, kun taas suuret vahingot tai muutoin ”keskimääräisestä” poikkeavat vahingot varataan vahinkokohtaisesti. Usein vahingot ryhmitellään vakuutuslajin ja/tai korvauslajin perusteella kollektiivisen korvausvastuun laskemiseksi.

Kollektiivisen korvausvastuun laskenta tarkoittaa vahingoista maksamatta olevien korvausten odotusarvon estimointia. Odotusarvon estimaatin lisäksi kollektiiviseen korvausvastuuseen sisällytetään varmuuslisä, jotta kollektiivinen korvausvastuu on vakuutusyhtiölain mukaisesti turvaava. Varmuuslisän suuruus riippuu korvausvastuuseen liittyvästä epävarmuudesta ja valitun arviointimenetelmän tarkkuudesta.

Jatkossa korvausvastuulla tarkoitetaan pelkästään niitä maksettavaksi tulevia korvauksia, joiden estimaatit sisältyvät vakuutusyhtiön taseessa kollektiiviseen korvausvastuuseen. Tämän korvausvastuun estimoimiseksi on olemassa useita erilaisia menetelmiä, joita työssä tarkastellaan. Osa menetelmistä arvioi korvausvastuun suoraan rahan määräisenä kun taas osa vahinkojen lukumäärän ja keskimääräisen vahingon suuruuden tulona. Usein laskenta sisältää sekä IBNR:n että RBNS:n arvioimisen yhdessä.

Tarkastellaan tästä lähtien vain yhtä vahinkojen ryhmää (esimerkiksi tiettyä vakuutuslajia), jolle korvausvastuu estimoidaan yhteisesti.

2.3 Korvauskolmio

Korvausvastuu arvioidaan vahingoista käytössä olevan tilastoaineiston avulla. Tilastoaineistona ovat joko vahinkojen lukumäärät, maksetut korvaukset tai maksettujen korvausten ja vahinkokohtaisten varausten yhteismäärä. Tilastoaineisto esitetään yleensä *korvauskolmiona* (*run-off -kolmio*) eli sattumis- ja *kehitysjakson* mukaan taulukoituna. Sattumis- ja kehitysjakson pituus voi olla esimerkiksi kuukausi, kvartaali tai vuosi. Työssä käytetään jakson pituutena yhtä vuotta ja merkitään sattumisvuotta indeksillä i . Vuoden k lopussa vakuutusyhtiöllä on sattumisvuoden i , $i \leq k$, vahingoista käytössään tilastoaineisto vuosilta $i, i+1, i+2, \dots, k$. Näitä vuosia kutsutaan *kehitysvuosiksi* 1, 2, 3 ja niin edelleen. [19] Merkitään kehitysvuosia indeksillä j . Kehitysvuoden j , vuoden $k \geq i$ ja sattumisvuoden i välillä on yhteys

$$k = i + j - 1 \quad \text{ja vastaavasti} \quad j = k - i + 1. \quad (1)$$

2.3.1 Vahinkojen lukumääräkolmio

Kun korvausvastuun laskennassa käytetään tilastoaineistona vahinkojen lukumääriä, kutsutaan korvauskolmiota *lukumääräkolmioksi*. Taulukossa 1 a on esitetty inkrementaalinen lukumääräkolmio ja taulukossa 1 b vastaava kumulatiivinen lukumääräkolmio. Sattumisvuodet on merkitty yksinkertaisesti luvuilla 1, 2, ..., 7. Sattumisvuosi 1 vastaa vanhinta sattumisvuotta ja 7 tuoreinta havaittua sattumisvuotta. Riippuen siitä, mitä sattumisvuotta tarkastellaan, on sille ehtinyt arviointihetkeen, eli vuoden 7 loppuun, mennessä kertyä yhdestä seitsemään kehitysvuotta. Lukumäärien kehitysvuosi j määritellään siten, että kaavassa (1) k vastaa vahingon raportoimisvuotta. Inkrementaalisen lukumääräkolmion solussa (i, j) on näin ollen vuonna i sattuneiden ja vuonna $i + j - 1$ raportoituneiden vahinkojen lukumäärä M_{ij} . Näiden vahinkojen raportoitusviive on

ollut $j-1$ vuotta. Kumulatiivisen lukumääräkolmion solussa (i, j) on puolestaan vuonna i sattuneiden ja vuoden $i+j-1$ loppuun mennessä raportoituneiden vahinkojen lukumäärä N_{ij} . Sattumisvuoden i kumulatiivinen vahinkojen lukumäärä saadaan sattumisvuoden inkrementaalisten lukumäärien summana ja vastaavasti inkrementaalinen lukumäärä saadaan sattumisvuoden peräkkäisten kehitysvuosien kumulatiivisten lukumäärien erotuksena:

$$N_{ij} = \sum_{k=1}^j M_{ik} \quad \text{ja} \quad M_{ij} = N_{ij} - N_{i,j-1}. \quad (2)$$

Lukumääräkolmion diagonaalissa on vuoden k aikana raportoituneiden sellaisten vahinkojen lukumäärä, jotka ovat sattuneet vuosina $1, \dots, k$ (kaavan (1) perusteella kehitysvuosi on tällöin $j = k - i + 1$).

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j							Raportoituneet vahingot yh- teensä
	1	2	3	4	5	6	7	
1	136	42	2	1	0	0	0	181
2	128	37	4	0	0	0		169
3	224	36	2	1	0			263
4	168	45	2	0				215
5	198	25	1					224
6	283	36						319
7	176							176

Taulukko 1 a Inkrementaalinen lukumääräkolmio. Uloimmassa diagonaalissa ovat sellaisten vuosina 1-7 sattuneiden vahinkojen lukumäärät, jotka ovat raportoituneet vuonna 7 (kuvassa lihavoidut luvut). Tyhjät solut liittyvät tuleviin vuosiin ($k > 7$). Summaamalla saman sattumisvuoden havainnot saadaan kyseisen sattumisvuoden tunnettujen vahinkojen lukumäärä vuoden 7 lopussa $N_{i,8-i}$ (raportoituneet vahingot yhteensä).

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j							Raportoituneet vahingot yh- teensä
	1	2	3	4	5	6	7	
1	136	178	180	181	181	181	181	181
2	128	165	169	169	169	169	169	169
3	224	260	262	263	263	263	263	263
4	168	213	215	215	215	215	215	215
5	198	223	224	224	224	224	224	224
6	283	319	319	319	319	319	319	319
7	176	176	176	176	176	176	176	176

Taulukko 1 b Taulukko 1 a kumulatiivisessa muodossa.

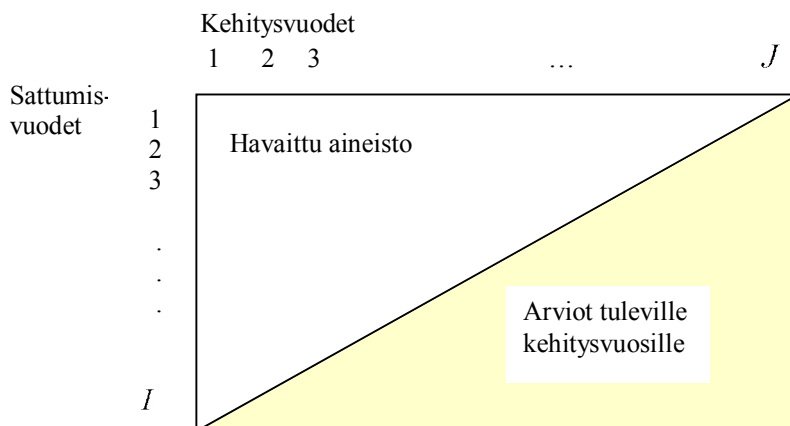
Tarkasteltaessa lukumääräkolmion eri rivejä eli sattumisvuosia, saadaan käsitys siitä, kuinka pitkä vahinkojen raportoitusviive on. Jos vahingot raportoituvat korvauskolmiossa näkyvien kehitysvuosien aikana, tarkoittaa vahinkojen lopullisen lukumäärän

estimointi lukumääräkolmion tyhjien solujen täyttämistä arvioilla. Toisin sanoen, pyritään arvioimaan, kuinka monta jo sattunutta vahinkoa on vielä tuntemattomana ja minä kehitysvuosina ne raportoituvat. Kuvassa 2 on havainnollistettu tätä estimointia, kun merkitään tuoreinta sattumisvuotta I ja kehitysvuotta, jonka loppuun mennessä kaikki tietyn sattumisvuoden vahingot ovat tunnettuja, J . Vuonna i sattuneiden ja vuoden t lopussa tuntemattomina olevien vahinkojen lukumäärän estimaatti \hat{R}_i^N saadaan joko lopullisen vahinkojen lukumäärän estimaatin \hat{N}_{iJ} ja arviointihetkeen mennessä tunnettujen vahinkojen lukumäärän $N_{i,t-i+1}$ erotuksena tai tulevien kehitysvuosien inkrementaalisten vahinkojen lukumäärien estimaattien summana:

$$\hat{R}_i^N = \hat{N}_{iJ} - N_{i,t-i+1} = \sum_{j=t-i+2}^J \hat{M}_{ij} . \quad (3)$$

Estimoitu tuntemattomien vahinkojen lukumäärä yhteensä saadaan sattumisvuosittaisen tuntemattomien vahinkojen lukumäärien summana

$$\hat{R}^N = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i^N . \quad (4)$$



Kuva 2. Kolmion täyttäminen tulevien kehitysvuosien arvioilla.

2.3.2 Maksettujen korvausten korvauskolmio

Kun tilastoaineistona käytetään tiedossa olevia maksettuja korvauksia, puhutaan yleisesti korvauskolmiosta tai maksettujen korvausten korvauskolmiosta. Korvauskolmiossa kehitysvuosi määritellään siten, että kaavassa (1) k vastaa korvauserän maksuvuotta. Kehitysvuosi kuvaa näin ollen korvauserien maksun viivettä sattumisvuodesta. Taulukoissa 2 a ja 2 b on esitetty taulukon 1 vahinkojen inkrementaaliset ja kumulatiiviset korvaukset korvauskolmioina. Inkrementaalisen korvauskolmion (taulukko 2 a) solussa (i, j) on sattumisvuoden i vahingoista j . kehitysvuoden (eli vuoden $i + j - 1$) aikana maksetut korvaukset C_{ij} . Kumulatiivisen korvauskolmion (taulukko 2 b) solussa (i, j) on vastaavasti sattumisvuoden i vahingoista j . kehitysvuoden loppuun mennessä

maksetut korvaukset D_{ij} . Kuten vahinkojen lukumäärille, myös maksetuille korvauksille pätee inkrementaalisten ja kumulatiivisten korvausten yhteys

$$D_{ij} = \sum_{k=1}^j C_{ik} \quad \text{ja} \quad C_{ij} = D_{ij} - D_{i,j-1}. \quad (5)$$

Korvauskolmion diagonaalissa on vuoden k aikana vuosina $1, \dots, k$ sattuneista vahingoista maksetut korvaukset (kaavan (1) perusteella $j = k - i + 1$).

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j							Maksetut kor- vaukset yh- teensä
	1	2	3	4	5	6	7	
1	271 834	203 454	25 729	2 333	665	932	142	505 089
2	214 607	180 123	14 528	2 587	72	152		412 069
3	391 462	163 141	21 735	2 439	714			579 491
4	308 844	286 545	15 125	-1 034				609 480
5	385 086	189 387	13 785					588 258
6	461 899	196 111						658 010
7	285 205							285 205

Taulukko 2 a. Inkrementaalinen korvauskolmio taulukon 1 vahingoista. Uloimmassa diagonaalissa ovat vuosina 1-7 sattuneista vahingoista vuonna 7 maksetut korvaukset (kuvassa lihavoidut luvut). Sattumisvuoden vahingoista maksetut korvaukset yhteensä vuoden 7 lopussa saadaan summaamalla kyseisen sattumisvuoden havainnot.

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j							Maksetut kor- vaukset yh- teensä
	1	2	3	4	5	6	7	
1	271 834	475 288	501 017	503 350	504 015	504 947	505 089	505 089
2	214 607	394 730	409 258	411 845	411 917	412 069		412 069
3	391 462	554 603	576 338	578 777	579 491			579 491
4	308 844	595 389	610 514	609 480				609 480
5	385 086	574 473	588 258					588 258
6	461 899	658 010						658 010
7	285 205							285 205

Taulukko 2 b. Kumulatiivinen korvauskolmio

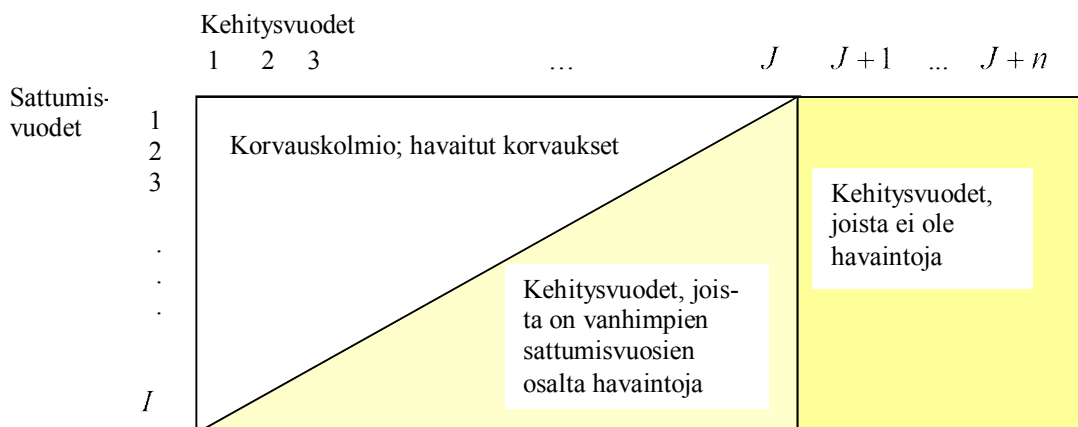
Jos vahingot selviävät korvauskolmiossa näkyvien kehitysvuosien aikana, tarkoittaa korvausvastuun arviointi korvauskolmion tyhjien solujen täyttämistä arvioiduilla maksettavaksi tulevilla korvauksilla. Pyritään siis arvioimaan, kuinka paljon korvauskolmiossa näkyvien sattumisvuosien vahingoista maksetaan vielä korvauksia, kunnes vahingot ovat loppuunkäsittelyjä (ks. kuva 2). Kun tuorein sattumisvuosi on I ja vahingot selviävät J kehitysvuoden aikana, vuonna i sattuneiden vahinkojen korvausvastuun estimaatti vuoden t lopussa on

$$\hat{R}_i = \hat{D}_{iJ} - D_{i,t-i+1} = \sum_{j=t-i+2}^J \hat{C}_{ij}. \quad (6)$$

Koko korvausvastuun estimaatti vuoden t lopussa saadaan sattumisvuosittaisten estimaattien summana

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^I \hat{R}_i. \quad (7)$$

Niin kutsutuissa pitkähäntäisissä vakuutuslajeissa vahinkojen selviäminen saattaa kestää pidempään, kuin korvauskolmiossa näkyvien kehitysvuosien ajan.⁹ Tällöin korvauskolmion täyttämistä jatketaan kaikkien sattumisvuosien osalta kolmiosta oikealle, kuten kuvassa 3 on havainnollistettu. Jos viimeinen korvauskolmiossa näkyvä kehitysvuosi on J , pyritään siis arvioimaan myös kehitysvuosina $J+1, J+2, \dots, J+n$ maksettavat korvaukset. Näistä kehitysvuosista ei ole korvauskolmiossa havaittuja maksettuja korvauksia, joiden perusteella kehitystä voisi arvioida. Tällöin estimoinnissa käytetään hyväksi esimerkiksi ekstrapolointia (ks. alaluku 3.1.1.3).



Kuva 3. Korvausvastuun estimointi, kun vahinkojen selviäminen kestää pidempään kuin korvauskolmiossa näkyvien kehitysvuosien ajan (vrt. kuva 2). Jos kyseessä on inkrementaalinen korvauskolmio, korvausvastuu saadaan säilytettyjen alueiden estimoitujen korvausten summana.

2.3.3 Korvausmenokolmio

Usein vahingoista tiedetään korvausvastuun arviointitihetkellä enemmän kuin vain maksetut korvaukset. Tämä tieto sisältyy vahinkokohtaisiin varauksiin. Kun tilastoaineistona käytetään tiedossa olevien maksettujen korvausten lisäksi vahinkokohtaisia varauksia, puhutaan *korvausmenokolmiosta*. Sattumisvuoden i kehitysvuoden j (kumulatiivisella) korvausmenolla I_{ij} tarkoitetaan kumulatiivisten maksettujen korvausten D_{ij} ja

⁹ Esimerkiksi vakuutuslajeja, jossa vahinkojen selviäminen kestää yli 10 vuotta, voidaan kutsua pitkähäntäiseksi.

sattumisvuoden i vahinkojen kehitysvuoden j lopun vahinkokohtaisten varausten O_{ij} summaa

$$I_{ij} = D_{ij} + O_{ij}.$$

Sattumisvuoden i kehitysvuoden j inkrementaalilla korvausmenolla tarkoitetaan puolestaan sattumisvuoden i korvausmenon muutosta kehitysvuoden aikana. Korvausmenon muutos on kehitysvuoden inkrementaalisten maksettujen korvausten ja vahinkokohtaisten varausten muutoksen summa

$$I_{ij} - I_{i,j-1} = C_{ij} + (O_{ij} - O_{i,j-1}).$$

Taulukoissa 3 a ja 3 b on taulukon 1 vahinkojen vahinkokohtaiset varaukset vuosittain sekä vahinkokohtaisten varausten muutos kehitysvuosittain. Taulukossa 4 a ja 4 b on taulukon 3 vahinkokohtaisista varauksista ja taulukon 2 maksetuista korvauksista muodostettu inkrementaalinen ja kumulatiivinen korvausmenokolmio.

Sattumis- vuosi i	Vuosi k						
	1	2	3	4	5	6	7
1	44 903	0	0	0	0	0	0
2		20 303	0	0	0	0	0
3			31 792	9 791	971	971	971
4				98 328	0	0	0
5					63 396	16 498	10 768
6						95 360	28 456
7							66 907

Taulukko 3 a. Vahinkokohtaiset varaukset vuosien 1,...,7 lopussa sattumisvuosittain.

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j						
	1	2	3	4	5	6	7
1	44 903	-44 903	0	0	0	0	0
2	20 303	-20 303	0	0	0	0	
3	31 792	-22 001	-8 820	0	0		
4	98 328	-98 328	0	0			
5	63 396	-46 898	-5 730				
6	95 360	-66 904					
7	66 907						

Taulukko 3 b. Taulukon 3 a vahinkokohtaisten varausten muutos kehitysvuosittain.

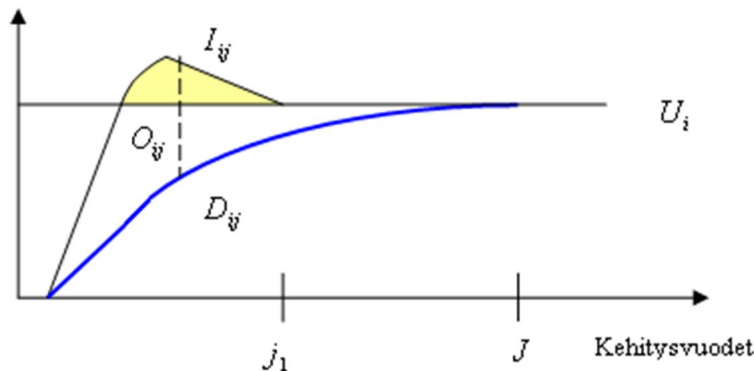
Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j							Korvausmeno yhteensä
	1	2	3	4	5	6	7	
1	316 737	158 551	25 729	2 333	665	932	142	505 089
2	234 910	159 820	14 528	2 587	72	152		412 069
3	423 254	141 140	12 915	2 439	714			580 462
4	407 172	188 217	15 125	-1 034				609 480
5	448 482	142 489	8 055					599 026
6	557 259	129 207						686 466
7	352 112							352 112

Taulukko 4 a. Inkrementaalinen korvausmenokolmio (summa taulukon 2 a inkrementaalista maksetuista korvauksista ja taulukon 3 b vahinkokohtaisten varausten muutoksesta.

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j							Korvausmeno yhteensä
	1	2	3	4	5	6	7	
1	316 737	475 288	501 017	503 350	504 015	504 947	505 089	505 089
2	234 910	394 730	409 258	411 845	411 917	412 069		412 069
3	423 254	564 394	577 309	579 748	580 462			580 462
4	407 172	595 389	610 514	609 480				609 480
5	448 482	590 971	599 026					599 026
6	557 259	686 466						686 466
7	352 112							352 112

Taulukko 4 b. Kumulatiivinen korvausmenokolmio.

Korvausmeno selviää usein nopeammin kuin maksetut korvaukset. Kuvassa 4 on esimerkki sattumisvuoden i korvausmenon ja maksettujen korvausten kehityksestä. Kuvassa kaikki vahingot ovat tunnettuja kehitysvuoden j_1 lopussa ja vahinkokohtaiset varaukset on arvioitu tästä lähtien täsmälleen yhtä suuriksi, kuin vahingoista on maksettavia korvauksia. Näin ollen korvausmeno on yhtä suuri kuin kokonaiskorvausmeno U_i kehitysvuodesta j_1 lähtien. Vastaavasti korvausmenon muutos kehitysvuosina $j > j_1$ on nolla, koska korvauksia maksetaan yhtä paljon, kuin vahinkokohtaiset varaukset purkautuvat. Kumulatiiviset maksetut korvaukset ovat sen sijaan selvinneet vasta kehitysvuoden J lopussa.



Kuva 4. Sattumisvuoden i maksettujen korvausten ja korvausmenon kehitys. Korvausmenon ja kumulatiivisten korvausten erotuksena saadaan vahinkokohtaiset varaukset. Jotta maksettujen korvausten ja korvausmenon erilainen selviäminen kävisi ilmi, on vahinkokohtaiset varaukset laitettu kuvassa erityisen yliarvioituiksi.

Korvausvastuu voidaan arvioida korvausmenokolmiosta käyttäen samoja menetelmiä kuin maksettujen korvausten korvauskolmiolle. Koska korvausmeno lähestyy nopeammin kokonaiskorvausmenoa kuin maksetut korvaukset, korvausvastuun estimoiminen korvausmenokolmiosta voi olla helpompaa ja käytännöllisempää erityisesti pitkäjäntäisissä vakuutuslajeissa. Esimerkiksi kuvassa 3 havainnollistetulta ekstrapoloinnilla voidaan välttyä kokonaan. Toisaalta, jos yksikään korvausmenokolmion sattumisvuosi ei ole lopullisesti selvinnyt, saattaa vahinkokohtaisten varausten epätarkkuus aiheuttaa ylimääräistä epätarkkuutta korvausmenokolmiosta estimoituun korvausvastuuseen.

Korvausmenokolmiosta ja maksettujen korvausten korvauskolmiosta estimoitujen korvausvastuiden tulisi olla lähellä toisiaan. Korvausmenokolmiosta vuoden t lopussa estimoitu korvausvastuu sisältää kuitenkin maksettavaksi tulevien korvausten lisäksi arviot vahinkokohtaisten varausten tulevasta muutoksista¹⁰

$$\hat{R} = \sum_{i=1}^I \sum_{j=t-i+2}^J (\hat{I}_{ij} - \hat{I}_{i,j-1}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=t-i+2}^J (\hat{C}_{ij} + \hat{O}_{ij} - \hat{O}_{i,j-1}) = \sum_{i=1}^I \sum_{j=t-i+2}^J \hat{C}_{ij} - \sum_{i=1}^I \hat{O}_{i,t-i+1}.$$

Näin ollen maksettujen korvausten korvauskolmion perusteella arvioidusta korvausvastuusta on vähennettävä vuoden t lopun vahinkokohtaiset varaukset ennen korvausvastuiden vertailua (vertaa edellä laskettua kaavoihin (6)-(7), kun oletetaan vahinkojen selviävän J vuodessa).

Jatkossa tarkastellaan korvausvastuun estimoimista pelkästään vahinkojen lukumääräkolmiosta ja maksettujen korvausten korvauskolmiosta. Maksettujen korvausten korvauskolmiota kutsutaan jatkossa lyhyesti korvauskolmioksi.

¹⁰ Muutos sisältää arvon siitä, kuinka paljon varaus on purkautunut maksetuiksi korvauksiksi ja kuinka paljon varausta on päivitetty uuden tiedon perusteella.

2.4 Korvausinflaatio

Inflaatiolla on merkittävä vaikutus maksettavaksi tulevien korvausten suuruuteen. Suomessa yleistä inflaatiota mitataan kuluttajahintaindeksillä, joka on kulutusosuuksilla painotettu keskiarvo kotitalouksien ostamien tavaroiden ja palveluiden hinnoista [20]. Inflaation vaikutus maksettaviin korvauksiin ei aina vastaa yleisen inflaation mukaista kustannusten kasvua, vaan vaikutus riippuu tarkasteltavasta korvauslajista. Esimerkiksi ansiotasoon sidotuissa eläkekorvauksissa yleinen palkkatason muutos vaikuttaa korvausten suuruuteen, kun taas oikeusturvavakuutuksessa erityisesti asianajokustannusten kasvu on merkittävä tekijä. Tämän takia korvauksiin vaikuttavaa inflaatiota kutsutaan korvausinflaatioksi erotuksena kuluttajahintaindeksillä mitattavasta yleisestä inflaatiosta. Korvausinflaatio jaetaan yleiseen inflaatioon ja korvauslajille tyypilliseen inflaatioon, joiden summana korvausinflaatio saadaan [3].

Koska korvauskolmion diagonaali kuvaa tiettyä kalenterivuotta, ilmenee korvausinflaatio korvauskolmiossa diagonaalisenä vaikutuksena. Diagonaalin maksetut korvaukset ovat siis altistuneet samansuuruiselle korvausinflaatiolle riippumatta vahingon sattumisvuodesta. Vastaavasti korvausinflaatio näkyy vuonna i sattuneiden vahinkojen maksettujen korvausten kehityksessä.

Jotta saataisiin selville sattumisvuoden korvausten kehitys ilman korvausinflaation vaikutusta, muutetaan maksetut korvaukset saman vuoden rahan arvoon – yleensä arviointivuoden t rahan arvoon. Olkoon vuoden k , $1 \leq k \leq t$, korvausinflaatio λ_k . Tällöin sattumisvuoden i vahingoista vuonna $i + j - 1 \leq t$ maksetut korvaukset vuoden t rahan arvossa ovat

$$C_{ij}^* = C_{ij} \prod_{k=i+j}^t (1 + \lambda_k). \quad (8)$$

Kun korvausinflaation vaikutus on eliminoitu korvauskolmiosta, voidaan arvioida muiden tekijöiden kuten mahdollisten ehtomuutosten, lakimuutosten sekä korvaustoiminnassa tapahtuneiden muutosten vaikutusta maksettujen korvausten tasoon ja selviämiseen. Taulukossa 5 on esitetty taulukon 2 a inkrementaalinen korvauskolmio vuoden 7 rahan arvossa olettaen, että korvausinflaatio $\lambda_k = 2\%$ kaikilla $k = 1, \dots, 7$. Taulukkoa 2 b vastaava, vuoden 7 rahan arvossa oleva kumulatiivinen korvauskolmio on laskettu inkrementaalisista korvauksista kaavalla (5).

Kertoimet $(1 + 0,02)^{-(i+j-1)}$ inkrementaalille korvauksille kaavassa (8)

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1,12616	1,10408	1,08243	1,0612	1,0404	1,0200	1,0000
2	1,10408	1,08243	1,0612	1,0404	1,0200	1,0000	
3	1,08243	1,0612	1,0404	1,0200	1,0000		
4	1,0612	1,0404	1,0200	1,0000			
5	1,0404	1,0200	1,0000				
6	1,0200	1,0000					
7	1,0000						

Inkrementaalinen korvauskolmio vuoden 7 rahan arvossa

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j							Maksetut kor- vaukset yh- teensä
	1	2	3	4	5	6	7	
1	306 129	224 630	27 850	2 476	692	951	142	562 869
2	236 943	194 971	15 417	2 692	73	152		450 249
3	423 731	173 127	22 613	2 488	714			622 672
4	327 748	298 121	15 428	-1 034				640 263
5	400 643	193 175	13 785					607 603
6	471 137	196 111						667 248
7	285 205							285 205

Kumulatiivinen korvauskolmio vuoden 7 rahan arvossa

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j							Maksetut kor- vaukset yh- teensä
	1	2	3	4	5	6	7	
1	306 129	530 759	558 609	561 085	561 776	562 727	562 869	562 869
2	236 943	431 914	447 332	450 023	450 097	450 249		450 249
3	423 731	596 858	619 471	621 958	622 672			622 672
4	327 748	625 869	641 297	640 263				640 263
5	400 643	593 818	607 603					607 603
6	471 137	667 248						667 248
7	285 205							285 205

Taulukko 5. Taulukoiden 2 a ja 2 b korvaukset vuoden 7 rahan arvossa, kun $\lambda_k = 2\%$ kaikilla $k = 1, \dots, 7$.

Korvausinflaation kustannuksia kasvattava vaikutus on otettava huomioon korvausvastuuta arvioitaessa. Erityisesti pitkäjänteisissä vakuutuslajeissa korvausinflaatio vaikuttaa merkittävästi maksettavaksi tulevien korvausten suuruuteen – mitä kauempana tulevaisuudessa jo sattuneen vahingon kustannukset aiheutuvat, sitä pidempään ne ovat altistuneet korvausinflaation aiheuttamalle kustannusten kasvulle. Korvausinflaation vaikutus otetaan huomioon korvausvastuun estimoinnissa *implisiittisesti* tai *eksplisiittisesti* alaluvussa 3.1.1.2 esitetyllä tavalla.

Joissain vakuutuslajeissa korvaukset maksetaan, edellä esitetystä poiketen, vahingon sattumisvuoden tasossa riippumatta siitä, minä vuonna korvauserän suoritus tapahtuu. Tällöin korvausinflaation vaikutus ilmenee korvauskolmiossa diagonaalien sijaan riiveillä eli sattumisvuosittain. Tällaisissa vakuutuslajeissa korvausinflaation vaikutus eliminoidaan kaavan (8) sijaan kaavalla

$$C_{ij}^{**} = C_{ij} \prod_{k=i+1}^I (1 + \lambda_k), \text{ kun } j \leq t - i.$$

2.5 Sijoitustoiminta ja korvausvastuun diskonttaus

Korvausinflaation lisäksi sijoitustoiminnalla ja sijoitustuotoilla on suuri merkitys vakuutustoiminnassa. Vakuutusmaksut peritään vakuutuksenottajilta vakuutuskauden alussa tai ennen vakuutuskauden alkua, kun taas vahinko sattuu tämän jälkeen vakuutuskauden aikana. Korvauksia voidaan suorittaa vielä usean vuoden jälkeen vakuutusmaksun perimisestä. Johtuen vakuutusmaksu- ja korvauskassavirtojen eriaikaisuudesta, vakuutusyhtiölle kertyy sijoitettavia varoja, joille saadaan tuottoa.

Sijoitustoiminta vaikuttaa korvausvastuun laskentaan, kun päätetään korvausvastuun diskonttauksesta ja siinä käytettävästä tuotto-odotuksesta. Korvausvastuuta diskontattaessa estimoidusta korvausvastuusta vähennetään tuotto, joka sille oletetaan saatavan siinä aikana, kun se on sijoitettuna, toisin sanoen, kunnes korvaukset on suoritettu. Diskontattu korvausvastuu tarkoittaa näin ollen estimoitujen tulevaisuudessa maksettavien korvausten kassavirran nykyarvoa (pääoma-arvo). Kun merkitään vuonna $t+h$, $h = 1, 2, \dots, I + J - 1 - t$, maksettavaksi arvioitua määrää $CF_{t+h}^{\hat{}}$,

$$CF_{t+h}^{\hat{}} = \sum_{i=1}^I \hat{C}_{i,t+h-i+1}, \quad (9)$$

on diskontattu korvausvastuu vuoden t lopussa

$$\hat{R}^d = \sum_{h=1}^{I+J-1-t} \frac{CF_{t+h}^{\hat{}}}{(1+s_h)^h}, \quad (10)$$

missä s_h on h vuoden ajan sijoitettuna olevien varojen vuosituotto-odotus. Kaavassa (10) on oletettu, että korvaukset maksetaan vuoden lopussa¹¹.

Vahinkovakuutuksessa on ollut tapana diskontata ainoastaan eläkemuoitoisten korvausten korvausvastuu, jonka realisoituminen kestää useiden vuosien ajan. Tuotto-odotuksena s_h käytetään riskitöntä korkoa, jotta diskontattu korvausvastuu on vakuutusyhtiölain mukaisesti turvaavasti arvioitu. Usein tuotto-odotukseksi valitaan vakio-korko $s_h = s$ kaikilla $h = 1, 2, \dots, I + J - 1 - t$, ja sitä kutsutaan *diskonttauskoroksi*. Myös muiden korvauslajien kuin eläkemuoitoisten korvausten korvausvastuu on mahdollista diskontata, mutta tällöin on noudatettava vakuutusyhtiölain määräyksiä siitä, milloin

¹¹ Käytännössä usein oletetaan, että korvaukset maksetaan tasaisesti vuoden aikana, jolloin diskonttaus tapahtuisi puoleen väliin vuotta.

vahinkovakuutuksessa saa käyttää diskonttausta. Esimerkiksi vahinkojen keskimääräinen selviämisaika on oltava yli neljä vuotta. Sen sijaan Solvenssi II:ssa, jossa tase arvostetaan markkinaehtoisesti, kaikkien vakuutuslajien korvausvastuu diskontataan riskittömällä korkokäyrällä.

Kun yhdistetään diskonttauksen ja korvausinflaation vaikutukset, jää vaikuttavaksi tekijäksi korvausinflaation ja diskonttauskoron erotus. Erityistapauksena voidaan pitää tilannetta, jossa korvausinflaatio vastaa diskonttauskorkoa, $\lambda_k = \lambda = s_h = s$ kaikilla k ja h (huom. $k = t + h$). Tällöin diskontattu korvausvastuu vastaa korvausvastuun estimaattia vuoden t rahan arvossa

$$\begin{aligned} \hat{R}^d &= \sum_{h=1}^{I+J-1-t} \frac{CF_{t+h}^{\hat{}}}{(1+s_h)^h} = \sum_{h=1}^{I+J-1-t} \frac{\prod_{k=t+1}^{t+h} (1+\lambda_k) \sum_{i=1}^I \hat{C}_{i,t+h-i+1}^*}{(1+s_h)^h} \\ &= \sum_{h=1}^{I+J-1-t} \sum_{i=1}^I \hat{C}_{i,t+h-i+1}^* \end{aligned} \quad (11)$$

Esimerkki korvausinflaation ja diskonttauksen yhteisvaikutuksesta on esitetty alaluvussa 3.1.1.2 taulukossa 8.

3 Korvausvastuun arviointimenetelmiä

Korvausvastuun estimaatin laskemiseksi on olemassa useita erilaisia menetelmiä. Alaluvussa 3.1 esitellään *deterministisiä menetelmiä* ja alaluvussa 3.2 *stokastisia malleja*. Näissä korvausvastuun estimaatiksi asetetaan maksamattomien korvausten odotusarvo. Jotta vakuutusyhtiölain vaatima turvaavuus toteutuisi, varataan lisäksi varmuuslisä. Varmuuslisän määrittämisessä otetaan huomioon korvausvastuuseen liittyvä epävarmuus, jota stokastisissa malleissa arvioidaan ennustevirheen hajonnan avulla (ks. alaluku 3.2.1).

Ennen korvausvastuun estimaatin laskemista on varmistuttava käytettyjen tilastojen laadusta ja siitä, miten hyvin maksettujen korvausten perusteella voidaan yleensäkin tehdä päätelmiä tulevaisuudessa maksettavaksi tulevista korvauksista. Vaikka menetelmä tai malli sopisikin kuvaamaan havaittujen korvausten kehitystä, ei se välttämättä pysty ennustamaan tulevia korvauksia, jos esimerkiksi korvausten käsittelyssä on tapahtunut muutoksia. Muutokset voidaan ottaa huomioon esimerkiksi alaluvuissa 3.1.1.1–3.1.1.2 esitetyllä tavalla.

3.1 Deterministiset menetelmät

Deterministisissä menetelmissä korvausvastuun estimaatti arvioidaan suoraan tilastoista jonkin algoritmin mukaisesti, eivätkä ne ota huomioon korvausten taustalla olevaa satunnaisuutta. Yleisimmin tunnetut deterministiset korvausvastuun laskentamenetelmät ovat Chain-ladder ja Bornhuetter-Ferguson -menetelmä, jotka on esitelty alaluvuissa

3.1.1 ja 3.1.2. Alaluvussa 3.1.3 esitellään Hovisen menetelmä, jossa korvausvastuun estimaatti lasketaan painotettuna keskiarvona aiemmin mainituilla menetelmillä laske-
tuista estimaateista.

3.1.1 Chain-ladder -menetelmä

Chain-ladder -menetelmää voidaan soveltaa kaikille alaluvussa 2.3 esitetyille tilastoai-
neistoille. Alaluvussa 3.1.1.1 käsitellään aluksi Chain-ladder -menetelmä käyttäen tilas-
toaineistona vahinkojen lukumääriä. Tehdyt oletukset, kaavat ja tulokset pätevät sellai-
senaan myös maksetuille korvauksille, joita käsitellään alaluvussa 3.1.1.2.

3.1.1.1 Vahinkojen lukumäärät

Perinteinen Chain-ladder -menetelmä käyttää kumulatiivista kolmiota lähtötietona ja
tuottaa arviot tyhjille kolmion soluille kolmiosta johdettujen *kehityskertoimien* d_j
avulla. Kun aineistona käytetään vahinkojen lukumääriä, kehityskerroin d_j kuvaa sitä,
miten tunnettujen vahinkojen lukumäärä on muuttunut kehitysvuoden $j-1$ lopusta kehi-
tysvuoden j loppuun mennessä. Kehityskertoimet määrittelevät näin ollen vahinkojen
keskimääräisen raportoitumisen olettaen, että vahingot raportoituvat korvauskolmiossa
näkyvien kehitysvuosien aikana. Menetelmässä oletetaan lisäksi, että tietyn sattumis-
vuoden vahinkojen lukumäärät ovat riippumattomia toisen sattumisvuoden vahinkojen
lukumääristä ja että kaikkien sattumisvuosien vahingot noudattavat kehityskertoimien
mukaista selviämistä. Näin ollen tulevien kehitysvuosien kumulatiivisten lukumäärien
estimaatit saadaan kehityskertoimien ja arviointihetkellä tunnettujen vahinkojen luku-
määrien perusteella.

Kehityskerroin d_j estimoidaan kehitysvuodesta j havaittujen sattumisvuosittaisten
kumulatiivisten vahinkojen lukumäärien summana jaettuna edellisen kehitysvuoden
vastaavien havaintojen summalla

$$\hat{d}_j = \frac{\sum_{k=1}^{t-j+1} N_{kj}}{\sum_{k=1}^{t-j+1} N_{k,j-1}}. \quad (12)$$

Kehityskertoimien laskennassa on kuitenkin yleistä laskea ensin *yksittäiset kehitysker-
toimet*

$$d_{ij} = \frac{N_{ij}}{N_{i,j-1}}, \text{ kun } i = 1, 2, \dots, I-1 \text{ ja } j = 2, \dots, t-i+1.$$

ja esittää kehityskerroin \hat{d}_j näiden yksittäisten kehityskertoimien painotettuna keskiar-
vona

$$\hat{d}_j = \frac{\sum_{k=1}^{t-j+1} N_{kj}}{\sum_{k=1}^{t-j+1} N_{k,j-1}} = \frac{\sum_{k=1}^{t-j+1} \frac{N_{kj}}{N_{k,j-1}} \cdot N_{k,j-1}}{\sum_{k=1}^{t-j+1} N_{k,j-1}} = \sum_{k=1}^{t-j+1} \frac{N_{k,j-1}}{\sum_{k=1}^{t-j+1} N_{k,j-1}} \cdot d_{kj}, \text{ kun } j = 2, \dots, J. \quad (13)$$

Perinteisen Chain-ladder -menetelmän kehityskertoimia laskettaessa yksittäisten kehityskertoimien painot ovat siis suhteessa saman sattumisvuoden kehitysvuoden $j-1$ kumulatiiviseen vahinkojen lukumäärään $N_{i,j-1}$. Kumulatiivisten lukumäärien sijaan painot voisivat kuitenkin olla esimerkiksi kaikille sattumisvuosille samat siten, että kehityskerroin \hat{d}_j olisi yksittäisten kehityskertoimien aritmeettinen keskiarvo. Alaluvussa 3.2.2.4 on tarkasteltu lyhyesti, millaisia taustaoletuksia itse asiassa tehdään, kun käytetään eri painoja kehityskertoimien laskennassa ja miten nämä oletukset eroavat perinteisestä Chain-ladder -menetelmästä. Taulukossa 6 on taulukon 1 b kumulatiivisesta lukumääräkolmiosta lasketut yksittäiset kehityskertoimet d_{ij} ja niiden perusteella kaavalla (13) lasketut kehityskertoimet \hat{d}_j .

Yksittäisistä kehityskertoimista voidaan arvioida vahinkojen lukumäärien kehityksessä eri kalenterivuosina tapahtuneita muutoksia. Muutokset saattavat olla seurausta tietojärjestelmien uudistamisesta, lakimuutoksista tai muista korvausten käsittelyssä tai raportoimisessa tapahtuneista muutoksista. Koska kehityskertoimien \hat{d}_j on tarkoitus kuvata vahinkojen tulevien vuosien selviämistä, on kehityskertoimet \hat{d}_j laskettava tämän selviämisen mukaisista yksittäisistä kehityskertoimista d_{ij} . Esimerkiksi vahinkojen raportoimisessa vuonna t_1 tapahtunut muutos voisi näkyä siten, että kehitysvuoden j yksittäiset kehityskertoimet d_{ij} sattumisvuosina $i \leq t_1 - j + 1$ olisivat eri suuruusluokkaa kuin saman kehitysvuoden yksittäiset kehityskertoimet sattumisvuosina $t_1 - j + 1 < i \leq t$ (ks. esimerkki taulukossa 6, jossa $t_1 = 4$). Jos sattuneiden vahinkojen voidaan olettaa raportoituvan tulevana vuosina samoin kuin vuosina $k > t_1$, laskettaisiin kaavassa (13) kehityskerroin \hat{d}_j painotettuna keskiarvona vain sattumisvuosien $t_1 - j + 1 < i \leq t$ yksittäisistä kehityskertoimista.¹² Vastaavasti voidaan sulkea esimerkiksi vain yksi vuosi (diagonaali) tai yksi yksittäinen kehityskerroin pois kehityskertoimen \hat{d}_j laskennasta, jos yksittäiset kehityskertoimet eivät ole vertailukelpoisia muiden yksittäisten kehityskertoimien kanssa, eikä kertoimien mukaisen kehityksen voida olettaa toistuvan.

Kehityskertoimista \hat{d}_j lasketaan Chain-ladder -menetelmän mukainen selviämiskaava $\hat{F}(j)$ kaavalla

¹² Toinen vaihtoehto on muokata vuosien $i + j - 1 < t_1$ havainnot vastaamaan uutta raportoimisprosessia, jolloin kehityskertoimien \hat{d}_j laskennassa voidaan käyttää koko kolmion aineistoa.

$$\hat{F}(j) = \frac{\hat{N}_{ij}^{(*)}}{\hat{N}_{iJ}} = \frac{N_{i1} \prod_{k=2}^j \hat{d}_k}{N_{i1} \prod_{k=2}^J \hat{d}_k} = \frac{1}{\prod_{k=j+1}^J \hat{d}_k}, \text{ kun } j = 1, \dots, J. \quad (14)$$

Kaavan kohdassa (*) on käytetty Chain-Ladder -menetelmän mukaisia estimaatteja vahinkojen lukumäärille, ks. kaavat (15) ja (16). Kun $j = 1$, korvataan kaavan (14) väliarheessa tyhjä kehityskerrointen tulo kertoimella 1 ja $\hat{N}_{i1} = N_{i1}$. Selviämisyjakauma kertoo, kuinka suuri osuus vuonna i sattuneista vahingoista on tunnettu j . kehitysvuoden loppuun mennessä. Taulukon 6 esimerkissä suurin osa (82,6 %) vahingoista ilmoitetaan yhtiöön samana vuonna, kuin vahinko on sattunut. Kaikki vahingot ovat tunnettuja neljännen kehitysvuoden loppuun mennessä.

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j					
	2	3	4	5	6	7
1	1,30882	1,01124	1,00556	1,00000	1,00000	1,00000
2	1,28906	1,02424	1,00000	1,00000	1,00000	
3	1,16071	1,00769	1,00382	1,00000		
4	1,26786	1,00939	1,00000			
5	1,12626	1,00448				
6	1,12721					
\hat{d}_j	1,19437	1,01059	1,00242	1,00000	1,00000	1,00000

Kehitysvuosi j	1	2	3	4	5	6	7
Selviämisyjakauma $\hat{F}(j)$	82,65 %	98,71 %	99,76 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %	100,0 %

Taulukko 6. Vahinkojen lukumääräkolmiosta (taulukko 1 b) lasketut yksittäiset kehityskertoimet d_{ij} , $i = 1, \dots, 6$ ja $j = 2, \dots, 7$. Kehityskertoimet \hat{d}_j on laskettu kaikista yksittäisistä kehityskertoimista kaavalla (13). Kehityskertoimia laskettaessa on kiinnitettävä huomiota mm. vahinkojen raportoimisessa tapahtuneisiin muutoksiin, jotka näkyvät yksittäisissä kehityskertoimissa – esimerkiksi ovatko sävytetyn alueen tietyn kehitysvuoden yksittäiset kehityskertoimet samaa suuruusluokkaa kuin tuoreimpien sattumisvuosien saman kehitysvuoden yksittäiset kehityskertoimet.

Sattumisvuoden i tulevien kehitysvuosien j , $j = t - i + 2, \dots, J$, kumulatiivisten lukumäärien estimaatit vuoden t lopussa ovat

$$\hat{N}_{i,t-i+2} = N_{i,t-i+1} \cdot \hat{d}_{t-i+2}, \quad (15)$$

$$\hat{N}_{i,t-i+3} = \hat{N}_{i,t-i+2} \cdot \hat{d}_{t-i+3} = N_{i,t-i+1} \cdot \hat{d}_{t-i+2} \cdot \hat{d}_{t-i+3},$$

ja niin edelleen, kunnes sattumisvuoden i lopulliseksi vahinkojen lukumääräksi saadaan

$$\hat{N}_{iJ} = N_{i,t-i+1} \cdot \hat{d}_{t-i+2} \cdot \dots \cdot \hat{d}_J. \quad (16)$$

Näin ollen Chain-ladder -menetelmän mukaiseksi sattumisvuoden i tuntemattomien vahinkojen lukumäärän estimaatiksi vuoden t lopussa saadaan kaavan (3) perusteella

$$\hat{R}_i^N = \hat{N}_{iJ} - N_{i,t-i+1} = N_{i,t-i+1} \cdot \hat{d}_{t-i+2} \cdot \dots \cdot \hat{d}_J - N_{i,t-i+1} = N_{i,t-i+1} \cdot (\hat{d}_{t-i+2} \cdot \dots \cdot \hat{d}_J - 1). \quad (17)$$

Selviämisjakauman avulla ilmaistuna sattumisvuoden i tuntemattomien vahinkojen lukumäärän estimaatti vuoden t lopussa on

$$\hat{R}_i^N = N_{i,t-i+1} \cdot (\hat{d}_{t-i+2} \cdot \dots \cdot \hat{d}_J - 1) = \frac{N_{i,t-i+1}}{\hat{F}(t-i+1)} \cdot (1 - \hat{F}(t-i+1)). \quad (18)$$

Estimaatti tuntemattomien vahinkojen lukumäärälle yhteensä saadaan kaavasta (4). Kun tuntemattomien vahinkojen estimoitu lukumäärä kerrotaan keskimääräisellä vahingon suuruudella, saadaan tuntemattomien vahinkojen korvausvastuu IBNR.

Taulukossa 7 on laskettu taulukon 6 mukaisilla kehityskertoimilla estimaatit tulevien kehitysvuosien kumulatiivisille vahinkojen lukumäärille (lihavoidut luvut). Estimaattien laskenta aloitetaan jokaisen sattumisvuoden viimeisimmästä havaitusta kumulatiivisesta lukumäärästä, jota kasvatetaan kehitysvuosittain kehityskertoimien mukaisesti. Esimerkiksi sattumisvuosien 1–6 havaittujen kumulatiivisten lukumäärien perusteella kehitysvuonna 2 kumulatiiviset lukumäärät ovat keskimäärin 1,194-kertaistaistuneet kehitysvuoden 1 kumulatiivisista lukumääristä (taulukko 6 kehityskerroin \hat{d}_2). Näin ollen vuonna 7 sattuneista vahingoista arvioidaan olevan toisen kehitysvuoden loppuun mennessä tunnettuna yhteensä 210 (=1,194·176) vahinkoa. Vastaavasti siirryttäessä kehitysvuodesta 2 kehitysvuoteen 3 kumulatiiviset lukumäärät keskimäärin 1,01-kertaistuvat. Tästä saadaan sattumisvuodelle 6 ja vastaavasti sattumisvuodelle 7 arviot kehitysvuoden 3 kumulatiivisista lukumääristä. Sattumisvuodelle 7 käytetään hyväksi kehitysvuoden 2 arviota.

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j							\hat{R}_i^N
	1	2	3	4	5	6	7	
1	136	178	180	181	181	181	181	0
2	128	165	169	169	169	169	169	0
3	224	260	262	263	263	263	263	0
4	168	213	215	215	215	215	215	0
5	198	223	224	225	225	225	225	1
6	283	319	322	323	323	323	323	4
7	176	210	212	213	213	213	213	37

Tuntemattomat vahingot kaikista sattumisvuosista yhteensä $\hat{R}^N = 42$

Taulukko 7. Chain-ladder -menetelmällä arvioidut kumulatiiviset vahinkojen lukumäärät (lihavoidut luvut) ja tuntemattomien vahinkojen lukumäärät sattumisvuosittain.

3.1.1.2 Maksetut korvaukset

Alaluvun 3.1.1.1 laskelmat voidaan tehdä suoraan maksetuille korvauksille käyttäen lähtöaineistona kumulatiivista maksettujen korvausten korvauskolmiota. Tällöin kaavoissa (12)-(18) käytetään vahinkojen lukumäärien N_{ij} ja \hat{N}_{ij} sijaan kumulatiivisia maksettuja korvauksia D_{ij} ja \hat{D}_{ij} . Kehityskertoimet \hat{d}_j kuvaavat kumulatiivisten korvausten keskimääräistä selviämistä olettaen, että sattumisvuosien i ja k korvaukset ovat keskenään riippumattomia, kun $i \neq k$. Yksittäisistä kehityskertoimista d_{ij} voidaan vastaavasti arvioida, onko esimerkiksi korvausten käsittelyssä tapahtunut muutoksia viimeisimpien vuosien aikana ja onko kehityskertoimet \hat{d}_j syytä laskea esimerkiksi vain tuoreimpien vuosien havaintojen perusteella¹³. Kehityskertoimista kaavalla (14) laskettu selviämisyakauma $\hat{F}(j)$ puolestaan kertoo, kuinka suuren osan kokonaiskorvausmenosta U_i arvioidaan olevan maksettu j . kehitysvuoden loppuun mennessä. Kaavoissa (17) ja (18) saadaan sattumisvuoden i tuntemattomien vahinkojen lukumäärän estimaatin \hat{R}_i^N sijaan korvausvastuun estimaatti \hat{R}_i . Koko korvausvastuun estimaatti \hat{R} saadaan kaavasta (7). Korvausvastuun estimaatit \hat{R}_i ja \hat{R} sisältävät sekä tuntemattomien vahinkojen korvaukset (IBNR) että tunnettujen vahinkojen korvaukset (RBNS).

Koska käsitellään aineistoa, joka on ilmaistu rahan arvossa, on päätettävä, miten korvausinflaatio otetaan huomioon. Jos korvausinflaatio otetaan huomioon *eksplisiittisesti*, käytetään korvauskolmiona kumulatiivista korvauskolmiota, jossa korvaukset on muutettu arviointivuoden t rahan arvoon. Tällöin kaavoilla (12)-(18) ja (7) lasketut kumulatiiviset korvaukset ja korvausvastuun estimaatti ovat vuoden t rahan arvossa. Jotta korvausvastuun estimaatti riittää tulevien korvausten suorittamiseen, on tulevien vuosien korvausinflaatio arvioitava ja lisättävä siitä aiheutuva korvausten kasvu korvausvas-

¹³ Jos lähtöaineistona olisi korvausmenokolmio, olisi lisäksi oltava käsitys esimerkiksi vahinkokohtaisten varausten teossa tapahtuneista muutoksista.

tuun estimaattiin. Tämä tehdään laskemalla estimoiduista, vuoden t rahan arvossa olevista kumulatiivisista korvauksista \hat{D}_{ij}^* , $j = t - i + 2, \dots, J$, (kaavat (15)-(16)) inkrementaaliset korvaukset \hat{C}_{ij}^* kaavalla (5) ja korottamalla nämä arvioituilla vuosittaisilla korvausinflaatioilla maksuvuoden $i + j - 1 > t$ rahan arvoon:

$$\hat{C}_{ij} = \hat{C}_{ij}^* \prod_{k=t+1}^{i+j-1} (1 + \lambda_k), \quad j = t - i + 2, \dots, J. \quad (19)$$

Yksittäisten inkrementaalisten korvausten sijaan voidaan korottaa kaikkien vuonna $t + h$ maksettavien korvausten estimaatit maksuvuoden rahan arvoon kaavalla

$$C\hat{F}_{t+h} = C\hat{F}_{t+h}^* \prod_{k=t+1}^{t+h} (1 + \lambda_k), \quad \text{kun } h = 1, 2, \dots, \quad (20)$$

missä $C\hat{F}_{t+h}^*$ lasketaan kaavalla (9) käyttäen vuoden t rahan arvossa olevia inkrementaalisia korvauksia $\hat{C}_{i,t+h-i+1}^*$.

Sijoitustoiminnan tuotto-odotus voidaan ottaa huomioon diskonttaamalla korvausvastuun estimaatti kaavan (10) mukaisesti. Jos tulevan korvausinflaation oletetaan olevan yhtä suuri kuin diskonttauskorko, kumoavat niiden vaikutukset toisensa (ks. alaluku 2.5).

Taulukossa 8 on laskettu taulukon 5 korvauskolmiolle korvausvastuun estimaatti Chain-ladder -menetelmällä. Korvausinflaatio on otettu huomioon eksplisiittisesti olettaen tulevan vuosittaisen korvausinflaation olevan vakio 2,0 %. Lisäksi on laskettu diskontattu korvausvastuu, kun diskonttauskoroksi on oletettu vakio 3,0 %. Korvausvastuun estimaatiksi vuoden 7 rahan arvossa saadaan 218 428, kun taas korvausinflaatio kasvattaa korvausvastuun estimaattia 5 025. Diskonttauksen jälkeen korvausvastuun estimaatti on 215 999. Diskontattu korvausvastuu on pienempi kuin vuoden 7 rahan arvossa oleva korvausvastuu 218 428, sillä tulevan korvausinflaation on oletettu olevan pienempi kuin diskonttauskoron.

Yksittäiset kehityskertoimet d_{ij} ja kehityskertoimet \hat{d}_j taulukon 5 korvauksille

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j					
	2	3	4	5	6	7
1	1,73378	1,05247	1,00443	1,00123	1,00169	1,00025
2	1,82286	1,03569	1,00602	1,00016	1,00034	
3	1,40858	1,03789	1,00402	1,00115		
4	1,90960	1,02465	0,99839			
5	1,48216	1,02321				
6	1,41625					
\hat{d}_j	1,590923	1,034216	1,002921	1,000906	1,001090	1,0002523

Kehitysvuosi j	1	2	3	4	5	6	7
Selviämisyajakauma $\hat{F}(j)$	60,5 %	96,2 %	99,5 %	99,78 %	99,87 %	99,97 %	100,0 %

Estimoidut kumulatiiviset korvaukset vuoden 7 rahan arvossa (kaavat (15)-(16))

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j							Korvaus- vastuu
	1	2	3	4	5	6	7	
1	306 129	530 759	558 609	561 085	561 777	562 728	562 870	0
2	236 943	431 914	447 331	450 023	450 096	450 248	450 362	114
3	423 731	596 858	619 471	621 959	622 673	623 352	623 509	836
4	327 748	625 869	641 297	640 263	640 843	641 541	641 703	1 440
5	400 643	593 818	607 603	609 378	609 930	610 595	610 749	3 146
6	471 137	667 248	690 078	692 094	692 721	693 476	693 651	26 403
7	285 205	453 739	469 264	470 635	471 061	471 575	471 694	186 489

Inkrementaaliset korvaukset ja korvausvastuun estimaatti vuoden 7 rahan arvossa (kaava (5))

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j							Korvaus- vastuu
	1	2	3	4	5	6	7	
1	306 129	224 630	27 850	2 476	692	951	142	0
2	236 943	194 971	15 417	2 692	73	152	114	114
3	423 731	173 127	22 613	2 488	714	679	157	836
4	327 748	298 121	15 428	-1 034	580	698	162	1 440
5	400 643	193 175	13 785	1 775	552	665	154	3 146
6	471 137	196 111	22 830	2 016	627	755	175	26 403
7	285 205	168 534	15 525	1 371	426	514	119	186 489

Korvausvastuu kaikista sattumisvuosista yhteensä $\hat{R} = 218\,428$.

Vuonna $t+h$ maksettavat korvaukset vuoden t rahan arvossa (vrt. kaava (9))

Vuosi ($t=7$)	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	Yhteensä
$C\hat{F}_{t+h}^*$	194 512	18 948	2 825	1 335	689	119	218 428

Kertoimet, jolla vuonna $t + h$ maksettavat korvaukset korotetaan maksuvuoden rahan arvoon (kaavassa (20)), oletus $\lambda_k = 2\%$ kaikilla k

Vuosi ($t = 7$)	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6
Inflaatiokerroin	1,0200	1,0404	1,0612	1,0824	1,1041	1,1262

Vuonna $t + h$ maksettavat korvaukset maksuvuoden rahan arvossa (kaava (20))

Vuosi ($t = 7$)	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	Yhteensä
\hat{CF}_{t+h}	198 402	19 713	2 998	1 445	761	134	223 453

Diskonttauskertoimet (summan (10) termeissä), oletus $s = 3,0\%$

Vuosi ($t = 7$)	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6
Diskonttauskerroin	0,97087	0,9426	0,9151	0,8885	0,8626	0,8375

Diskontattu korvausvastuu (kaava (10))

Vuosi ($t = 7$)	t+1	t+2	t+3	t+4	t+5	t+6	Yhteensä
Diskonttatut korvaukset	192 623	18 581	2 743	1 284	656	112	215 999

Taulukko 8. Chain-ladder -menetelmän soveltaminen maksettujen korvausten korvauskolmioon. Lähtöaineistona käytetään taulukon 5 kumulatiivista korvauskolmiota ja korvausinflaatio otetaan huomioon eksplisiittisesti.

Jos korvauskolmiosta ei eliminoida korvausinflaatiota, jää korvausinflaatio vaikuttamaan kehityskertoimiin kaavoissa (12)-(13) ja tätä kautta myös sattumisvuoden i korvausvastuun estimaattiin kaavoissa (17)-(18). Tällöin tulevasta korvausinflaatiosta aiheutuva korvausten kasvu sisältyy *implisiittisesti* estimoituun korvausvastuuseen eikä sitä tarvitse erikseen lisätä. Kaavasta (13) seuraa, että tulevien vuosien korvausinflaation oletetaan olevan sama, kuin korvauskolmion havaittujen vuosien korvausinflaatio on keskimäärin ollut¹⁴. Korvausinflaation implisiittinen sisällyttäminen korvausvastuun estimaattiin sopii vakaisiin taloudellisiin jaksoihin.

3.1.1.3 Käyräsovitus ja ekstrapolointi

Jos vahinkojen selviämisen oletetaan jatkuvan pidempään, kuin lukumäärä- tai korvauskolmiossa on kehitysvuosia, voidaan kolmiosta lasketut kehityskertoimet \hat{d}_j ekstrapoloida kehitysvuosille $j > J$. Kehityskertoimien ekstrapolointi tarkoittaa kehityskertoimien \hat{d}_j (tai erotusten $\hat{d}_j - 1$), $j \leq J$, sovittamista sopivaan käyrään ja sovitettujen käyrän arvojen käyttämistä kehityskertoimille \hat{d}_j (tai erotuksille $\hat{d}_j - 1$), $j > J$.

Käyrän sovituksessa käyrän parametrit estimoidaan esimerkiksi (painotetun) pienimmän neliösumman menetelmällä¹⁵. Sovitus voidaan tehdä usealle eri käyrälle, jolloin

¹⁴ ks. [19] Proposition 3.2–3.4

¹⁵ Painotetussa pienimmän neliösumman menetelmässä minimoidaan aineistosta estimoitujen arvojen \hat{y}_j ja käyrän mukaisten arvojen y_j erotusten neliöiden painotettua summaa

sovitetuista käyristä valitaan esimerkiksi se, joka tilastollisten testien (goodness of fit -testien) perusteella sopii kolmiosta laskettuihin kehityskertoimiin parhaiten. Kuitenkin sopivuuttakin oleellisempaa on varmistua korvausvastuun estimaatin turvaavasta tasosta ja käyttää yhtenä valintakriteerinä sovitetuilla kertoimilla estimoidun kokonaiskorvausmenon tasoa.

Koska vahinkojen lukumäärät selviävät usein nopeammin kuin maksetut korvaukset, tulee ekstrapolointi kyseeseen lähinnä silloin, kun korvausvastuu arvioidaan maksettujen korvausten korvauskolmiosta. Taulukossa 9 on sovitettu taulukossa 8 laskettuihin kehityskertoimiin käyrä d_j^{INV} (inverse power)

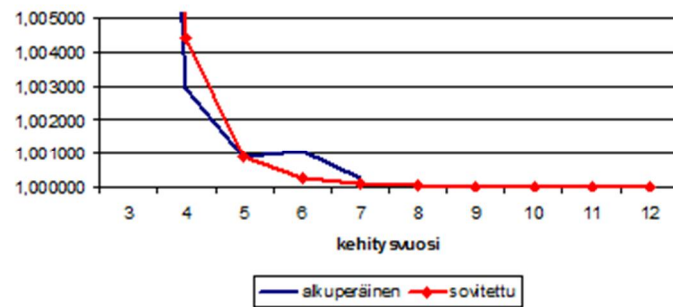
$$d_j^{INV} = 1 + a((j-1) + c)^b,$$

missä parametriksi c on valittu 1. Sovitus on tehty erotukselle $\hat{d}_j - 1$ painottamattomalla pienimmän neliösumman menetelmällä, ja sovituksen onnistumista on tarkasteltu estimoitujen parametrien a ja b keskivirheiden avulla. Tulevat inkrementaaliset korvaukset (taulukossa 9 lihavoidut luvut) on estimoitu käyttäen kehitysvuoteen 7 asti alkuperäisiä kehityskertoimia \hat{d}_j ja kehitysvuodesta 8 lähtien sovitetun käyrän arvoja \hat{d}_j^{INV} (ekstrapoloidut kehitysvuodet). Korvausvastuun estimaatiksi saadaan 218 672, kun oletetaan diskonttauksen kumoavan korvausinflaation vaikutuksen.

$$Q = \sum_{j=1}^J w_j (\hat{y}_j - y_j)^2,$$

missä w_j vastaa estimoidun arvon \hat{y}_j painoa. Kehityskertoimien sovituksessa estimoitu arvo \hat{y}_j on joko kehityskerroin \hat{d}_j tai erotus $\hat{d}_j - 1$ ja y_j on käyrän vastaava arvo. Painottamattomassa pienimmän neliösumman menetelmässä painot w_j ovat kaikille kehitysvuosille 1.

Kehitys- vuosi j	\hat{d}_j	\hat{d}_j^{INV}
2	1,590923	1,590931
3	1,034216	1,033887
4	1,002921	1,004458
5	1,000906	1,000925
6	1,001090	1,000256
7	1,0002523	1,000086
8		1,0000336
9		1,0000147
10		1,0000070
11		1,0000036
12		1,0000019
keskivirhe a		4,4 %
keskivirhe b		0,90%



Sattumisvuosi i	Kehitysvuosi j											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	306 129	224 630	27 850	2 476	692	951	142	19	8	4	2	1
2	236 943	194 971	15 417	2 692	73	152	114	15	7	3	2	1
3	423 731	173 127	22 613	2 488	714	679	157	21	9	4	2	1
4	327 748	298 121	15 428	-1 034	580	698	162	22	9	4	2	1
5	400 643	193 175	13 785	1 775	552	665	154	21	9	4	2	1
6	471 137	196 111	22 830	2 016	627	755	175	23	10	5	2	1
7	285 205	168 534	15 525	1 371	426	514	119	16	7	3	2	1
valittu kehityskertoimen		1,590923	1,034216	1,002921	1,000906	1,001090	1,0002523	1,0000336	1,0000147	1,0000070	1,0000036	1,0000019

Taulukko 9. Käyrän d_j^{INV} sovitus alkuperäisiin kehityskertoimiin, kun $c = 1$. Estimoidut parametrien arvot ovat $\hat{a} = 78,32404$ ja $\hat{b} = -7,05032$.

Ekstrapoloinnin lisäksi käyrään sovitettuja kehityskertoimien arvoja voidaan käyttää kolmiosta laskettujen kehityskertoimien tilalla, jos kolmiosta laskettujen kehityskertoimien ei uskota vastaavan vahinkojen tulevaa selviämistä kyseisinä kehitysvuosina. Näin saattaa käydä esimerkiksi silloin, kun kehityskertoimen laskentaan sopivia yksittäisiä kehityskertoimia d_{ij} on vain muutamia. Erityisesti viimeisimpien kolmiossa näkyvien kehitysvuosien kehityskertoimet lasketaan vain muutamista vanhimpien sattumisvuosien havainnoista (kolmion oikeasta ylänurkasta), jolloin näiden havaintojen poikkeaminen keskimääräisestä aiheuttaa muiden sattumisvuosien vastaavien kehitysvuosien estimaattien poikkeamisen keskimääräisestä.

3.1.2 Bornhuetter-Ferguson -menetelmä

Chain-ladder -menetelmän heikkoutena on, että arviointivuoden t havaituilla kumulatiivisilla korvauksilla on merkittävä vaikutus tulevien kehitysvuosien korvausten estimaatteihin. Erityisesti tuoreimmasta sattumisvuodesta on vain yksi havainto, joka vaikuttaa kaikkiin kyseisen sattumisvuoden korvausten estimaatteihin – jos havainto on keskimääräistä suurempi tai pienempi, ovat vastaavasti estimaatit tuleville kehitys-

vuosille yli- tai aliarvioituja. Ääritapauksena on tilanne, jossa korvauksia ei ole ehditty maksaa lainkaan.

Jotta korvausvastuun estimaatti ei riippuisi havaituista korvauksista ja niiden heilah- telusta, Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä [2] oletetaan, että sattumisvuoden i kor- vausvastuu voidaan määrätä suhteessa kannan riskiä ja kokoa mittaavaan suureeseen, niin sanottuun *riskimittaan* (exposure). Koska tässä menetelmässä korvausvastuun es- timaatti ei riipu havaituista korvauksista, sopii se muun muassa uusien tai korvaus- määriltään vaihtelevien vakuutuslajien korvausvastuun estimointiin, johon Chain- ladder -menetelmä ei sovellu. Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä havaittujen korvau- sten eroa menetelmällä laskettuihin korvauksiin pidetään täysin satunnaisena eikä sen oleteta indikoivan korvausten tulevaa kehitystä kuten Chain-ladder -menetelmässä [12].

3.1.2.1 Perinteinen Bornhuetter-Ferguson -menetelmä

Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä sattumisvuoden i korvausvastuun estimaatti on

$$\hat{R}_i = \hat{U}_i (1 - \hat{F}(t - i + 1)), \quad (21)$$

missä \hat{U}_i on *a priori* estimaatti kokonaiskorvausmenolle U_i ja $\hat{F}(j)$ on arvio j . kehi- tysvuoden loppuun mennessä maksettujen korvausten osuudelle kokonaiskorvaus- menosta. Kuten Chain-ladder -menetelmässä selviämisyksiköiden oletetaan olevan sama kaikille sattumisvuosille. Perinteisessä Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä kokonais- korvausmenon estimaatti \hat{U}_i saadaan sattumisvuoden i vahinkosuhteearvion \hat{q}_i ja vuo- den i vakuutusmaksutuoton P_i tulona:

$$q_i = \frac{U_i}{P_i} \quad \text{ja} \quad \hat{U}_i = \hat{q}_i \cdot P_i, \quad (22)$$

missä q_i ja U_i ovat tuntemattomia, todellisia arvoja, kun taas \hat{q}_i ja \hat{U}_i näiden esti- maatteja. Riskimittana käytetään vakuutusmaksutuottoa P_i , joka on tiedossa vuoden i jälkeen eikä sitä tarvitse estimoida. Koska kokonaiskorvausmeno U_i estimoidaan va- kuutusmaksutuottojen avulla, tulisi sattumisvuosittaisen vakuutusmaksutuottojen muu- tosten kuvata muutosta kokonaiskorvausmenossa. Jos vakuutusmaksuja on vuosien mittaan muutettu markkinatilanteiden eikä todellisten korvausmenon muutosten perus- teella, tulisi käyttää vakuutusmaksutuottoja, joista on eliminoitu tällaiset muutokset. Tällöin vahinkosuhteet \hat{q}_i on arvioitava vastaamaan näin laskettuja vakuutusmaksu- tuottoja. [12]

Estimaatteja \hat{q}_i ja \hat{U}_i kutsutaan *a priori* estimaateiksi, koska ne on muodostettu otta- matta huomioon havaittua korvausten kehitystä. *A posteriori* estimaatit \hat{q}_i^{BF} ja \hat{U}_i^{BF} sen sijaan saadaan havaituista korvauksista ja menetelmän mukaisesta korvausvastuun es- timaateista:

$$\hat{q}_i^{BF} = \frac{D_{i,t-i+1} + \hat{R}_i}{P_i} \quad \text{ja} \quad \hat{U}_i^{BF} = D_{i,t-i+1} + \hat{R}_i. \quad (23)$$

A posteriori estimaatit eroavat a priori estimaateista, kun arviointivuoden t kumulatiiviset korvaukset $D_{i,t-i+1}$ eroaa sen menetelmän mukaisesta estimoidusta arvosta $\hat{D}_{i,t-i+1}$,

$$\hat{D}_{i,t-i+1} = \hat{U}_i \cdot \hat{F}(t-i+1) = \hat{q}_i P_i \hat{F}(t-i+1).$$

Kumulatiivisten korvausten estimaatin ja kaavan (5) perusteella inkrementaalisten korvausten estimaatiksi saadaan

$$\hat{C}_{ij} = \hat{U}_i \hat{f}(j), \quad (24)$$

missä $\hat{f}(j)$ vastaa kehitysvuoden j aikana maksettavien korvausten osuutta kokonaiskorvausmenosta

$$\hat{f}(j) = \hat{F}(j) - \hat{F}(j-1), \quad (25)$$

kun merkitään $\hat{F}(j) = 0$ kaikilla $j < 1$. Osuuksien $\hat{f}(j)$ summalle pätee

$$\sum_{j=1}^J \hat{f}(j) = 1. \quad (26)$$

Perinteisesti selviämisyajakauman estimaattina $\hat{F}(j)$ käytetään Chain-ladder -menetelmän kehityskertoimien perusteella laskettua selviämisyajakaumaa (kaava (14) maksetuille korvauksille). Chain-ladder -menetelmän selviämisyajakauman käyttö ei kuitenkaan ole Bornhuetter-Ferguson -menetelmän riippumattomuusoletuksen mukainen¹⁶. Lisäksi, jos selviämisyajakauma otetaan Chain-ladder -menetelmästä, ei Bornhuetter-Ferguson -menetelmää voida pitää täysin itsenäisenä menetelmänä. Osuudet $\hat{f}(j)$, jotka ovat Bornhuetter-Ferguson -menetelmän riippumattomuusoletuksen mukaisia ja joita käyttämällä menetelmä on itsenäinen, saadaan laskemalla aluksi korvauskolmiosta osuudet

$$\tilde{f}(j) = \frac{\sum_{i=1}^{t-j+1} C_{ij}}{\sum_{i=1}^{t-j+1} \hat{U}_i}, \quad j = 1, \dots, J. \quad (27)$$

¹⁶ Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä oletetaan riippumattomuus sattumisvuoden havaittujen ja tulevien korvausten välillä; havaittujen korvausten poikkeamista estimoidusta arvosta pidetään satunnaisena eikä sen oleteta kertovan tulevasta korvausten tasosta. Chain-ladder -menetelmässä sen sijaan peräkkäisten kehitysvuosien korvaukset vaikuttavat suoraan kehityskertoimiin ja sitä kautta selviämisyajakaumaan. [12], [22]

Osuudet $\tilde{f}(j)$ sovitetaan käyrään siten, että sovitetun käyrän arvot $\hat{f}(j)$ täyttävät summarajoituksen (26). Kuten Chain-ladder -menetelmässä, voidaan osuudet ekstrapoloida useammalle kehitysvuodelle kuin korvauskolmiossa näkyville kehitysvuosille, kunhan kaikkien kehityskertoimien summa täyttää kaavan (26) vaatimuksen. Koska osuuksien $\hat{f}(j)$ tulisi vastata korvausten tulevien vuosien kehitystä, summataan kaavassa (27) korvaukset ja vastaavat kokonaiskorvausmenot vuosista, joiden aikana vahinkojen käsittely on ollut samanlaista kuin sen oletetaan olevan tulevina vuosina¹⁷. Koska osuuksia (27) joudutaan muokkaamaan summarajoituksen (26) takia, on havaituilla korvauksilla vain marginaalinen vaikutus selviämisyajakaumaan.

Ennen kaavan (27) soveltamista on estimoitava vahinkosuhteet q_i niiden odotusarvoiselle tasolle. Koska estimoinnissa ei oteta huomioon havaittua korvausmenoa, sisältyy niihin usein paljon arvioijasta riippuvaa subjektiivisuutta. Erityisesti tuoreimman sattumisvuoden I (yleensä $I = t$), vahinkosuhteen estimointi on vaikeaa. Subjektiivisuutta voidaan vähentää esimerkiksi estimoimalla vahinkosuhte q_i aiempien sattumisvuosien vahinkosuhteoletusten \hat{q}_i keskiarvona. Tällöin keskiarvo lasketaan sattumisvuosista $i < I$, joiden vahinkosuhteen oletetaan olevan sama kuin sattumisvuonna I . Toisaalta, jos voidaan olettaa, että $q_i = q$ kaikilla i , korvausvastuun estimaatiksi saadaan

$$\hat{R}_i = \hat{U}_i \sum_{j=t-i+2}^J \hat{f}(j) = P_i \cdot \hat{q} \sum_{j=t-i+2}^J \hat{f}(j) = P_i \sum_{j=t-i+2}^J \hat{s}(j), \quad (28)$$

missä $\hat{s}(j) = \hat{q} \cdot \hat{f}(j)$. Tällöin vahinkosuhte ja selviämisyajakauma voidaan estimoida yhdessä kaavaa (27) vastaavalla tavalla

$$\hat{s}(j) = \frac{\sum_{i=1}^{t-j+1} C_{ij}}{\sum_{i=1}^{t-j+1} P_i}. \quad (29)$$

Taulukossa 10 on laskettu Bornhuetter-Ferguson -menetelmän korvausvastuun estimaatti taulukon 5 inkrementaaliseen korvauskolmiolle. Taulukkoon on laitettu näkyviin alkuperäiset vakuutusmaksutuotot, vuosittain markkinatilanteen perusteella tehdyt muutokset vakuutusmaksuihin sekä menetelmässä käytettävät vakuutusmaksutuotot P_i vuoden 7 rahan arvossa olettaen, että vuosittain on tehty 2 %:n maksunkorotus korvausinflaation takia. Korvausvastuun estimaatti on laskettu käyttämällä kaavoja (28)-(29). Koska on käytetty vuoden 7 rahan arvossa olevaa korvauskolmiota, on estimoidut inkrementaaliset korvaukset

$$\hat{C}_{ij} = \hat{U}_i \hat{f}(j) = P_i \cdot \hat{q} \cdot \hat{f}(j) = P_i \cdot \hat{s}(j), \text{ kaikilla } i + j - 1 > t, \quad (30)$$

¹⁷ Summaukseen valittavat sattumisvuodet lasketaan valituksi tulleista vuosista k kaavalla (1).

korotettava maksuvuoden rahan arvoon arvioidulla korvausinflaatiolla ja mahdollisesti diskontattava diskonttauskorolla kuten taulukossa 8. Taulukossa 10 on kuitenkin oletettu korvausinflaation ja diskonttauskoron vaikutusten kumoavan toisensa. Korvausvastuun estimaatiksi saadaan 272 832, joka on 54 404 korkeampi kuin Chain-ladder -menetelmän mukainen korvausvastuun estimaatti 218 428 (taulukossa 8). Vahinkosuhteen estimaatiksi \hat{q} on saatu

$$\sum_{j=1}^7 \hat{s}(j) = \hat{q} \sum_{j=1}^7 \hat{f}(j) = \hat{q} = 0,8364.$$

Selviämisyajakauma $\hat{F}(j)$ saadaan laskettua kaavoista (30) ja (25) osuuksien $\hat{f}(j)$ perusteella.

Vuosi i	Maksutuotto	Muutokset maksuihin	Inflaatiokorjaus	P_i
1	425 070	0 %	1,126162	478 698
2	531 191	0 %	1,104081	586 478
3	686 840	-5 %	1,082432	782 587
4	721 129	0 %	1,061208	805 545
5	729 289	5 %	1,0404	760 654
6	767 579	0 %	1,0200	784 893
7	712 241	0 %	1,0000	714 026

Sattumisvuosi i	Kehitysvuosi j							Korvausvastuu
	1	2	3	4	5	6	7	
1	306 129	224 630	27 850	2 476	692	951	142	0
2	236 943	194 971	15 417	2 692	73	152	174	174
3	423 731	173 127	22 613	2 488	714	810	232	1 042
4	327 748	298 121	15 428	-1 034	645	834	239	1 718
5	400 643	193 175	13 785	1 898	609	787	226	3 520
6	471 137	196 111	21 862	1 959	628	812	233	25 494
7	285 205	217 690	19 889	1 782	572	739	212	240 884
$\hat{s}(j)$	0,499002	0,304877	0,027854	0,002495	0,000801	0,001035	0,000297	

Korvausvastuu kaikista sattumisvuosista yhteensä $\hat{R} = 272\,832$.

Kehitysvuosi j	1	2	3	4	5	6	7
Selviämisyajakauma $\hat{F}(j)$	59,7 %	96,1 %	99,4 %	99,7 %	99,8 %	99,96 %	100 %

Taulukko 10. Bornhuetter-Ferguson -menetelmän soveltaminen taulukon 5 korvauksille. Vakuutusmaksujen muutokset on tehty kunkin vuoden alussa. Tulevat inkrementaaliset korvaukset on estimoitu kaavoilla (29) ja (30) (lihavoidut luvut).

Koska Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä selviämisyajakaumaa $\hat{F}(j)$ sovelletaan kumulatiivisten korvausten D_{it-i+1} sijaan a priori kokonaiskorvausmenoon \hat{U}_i , välttää menetelmä korvausvastuun estimaatin riippuvuuden vuoden t kumulatiivisista korvauksista. Verrattuna Chain-ladder -menetelmään Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä on kuitenkin estimoitava useampi parametri, ja erityisesti a priori estimaatit ovat riippuvaisia subjektiivisesta arvioinnista. Mitä enemmän parametreja joudutaan estimoimaan, sitä enemmän korvausvastuun estimaattiin sisältyy estimoinnista johtuvaa virhettä (ks. alaluku 3.2.1). Erityisesti tuoreimmille sattumisvuosille vahinkosuhte joudutaan usein estimoimaan puutteellisen tiedon varassa aiempien sattumisvuosien vahinkosuhteiden perusteella. Estimoitavien parametrien määrää voidaan vähentää, jos kaikkien sattumisvuosien vahinkosuhteiden voidaan olettaa olevan sama ja voidaan käyttää kaavoja (28)-(29). Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä hyödynnetään kuitenkin muiden sattumisvuosien tuomaa informaatiota monipuolisemmin kuin Chain-ladder -menetelmässä [18].

3.1.2.2 Kokonaiskorvausmenon arviointi ja PPCI-menetelmä

Kannan kokoa ja riskiä voidaan vakuutusmaksutuoton lisäksi mitata myös muilla riskimitoilla, kuten esimerkiksi hinnoittelussa käytetyillä riskimitoilla, vakuutusvuosilla tai vuoden aikana sattuneiden vahinkojen lukumäärällä. Bornhuetter-Ferguson -menetelmää sovelletaankin usein käyttämällä vakuutusmaksutuoton sijaan jotain muuta vakuutuslajille sopivaa riskimittaa, jolloin parametri q_i kaavassa (22) lasketaan suhteessa tähän riskimitaan. Oleellista on, että valitun riskimitan muutokset sattumisvuodesta toiseen ennakoivat muutoksia maksettavien korvausten määrässä ja että riskimitan arvo on tiedossa tai pystytään arvioimaan ennen korvausvastuun estimoimista. Usein riskimittaa joudutaan muokkaamaan ennen kuin sitä voidaan käyttää korvausvastuun estimoimisessa, kuten edellä poistettiin markkinasykliä vaikutus vakuutusmaksutuotoista ja korotettiin vakuutusmaksut arviointivuoden rahan arvoon. Korvausvastuun estimaatti voidaan laskea usealla eri riskimitalla ja valita näistä sopivin esimerkiksi sen perusteella, mikä riskimita kuvaa muutoksia kokonaiskorvausmenossa parhaiten ja/tai sisältää vähiten arvioihin perustuvia muokkauksia¹⁸.

Koska \hat{U}_i on kokonaiskorvausmenon a priori estimaatti, ei sitä pitäisi muuttaa havaittujen korvausten perusteella ensimmäisen estimointikerran jälkeen. Jos riskimitana on käytetty esimerkiksi vakuutusmaksutuottoja, voidaan sattumisvuoden jälkeistä uutta tietoa kuitenkin hyödyntää hinnoittelemalla sattumisvuosi uudelleen ja laskemalla uudet vakuutusmaksutuotot. Tällöin havaituilla korvauksilla on vain marginaalinen vaikutus kokonaiskorvausmenon estimaattiin. [12]

PPCI – Payment per Claims Incurred

Kun riskimitana on vakuutusmaksutuoton P_i sijaan vahinkojen lukumäärä $N_{i,j}$, kutsutaan menetelmää PPCI-menetelmäksi (Payment Per Claim Incurred). Vahinkojen lukumäärä ennakoit hyvin maksettavaksi tulevien korvausten määrää, minkä lisäksi siihen ei sisälly hinnoittelumalleihin ja tätä kautta vakuutusmaksutuottoon liittyvää epätark-

¹⁸ Jos muokkaaminen perustuu arvioihin, sisältyy myös muokatun riskimitan perusteella laskettuun korvausvastuun estimaattiin arviosta johtuvaa virhettä.

kuutta. Vahinkojen lukumäärän on todettu olevan hyvä riskimitta erityisesti vakuutuslajeissa, joissa vahinkojen kehitys pysyy tasaisena sattumis- ja kehitysvuodesta toiseen. [18]

Kun riskimittana on vahinkojen lukumäärä, vastaa kokonaiskorvausmenon suhde riskimittaan q_i keskimääräistä vahingon suuruutta. Koska vahinkojen raportoituminen kestää useamman vuoden, on sattumisvuoden i lopullinen vahinkojen lukumäärä N_{iJ} estimoitava esimerkiksi Chain-ladder -menetelmällä. Näin ollen a priori kokonaiskorvausmeno saadaan keskimääräisen vahingon suuruuden ja vahinkojen lukumäärän estimaattien tulona

$$q_i = \frac{U_i}{N_{iJ}} \quad \text{ja} \quad \hat{U}_i = \hat{q}_i \cdot \hat{N}_{iJ}.$$

Jos keskimääräisen vahingon suuruuden oletetaan olevan sama kaikille sattumisvuosille, estimoidaan parametrit $\hat{s}(j)$ kaavalla (29) korvaamalla nimittäjässä vakuutusmaksutuotot P_i estimoiduilla vahinkojen lukumäärillä \hat{N}_{iJ} , $i = 1, \dots, I$. Sattumisvuoden i korvausvastuun estimaatti saadaan kaavalla (28) korvaamalla myös tässä vakuutusmaksutuotto P_i lukumäärällä \hat{N}_{iJ} .

Taulukossa 11 on esimerkki PPCI-menetelmän soveltamisesta. Vahinkojen lukumäärinä on käytetty taulukossa 7 Chain-ladder -menetelmällä laskettuja vahinkojen lukumääriä \hat{N}_{i7} . Korvausvastuun estimaatiksi saadaan 260 014, joka on pienempi kuin perinteisen Bornhuetter-Ferguson -menetelmän tuottama estimaatti 272 832 mutta suurempi kuin Chain-ladder -menetelmän korvausvastuun estimaatti 218 428. Keskimääräiseksi vahingon suuruudeksi saadaan

$$\sum_{j=1}^7 \hat{s}(j) = \hat{q} \sum_{j=1}^7 \hat{f}(j) = \hat{q} = 2577,80.$$

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j							\hat{N}_{ij}	Korvaus- vastuu
	1	2	3	4	5	6	7		
1	306 129	224 630	27 850	2 476	692	951	142	181	0
2	236 943	194 971	15 417	2 692	73	152	133	169	133
3	423 731	173 127	22 613	2 488	714	829	206	263	1 035
4	327 748	298 121	15 428	-1 034	519	678	169	215	1 366
5	400 643	193 175	13 785	1 799	543	709	177	225	3 228
6	471 137	196 111	29 169	2 583	779	1 018	253	323	33 802
7	285 205	198 160	19 235	1 703	514	671	167	213	220 450
$\hat{s}(j)$	1 543,1579	930,5329	90,3457	7,9965	2,4132	3,1504	0,7845		

Korvausvastuu kaikista sattumisvuosista yhteensä $\hat{R} = 260\,014$.

Kehitysvuosi j	1	2	3	4	5	6	7
Selviämisyajakauma $\hat{F}(j)$	59,9 %	95,9 %	99,4 %	99,75 %	99,85 %	99,97 %	100,0 %

Taulukko 11. PPCI-menetelmä vastaa Bornhuetter-Ferguson -menetelmää, jossa riskimittana on vahinkojen lukumäärä. Tällöin q on keskimääräinen vahingon suuruus.

3.1.3 Hovisen menetelmä

Chain-ladder -menetelmä sopii erityisesti vakuutuslajeille, joissa vahinkojen selviäminen on nopeaa ja samanlaista sattumisvuodesta toiseen, kun taas Bornhuetter-Ferguson -menetelmä sopii pitkähäntäisille ja selviämislajeille vaihteleville vakuutuslajeille. Menetelmät edustavat toistensa ääripäitä myös siinä, että Chain-ladder -menetelmässä korvausvastuu estimoidaan viimeisimpien havaittujen kumulatiivisten korvausten perusteella, kun taas Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä korvausvastuun estimaatti riippuu a priori kokonaiskorvausmenoista. Aina ei kuitenkaan pystytä varmasti sanomaan, kumpi menetelmä sopii aineistoon paremmin tai tuottaa tarkemman¹⁹ estimaatin maksettavaksi tuleville korvauksille.

Sen sijaan, että valittaisiin sopivampi menetelmä, voidaan laskea Chain-ladder -menetelmän ja Bornhuetter-Ferguson -menetelmän korvausvastuiden estimaattien painotettu keskiarvo

$$\begin{aligned}\hat{R}_i^{HOV} &= \hat{F}(t-i+1) \cdot \hat{R}_i^{CL} + (1 - \hat{F}(t-i+1)) \cdot \hat{R}_i^{BF} \\ &= (1 - \hat{F}(t-i+1)) \cdot D_{i,t-i+1} + (1 - \hat{F}(t-i+1))^2 \cdot \hat{U}_i,\end{aligned}\quad (31)$$

missä \hat{R}_i^{CL} vastaa Chain-ladder -menetelmän sattumisvuoden i korvausvastuun estimaattia ja \hat{R}_i^{BF} Bornhuetter-Ferguson -menetelmän vastaavaa estimaattia. Selviämisyajakauma $\hat{F}(t-i+1)$ on laskettu Chain-ladder -menetelmällä (kaava (14)). Suomessa kaava (31) tunnetaan Hovisen menetelmänä, mutta sen lisäksi sitä kutsutaan iteroiduksi

¹⁹ Tarkkuudella tarkoitetaan sitä, että estimoidun arvon ja realisoituvan arvon välinen ero on mahdollisimman pieni (ks. ennustevirheen hajonta alaluvusta 3.2.1).

Bornhuetter-Ferguson -menetelmäksi ja Benktanderin menetelmäksi. Nimitysten taustasta on kerrottu alaluvussa 3.1.3.1. [11]

Hovisen menetelmässä eri menetelmien korvausvastuiden estimaatteja painotetaan selviämisyajakauman suhteen. Näin ollen havaituista korvauksista johdettua estimaattia painotetaan sitä enemmän, mitä pidemmälle sattumisvuosi on selvinnyt. Kun selviäminen on alkuvaiheessa ja havaittuja korvauksia on vielä vähän, painotetaan sen sijaan a priori kokonaiskorvausmenosta johdettua korvausvastuun estimaattia. Selviämisen alkuvaiheessa havaittujen korvausten perusteella arvioituu korvausvastuun estimaattiin sisältyy usein enemmän epävarmuutta kuin kokonaiskorvausmenoon perustuvaan estimaattiin (ks. myös alaluku 3.2.3.4).

Taulukossa 12 on laskettu Hovisen menetelmällä korvausvastuun estimaatti taulukon 5 korvauskolmiolle olettaen diskonttauksen kumoavan korvausinflaation vaikutuksen. Chain-ladder -menetelmän estimaatti \hat{R}_i^{CL} on laskettu alaluvussa 3.1.1.2 (taulukko 8). Bornhuetter-Ferguson -menetelmän estimaatti \hat{R}_i^{BF} on laskettu kaavoilla (21)-(22) olettaen a priori vahinkosuhteen \hat{q} olevan 83,64 % kaikille sattumisvuosille. Maksutuotoina on käytetty taulukossa 10 laskettuja maksutuottoja P_i ja selviämisyajakaumana $\hat{F}(j)$ Chain-ladder -menetelmän mukaista selviämisyajakaumaa. Hovisen menetelmän korvausvastuun estimaatti, 237 890, on 19 462 suurempi kuin Chain-ladder -menetelmän korvausvastuun estimaatti ja 28 615 pienempi kuin Bornhuetter-Ferguson -menetelmän korvausvastuun estimaatti. Tulos on lähempänä Chain-ladder -menetelmän korvausvastuun estimaattia, koska yli puolien korvauksista (60,5 %) on arvioitu olevan selvinneen jo ensimmäisen kehitysvuoden jälkeen. Näin ollen jokaisena sattumisvuonna painotetaan enemmän Chain-ladder -menetelmän korvausvastuun estimaattia kuin Bornhuetter-Ferguson -menetelmän korvausvastuun estimaattia.

Sattumis- vuosi i	$\hat{F}(t-i+1)$	\hat{R}_i^{CL}	$1-\hat{F}(t-i+1)$	\hat{q}	P_i	\hat{R}_i^{BF}	\hat{R}_i^{HOV}
1	100,0 %	0	0,0 %	83,64 %	478 698	0	0
2	99,97 %	114	0,03 %	83,64 %	586 478	147	114
3	99,87 %	836	0,13 %	83,64 %	782 587	851	836
4	99,78 %	1 440	0,22 %	83,64 %	805 545	1 482	1 440
5	99,5 %	3 146	0,5 %	83,64 %	760 654	3 181	3 146
6	96,2 %	26 403	3,8 %	83,64 %	784 892	24 946	26 348
7	60,5 %	186 489	39,5 %	83,64 %	714 026	235 898	206 006
Yhteensä \hat{R}		218 428				266 505	237 890

Taulukko 12. Hovisen menetelmän soveltaminen vuoden 7 lopussa.

Myös muista kuin Chain-ladder ja Bornhuetter-Ferguson -menetelmien korvausvastuun estimaateista voidaan laskea painotettu keskiarvo. Lisäksi keskiarvo voidaan laskea useamman kuin kahden menetelmän estimaateista. Yleisesti painotettuna keskiarvona laskettu korvausvastuun estimaatti voidaan esittää muodossa

$$\hat{R}_i = \sum_m w^m \hat{R}_i^m,$$

missä m määrittää menetelmän (esimerkiksi $m = CL$) ja w^m on menetelmän m estimaatille annettu paino siten, että $\sum_m w^m = 1$. Painojen ei tarvitse olla suhteessa selviämisyajakaumaan kuten Hovisen menetelmässä.

3.1.3.1 * Hovisen menetelmän eri versiot

Kuten aiemmin mainittiin, Hovisen menetelmää kutsutaan myös Benktanderin menetelmäksi ja iteroiduksi Bornhuetter-Ferguson -menetelmäksi. Tämä johtuu siitä, että kaikki menetelmät päätyvät kaavan (31) mukaiseen korvausvastuun estimaattiin, vaikka lähtökohdat ovat erilaiset. Menetelmien tarkastelua varten kootaan aluksi Chain-ladder ja Bornhuetter-Ferguson -menetelmien korvausvastuiden estimaattien ja a posteriori kokonaiskorvausmenojen kaavat.

Chain-ladder -menetelmän korvausvastuun estimaatti ja a posteriori kokonaiskorvausmeno ovat (vrt. kaava (18))

$$\hat{R}_i^{CL} = \frac{D_{i,t-i+1}}{\hat{F}(t-i+1)} (1 - \hat{F}(t-i+1)) \text{ ja}$$

$$\hat{U}_i^{CL} = D_{i,t-i+1} + \hat{R}_i^{CL} = \frac{D_{i,t-i+1}}{\hat{F}(t-i+1)}.$$

Bornhuetter-Ferguson -menetelmän korvausvastuun estimaatti ja a posteriori kokonaiskorvausmeno ovat (kaavat (21) ja (23))

$$\hat{R}_i^{BF} = \hat{U}_i (1 - \hat{F}(t-i+1)) \text{ ja}$$

$$\hat{U}_i^{BF} = D_{i,t-i+1} + \hat{R}_i^{BF},$$

missä \hat{U}_i on a priori kokonaiskorvausmeno ja $\hat{F}(j)$ on laskettu Chain-ladder -menetelmällä.

Iteroidussa Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä sovelletaan Bornhuetter-Ferguson -menetelmän korvausvastuun estimointikaavaa (21) käyttäen a posteriori kokonaiskorvausmenoa \hat{U}_i^{BF} ja Chain-ladder -menetelmän selviämisyajakaavaa (14) [11]. Näin ollen iteroidun Bornhuetter-Ferguson menetelmän korvausvastuun estimaatiksi saadaan a posteriori kokonaiskorvausmenon \hat{U}_i^{BF} ja Chain-ladder -menetelmän korvausvastuun estimaatin \hat{R}_i^{CL} yllä esitettyjä kaavoja käyttämällä

$$\hat{R}_i^{ITER} = \hat{U}_i^{BF} (1 - \hat{F}(t-i+1)) \quad (32)$$

$$\begin{aligned}
&= (1 - \hat{F}(t-i+1))D_{i,t-i+1} + (1 - \hat{F}(t-i+1))\hat{R}_i^{BF} \\
&= \hat{F}(t-i+1)\hat{R}_i^{CL} + (1 - \hat{F}(t-i+1))\hat{R}_i^{BF}.
\end{aligned}$$

Tämä vastaa Hovisen menetelmän korvausvastuun estimaattia (31)²⁰.

Benktanderin menetelmässä korvausvastuu puolestaan estimoidaan kaavalla

$$\hat{R}_i^{BE} = \hat{R}_i^{BF} \frac{\hat{U}_i^{BE}}{\hat{U}_i} = \hat{U}_i^{BE} (1 - \hat{F}(t-i+1)), \quad (33)$$

missä \hat{U}_i^{BE} on Chain-ladder -menetelmän a posteriori kokonaiskorvausmenon \hat{U}_i^{CL} ja Bornhuetter-Ferguson -menetelmän a priori kokonaiskorvausmenon \hat{U}_i selviämisyksiköllä painotettu keskiarvo

$$\hat{U}_i^{BE} = \hat{F}(t-i+1) \cdot \hat{U}_i^{CL} + (1 - \hat{F}(t-i+1)) \cdot \hat{U}_i. \quad (34)$$

Korvausvastuiden estimaattien painottamisen sijaan Benktanderin menetelmässä painotetaan siis havaittujen korvausten perusteella estimoitua kokonaiskorvausmenoa ja alkuperäistä a priori kokonaiskorvausmenoa. Kaavassa (33) on oletettu, että Bornhuetter-Ferguson -menetelmän korvausvastuun estimaatti on laskettu käyttämällä Chain-ladder -menetelmän selviämisyksiköä. Sijoittamalla kaavaan (34) a posteriori kokonaiskorvausmenolle \hat{U}_i^{CL} alaluvun alussa esitetty kaava, saadaan $\hat{U}_i^{BE} = \hat{U}_i^{BF}$. Näin ollen Benktanderin menetelmän korvausvastuun estimaatti (33) vastaa iteroidun Bornhuetter-Ferguson -menetelmän estimaattia (32) ja sitä kautta Hovisen menetelmän estimaattia (31). [11]

3.1.4 Determinististen menetelmien korvausvastuiden estimaatit

Alla olevaan taulukkoon on kerätty alaluvuissa 3.1.1–3.1.3 lasketut korvausvastuun estimaatit. Chain-ladder -menetelmästä on esitetty maksettujen korvausten perusteella laskettu korvausvastuun estimaatti. Chain-ladder -menetelmällä laskettuja vahinkojen lukumääriä \hat{N}_{ij} on käytetty puolestaan PPCI-menetelmässä. Bornhuetter-Ferguson -menetelmän korvausvastuun estimaatti on laskettu taulukossa 10. Hovisen menetelmässä sovellettu Bornhuetter-Ferguson -menetelmä eroaa tästä siten, että selviämisyksiköinä on käytetty Chain-ladder -menetelmän selviämisyksiköitä (ks. taulukko 12).

Eri menetelmien tuloksista saadaan korvausvastuun odotusarvolle vaihteluväli, josta valitaan korvausvastuulle *paras estimaatti*. Valinnassa otetaan huomioon muun muassa menetelmien sopivuus aineistolle sekä vakuutusyhtiölain vaatima turvaavuus. Mene-

²⁰ Jos iterointia jatkettaisiin kaavalla (32) korvaamalla kokonaiskorvausmeno \hat{U}_i^{BF} aina edellisen kierroksen jälkeen lasketulla a posteriori kokonaiskorvausmenolla $D_{i,t-i+1} + \hat{R}_i^{ITER}$, päädyttäisiin lopulta Chain-ladder -menetelmän korvausvastuun estimaattiin, ks. [11] teoreema 1.

telmien valintaa ja vertailua käsitellään lisää alaluvussa 3.2 (muun muassa alaluvut 3.2.2.4 ja 3.2.3.4).

Sattumis- vuosi i	\hat{R}_i^{CL}	\hat{R}_i^{BF}	\hat{R}_i^{PPCI}	\hat{R}_i^{HOV}
1	0	0	0	0
2	114	174	133	114
3	836	1 042	1 035	836
4	1 440	1 718	1 366	1 440
5	3 146	3 520	3 228	3 146
6	26 403	25 494	33 802	26 348
7	186 489	240 884	220 450	206 006
Yhteensä \hat{R}	218 428	272 832	260 014	237 890

3.2 Stokastiset mallit

Stokastisissa malleissa tarkastellaan vahinkoja ja korvauksia tuottavia satunnaisia mekanismeja. Näissä malleissa korvauksille oletetaan tietty jakauma, jolloin korvausvastuun odotusarvon lisäksi pystytään estimoimaan *ennustevirheen hajonta* ja mahdollisesti koko *ennustejakauma*. Näiden avulla tarkastellaan korvausvastuuseen liittyvää epävarmuutta. Stokastisten mallien hyötynä verrattuna deterministisiin menetelmiin on lisäksi se, että stokastisissa malleissa taustaoletukset on määritelty tarkasti. Eri mallien oletuksia voidaan testata tilastollisin menetelmin ja näin voidaan tehdä päätelmiä siitä, mikä malleista sopii parhaiten kyseiselle aineistolle.

Koska Chain-ladder -menetelmä on yksi yleisimmin käytössä olleista deterministisistä menetelmistä, on sen taustalle yritetty löytää useita stokastisia malleja. Tunnetuin lienee Mackin ”jakaumavapaa” malli (distribution-free Chain-ladder model), jonka oletukset Mack [10] on alun perin päätellyt Chain-ladder -menetelmän algoritmista. Muita malleja, jotka tuottavat samat estimaatit kuin perinteinen Chain-ladder -menetelmä, esitellään esimerkiksi lähteissä [9] ja [13].

Kuvassa 5 on yhteenveto korvausvastuun estimoinnin vaiheista, kun käytetään stokastista mallia. Työssä esitellään stokastiset mallit käyttäen lähtöaineistona maksettuja korvauksia. Aluksi tarkastellaan korvausvastuuseen liittyvää epävarmuutta ja ennustevirheen hajontaa, ja tämän jälkeen esitellään muun muassa Mackin [10], [12] muotoilemat stokastiset mallit Chain-ladder ja Bornhuetter-Ferguson -menetelmille.

Korvausvastuun arviointi

- Määritellään käytettävä malli
- Estimoidaan mallin parametrit lähtöaineistosta
- Lasketaan estimaatit korvausten odotusarvoille
- Tarkastellaan mallin sopivuutta testaamalla mallin oletukset ja vertaamalla havaittuja korvauksia mallin antamiin estimaatteihin
- Lasketaan jokaiselle sattumisvuodelle korvausvastuun estimaatti (korvausten odotusarvojen estimaattien perusteella)
- Lasketaan koko korvausvastuun estimaatti (kaava (7))
- Estimoidaan ennustevirheen varianssi ja hajonta, vertaillaan mallin tuloksia muiden mallien tuloksiin, määritellään varmuuslisä, jne.

Kuva 5. Korvausvastuun arvioinnin vaiheet, kun käytetään stokastista mallia (mukailtu lähteessä [15] esitetystä vaiheista).

3.2.1 Ennustevirheen hajonta ja varmuuslisä

Vakuutusyhtiön riskienhallinnan kannalta on tärkeää arvioida korvausvastuuseen liittyvää epävarmuutta. Epävarmuudella tarkoitetaan sitä, kuinka paljon realisoituva korvausvastuu eroaa sille estimoidusta arvosta. Maksettavaksi tulevien korvausten ja estimoidun arvon välisiin eroihin varaudutaan varmuuslisällä. Ennustevirheen hajonta antaa viitteitä siitä, kuinka tarkasti malli ennustaa toteutuvia korvauksia. Näin ollen ennustevirheen hajonnan estimaatin perusteella voidaan arvioida, kuinka suuri varmuuslisä tulisi varata, jotta yhtiö suoriutuu siltä vaadituista korvauksista halutulla todennäköisyydellä²¹.

Ennustevirheellä tarkoitetaan yleisesti estimoidun arvon ja realisoituvan arvon erotusta. Kokonaiskorvausmenon ja korvausvastuun ennustevirheet ovat yhtä suuret, sillä

$$U_i - \hat{U}_i^{post} = D_{i,t-i+1} + R_i - (D_{i,t-i+1} + \hat{R}_i) = R_i - \hat{R}_i,$$

missä \hat{U}_i^{post} tarkoittaa käytetyn mallin mukaista a posteriori kokonaiskorvausmenoa (ks. esimerkiksi alaluku 3.1.3.1). Koska kokonaiskorvausmeno U_i ja korvausvastuu R_i sekä niiden estimaattorit \hat{U}_i^{post} ja \hat{R}_i ovat arviointihetkellä (vuoden t lopussa) satunnaismuuttujia, on ennustevirhekin satunnainen. Näin ollen arvioitaessa mallin tarkkuutta ollaan kiinnostuneita keskimääräisestä erosta estimaattorin ja realisoituvan arvon välillä. Toisin sanoen, pyritään arvioimaan ennustevirheen neliön odotusarvo (keskineliövirhe) sekä ennustevirheen varianssi ja hajonta. Koska yleensä käytetyltä korva-

²¹ Työssä varmuuslisää tarkastellaan ns. perinteisestä näkökulmasta, joka poikkeaa Solvenssi II:n mukaisesta Cost of Capital -näkökulmasta.

usvastuun arviointimenetelmältä vaaditaan, että sen tuottaman estimaattorin odotusarvo vastaa korvausvastuun odotusarvoa, voidaan olettaa

$$E(\hat{R}_i) = E(R_i).$$

Tällöin ennustevirheen varianssi vastaa keskineliövirhettä

$$\text{Var}(R_i - \hat{R}_i) = E\left[(R_i - \hat{R}_i)^2\right] \stackrel{\text{merk.}}{=} \text{MSE}(\hat{R}_i). \quad (35)$$

Kun oletetaan tulevien korvausten olevan riippumattomia havaituista korvauksista, on korvausvastuu R_i riippumaton estimaattoristaan \hat{R}_i . Näin ollen saadaan²²

$$\begin{aligned} \text{MSE}(\hat{R}_i) &= E\left[(R_i - \hat{R}_i)^2\right] = E\left\{\left[(R_i - E(R_i)) - (\hat{R}_i - E(R_i))\right]^2\right\} \\ &= \text{Var}(R_i) + E\left\{[\hat{R}_i - E(R_i)]^2\right\} = \text{Var}(R_i) + \text{Var}(\hat{R}_i). \end{aligned} \quad (36)$$

Ennustevirheen hajonta on tällöin

$$\text{Sd}(\hat{R}_i) = \sqrt{\text{MSE}(\hat{R}_i)} = \sqrt{E\left[(R_i - \hat{R}_i)^2\right]} = \sqrt{\text{Var}(R_i) + \text{Var}(\hat{R}_i)}. \quad (37)$$

Kaavoista (36) ja (37) nähdään, että ennustevirheen varianssi voidaan esittää *prosessivarianssin* $\text{Var}(R_i)$ ja *estimointivarianssin* $\text{Var}(\hat{R}_i)$ summana ja vastaavasti ennustevirheen hajonta prosessi- ja estimointivirheen summana. Prosessivarianssi ottaa huomioon puhtaan satunnaisuuden aiheuttaman eron todellisten korvausten ja niiden odotusarvon välillä. Estimointivarianssi puolestaan ottaa huomioon sen, että mallin parametrien tarkkoja arvoja ei tiedetä ja korvausten odotusarvot on estimoitava havaintojen perusteella. Estimointivarianssin suuruus kuvaa sitä, miten odotusarvon estimaatti vaihtelee, jos mallin parametrien estimointi toistettaisiin useita kertoja siten, että estimoinnissa käytetyt havainnot olisivat joka estimointikerralla hieman erilaiset, mutta edelleen saman mekanismin tuottama kuin alkuperäiset havainnot tuottanut mekanismi [6].

Ennustevirheen varianssi ja hajonta eivät ota huomioon mallin valinnasta aiheutuvaa epävarmuutta, niin sanottua *mallivirhettä*. Mallivirheellä tarkoitetaan epävarmuutta siitä, miten hyvin valittu malli yleensäkin sopii kuvaamaan korvausten taustalla olevaa satunnaisuutta.

Sattumisvuoden i korvausvastuun ennustevirheen hajonnan lisäksi ollaan kiinnostuneita koko korvausvastuun ennustevirheen hajonnasta. Edellä esitetty päättely sopii sellaisenaan koko korvausvastuulle R ja sen estimaattorille \hat{R} . Näin ollen koko korvausvas-

²² ks. mm. [6], [19] luku 6.6 ja [22] luku 3.1. Ks. myös alaluku 3.2.2 Mackin mallista, jossa ei oleteta tulevien korvausten olevan riippumattomia havaituista korvauksista [10]. Mack [10] johtaa ennustevirheen ehdollisen varianssin, jossa ehtona ovat arviointihetkeen mennessä havaitut korvaukset. Ennustevirheen ehdollinen varianssi on kuitenkin tulkittavissa samoin kuin kaava (36).

tuun ennustevirheen varianssi voidaan myös esittää prosessi- ja estimointivarianssin summana

$$MSE(\hat{R}) = E\left[(R - \hat{R})^2\right] = Var(R) + Var(\hat{R}). \quad (38)$$

Vastaavasti ennustevirheen hajonta on

$$Sd(\hat{R}) = \sqrt{MSE(\hat{R})} = \sqrt{Var(R) + Var(\hat{R})}. \quad (39)$$

Koska ennustevirheen hajonta riippuu käytetyn mallin parametreista, joudutaan se esimoimaan aineistosta, aivan kuten korvausvastuun odotusarvokin. Mitä pienempi ennustevirheen hajonnan estimaatti on, sitä tarkemmin mallin arvioidaan ennustavan maksamatta olevat korvaukset. Ennustevirheen hajonnan estimaatin ollessa suuri voi toteutuva korvausvastuu poiketa mallin tuottamasta estimaatista merkittävästi, mikä antaa erityisen syyn varmuuslisän varaamiseen. Varmuuslisän määräksi voidaan asettaa esimerkiksi ennustevirheen hajonnan estimaatti tai sen kaksinkertainen määrä riippuen halutusta turvaavuustasosta ja vakuutusyhtiön kokonaisriskiasemasta. Ennustevirheen hajonnan estimaattia tarvitaan varmuuslisän määrittämisen lisäksi esimerkiksi riskiperusteisen pääoman allokontiin ja vakuutusmaksujen varmuuslisän laskemiseen.

Ennustevirheen hajonnan estimoiminen ei aina riitä korvausvastuun estimaatin riittävyyden arvioimiseen, vaan hyödyllistä olisi saada arvio korvausvastuun koko jakaumasta, jota työssä kutsuaan *ennustejakaumaksi* (predictive distribution [6]). Ennustejakauman avulla saadaan käsitys ennustevirheen hajonnan lisäksi muun muassa luottamusväleistä ja prosenttipisteistä. Luottamusväli tarkoittaa väliä, joka sisältää korvausvastuun odotusarvon tietyllä todennäköisyydellä, esimerkiksi 95 %:n todennäköisyydellä. Prosenttipiste puolestaan tarkoittaa arvoa, jota pienempi korvausvastuu on annettulla todennäköisyydellä. Ennustejakaumasta tehtävien analyysien tavoitteena on varmuuslisän tason määrittäminen, toisin sanoen sen varmistaminen, että korvausten saajien edut on turvattu ja että tulevat korvaukset pystytään suorittamaan *riittävän suurella todennäköisyydellä*.

Ennustevirheen hajonnan estimoimiseksi riittää estimoida erikseen prosessivarianssi ja estimointivarianssi. Kuitenkin erityisesti estimointivarianssin analyttinen laskeminen on usein haastavaa. Myös ennustejakauman määrittäminen analyttisesti on raskasta, sillä korvausvastuu muodostuu summana tulevista korvauksista, joilla on usein omat, sattumis-, kehitysvuodesta tai molemmista riippuvat jakaumansa. England & Verrall [5] ja England [4] esittelevät bootstrap-menetelmän ja simuloinnin yhdistelmän, jolla ennustejakauma voidaan arvioida ilman raskasta analyttistä laskentaa. Tällöin ennustevirheen hajonnan estimaatti saadaan arvioidun ennustejakauman hajontana. Alaluvuissa 3.2.2–3.2.3 esitetään Mackin [10], [12] analyttisesti johtamat ennustevirheen hajonnan estimaattorit stokastisille Chain-ladder ja Bornhuetter-Ferguson -malleille. Luvussa 4 on puolestaan esitetty bootstrap-/simulointimenetelmä käyttäen alaluvussa 3.2.4 esitettyä Poisson-jakaumaan perustuvaa stokastista mallia.

Jatkossa oletetaan, että tuorein sattumisvuosi I on sama kuin arviointivuosi t .

3.2.2 Mackin malli

3.2.2.1 Oletukset

Mackin [10] stokastisessa Chain-ladder -menetelmässä, niin kutsutussa Mackin mallissa, oletukset koskevat kumulatiivisten korvausten D_{ij} odotusarvoa, varianssia ja riippumattomuutta. Varsinaisesta jakaumasta ei tehdä oletusta, minkä vuoksi Mackin mallia kutsutaan usein ”jakaumavapaaksi” malliksi. Mackin mallin oletukset ovat

- 1) Sattumisvuoden i kehitysvuoden j kumulatiivisten korvausten ehdollinen odotusarvo on

$$E(D_{ij} | D_{i1}, \dots, D_{i,j-1}) = D_{i,j-1} \cdot d_j, \text{ kun } i = 1, \dots, I \text{ ja } j = 2, \dots, J.$$

- 2) Kumulatiiviset korvaukset sattumisvuodelle i $\{D_{i1}, \dots, D_{iJ}\}$ ja sattumisvuodelle k $\{D_{k1}, \dots, D_{kJ}\}$ ovat riippumattomia kaikilla $i \neq k$.
- 3) Sattumisvuoden i kehitysvuoden j kumulatiivisten korvausten ehdollinen varianssi on

$$\text{Var}(D_{ij} | D_{i1}, \dots, D_{i,j-1}) = D_{i,j-1} \cdot \alpha_j^2, \text{ kun } i = 1, \dots, I \text{ ja } j = 2, \dots, J.$$

Oletuksessa 1 tiivistetään Chain-ladder -menetelmän ominaisuus, jonka mukaan ainoastaan edellisen kehitysvuoden korvaukset $D_{i,j-1}$ vaikuttaa sattumisvuoden i kokonaiskorvausmenon ja korvausvastuun estimaatteihin (ks. korvausvastuun estimointi alaluvusta 3.2.2.2). Lisäksi oletuksesta käy ilmi, että kesimääräisen korvausten kehityksen kehitysvuoden $j-1$ lopusta kehitysvuoden j loppuun oletetaan olevan kehityskertoimen d_j mukainen riippumatta sattumisvuodesta tai edellisen kehitysvuoden kumulatiivisten korvausten suuruudesta. Havaittujen korvausten eron tästä kehityksestä oletetaan olevan satunnaisen häiriön aiheuttamaa. Koska peräkkäisten kehitysvuosien kumulatiivisten korvausten välillä oletetaan olevan lineaarinen yhteys, mallin sopivuutta voidaan testata lineaariselle regressiolle tarkoitetuilla testeillä [21].

3.2.2.2 Korvausvastuun odotusarvon estimointi

Oletusten 1 ja 2 (ks. alaluku 3.2.2.1) perusteella sekä yksittäiset kehityskertoimet d_{ij} , $i = 1, \dots, t-j+1$, että kaavan (13) mukainen yksittäisten kehityskertoimien painotettu keskiarvo ovat kehityskertoimen d_j harhattomia estimaattoreita²³. Itse asiassa sekä edellä mainitut estimaattorit että joukko muita harhattomia estimaattoreita voidaan esittää yleisemmin painotettuna keskiarvona

$$\hat{d}_j^w = \sum_{k=1}^{t-j+1} w_{kj} \cdot d_{kj}, \text{ kun } \sum_{k=1}^{t-j+1} w_{kj} = 1,$$

²³ ks. [10] luku 3 ja Appendix A

missä w_{kj} on yksittäisen kehityskertoimen d_{kj} paino. Näistä estimaattoreista tulisi yleisen periaatteen mukaisesti valita se, jonka varianssi on pienin. Mack [10] osoittaa, että estimaattorin \hat{d}_j^w varianssi minimoituu, jos ja vain jos painot w_{ij} ovat käänteisessä suhteessa yksittäisen kehityskertoimen d_{ij} ehdolliseen varianssiin²⁴. Toisin sanoen, on oltava

$$w_{ij} = c / \text{Var}(d_{ij} \mid D_{i1}, \dots, D_{i,j-1}),$$

missä c on positiivinen vakio. Oletuksen 3 perusteella yksittäisen kehityskertoimen varianssi on

$$\text{Var}(d_{ij} \mid D_{i1}, \dots, D_{i,j-1}) = \text{Var}(D_{ij} / D_{i,j-1} \mid D_{i1}, \dots, D_{i,j-1}) = \alpha_j^2 / D_{i,j-1}.$$

Näin ollen paino w_{ij} on suhteessa edellisen kehitysvuoden kumulatiivisiin korvauksiin $D_{i,j-1}$, mikä pätee kaavan (13) mukaiselle estimaattorille. Kun kehityskertoimen estimaattori lasketaan painotetun pienimmän neliösumman menetelmällä, missä painot ovat käänteisessä suhteessa kumulatiivisten korvausten varianssiin, päädytään täsmälleen kaavan (13) mukaiseen estimaattoriin (ks. tarkemmin alaluku 3.2.2.4 ja kaava (46)). Näin ollen Mackin mallissa kehityskertoimien estimaatit lasketaan samoin kuin deterministisessä Chain-ladder -menetelmässä.

Odotusarvon iteratiivisuusominaisuuden sekä Mackin mallin oletusten 1 ja 2 perusteella saadaan sattumisvuoden i kehitysvuoden $t-i+3$ kumulatiivisten korvausten ehdolliseksi odotusarvoksi

$$\begin{aligned} E(D_{i,t-i+3} \mid D) &= E(D_{i,t-i+3} \mid D_{i1}, \dots, D_{i,t-i+1}) = E(E(D_{i,t-i+3} \mid D_{i1}, \dots, D_{i,t-i+2}) \mid D_{i1}, \dots, D_{i,t-i+1}) \\ &= E(D_{i,t-i+2} \cdot d_{t-i+3} \mid D_{i1}, \dots, D_{i,t-i+1}) = E(D_{i,t-i+2} \mid D_{i1}, \dots, D_{i,t-i+1}) \cdot d_{t-i+3} \\ &= D_{i,t-i+1} \cdot d_{t-i+2} \cdot d_{t-i+3}, \end{aligned}$$

missä D sisältää kaikki korvauskolmion havainnot $D = \{D_{ik} \mid i = 1, \dots, I \text{ ja } k = 1, \dots, t-i+1\}$. Koska kehityskertoimet estimoidaan kaavalla (13), kumulatiivisten korvausten ehdollisten odotusarvojen estimaattorit ovat deterministisen Chain-ladder -menetelmän kaavan (15) mukaiset. Edellä esitetyllä tavalla voidaan myös osoittaa, että kokonaiskorvausmenon estimaattori on kaavan (16) mukainen. Näin ollen deterministisen Chain-ladder -menetelmän kaavat (12)-(18) maksetuille korvauksille ovat samat Mackin mallissa, ja Mackin mallin ja deterministisen Chain-ladder -menetelmän sattumisvuoden i korvausvastuun odotusarvon estimaatit \hat{R}_i , $i = 1, \dots, I$, ovat samat. Koko korvausvastuun estimaatti \hat{R} saadaan vastaavasti kaavasta (7).

Mackin mallin oletus 2 näkyy deterministisen Chain-ladder -menetelmän kaavoissa (12)-(13) ja (16), joissa sattumisvuoden i korvausvastuun estimoinnissa ei oteta huomioon minkäänlaista riippuvuutta sattumisvuosien välillä [10].

²⁴ ks. todistus [10] Appendix B

3.2.2.3 Ennustevirheen hajonnan estimointi

Mallin tarkkuuden ja tarvittavan varmuuslisän suuruuden arvioimiseksi on estimoitava ennustevirheiden hajonnat

$$Sd(\hat{R}_i) = \sqrt{MSE(\hat{R}_i)} \quad \text{ja} \quad Sd(\hat{R}) = \sqrt{MSE(\hat{R})}.$$

Toisin kuin alaluvussa 3.2.1 tehtiin, Mack [10] johtaa ennustevirheiden ehdolliset varianssit, joissa ehtona on arviointihetkeen mennessä havaitut korvaukset. Ehdolliset ennustevirheiden varianssit voidaan kuitenkin myös esittää prosessi- ja estimointivarianssin summana, sillä Mackin mallissa korvausvastuun estimaattorit \hat{R}_i ja \hat{R} ovat tunnettuja, kun ehtona on havaittu aineisto²⁵. Alla kaavoissa (42)-(45) on esitetty Mackin [10] johtamat ennustevirheiden ehdollisten varianssien estimaattorit, vaikkei ehdollisuutta ole laitettu näkyviin²⁶.

Ennustevirheiden varianssien estimaattorit riippuvat havaittujen kumulatiivisten korvausten lisäksi tuntemattomien parametrien d_j ja α_j^2 estimaattoreista (ks. kaavat (44) ja (45)). Kuten alaluvussa 3.2.2.2 todettiin, kehityskertoimien estimaattorit \hat{d}_j ovat kaavan (13) mukaiset. Parametrien α_j^2 , $j = 2, \dots, J-1$, harhattomat estimaattorit ovat puolestaan kehitysvuoden j kumulatiivisten korvausten painotettujen jäännösten keskiarvoja²⁷:

$$\hat{\alpha}_j^2 = \frac{1}{I-j} \sum_{i=1}^{I-j+1} \frac{(D_{ij} - D_{i,j-1} \cdot \hat{d}_j)^2}{D_{i,j-1}} = \frac{1}{I-j} \sum_{i=1}^{I-j+1} D_{i,j-1} (d_{ij} - \hat{d}_j)^2. \quad (40)$$

Jäännös tarkoittaa havaitun arvon ja estimoidun arvon erotusta. Kun $j = J$, ei parametria α_j^2 voida estimoida kaavalla (40), koska yhdestä havainnosta d_{1J} ei voida estimoida sekä kehityskerrointa d_j että parametria α_j^2 . Jos korvaukset selviävät $J-1$ vuodessa, kehityskerroin \hat{d}_j on 1 ja voidaan olettaa, että $\hat{\alpha}_j^2 = 0$ [10]. Muussa tapauksessa vähenevä sarja $\hat{\alpha}_1, \hat{\alpha}_2, \dots, \hat{\alpha}_{J-1}$ voidaan täydentää yhdellä jäsenellä esimerkiksi vaatimalla viimeisimpien kehitysvuosien parametrien olevan keskenään samassa suhteessa

$$\hat{\alpha}_{J-2} / \hat{\alpha}_{J-1} = \hat{\alpha}_{J-1} / \hat{\alpha}_J$$

ainakin silloin, kun $\hat{\alpha}_{J-2} > \hat{\alpha}_{J-1}$. Tämä johtaa estimaattiin [10]

²⁵ Tällöin esimerkiksi kaava (36) tulee muotoon $MSE(\hat{R}_i | D) = Var(R_i | D) + [E(R_i | D) - \hat{R}_i]^2$, missä D sisältää kaikki korvauskolmion havainnot kuten alaluvussa 3.2.2.2. Ehdollisessa varianssissa vain tulevien korvausten satunnaisuus vaikuttaa varianssiin.

²⁶ Kaavojen (44) ja (45) todistukset: [10] Appendix D ja F

²⁷ Kaavan (40) jakajassa summattavien termien lukumäärästä $I-j+1$ on vähennetty yksi harhan poistamiseksi. Ks. harhattomuuden todistus [10] Appendix E.

$$\hat{\alpha}_j^2 = \min(\hat{\alpha}_{j-1}^4 / \hat{\alpha}_{j-2}^2, \min(\hat{\alpha}_{j-2}^2, \hat{\alpha}_{j-1}^2)). \quad (41)$$

Taulukossa 13 on jatkettu taulukon 8 esimerkkiä laskemalla parametrien α_j^2 estimaatit kaavojen (40) ja (41) mukaisesti.

Yksittäisten kehityskertoimien d_{ij} ja kehityskertoimen \hat{d}_j erotus kaavassa (40)

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j				
	2	3	4	5	6
1	0,14285	0,01826	0,00151	0,00033	0,00060
2	0,23194	0,00148	0,00310	-0,00074	-0,00075
3	-0,18235	0,00367	0,00109	0,00024	
4	0,31868	-0,00957	-0,00453		
5	-0,10876	-0,01100			
6	-0,17467				

Yksittäisten kehityskertoimien d_{ij} ja kehityskertoimen \hat{d}_j erotuksen neliö kerrottuna kumulatiivisilla korvauksilla $D_{i,j-1}$ sekä parametrien $\hat{\alpha}_j^2$ estimointi niiden keskiarvona

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j					
	2	3	4	5	6	7
1	6 247,13	176,90	1,28	0,06	0,20	
2	12 746,32	0,94	4,29	0,25	0,25	
3	14 089,00	8,04	0,74	0,04		
4	33 285,34	57,26	13,18			
5	4 739,16	71,87				
6	14 374,64					
Yhteensä	85 481,59	315,02	19,49	0,35	0,46	
$I - j$	5	4	3	2	1	
$\hat{\alpha}_j^2$	17 096,32	78,76	6,50	0,17	0,46	0,17

Taulukko 13. Parametrien α_j^2 estimointi taulukon 5 korvauksille. Yksittäiset kehityskertoimet d_{ij} ja kehityskertoimet \hat{d}_j on laskettu taulukossa 8.

Muodostetaan seuraavaksi estimaattorit erikseen sattumisvuoden i korvausvastuun prosessi- ja estimointivarianssille. Näiden summana saadaan estimaattori sattumisvuoden i korvausvastuun ennustevirheen varianssille. Lopuksi muodostetaan estimaattori koko korvausvastuun ennustevirheen varianssille.

Mackin [10] johtama estimaattori sattumisvuoden i korvausvastuun R_i prosessivarianssille on

$$\widehat{Var}(R_i) = \widehat{D}_{ij}^2 \sum_{j=t-i+2}^J \frac{\hat{\alpha}_j^2}{\hat{d}_j^2 \cdot \widehat{D}_{i,j-1}}, \quad (42)$$

missä on merkitty $D_{i,t-i+1} = \widehat{D}_{i,t-i+1}$.

Estimointivarianssin estimaattori on puolestaan

$$\widehat{Var}(\widehat{R}_i) = \widehat{D}_{ij}^2 \sum_{j=t-i+2}^J \frac{\hat{\alpha}_j^2}{\hat{d}_j^2 \sum_{k=1}^{t-j+1} D_{k,j-1}}. \quad (43)$$

Prosessi- ja estimointivarianssin summana saadaan sattumisvuoden i korvausvastuun ennustevirheen varianssin estimaattoriksi

$$M\widehat{SE}(\widehat{R}_i) = \widehat{Var}(R_i) + \widehat{Var}(\widehat{R}_i) = \widehat{D}_{ij}^2 \sum_{j=t-i+2}^J \frac{\hat{\alpha}_j^2}{\hat{d}_j^2} \left(\frac{1}{\widehat{D}_{i,j-1}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{t-j+1} D_{k,j-1}} \right). \quad (44)$$

Ennustevirheen hajonnan estimaattori on kaavan (37) mukaisesti

$$S\widehat{d}(\widehat{R}_i) = \sqrt{M\widehat{SE}(\widehat{R}_i)}.$$

Taulukossa 14 on estimoitu sattumisvuosittaisten korvausvastuiden R_i ennustevirheiden hajonnat prosessi- ja estimointivarianssien summana. Estimoinnissa on käytetty taulukossa 8 laskettuja estimaatteja kehityskertoimille d_j ja maksettavaksi tuleville, vuoden 7 rahan arvossa oleville korvauksille D_{ij} sekä taulukossa 13 laskettuja estimaatteja parametreille α_j^2 , $j = 2, \dots, J$. Ennustevirheiden hajonnat on esitetty myös prosentteina taulukon 8 mukaisista korvausvastuiden odotusarvojen estimaateista (vuoden 7 rahan arvossa).

Sattumis- vuosi i	$\sqrt{\widehat{Var}(R_i)}$	$\sqrt{\widehat{Var}(\widehat{R}_i)}$	$S\widehat{d}(\widehat{R}_i)$	$\widehat{E}(R_i)$	$S\widehat{d}(\widehat{R}_i)/\widehat{E}(R_i)$
1					
2	279	249	374	114	328,07 %
3	627	543	830	836	99,28 %
4	718	597	934	1 440	64,86 %
5	2 111	1 177	2 417	3 146	76,83 %
6	7 626	3 812	8 526	26 403	32,29 %
7	72 863	26 466	77 521	186 489	41,57 %

Taulukko 14. Korvausvastuiden R_i , $i = 1, \dots, 7$, ennustevirheiden hajontojen estimointi. Korvausvastuun odotusarvojen estimaatit ovat taulukon 8 mukaiset.

Koko korvausvastuun R ennustevirheen varianssia laskettaessa on otettava huomioon estimaattorien \hat{R}_i , $i = 1, \dots, I$, väliset kovarianssit. Vaikka sattumisvuodet ja näin ollen korvausvastuut R_i ovat Mackin mallissa keskenään riippumattomia (ks. alaluku 3.2.2.1), estimaattorit \hat{R}_i riippuvat samoista kehityskertoimista ja näin ollen ne ovat positiivisesti korreloituneita keskenään. Mack [10] osoittaa, että koko korvausvastuun ennustevirheen varianssin estimaattori on²⁸

$$M\hat{S}E(\hat{R}) = \sum_{i=2}^I \left\{ M\hat{S}E(\hat{R}_i) + \hat{D}_{iJ} \left(\sum_{k=i+1}^I \hat{D}_{kJ} \right) \sum_{j=t-i+2}^J \frac{2\hat{\alpha}_j^2}{\hat{d}_j^2 \sum_{k=1}^{t-j+1} D_{k,j-1}} \right\}. \quad (45)$$

Taulukossa 15 on estimoitu korvausvastuun ennustevirheen varianssi ja hajonta kaavojen (45) ja (39) mukaisesti. Ennustevirheen hajonnan estimaatiksi saadaan 78 230, joka on 35,81 % taulukon 8 mukaisesta korvausvastuun odotusarvon estimaatista 218 428. Jos korvausvastuun oletetaan olevan log-normaalisti jakautunut, on korvausvastuun odotusarvo näin ollen 95 %:n todennäköisyydellä enintään 52 % pienempi tai 86 % suurempi kuin odotusarvon estimaatti 218 428 (95 %:n luottamusväli). Vastaavasti, jos korvausvastuun oletetaan olevan log-normaalisti jakautunut ja varmuuslisänä varataan ennustevirheen hajonnan estimaatin kaksinkertainen määrä 156 460, suoriudutaan maksettavaksi tulevista korvauksista 95,8 %:n todennäköisyydellä (prosenttipiste). Jos tällainen turvaavuustaso katsotaan sopivaksi, varataan yhteensä 374 888, joka vastaa korvausvastuun odotusarvon estimaattia ja varmuuslisän summaa.

Sattumis- vuosi i	$M\hat{S}E(\hat{R}_i)$	V_i	$M\hat{S}E(\hat{R}_i) + V_i$
1			
2	140 012	840 518	980 530
3	688 773	2 289 461	2 978 234
4	872 119	1 971 583	2 843 702
5	5 841 531	5 287 126	11 128 657
6	72 690 122	19 767 222	92 457 344
7	6 009 490 569	0	6 009 490 569
Yhteensä = $M\hat{S}E(\hat{R})$			6 119 879 036
$S\hat{d}(\hat{R})$			78 230
$S\hat{d}(\hat{R})/\hat{E}(R)$			35,81 %

Taulukko 15. Korvausvastuun R ennustevirheen hajonnan estimointi. V_i tarkoittaa kaavan (45) aaltosulkeiden toista termiä, jossa otetaan huomioon estimaattorien \hat{R}_i , $i = 1, \dots, 7$, väliset kovarianssit.

²⁸ ks. [10] Appendix F

3.2.2.4 Oletusten testaaminen

Stokastisten mallien hyvänä puolena on se, että niissä on tarkoin määritellyt oletukset, joita testaamalla voidaan tarkastella mallin sopivuutta käytetylle aineistolle. Jotta saadaan käsitys Mackin mallin sopivuudesta, on siis testattava mallin oletukset 1-3 (ks. alaluku 3.2.2.1). Esimerkiksi riippumattomuusoletus (oletus 2) ei ole voimassa, jos korvauskolmiossa on havaittavissa yksittäinen, muista poikkeava vuosi. Tällöin kyseinen diagonaali voidaan jättää pois kehityskerrointen laskennassa tai muokata diagonaalin havainnot niin, ettei poikkeava tilanne vaikuta kehityskertoimien estimaatteihin (ks. alaluku 3.1.1.1). Lähteissä [10] ja [21] käydään kattavasti läpi eri tapoja testata Mackin mallin sopivuutta. Seuraavaksi esitellään varianssioletuksen (oletus 3) sopivuuden tarkastelu Mackin [10] esittämällä tavalla.

Mackin mallin varianssioletuksen testaus onnistuu parhaiten vertailemalla vaihtoehtoisten varianssioletusten sopivuutta aineistoon. Tällöin testaus on niin sanottua poissulkevaa tarkastelua – jos jokin toinen varianssi sopii paremmin aineistoon, tulisi sitä käyttää Mackin mallin oletuksen 3 sijaan. Varianssioletuksen sopivuutta tarkastellaan kehityskertoimien estimaattorien ja painotettujen jäännösten avulla.

Muotoillaan aluksi varianssioletus yleisesti niin, että ehdollinen varianssi on jokin kehitysvuodesta j ja kumulatiivisista korvauksista $D_{i,j-1}$ riippuva funktio

$$\text{Var}(D_{ij} | D_{i1}, \dots, D_{i,j-1}) = a(j, D_{i,j-1}).$$

Tällöin painotetussa pienimmän neliösumman menetelmässä kehityskertoimen estimaattoriksi \hat{d}_j valitaan sellainen estimaattori, joka minimoi kumulatiivisten korvausten D_{ij} jäännösten neliöiden painotetun summan

$$\sum_i \frac{1}{a(j, D_{i,j-1})} (D_{ij} - D_{i,j-1} \cdot d_j)^2. \quad (46)$$

Mackin mallin varianssioletuksella $a(j, D_{i,j-1}) = \alpha_j^2 D_{i,j-1}$ päädytään deterministisen Chain-ladder -menetelmän kehityskertoimiin (13). Jos sen sijaan varianssin oletettaisiin olevan

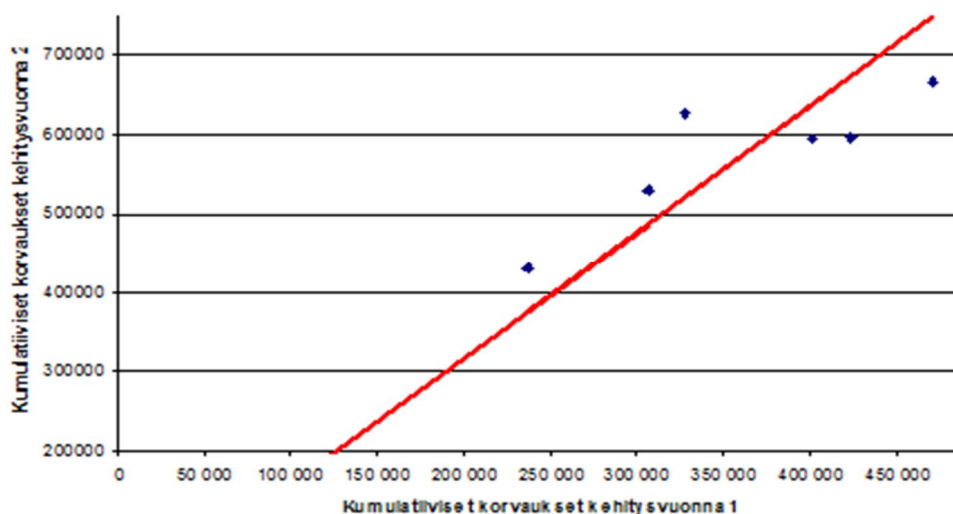
$$\text{Var}(D_{ij} | D_{i1}, \dots, D_{i,j-1}) = a(j, D_{i,j-1}) = \alpha_j^2 \cdot D_{i,j-1}^2, \quad (47)$$

summan (46) minimoivat kehityskertoimet \hat{d}_j olisivat yksittäisten kehityskertoimien aritmeettisia keskiarvoja.

Varianssioletuksen testaamiseksi tarkastellaan erikseen jokaisen kehitysvuoden j osalta, esiintyvätkö kumulatiiviset korvaukset D_{ij} satunnaisesti origon kautta kulkevan sellaisen suoran ympärillä, jossa kulmakerroin on varianssioletuksen perusteella saatu kehityskerroin \hat{d}_j . Vaaka-akselilla ovat edellisen kehitysvuoden kumulatiiviset korvaukset $D_{i,j-1}$. Kuvassa 6 a on tehty tarkastelu Mackin mallin toisen kehitysvuoden kehi-

tyskertoimelle \hat{d}_2 taulukon 8 laskelmien pohjalta. Kuvasta nähdään sekä se, miten hyvin Mackin mallin oletuksen 1 mukainen lineaarinen riippuvuus sopii tarkasteltavalle kehitysvuodelle, että se, onko kehityskerroin \hat{d}_2 sopiva estimaatti kuvaamaan tätä riippuvuutta.

Kuvan 6 a perusteella kehityskerroin \hat{d}_2 näyttäisi aliarvioivan kumulatiiviset korvaukset D_{i2} , kun ensimmäisen kehitysvuoden kumulatiiviset korvaukset ovat alle 330 000, ja yliarvioivan kumulatiiviset korvaukset D_{i2} , kun ensimmäisen kehitysvuoden kumulatiiviset korvaukset ovat yli 380 000. Kehityskerrointa \hat{d}_2 käytetään ainoastaan tuoreimman sattumisvuoden korvausten estimointiin. Koska sattumisvuoden 7 ensimmäisen kehitysvuoden kumulatiiviset korvaukset D_{71} on 285 205, saattaa kehityskertoimen \hat{d}_2 käyttö johtaa sattumisvuoden 7 korvausvastuun aliarviointiin. Kun kuvan 6 a tarkastelu tehdään usealle eri varianssioletukselle, nähdään, muuttuuko tilanne merkittävästi ja tulisiko kehitysvuoden 2 estimoinnissa käyttää jotain muuta varianssioletusta kuin Mackin mallin oletusta. Jos esimerkiksi testataan varianssioletusta (47), kuvassa 6 a suoran kulmakerroin \hat{d}_2 on yksittäisten kehityskertoimien aritmeettinen keskiarvo. Toisaalta, varmuuslisällä voidaan varautua aliarvioinnin realisoitumiseen, jos mallien välillä ei ole merkittävää eroa.

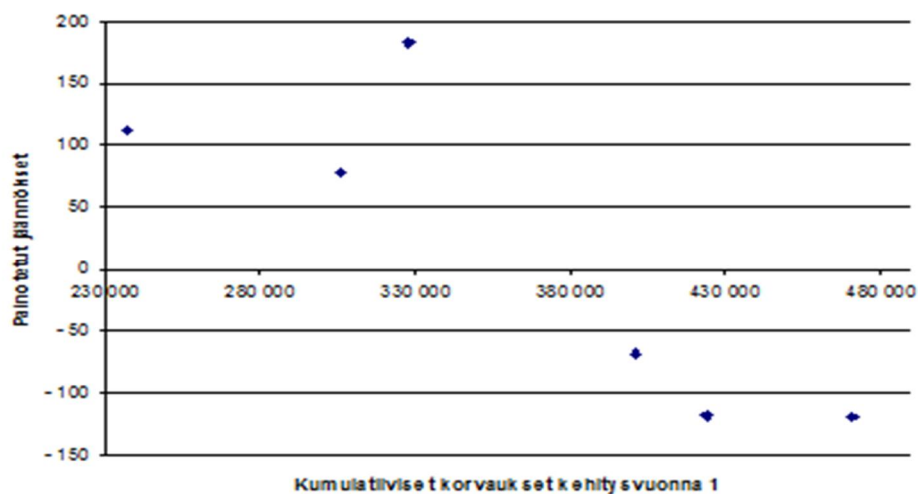


Kuva 6 a. Oletuksen 1 ja 3 tarkastelu kehitysvuodelle 2. Suora kulkee origon kautta ja sen kulmakerroin on $\hat{d}_2 = 1,59092$. Pisteet ovat taulukon 8 kumulatiivisia korvauksia D_{i2} , $i = 1, \dots, 6$, kun vaaka-akselilla on saman sattumisvuoden kumulatiiviset korvaukset ensimmäisenä kehitysvuonna.

Kumulatiivisten korvausten lisäksi tarkastellaan erikseen jokaiselle kehitysvuodelle j , $j = 2, \dots, J$, mallin tuottamia kumulatiivisten korvausten painotettuja jäännöksiä, joiden neliöiden summaa minimoidaan kaavassa (46). Mackin mallissa tarkastellaan näin ollen jäännöksiä

$$r_{ij}^{CL} = \frac{D_{ij} - D_{i,j-1} \cdot \hat{d}_j}{\sqrt{D_{i,j-1}}}, \quad i = 1, \dots, t - j + 1. \quad (48)$$

Kuvassa 6 b on taulukon 8 tiedoilla lasketut jäännökset (48) kehitysvuodesta 2 siten, että vaaka-akselilla on kumulatiiviset korvaukset kehitysvuonna 1. Jos painotetut jäännökset eivät osoita erityistä trendiä vaan esiintyvät kuvassa satunnaisesti, on tehty varianssioletus voimassa.²⁹



Kuva 6 b. Kaavan (48) mukaisesti lasketut painotetut jäännökset kehitysvuodelle 2.

Kuvan 6 b jäännökset eivät näyttäisi esiintyvän erityisen satunnaisesti, mikä vahvistaa kuvasta 6 a tehtyä havaintoa, ettei Mackin malli välttämättä sovi kehitysvuodelle 2. Muita varianssioletuksia testattaessa kuva 6 b muodostetaan valitun varianssioletuksen mukaisesti lasketuille painotetuille jäännöksille ja tarkastellaan, sopiiko malli kehitysvuoden aineistolle paremmin kuin Mackin malli. Jos esimerkiksi testataan kaavan (47) mukaista varianssioletusta, jäännökset (48) on painotettu kumulatiivisilla korvauksilla $D_{i,j-1}$ näiden neliöjuurien sijaan ja kehityskertoimena \hat{d}_j käytetään yksittäisten kehityskertoimien aritmeettista keskiarvoa. Jos kuvassa havainnot esiintyvät satunnaisesti, tarkoittaa se, että varianssi (47) sopii paremmin kehitysvuoden 2 aineistolle ja sen mukaista mallia tulisi käyttää kehityskertoimen d_2 estimointiin.

²⁹ Vrt. alaluvun 4.2 kuviin 9 a ja 9 b, jossa on testattu Poisson-mallin ylihajonnalla sopivuutta aineistoon mukautettujen jäännösten (64) avulla. Erona nyt esitettyyn on muun muassa se, että kyseisessä mallissa tarkastellaan kumulatiivisten korvausten sijaan inkrementaalisia korvauksia ja lisäksi jäännösten laskennassa estimaatit on laskettu rekursiolla (ks. bootstrap-/simulointimenetelmän 3. välivaihe alaluvussa 4.1 ja vrt. estimaattiin $D_{i,j-1} \cdot \hat{d}_j$ kaavassa (48)).

3.2.3 Bornhuetter-Ferguson -menetelmä stokastisena mallina

3.2.3.1 Oletukset

Mack [12] muotoilee Bornhuetter-Ferguson -menetelmän taustalla olevan stokastisen mallin oletukset inkrementaalisisille korvauksille C_{ij} seuraavasti

- 1) Inkrementaalisten korvausten odotusarvo esitetään sattumis- ja kehitysvuoteen liittyvien parametrien tulona

$$E(C_{ij}) = E(U_i)f(j).$$

Kehitysvuoteen liittyvät parametrit muodostavat selviämisyajakauman ja niiltä vaaditaan

$$\sum_{j=1}^J f(j) = 1.$$

- 2) Inkrementaaliset korvaukset C_{ij} ovat keskenään riippumattomia kaikilla sattumisvuosilla i ja kehitysvuosilla j .

- 3) Inkrementaalisten korvausten varianssi on

$$Var(C_{ij}) = E(U_i)a_j^2.$$

Oletus 2 tarkoittaa sitä, etteivät sattumisvuodesta i kehitysvuonna j maksetut korvaukset vaikuta minkään muun kehitysvuoden tai sattumisvuoden inkrementaalisten korvausten määrään. Eri sattumisvuosien välinen korvausten riippumattomuus oletetaan myös Mackin mallissa, mutta sen lisäksi Mackin [12] stokastisessa Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä saman sattumisvuoden havaitut ja tulevat korvaukset eivät riipu toisistaan³⁰. Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä riippumattomuusoletus on kuitenkin voimassa, sillä sattumisvuoden i korvausvastuu (50) ei riipu havaituista korvauksista.

Varianssioletuksen (oletus 3) taustalla on yleinen tapa esittää volyymin vaikutus varianssiin; varianssin tulisi olla suhteessa volyymiin. Koska kokonaiskorvausmenon odotusarvon $E(U_i)$ voidaan ajatella kuvaavan tässä tarkoituksessa sattumisvuoden i volyyymia, tulisi siis kokonaiskorvausmenon varianssin olla suhteessa tähän odotusarvoon. Tehdyn varianssioletuksen ja riippumattomuusoletuksen (oletus 2) perusteella vaatimus täyttyy, sillä

³⁰ Oletus voi vaikuttaa rajoittavalta verrattuna Mackin mallin vastaavaan oletukseen (ks. alaluku 3.2.2.1 oletus 2). Kuitenkin usein sama tekijä aiheuttaa sekä sen, ettei Bornhuetter-Ferguson -menetelmän oletus 2 ole enää voimassa, että sen, etteivät Mackin mallin sattumisvuoden i peräkkäisten kehitysvuosien yksittäiset kehityskertoimet ole korreloimattomia. Tällainen tekijä voisi olla esimerkiksi vahinkojen käsitteilyssä tapahtunut muutos. Mackin mallissa sattumisvuoden i peräkkäisten yksittäisten kehityskertoimien korreloimattomuus seuraa mallin oletuksesta 1 (ks. alaluku 3.2.2.1). [10], [12]

$$\text{Var}(U_i) = \text{Var}\left(\sum_{j=1}^J C_{ij}\right) = \sum_{j=1}^J \text{Var}(C_{ij}) = E(U_i) \sum_{j=1}^J a_j^2. \quad (49)$$

3.2.3.2 Korvausvastuun odotusarvon estimointi

Mackin [12] stokastisessa Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä sattumisvuoden i korvausvastuun odotusarvoksi saadaan

$$E(R_i) = E\left(\sum_{j=t-i+2}^J C_{ij}\right) = \sum_{j=t-i+2}^J E(U_i) f(j) = E(U_i)(1 - F(t - i + 1)), \quad (50)$$

$$\text{missä } F(j) = \sum_{k=1}^j f(k).$$

Kun kokonaiskorvausmenojen odotusarvot tunnetaan, ovat selviämisyajakauman osuuksien $f(j)$, $j = 1, \dots, J$, harhattomat, pienimmän varianssin tuottavat estimaattorit [12]

$$\hat{f}(j) = \frac{\sum_{i=1}^{t-j+1} C_{ij}}{\sum_{i=1}^{t-j+1} E(U_i)}.$$

Koska kokonaiskorvausmenojen odotusarvot ovat tuntemattomia, käytetään niiden estimaatteina a priori kokonaiskorvausmenoja \hat{U}_i . Näin ollen selviämisyajakauman osuudet $f(j)$ estimoidaan samoin kuin deterministisessä Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä lähtien kaavasta (27). Tällöin sattumisvuoden i korvausvastuun odotusarvon (50) estimaatti on sama kuin deterministisen Bornhuetter-Ferguson -menetelmän korvausvastuun estimaatti (21). Vastaavasti inkrementaalisten korvausten estimaatit ovat kaavan (24) mukaiset. Vaikka havaitut korvaukset vaikuttavat selviämisyajakauman estimaatteihin, jää niiden vaikutus vähäiseksi oletuksen 1 summarajoituksen ja osuuksien $\tilde{f}(j)$ muokkaamisen takia.

Kaavasta (50) käy hyvin ilmi se, että Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä kokonaiskorvausmenon estimaatin \hat{U}_i on tarkoitus olla estimaatti kokonaiskorvausmenon odotusarvolle $E(U_i)$ (a priori) eikä ehdolliselle odotusarvolle $E(U_i | D_{i,t-i+1})$ (a posteriori). Tämän vuoksi estimaatteja \hat{U}_i ei pitäisi muuttaa havaittujen korvausten perusteella, mikäli nämä sopivat alun perin oletettuun satunnaisuuteen.

3.2.3.3 * Ennustevirheen hajonnan estimointi

Kuten Mackin mallissa, ennustevirheen hajonnan estimoimiseksi tarvitaan estimaatit varianssin tuntemattomille parametreille a_j^2 . Jos kokonaiskorvausmenojen odotusarvot

tunnetaan, on parametrin a_j^2 , $j = 1, \dots, J-1$, harhaton estimaattori mallin mukaisten jäännösten painotettu keskiarvo

$$\hat{a}_j^2 = \frac{1}{I-j} \sum_{i=1}^{I-j+1} \frac{(C_{ij} - E(U_i)\hat{f}(j))^2}{E(U_i)}.$$

Näin ollen, kun kokonaiskorvausmenojen odotusarvojen estimaatteina käytetään a priori kokonaiskorvausmenoja \hat{U}_i , saadaan parametrien a_j^2 estimaattoreiksi (vrt. kaava (40))

$$\hat{a}_j^2 = \frac{1}{I-j} \sum_{i=1}^{I-j+1} \frac{(C_{ij} - \hat{U}_i \hat{f}(j))^2}{\hat{U}_i}. \quad (51)$$

Kuten Mackin mallissa parametria a_j^2 ei voida estimoida kaavalla (51), koska kyseisestä kehitysvuodesta on korvauskolmiossa vain yksi havainto C_{1j} , josta pitäisi estimoida sekä parametri $f(J)$ että parametri a_j^2 . Estimaatti \hat{a}_j^2 saadaan esimerkiksi ekstrapoloimalla³¹. Myös kaavalla (51) laskettuja estimaatteja \hat{a}_j^2 kehitysvuosille $1, \dots, J-1$ voidaan tarvittaessa tasoittaa käyttämällä käyrään sovitettuja arvoja.³²

Ennustevirheen hajonnan estimoimiseksi ennustevirheen varianssi jaetaan alaluvun 3.2.1 mukaisesti prosessivarianssiin ja estimointivarianssiin. Alla esitellään lyhyesti Mackin [12] näille johtamat estimaattorit. Aluksi käsitellään sattumisvuoden i korvausvastuun ennustevirheen hajontaa ja tämän jälkeen koko korvausvastuun ennustevirheen hajontaa.

Sattumisvuoden i korvausvastuun R_i prosessivarianssin estimaattoriksi saadaan ole-
tusten 2 ja 3 (ks. alaluku 3.2.3.1) perusteella

$$\hat{V}ar(R_i) = \sum_{j=t-i+2}^J \hat{V}ar(C_{ij}) = \hat{U}_i \sum_{j=t-i+2}^J \hat{a}_j^2. \quad (52)$$

Koska sattumisvuoden i korvausvastuun estimaattori \hat{R}_i on kahden riippumattoman satunnaismuuttujan tulo (ks. kaava (21)), estimointivarianssin estimaattoriksi saadaan

$$\hat{V}ar(\hat{R}_i) = (\hat{U}_i^2 + \hat{V}ar(\hat{U}_i)) \hat{V}ar(\hat{F}(t-i+1)) + \hat{V}ar(\hat{U}_i) (1 - \hat{F}(t-i+1))^2, \quad (53)$$

³¹ Kaavalla (51) lasketut estimaatit \hat{a}_j^2 kehitysvuosille $1, \dots, J-1$ sovitetaan sopivaan käyrään ja parametrin a_j^2 estimaattina käytetään sovitetun käyrän arvoa kohdassa J .

³² Mack [12] esittää myös formaalimman tavan estimoida parametrit $f(j)$ ja a_j^2 ottaen lisäksi huomioon kehitysvuosien ekstrapoloinnin useammalle kuin J kehitysvuodelle.

missä kokonaiskorvausmenon estimaattorin \hat{U}_i ja selviämiskauden estimaattorin $\hat{F}(t-i+1)$ varianssit lasketaan alla olevan taulukon kaavoilla (54)-(55b).

Sattumisvuoden i korvausvastuun ennustevirheen varianssin estimaattori $M\hat{S}E(\hat{R}_i)$ saadaan prosessivarianssin ja estimointivarianssin estimaattorien (52) ja (53) summana kaavan (36) mukaisesti. Ennustevirheen hajonnan estimaattori $S\hat{d}(\hat{R}_i)$ saadaan kaavasta (37) käyttämällä ennustevirheen varianssin tilalla tämän estimaattoria $M\hat{S}E(\hat{R}_i)$.

Koko korvausvastuun R prosessivarianssin estimaattori on sattumisvuosien riippumattomuuden nojalla sattumisvuosittaisten prosessivarianssien estimaattorien (52) summa

$$V\hat{a}r(R) = \sum_{i=1}^I \hat{U}_i (\hat{a}_{t-i+2}^2 + \dots + \hat{a}_j^2) = \sum_{i=1}^I V\hat{a}r(R_i). \quad (56)$$

Korvausvastuun R estimointivarianssin laskemisessa on sen sijaan otettava huomioon positiivinen korrelaatio estimaattorien $\hat{R}_1, \dots, \hat{R}_I$ välillä. Korrelaatio johtuu yhteisistä selviämiskauden osuuksien $f(j)$ estimaattoreista $\hat{f}(j)$. Estimointivarianssin estimaattori on näin ollen muotoa

$$V\hat{a}r(\hat{R}) = \sum_{i=1}^I V\hat{a}r(\hat{R}_i) + 2 \sum_{i < k} C\hat{o}v(\hat{R}_i, \hat{R}_k), \quad (57)$$

missä sattumisvuosittaisten estimointivarianssien estimaattorit $V\hat{a}r(\hat{R}_i)$ ovat kaavan (53) mukaiset ja kovarianssit voidaan estimoida alla olevan taulukon kaavoilla (58a)-(58c).

Summaamalla prosessi- ja estimointivarianssien estimaattorit (56) ja (57) saadaan koko korvausvastuun R ennustevirheen varianssin estimaattori $M\hat{S}E(\hat{R})$ ja sen neliöjuurena ennustevirheen hajonnan estimaatti $S\hat{d}(\hat{R})$.

Ennustevirheen hajonnan estimoinnissa tarvittavia kaavoja [12]	
<p>Oletetaan, että a priori kokonaiskorvausmeno on arvioitu vahinkosuhteen ja vakuutusmaksutuoton tulona kaavan (22) mukaisesti. Tällöin paras tapa estimoida kokonaiskorvausmenon estimaattorin varianssi olisi hinnoitella sattumisvuodet uudelleen käyttäen hyväksi kertynyttä tietoa korvauksista ja katsoa, kuinka paljon estimaatit \hat{U}_i vaihtelevat. Toisaalta voidaan arvioida</p> $V\hat{a}r(\hat{U}_i) = \frac{P_i}{I-z} \sum_{k=1}^I P_k \left(\frac{\hat{U}_k}{P_k} - \hat{q} \right)^2,$ <p>missä $\hat{q} = \frac{\sum_{i=1}^I \hat{U}_i}{\sum_{i=1}^I P_i}$ ja parametrin z arvo riippuu peräkkäisten vuosien korre-</p>	(54)

<p>laatorakenteista (ks. [12] kaavan (5) selostus, vrt. parametrien a_j^2 estimaattoriin (51)). Jos korrelaatiota ei ole, $z = 1$. Vakuutusmaksutuottoina P_i tulisi käyttää vakuutusmaksutuottoja, joista on eliminoitu markkinasykliin vaikutus.</p>	
<p>Koska estimaattorit $\hat{f}(j)$ ovat oletuksen 1 summarajoituksen (ks. alaluku 3.2.3.1) takia pareittain negatiivisesti korreloituneita, voidaan $Var(\hat{F}(t-i+1))$ estimoida turvaavasti summana</p> $Var(\hat{f}(1)) + \dots + Var(\hat{f}(t-i+1)). \quad (55a1)$ <p>Kuitenkin, sattumisvuoden selvityksessä (ts. kun $t \rightarrow i+J-1$) $Var(\hat{F}(t-i+1)) \rightarrow 0$, sillä $\hat{F}(J) = 1$. Sen sijaan summa (55a1) kasvaa jokaisesta lisätermistä. Tämän vuoksi, ja koska lisäksi $Var(\hat{F}(t-i+1)) = Var(1 - \hat{F}(t-i+1))$, käytetään pitkälle selvinneiden sattumisvuosien estimaattina summan (55a1) sijaan summaa</p> $Var(\hat{f}(t-i+2)) + \dots + Var(\hat{f}(J)). \quad (55a2)$ <p>Edellä esitetty päättely voidaan yhdistää siten, että estimaatti $Var(\hat{F}(t-i+1))$ korvataan estimaatilla</p> $\min(Var(\hat{f}(1)) + \dots + Var(\hat{f}(t-i+1)), Var(\hat{f}(t-i+2)) + \dots + Var(\hat{f}(J))) \quad (55a)$ $= \min(\text{summa}(55a1), \text{summa}(55a2)),$ <p>missä $Var(\hat{f}(j))$ lasketaan alla esitetyllä kaavalla (55b). Kaavalla (55a) saadun estimaatin järjestyks on varmistettava vertaamalla sitä estimoinnin aikana syntyneisiin käsityksiin hajonnan suuruudesta.</p>	
<p>Kaavan (27) sekä oletusten 2 ja 3 (ks. alaluku 3.2.3.1) perusteella</p> $Var(\hat{f}(j)) \approx \frac{\hat{a}_j^2}{\sum_{k=1}^{t-j+1} \hat{U}_k} \quad (55b)$	
<p>Koska satunnaismuuttujat $\{\hat{U}_i, \hat{U}_k\}$ ovat riippumattomia satunnaismuuttujista $\{(1 - \hat{F}(t-i+1)), (1 - \hat{F}(t-k+1))\}$, saadaan</p> $Cov(\hat{R}_i, \hat{R}_k) = Cov(\hat{U}_i(1 - \hat{F}(t-i+1)), \hat{U}_k(1 - \hat{F}(t-k+1))) \quad (58a)$ $\approx \hat{\rho}_{ik}^U \sqrt{Var(\hat{U}_i)} \sqrt{Var(\hat{U}_k)} (1 - \hat{F}(t-i+1))(1 - \hat{F}(t-k+1))$ $+ \hat{\rho}_{ik}^F \sqrt{Var(\hat{F}(t-i+1))} \sqrt{Var(\hat{F}(t-k+1))} \hat{U}_i \hat{U}_k.$ <p>Kovarianssin estimoimiseksi on estimoitava kokonaiskorvausmenojen välinen kovarianssi ρ_{ik}^U (ks. kohta (58b)) ja selviämisjakaumien välinen korrelaatiokerroin ρ_{ik}^F (ks. kaava (58c)). Muut estimaatit on esitetty aiemmissa kaavoissa.</p>	
<p>Kokonaiskorvausmenojen U_i ja U_k välisen korrelaatiokerroimen</p>	(58b)

$\rho_{ik}^U = \frac{\text{Cov}(\hat{U}_i, \hat{U}_k)}{\sqrt{\text{Var}(\hat{U}_i)\text{Var}(\hat{U}_k)}}$ <p>estimaattina voidaan käyttää vakiokorrelaatiokerrointa $\hat{\rho}_{ik}^U = 1/\sqrt{I}$ tai vähenevää korrelaatiokerrointa $\hat{\rho}_{ik}^U = 1/(1 + i - k)$, jos estimaatteja ei saada laskettua esimerkiksi uudelleenhinnoittelun kautta.</p>	
<p>Selviämisyksikköön liittyvä korrelaatiokerroin</p> $\rho_{ik}^F = \frac{\text{Cov}(1 - \hat{F}(t - i + 1), 1 - \hat{F}(t - k + 1))}{\sqrt{\text{Var}(\hat{F}(t - i + 1))\text{Var}(\hat{F}(t - k + 1))}}$ <p>voidaan arvioida kaavalla</p> $\hat{\rho}_{ik}^F = \sqrt{\frac{\hat{F}(t - k + 1)(1 - \hat{F}(t - i + 1))}{\hat{F}(t - i + 1)(1 - \hat{F}(t - k + 1))}}, \text{ kaikille } i < k \text{ ja } \hat{F}(1) \leq \dots \leq \hat{F}(J),$ <p>jos aineistoon perustuvia estimaatteja ei ole mahdollista saada. Arvio perustuu oletukseen, että estimaattorit $\hat{f}(j)$ ovat Dirichlet-jakautuneita.</p>	(58c)

3.2.3.4 Stokastisten mallien vertailua

Verrattuna Mackin malliin Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä tarvitaan selviämisyksikköön estimaatin lisäksi a priori kokonaiskorvausmenot \hat{U}_i , $i = 1, \dots, I$. Koska a priori kokonaiskorvausmenot muodostetaan käyttäen hyväksi korvauskolmion ulkopuolista tietämystä, on niihin liittyvä epävarmuuskin arvioitava korvauskolmion ulkopuolelta. Epävarmuudesta saadaan jokin käsitys arvioinnissa käytettyjen taustatietojen, oletusten ja estimaatin valintamenetelmän perusteella. Kaavalla (54) laskettua varianssia on verrattava näihin käsityksiin, jotta varmistetaan sattumisvuoden i korvausvastuun estimointivarianssin estimaatin (53) oikeasta tasosta³³. Näin ollen sekä a priori kokonaiskorvausmenot \hat{U}_i että ennustevirheen hajonnan estimaatit riippuvat vahvasti subjektiivisesta arvioinnista. [12]

Se, että Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä joudutaan arvioimaan useampi parametri käyttäen enemmän subjektiivista arviointia kuin Mackin mallissa, on toisaalta myös menetelmän hyvä puoli. Koska menetelmässä hyödynnetään laajemmin korvauskolmion ulkopuolista tietämystä ja koska ennustevirheen hajonnan estimoinnissa joudutaan arvioimaan a priori kokonaiskorvausmenon estimointiin liittyvä epävarmuus, seurauksena on yleensä pienempi ennustevirheen hajonnan estimaatti kuin Mackin mallissa. Tämä pätee lähinnä tuoreille sattumisvuosille vakuutuslajeissa, joissa vahinkojen selviäminen ensimmäisten kehitysvuosien aikana on vaihtelevaa [12]. Intuitiivinen selitys pienemmälle ennustevirheen hajonnan estimaatille on seuraava. Jos taustalla oleva korvausten selviäminen noudattaa Bornhuetter-Ferguson -menetelmän oletuksen 1 (ks.

³³ Esimerkiksi jos kokonaiskorvausmenon oletetaan olevan normaalijakautunut, kokonaiskorvausmenon odotusarvon tulisi sisältyä 95 %:n todennäköisyydellä väliin [12]

$$\left(\hat{U}_i - 2 \cdot \sqrt{\hat{\text{Var}}(\hat{U}_i)}, \hat{U}_i + 2 \cdot \sqrt{\hat{\text{Var}}(\hat{U}_i)} \right).$$

alaluku 3.2.3.1) mukaista selviämistä, sisältyy havaittuihin korvauksiin odotetun kehityksen lisäksi satunnainen osa, joka ei vaikuta tulevien korvausten kehitykseen. Jos tällaiseen aineistoon sovelletaan Mackin mallia, kerrotaan myös tämä satunnainen osa kehityskertoimilla korvausvastuuta estimoitaessa, mikä kasvattaa estimointivarianssia [21].

Valittaessa eri menetelmillä lasketuista korvausvastuun estimaateista parasta estimaattia (ks. alaluku 3.1.4) voidaan nyt ottaa huomioon sekä eri mallien oletusten sopivuus mallinnettavalle ilmiölle että ennustevirheen hajonnan estimaatin suuruus. Mitä pienempi mallin ennustevirheen hajonnan estimaatti on, sitä lähempänä realisoituvien korvausten oletetaan keskimäärin olevan mallilla estimoituja odotusarvojaan ja sitä ”parempi” malli on kyseessä. Itse asiassa Hovisen menetelmä on tässä mielessä usein parempi kuin Chain-ladder tai Bornhuetter-Ferguson -menetelmät yksinään. Tämä pätee silloin, kun vahinkojen selviäminen ei vaihtelee merkittävästi vuodesta toiseen, jolloin tulisi kyseeseen pelkästään Bornhuetter-Ferguson -menetelmä, eikä selviäminen ole toisaalta liian vakaata, jolloin Chain-ladder -menetelmä sopii aineistoon parhaiten. Hovisen menetelmän paremmuus perustuu siihen, että riippumattomien ja harhattomien estimaattorien lineaarisen kombinaation (ks. kaava (31)) varianssi on pienempi kuin kummankaan estimaattorin varianssit yksinään³⁴. [11]

3.2.4 Poisson-malli ylihajonnalla

Mackin mallin lisäksi on olemassa muita stokastisia malleja, jotka tuottavat saman korvausvastuun estimaatin kuin deterministinen Chain-ladder -menetelmä. Renshaw & Verrall [17] ja England & Verrall [6], [7] esittelevät erään tällaisen mallin, jossa voidaan ennustevirheen hajonnan estimaatin lisäksi muodostaa arvio koko ennustejakaumasta ilman analyttistä laskentaa bootstrap-/simulointimenetelmällä. Malli perustuu Poisson-jakauman odotusarvoon ja varianssiin sallien kuitenkin varianssin ylihajonnan. Mallia kutsutaan työssä Poisson-malliksi ylihajonnalla (over-dispersed Poisson model). Tässä alaluvussa esitellään malli ja luvussa 4 kuvataan ennustejakauman muodostaminen bootstrap-/simulointimenetelmällä.

Poisson-mallissa ylihajonnalla ideana on mallintaa inkrementaalisten korvausten C_{ij} odotusarvo [16], joka yhdistetään mallin parametreihin linkkifunktion avulla. Mallin oletukset ovat

- 1) Inkrementaaliset korvaukset C_{ij} ovat keskenään riippumattomia.
- 2) Inkrementaalisten korvausten odotusarvo ja varianssi ovat

$$E(C_{ij}) = m_{ij} \quad \text{ja} \quad \text{Var}(C_{ij}) = \phi m_{ij}.$$

Parametria ϕ kutsutaan hajontaparametriksi.

³⁴ Tällöin oletetaan, ettei Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä käytettävää a priori kokonaiskorvausmenoa muuteta havaittujen korvausten perusteella – jos tällaisia muutoksia tehdään, ei menetelmä ole enää riippumaton Chain-ladder -menetelmästä.

- 3) Inkrementaalisten korvausten odotusarvo yhdistetään mallin parametrien summaan logaritmissen linkkifunktion avulla:

$$\log(E(C_{ij})) = \mu + \eta_i + \beta_j.$$

Poisson-jakaumasta poiketen inkrementaalisten korvausten varianssi ei siis ole suoraan odotusarvo vaan odotusarvo kerrottuna tuntemattomalla hajontaparametrilla ϕ . Ylihajonnalla tarkoittaankin juuri sitä, ettei varianssin tarvitse olla yhtä suuri kuin odotusarvo, minkä vuoksi malli sopii paremmin kuvaamaan todellisia ilmiöitä kuin perinteinen Poisson-malli ilman ylihajontaa [8].

Sovittamalla malli maksettujen korvausten korvauskolmioon saadaan mallin parametreille μ , η_i , $i = 1, \dots, I$, ja β_j , $j = 1, \dots, J$, estimaatit³⁵. Parametrien estimaattien ja linkkifunktion avulla saadaan inkrementaalisten korvausten odotusarvojen estimaatit

$$\hat{m}_{ij} = e^{\hat{\mu} + \hat{\eta}_i + \hat{\beta}_j}. \quad (59)$$

Summaamalla tuleviin kehitysvuosiin liittyvät estimaatit saadaan korvausvastuun odotusarvoille estimaatit

$$\hat{E}(R_i) = \sum_{j=t-i+2}^J \hat{m}_{ij} \quad \text{ja} \quad \hat{E}(R) = \sum_{i=1}^I \hat{E}(R_i). \quad (60)$$

Mallin ylihajonta ei vaikuta mallin parametrien eikä siis inkrementaalisten korvausten odotusarvojen estimaatteihin, vaan lisää korvausten hajontaa [7]. Toisin sanoen, ylihajonta lisää prosessivirheen suuruutta. Ennustevirheen hajonnan estimoimiseksi on näin ollen estimoitava myös tuntematon hajontaparametri ϕ korvauskolmiosta. England & Verrall [7] käyttävät estimaattina Pearsonin hajontaparametria

$$\hat{\phi} = \frac{1}{N-p} \sum_{i=1}^I \sum_{j=1}^{t-i+1} \left(\frac{C_{ij} - \hat{m}_{ij}}{\sqrt{\hat{m}_{ij}}} \right)^2, \quad (61)$$

missä N on havaintojen lukumäärä ja p estimoitavien parametrien lukumäärä.

Mallin parametrien estimoimiseksi ja mallin sopivuuden arvioimiseksi on olemassa tietokoneohjelmia kuten SAS ja R, minkä vuoksi mallin soveltaminen on helppoa. Lisäksi Renshaw [16] johtaa mallin ennustevirheen hajonnan estimaattorin analyttisesti, mutta luvussa 4 esitellyllä bootstrap-/simulointimenetelmällä estimointi voidaan tehdä helpommin ja samalla muodostetaan arvio koko ennustejakaumasta.

³⁵ Parametreille lasketaan kvasiuskottavuusestimaatit, minkä vuoksi odotusarvon ja varianssin lisäksi inkrementaalisisille korvauksille ei tarvitse määritellä varsinaista jakaumaa. Kvasiuskottavuusestimaateilla päästään eroon Poisson-jakaumaan liittyvästä vaatimuksesta, että korvausten on oltava positiivisia kokonaislukuja. Ks. mm. [5] ja [16].

Jotta mallin tuottamat inkrementaalisten korvausten estimaatit (59) ovat samat kuin Chain-ladder -menetelmässä, on kumulatiivisten korvausten oltava arviointivuoden t lopussa positiivisia

$$D_{i,t-i+1} > 0 \text{ kaikilla } i = 1, \dots, I. \quad (62)$$

Lisäksi samasta kehitysvuodesta havaittujen inkrementaalisten korvausten summan on oltava positiivinen

$$\sum_{i=1}^{t-j+1} C_{ij} > 0 \text{ kaikilla } j = 1, \dots, J. \quad (63)$$

Vaikka Poisson-mallia ylihajonnalla ei voida varsinaisesti sanoa stokastiseksi Chain-ladder -menetelmäksi muun muassa erilaisten oletusten takia, on mallilla ja Chain-ladder -menetelmällä paljon yhteistä³⁶. Esimerkiksi inkrementaalisten korvausten odotusarvo on mallissa Chain-ladder -tyyppinen siinä mielessä, että jokaiselle sattumisvuodelle i ja kehitysvuodelle j on oma parametrinsa [6]. Näin ollen sekä sattumisvuosi että kehitysvuosi vaikuttavat inkrementaalisten korvausten odotusarvoon³⁷. Kehitysvuoden parametrien β_j avulla voidaan kuvata vahinkojen selviämistä, jonka oletetaan Chain-ladder -menetelmän tapaan olevan sama kaikille sattumisvuosille.

Poisson-jakaumaa ja siihen perustuvia malleja on totuttu käyttämään lähinnä vahinkojen lukumäärien mallintamisessa. Kuitenkin Poisson-malli ylihajonnalla sopii myös maksetuille korvauksille, sillä malli sallii yksittäisten korvauskolmion solujen arvojen olla negatiivisia, kunhan ehdot (62) ja (63) täyttyvät. Poisson-malli ylihajonnalla ei sen sijaan sovi useimmille korvausmenokolmioille. Yleensä nimittäin vahinkokohtaiset varaukset ovat ensimmäisissä kehitysvaiheissa ylivaraavia, mikä johtaa negatiiviseen korvausmenon kehitykseen myöhemmissä kehitysvaiheissa. Kuten kaavasta (59) nähdään, malli sen sijaan tuottaa aina positiiviset estimaatit inkrementaalisten korvausten odotusarvoille. [5]

3.2.5 Mackin malli yleistettynä lineaarisena mallina

England & Verrall [7] esittävät Mackin mallin oletukset (ks. alaluku 3.2.2.1) kumulatiivisten korvausten sijaan oletuksina yksittäisille kehityskertoimille, ja muotoilevat mallin yleistettynä lineaarisena mallina. Tällöin päästään hyödyntämään bootstrap-/simulointimenetelmää myös Mackin mallissa ja voidaan tuottaa arvio koko ennustejakautumasta. Mallin oletukset ovat [7]

- 1) Yksittäiset kehityskertoimet d_{ij} ovat keskenään ehdollisesti riippumattomia, kun ehtona on saman sattumisvuoden aiempien kehitysvuosien kumulatiiviset korvaukset $D_{i1}, \dots, D_{i,j-1}$.

³⁶ Esimerkiksi lähteessä [13] vertaillaan Mackin mallin, Poisson-mallin ylihajonnalla ja deterministisen Chain-ladder -menetelmän eroja.

³⁷ Chain-ladder -menetelmässä korvausten estimaatti riippuu kehitysvuodesta kehityskertoimen välityksellä ja sattumisvuodesta arviointihetkellä havaittujen kumulatiivisten korvausten kautta.

- 2) Yksittäisten kehityskertoimien d_{ij} oletetaan noudattavan normaalijakaumaa siten, että

$$E(d_{ij} | D_{i1}, \dots, D_{i,j-1}) = d_j \quad \text{ja} \quad \text{Var}(d_{ij} | D_{i1}, \dots, D_{i,j-1}) = \alpha_j^2 / D_{i,j-1}.$$

- 3) Yksittäisten kehityskertoimien odotusarvot liitetään yleistetyyn lineaariseen mallin parametreihin γ_j , $j = 2, \dots, J$, logaritmisella linkkifunktiolla

$$\log(d_j) = \gamma_j.$$

Laskemalla parametreille γ_j suurimman uskottavuuden estimaattorit saadaan estimaattorit kehityskertoimille d_j

$$\hat{E}(d_{ij} | D_1, \dots, D_{i,j-1}) = \hat{d}_j = e^{\hat{\gamma}_j}.$$

Estimaattorit vastaavat Chain-ladder -menetelmän mukaisia kehityskertoimia (13) maksettujen korvausten korvauskolmiolle. Koska

$$\hat{E}(d_{ij} | D_1, \dots, D_{i,j-1}) = \hat{E}(D_{ij} | D_1, \dots, D_{i,j-1}) / D_{i,j-1} = \hat{d}_j,$$

on kumulatiivisten korvausten odotusarvojen ja näin ollen myös korvausvastuun odotusarvon estimaatit samat kuin deterministisessä Chain-ladder -menetelmässä. Nyt esimerkiksi Mackin [10] analyttisesti ja ilman jakaumaoletusta johtama ennustevirheen varianssin estimaattori (45) seuraa yleistettyjen lineaaristen mallien teoriasta.

Luvussa 4 esitellään bootstrap-/simulointimenetelmä, kun korvausten oletetaan noudattavan Poisson-mallia ylihajonnalla. Mackin malli eroaa luvussa 4 esitetystä siten, että bootstrap-vaiheessa tarvittavat jäännökset lasketaan yksittäisille kehityskertoimille inkrementaalisten korvausten sijaan (vrt. kaavat (64)-(65)). Otannalla (takaisinpanolla) poimituista jäännöksistä lasketaan uudet yksittäiset kehityskertoimet (vrt. kaava (66)) ja näistä lasketaan uudet estimaatit \tilde{d}_j kehityskertoimille d_j . Simulointivaihe suoritetaan rekursiivisesti kumulatiivisille korvauksille olettaen niiden noudattavan normaalijakaumaa, jossa odotusarvo ja varianssi lasketaan käyttämällä bootstrap-vaiheessa lasketua uutta parametria \tilde{d}_j ja kumulatiivisina korvauksina $D_{i,j-1}$ sille simuloitua arvoa (rekursio aloitetaan vuodesta $t+1$, jolloin edellisen kehitysvuoden korvauksille $D_{i,t-i+1}$ käytetään niiden havaittua arvoa). Välivaiheet on kuvattu tarkemmin lähteessä [7].

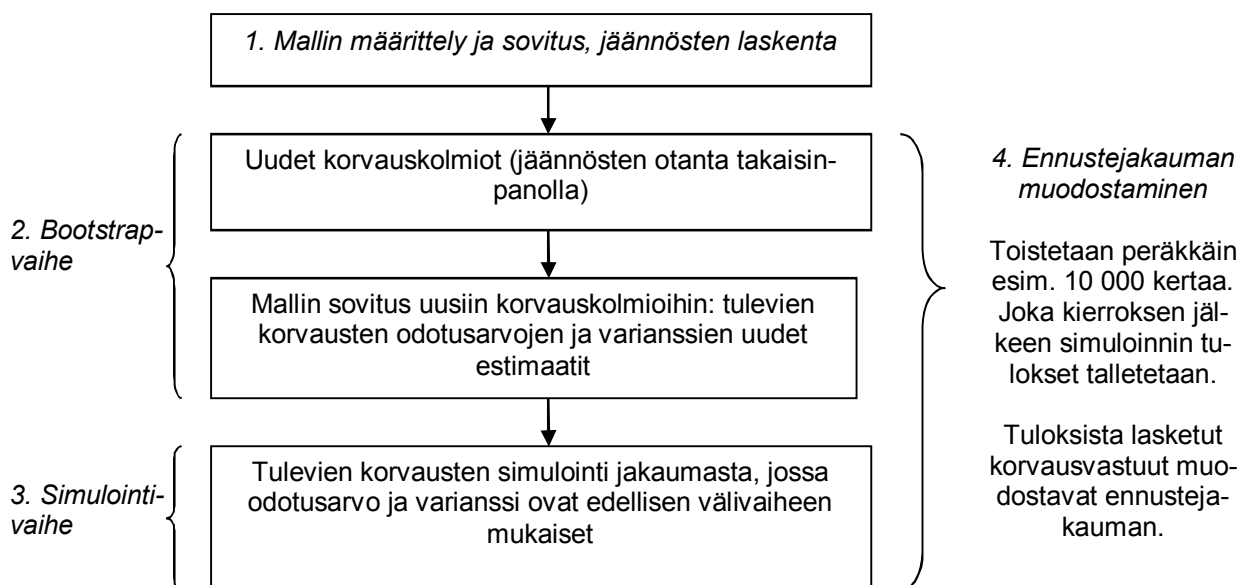
4 Korvausvastuun ennustejakauman muodostaminen bootstrap-menetelmän ja simuloinnin avulla

Bootstrap-/simulointimenetelmä muodostuu bootstrap-vaiheesta ja simulointivaiheesta, jotka toistetaan useita kertoja peräkkäin. Tuloksena saadaan joukko korvausvastuun

mahdollisesti toteutuvia arvoja, jotka muodostavat ennustejakauman. Bootstrap-vaiheessa saadaan arvio estimointivarianssille, kun taas simuloinnissa otetaan huomioon prosessivarianssi [4]. Tuloksena saadun ennustejakauman hajonta vastaa näin ollen ennustevirheen hajonnan estimaattia, mutta samalla ennustejakaumasta saadaan arviot luottamusväleistä ja prosenttipisteistä.

Menetelmä esitetään noudattaen lähteissä [4] ja [7] kuvattuja vaiheita ja olettamalla inkrementaalisisille korvauksille alaluvun 3.2.4 mukainen Poisson-jakauma ylihajonnalla.

Kuvassa 7 on yhteenveto bootstrap-/simulointimenetelmän välivaiheista.



Kuva 7. Ennustejakauman tuottaminen bootstrap-/simulointimenetelmällä [7].

4.1 Bootstrap-/simulointimenetelmä

Jäännösten laskenta ja bootstrap-vaihe

Korvauskolmiosta saadaan vain yhden estimaatin mallin parametreille ja tulevien korvausten odotusarvoille. Jotta estimoinnista aiheutuvaa virhettä päästään arvioimaan, muodostetaan bootstrap-vaiheessa alkuperäisistä havaituista korvauksista uusi korvauskolmio, josta lasketaan uudet estimaatit. Tällöin nähdään, miten estimaattien arvot vaihtelevat, kun estimoinnissa käytetty tilasto muuttuu. Vaihtelun perusteella saadaan käsitys estimointivirheen suuruudesta.

Uuden korvauskolmion muodostamisen taustalla on ajatus siitä, että alkuperäisten havaintojen paikkoja voidaan ikään kuin vaihtaa keskenään. Korvauskolmion tapauksessa tämä tarkoittaisi sitä, että inkrementaaliset korvaukset solussa (i, j) olisivat yhtä hyvin voineet esiintyä jossakin toisessa solussa – toisin sanoen korvausten arvon ei pitäisi riippua sattumis- tai kehitysvuodesta. Poisson-mallissa ylihajonnalla oletetaan kuitenkin inkrementaalisten korvausten odotusarvon riippuvan sekä sattumisvuodesta i että

kehitysvuodesta j (ks. oletus 2 alaluvussa 3.2.4). Tämän takia uutta korvauskolmiota muodostettaessa tarvitaan *mukautettuja jäännöksiä*, jotka on tehty riippumattomiksi ja samoin jakautuneiksi.

Ennen bootstrap-vaihetta on siis laskettava mukautetut jäännökset. Tämä etenee alla lueteltuja välivaiheita noudattaen. Lähtöaineistona oletetaan olevan inkrementaalinen korvauskolmio, jossa rajoitusten (62)-(63) oletetaan täyttyvän. Tällöin mallin parametrien (kvasi)uskottavuusestimaattien laskemisen sijaan voidaan laskentaa yksinkertaistaa käyttämällä determinististä Chain-ladder -menetelmää.

Mallin määrittely ja sovitus, jäännösten laskenta (kuvan 7 vaihe 1)		
1.	Muutetaan inkrementaalinen korvauskolmio kumulatiiviseksi korvauskolmioksi (kaavalla (5)).	
2.	Lasketaan kehityskertoimet kumulatiivisesta korvauskolmiosta kaavalla (13).	
3.	Lasketaan kumulatiivisten korvausten estimaatit havaitulle korvauskolmion osalle soveltamalla rekursiota (vertaa tulevien korvausten estimointikaavoihin (15)-(16)) $\hat{D}_{i,t-i+1} = D_{i,t-i+1} \quad \text{ja} \quad \hat{D}_{ij} = \frac{\hat{D}_{i,j+1}}{\hat{d}_{j+1}} \quad \text{kaikille} \quad i = 1, \dots, I \quad \text{ja}$ $j = 1, \dots, t - i.$	
4.	Lasketaan inkrementaalisten korvausten estimaatit kumulatiivisten korvausten estimaattien \hat{D}_{ij} erotuksena kaavalla (5). Saadut estimaatit ovat havaittujen inkrementaalisten korvausten odotusarvojen estimaatteja \hat{m}_{ij} (ks. esimerkki taulukossa 16).	
5.	Lasketaan Pearsonin hajontaparametri $\hat{\phi}$ kaavalla (61) käyttämällä edellä laskettuja inkrementaalisten korvausten odotusarvojen estimaatteja \hat{m}_{ij} ja vastaavia havaittuja inkrementaalisia korvauksia C_{ij} . Estimoitavien parametrien lukumäärä p on alkuperäisen Poisson-mallin estimoitavien parametrien lukumäärä $p = I + J - 1$.	
6.	Lasketaan mukautetut jäännökset r_{ij}^{adj} kaavalla $r_{ij}^{adj} = \sqrt{\frac{N}{N-p}} \cdot r_{ij}, \quad i = 1, \dots, I \quad \text{ja} \quad j = 1, \dots, t - i + 1,$ missä r_{ij} on skaalattu Pearsonin jäännös	(64)

$r_{ij} = \frac{C_{ij} - \hat{m}_{ij}}{\sqrt{\hat{\phi} \hat{m}_{ij}}}, \quad i = 1, \dots, I \text{ ja } j = 1, \dots, t - i + 1.$	(65)
<p>Mukautettuja jäännöksiä r_{ij}^{adj} muokataan tarvittaessa vielä niin, että jäännösten keskiarvo on nolla (ks. esimerkki taulukossa 17). Saatuja jäännöksiä käytetään bootstrap-vaiheessa.</p>	

Bootstrap-vaiheessa (kuvassa 7 vaihe 2) mukautettujen jäännösten r_{ij}^{adj} paikkaa vaihdetaan poimimalla niistä satunnaisesti uusi mukautettujen jäännösten joukko. Poiminta suoritetaan siten, että jokaisella alkuperäisellä jäännöksellä on yhtäläinen mahdollisuus tulla valituksi ja sama jäännös voidaan valita useita kertoja [5]. Poimintamenetelmää kutsutaan otannaksi takaisinpanolla, ja sitä on havainnollistettu kuvassa 8. Uuteen joukkoon poimitaan niin monta jäännöstä kuin alkuperäisessä korvauskolmiossa on havaintoja. Tämän jälkeen lasketaan kaavasta (65) sellaiset inkrementaaliset korvaukset \tilde{C}_{ij} , joilla alkuperäisten estimaattien \hat{m}_{ij} kanssa olisi saatu poimitut jäännökset (ks. kaava (66)). Inkrementaaliset korvaukset \tilde{C}_{ij} muodostavat uuden korvauskolmion. Kun mallin parametrit estimoidaan uudesta korvauskolmiosta, nähdään, kuinka paljon tulevien inkrementaalisten korvausten uudet estimaatit \tilde{m}_{ij} poikkeavat alkuperäisistä estimaateista \hat{m}_{ij} .

Sattumis- vuosi	Kehitysvuosi		→	Sattumis- vuosi	Kehitysvuosi	
	1	2			1	2
1	-0,863	0,547		1	0,885	-0,863
2	-0,997	0,885		2	1,123	0,547
3	1,123			3	0,547	
4				4		

Kuva 8. Uuden mukautettujen jäännösten joukon muodostaminen (otanta takaisinpanolla). Satunnainen poiminta suoritetaan tietokoneella.

Bootstrap-vaihe (kuvan 7 vaihe 2)	
7.	Uusien korvauskolmioiden muodostaminen:
7.1	Muodostetaan otannalla takaisinpanolla jäännöksistä r_{ij}^{adj} uusi jäännösten joukko \tilde{r}_{ij}^{adj} (ks. kuva 8). Jokaiselle korvauskolmion havaitulle solulle (i, j) , $i = 1, \dots, I$ ja $j = 1, \dots, t - i + 1$, poimitaan oma jäännös.

7.2	<p>Lasketaan uudet inkrementaaliset korvaukset \tilde{C}_{ij}, $i = 1, 2, \dots, I$ ja $j = 1, 2, \dots, t - i + 1$, ratkaisemalla ne kaavasta (65)³⁸</p> $\tilde{C}_{ij} = \tilde{r}_{ij}^{adj} \sqrt{\hat{\phi} \hat{m}_{ij}} + \hat{m}_{ij}.$ <p>Uudet korvaukset muodostavat uuden inkrementaalisen korvauskolmion.</p>	(66)
8.	Estimoidaan mallin parametrit ja tulevien korvausten odotusarvot uudesta korvauskolmiosta. Oletetaan rajoitusten (62)-(63) täyttyvän:	
8.1	Muodostetaan uudesta inkrementaalisesta korvauskolmiosta kumulatiivinen korvauskolmio.	
8.2	Lasketaan kehityskertoimet kaavalla (13).	
8.3	Lasketaan estimaatit tuleville kumulatiivisille korvauksille kaavoilla (15)-(16).	
8.4	Lasketaan tulevien kumulatiivisten korvausten estimaattien erotuksena tulevien inkrementaalisten korvausten odotusarvojen estimaatit \tilde{m}_{ij} , $i = 1, \dots, I$ ja $j = t - i + 2, \dots, J$. Estimaatteja \tilde{m}_{ij} käytetään simuloituvaiheessa.	

Simulointivaihe

Bootstrap-vaiheessa tuotettujen uusien inkrementaalisten korvausten odotusarvojen estimaattien summana saadaan uusi estimaatti korvausvastuun odotusarvolle. Ennustejakauman muodostamiseksi halutaan kuitenkin tietää, mistä todellisista korvausten arvoista ja todennäköisyyksistä korvausvastuun odotusarvo muodostuu.

Simulointivaiheessa (kuvan 7 vaihe 3) poimitaan satunnaiset arvot tulevien inkrementaalisten korvausten jakaumista, jotka niille on mallissa oletettu. Toisin sanoen, korvauskolmion tyhjät solut täytetään simuloituilla arvoilla niiden odotusarvojen estimaattien \tilde{m}_{ij} sijaan. Simuloinnissa jakaumien odotusarvoina ovat inkrementaalisten korvausten odotusarvoille bootstrap-vaiheessa lasketut uudet estimaatit \tilde{m}_{ij} . Koska varianssin on oletettu olevan suhteessa odotusarvoon (ks. alaluku 3.2.4 oletus 2), määräytyy myös jakauman varianssi uuden odotusarvon estimaatin mukaan. Jakaumasta poimitut arvot vastaavat inkrementaalisten korvausten mahdollisesti toteutuvia arvoja, ja niiden summana saadaan korvausvastuulle eräs mahdollinen realisaatio.

Simulointi suoraan Poisson-jakaumasta ylihajonnalla on ongelmallista, koska mallissa ei ole oletettu korvauksille varsinaista jakaumaa eikä mallissa tarvitse rajoittua vain

³⁸ Kun mukautuksen (64) annetaan vaikuttaa myös uusiin korvauksiin kaavassa (66), menetelmällä saatu estimointivarianssi on verrattavissa analyttisesti laskettuun estimointivarianssiin. Ks. esim. [4], [5] ja [7]. Pinheiro *et al.* [15] ehdottavat puolestaan standardoitujen Pearsonin jäännösten käyttöä.

positiivisiin kokonaislukuihin kuten perinteisessä Poisson-jakaumassa. Simulointi voidaan kuitenkin tehdä esimerkiksi toisesta jakaumasta, kuten normaalijakaumasta, jossa varianssi ja odotusarvo ovat samat kuin alkuperäisessä mallissa on oletettu. Tällöin ennustejakauma muoto muuttuu odotusarvon ja varianssin säilyessä samana [4]. Jakauman valinnalla voidaan esimerkiksi pyrkiä estämään se, että simulointi voi tuottaa joillekin sattumisvuosille negatiivisia korvausvastuita. Simuloimalla havaintoja korvausten jakaumista vältetään ainakin osittain se Chain-ladder -menetelmän ongelma, että tuoreimman sattumisvuoden korvausvastuu riippuu vain yhdestä havainnosta [1].

Simulointivaihe (kuvan 7 vaihe 3)		
9.	Lasketaan mallin mukaiset inkrementaalisten korvausten C_{ij} , $i + j - 1 > t$, odotusarvot ja varianssit bootstrap-vaiheen tulosten ja kohdassa 5 kaavalla (61) lasketun hajontaparametrin avulla ³⁹	(67)
	$E(C_{ij}) = \tilde{m}_{ij}$ ja $Var(C_{ij}) = \hat{\phi}\tilde{m}_{ij}$.	
10.	Simuloidaan jokaiselle korvauskolmion solulle (i, j) , $i + j - 1 > t$, inkrementaaliset korvaukset niille oletetusta jakaumasta, jossa odotusarvo ja varianssi on laskettu kaavalla (67). Koska suoraan Poisson-jakaumasta ylihajonnalla ei voi simuloida, käytetään jotain muuta sopivaa jakaumaa, kuten normaalijakaumaa.	
11.	Lasketaan sattumisvuoden i korvausvastuu sattumisvuodelle simuloitujen tulevien inkrementaalisten korvausten summana.	
12.	Lasketaan koko korvausvastuu kaikkien tulevien inkrementaalisten korvausten summana.	
13.	Talletetaan saadut korvausvastuut ennustejakauman muodostamiseksi.	

Ennustejakauma (kuvan 7 vaihe 4)

Bootstrap-vaihe ja sen jälkeen suoritettu simulointivaihe muodostavat yhden kierroksen, joka toistetaan useita kertoja, esimerkiksi 10 000 kertaa. Joka kierroksen päätteeksi talletetaan simuloitua sattumisvuosittaiset korvausvastuut ja koko korvausvastuu. Kun kaikki kierrokset on suoritettu, on tuotettu yhtä monta realisaatiota korvausvastuiden todellisista mutta tuntemattomista arvoista kuin kierroksiakin on tehty. Realisaatiot antavat hyvän arvion ennustejakauman muodosta ja korvausvastuun toteutuvien arvojen todennäköisyyksistä. Tuloksena saatujen korvausvastuiden keskiarvo vastaa korvausvastuun odotusarvon estimaattia. Lisäksi saadaan arviot luottamusväleistä ja prosenttipisteistä. Esimerkiksi arvo, jota pienemmäksi 90 % kierrosten tuloksena saaduista korvausvastuista on jäänyt, vastaa arvoa, jota pienemmäksi toteutuvan korvausvastuun arvioidaan jäävän 90 %:n todennäköisyydellä (90 %:n prosenttipiste). Varmuuslisäksi

³⁹ England [4] laskee varianssin käyttämällä hajontaparametrille kohdassa 5 kaavalla (61) laskettua estimaattia. Sen sijaan Björkwall *et al.* [1] mainitsevat, että myös hajontaparametri pitäisi estimoida uudelleen bootstrap-vaiheessa.

voitaisiin määritellä 90 %:n prosenttipisteen ja odotusarvon välinen erotus. Kuvassa 10 on esimerkki bootstrap-/simulointimenetelmällä muodostetusta ennustejakaumasta korvausvastuulle R . Realisaatioiden keskiarvon tulisi olla lähellä Chain-ladder -menetelmän korvausvastuun estimaattia, sillä korvauksille on oletettu Poisson-jakauma ylihajonnalla.

Bootstrap-/simulointikierrosten aikana bootstrap-vaiheessa muodostetaan useita uusia korvauskolmioita ja lasketaan niiden perusteella uudet korvausten odotusarvojen estimaatit. Uusien estimaattien vaihtelu alkuperäisistä estimaateista antaa viitteitä estimoinnin aiheuttamasta erosta estimoidun arvon ja tuntemattoman odotusarvon välillä. Simulointivaiheessa puolestaan otetaan huomioon prosessivarianssi poimimalla satunnainen havainto suoraan korvausten jakaumasta. Kun simulointi on suoritettu tuhansia kertoja, voidaan ajatella kaikkien arvojen tulleen poimituiksi siinä määrin kuin niiden esiintyminen on todellisuudessa todennäköistä. Ennustevirheen varianssin estimaatti saadaan tulosten empiirisestä varianssista [4].

Ennustejakauman tulkinta ja soveltaminen muihin stokastisiin malleihin

Kuten minkä tahansa korvausvastuun arviointimenetelmän tuloksia tulkittaessa, myös bootstrap-/simulointimenetelmän tuottaman ennustejakauman tulkinnassa on otettava huomioon käytetyn tilastoaineiston laatu sekä se, kuinka hyvin havaituista korvauksista voidaan ennustaa tulevia korvauksia. Lisäksi, mitä enemmän lähtöaineistona olevassa korvauskolmiossa on sattumis- ja kehitysvuosia, sitä luotettavampi bootstrap-/simulointimenetelmän tuottama ennustejakauma on. Isosta korvauskolmiosta saadaan nimittäin bootstrap-vaiheeseen kattava jäännösten joukko, josta voidaan poimia useita mahdollisimman erilaisia otoksia uusien korvauskolmioiden ja estimaattien tuottamiseksi simulointivaihetta varten. Toisaalta myös isolle korvauskolmiolle on oleellista tehdä riittävän monta bootstrap-/simulointikierrosta, jotta menetelmä on suoraan verrattavissa korvauksille oletettuun malliin. [1], [7]

Bootstrap-/simulointimenetelmää voidaan soveltaa myös muille malleille kuin Poisson-mallille ylihajonnalla, kuten Mackin mallille, kun se on esitetty yleistettynä lineaarisena mallina (ks. alaluku 3.2.5). Itse asiassa Poisson-mallia on totuttu käyttämään lähinnä vahinkojen lukumäärien mallintamiseen kun taas Mackin mallia korvausten mallintamiseen. Käytettävä malli on valittava siten, että sen oletukset sopivat mallinnettavalle ilmiölle. Väärin tehdyt tai sopimattomat mallioletukset näkyvät myös bootstrap-/simulointimenetelmällä tuotetussa ennustejakaumassa ja ennustevirheen hajonnan estimaatissa, jotka jäävät myös virheellisiksi. Jotta menetelmän tulokset kuvaavat valittua mallia, on lisäksi bootstrap-vaiheen otannassa käytettävät jäännökset (64) valittava malliin sopiviksi [5]. Riippuen siitä, mitä mallia lopulta käytetään ja tuottaako se samat estimaatit kuin Chain-ladder -menetelmä, ei bootstrap-/simulointimenetelmän parametrien estimoinneissa voida välttämättä oikaista käyttämällä Chain-ladder -menetelmää [7].

4.2 Esimerkki

Mallinnetaan taulukon 5 inkrementaaliset korvaukset alaluvussa 3.2.4 esitetyllä Poisson-mallilla. Korvausten odotusarvojen estimaattien ja bootstrap-vaiheessa tarvittavien jäännösten laskemisessa edetään alaluvussa 4.1 esitettyjä välivaiheita noudattaen. Esti-

maatit korvausten odotusarvoille on taulukossa 16, kun taas havaitut arvot ovat taulukossa 5.

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j						
	1	2	3	4	5	6	7
1	340 334	201 111	18 526	1 636	509	613	142
2	272 307	160 912	14 823	1 309	407	490	
3	376 999	222 777	20 522	1 812	563		
4	388 000	229 278	21 121	1 865			
5	369 283	218 218	20 102				
6	419 409	247 839					
7	285 205						

Taulukko 16. Estimaatit havaittujen inkrementaalisten korvausten odotusarvoille Poissonmallissa ylihajonnalla.

Taulukossa 17 on korvausten odotusarvojen estimaattien (taulukko 16) ja niitä vastaavien havaittujen korvausten (taulukko 5) perusteella lasketut mukautetut jäännökset r_{ij}^{adj} (kaavat (64)-(65)). Sen lisäksi, että jäännöksiä tarvitaan bootstrap-vaiheessa, voidaan niiden avulla tarkastella mallin sopivuutta. Mitä sopivampi malli on, sitä pienemmät jäännökset ovat ja sitä paremmin malli ”ennustaa” menneet vuodet. Jos malli sopii aineistoon, tulisi jäännösten esiintyä satunnaisesti nollan molemmin puolin. Lisäksi 95 %:lla jäännöksistä poikkeaminen nolasta saisi olla enintään ± 2 .⁴⁰

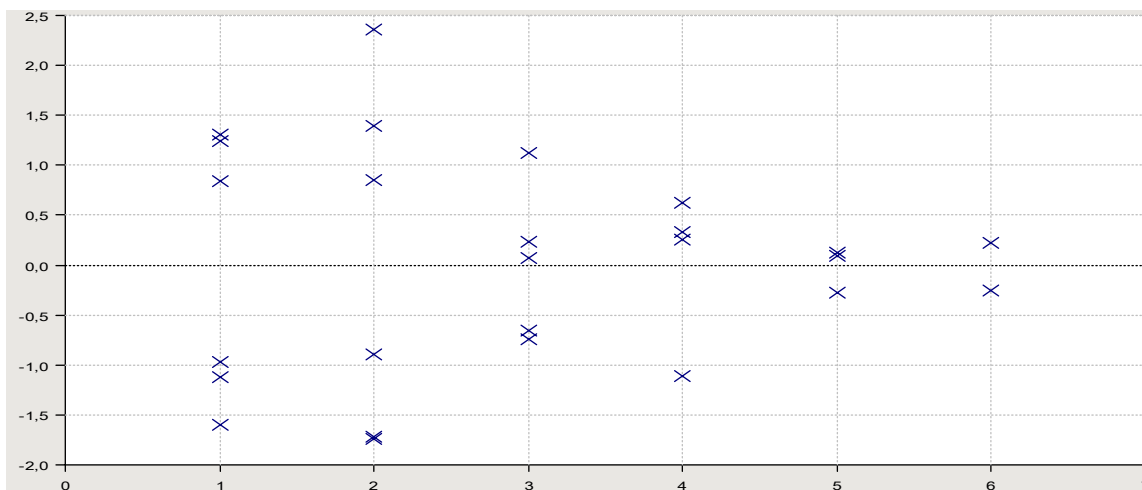
Kuvassa 9 a on esitetty taulukon 17 jäännökset mallin sopivuuden arvioimiseksi. Kuvasta nähdään, että suurin osa jäännöksistä ei poikkea nolasta enempää kuin ± 2 mutta toisaalta etäisyydet nolasta vaihtelevat merkittävästi kehitysvuosittain. Tästä voidaan päätellä, etteivät jäännökset ole välttämättä täysin samoin jakautuneita, vaan varianssi saattaa riippua edelleen kehitysvuodesta. Jotta kaikki jäännökset olisivat samoin jakautuneita, siirrytään käyttämään yhteisen hajontaparametrin ϕ sijaan jokaiselle kehitysvuodelle omaa hajontaparametria ϕ_j . Kuvassa 9 b on kaavalla (64) lasketut jäännökset, kun skaalauksessa (65) on käytetty jokaiselle kehitysvuodelle estimoitua omaa hajontaparametria yhteisen estimaatin $\hat{\phi}$ sijaan⁴¹. Kehitysvuosittainen ero jäännösten etäisyydessä nolasta on pienentynyt huomattavasti verrattuna kuvan 9 a jäännöksiin.

⁴⁰ Ks. mm. [7]. Sopivalle mallille skaalattujen/mukautettujen jäännösten oletetaan olevan kutakuinkin $N(0,1)$ -jakautuneita.

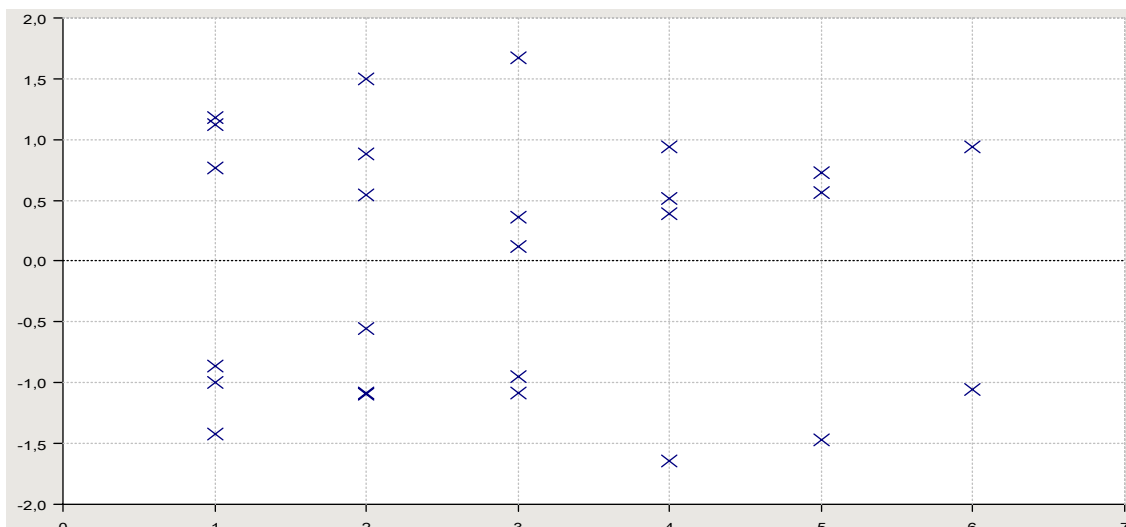
⁴¹ Ks. lähteestä [7] hajontaparametrin ϕ_j estimointi.

Sattumis- vuosi i	Kehitysvuosi j						
	1	2	3	4	5	6	7
1	-0,971	0,856	1,120	0,335	0,127	0,218	0,000
2	-1,122	1,389	0,073	0,622	-0,279	-0,258	
3	1,245	-1,737	0,233	0,254	0,097		
4	-1,598	2,358	-0,651	-1,111			
5	0,842	-0,889	-0,740				
6	1,307	-1,716					
7	0,000						

Taulukko 17. Mukautetut jäännökset, kun käytetään kaikille yhteistä hajontaparametria $\sqrt{\hat{\phi}} = 83,062$. Kaavan (64) mukaisista jäännöksistä on vähennetty 0,007080, jotta jäännösten keskiarvo on nolla.



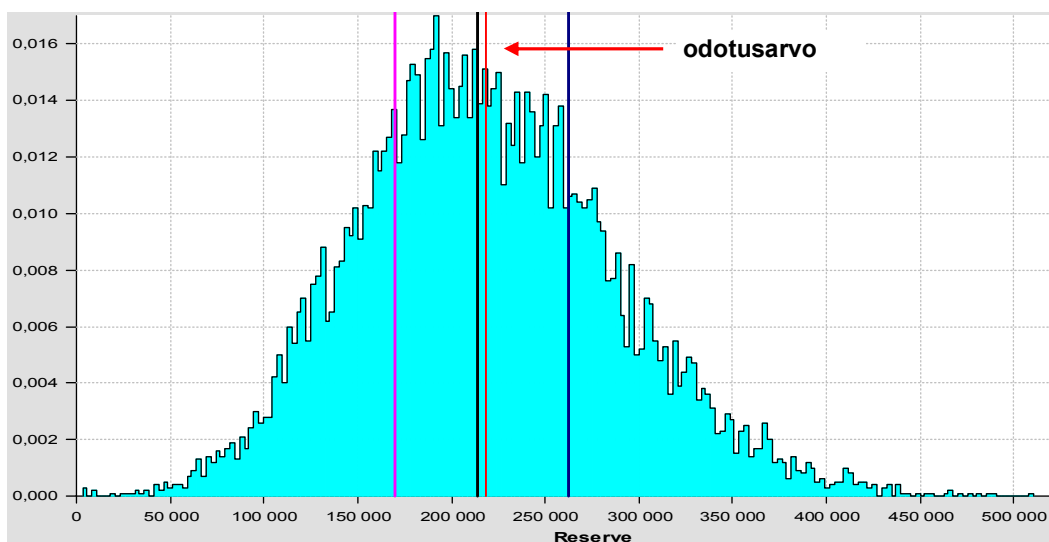
Kuva 9 a. Taulukon 17 jäännökset. Vaaka-akselilla on kehitysvuosi ja pystyakselilla jäännöksen arvo.



Kuva 9 b. Mukautetut jäännökset, kun jokaiselle kehitysvuodelle on oma hajontaparametri.

Ennustejakauman muodostamiseksi suoritetaan 10 000 bootstrap-/simulointikierrosta noudattaen alaluvun 4.1 välivaiheita bootstrap- ja simulointivaiheille. Kuvan 9 b jäänöksille tehdään näin ollen 10 000 kertaa otanta takaisinpanolla muodostaen yhtä monta uutta korvauskolmiota ja estimaattia tulevien inkrementaalisten korvausten odotusarvoille. Simulointivaiheessa tuleville korvauksille on vastaavasti poimittu yhtä monta satunnaista arvoa, jotka kuvaavat korvausten mahdollisesti toteutuvia arvoja eivätkä enää niiden odotusarvoja. Koska Poisson-jakaumasta ylihajonnalla ei voida suoraan simuloida, suoritetaan simulointi normaalijakaumasta, jossa odotusarvo ja hajonta ovat samat kuin Poisson-mallissa ylihajonnalla.

Kuvassa 10 on bootstrap-/simulointikierrosten tuloksista muodostettu korvausvastuun ennustejakauma. Mitä korkeampi palkki korvausvastuun arvon kohdalla on, sitä useammin arvo on esiintynyt kierrosten tuloksena ja sitä todennäköisemmäksi arvon toteutuminen katsotaan. Kuvassa 10 tulosten keskiarvo on 218 039, joka on bootstrap-/simulointimenetelmän estimaatti korvausvastuun odotusarvolle. Estimaatti on lähellä Chain-ladder -menetelmän korvausvastuun estimaattia (ks. taulukko 8).



Kuva 10. Korvausvastuun ennustejakauma, kun on suoritettu 10 000 bootstrap-/simulointikierrosta.

Myös tietyn sattumisvuoden korvausvastuulle voidaan muodostaa ennustejakauma bootstrap- ja simulointivaiheiden tuloksista (ks. alaluvun 4.1 taulukoiden kohta 11). Taulukossa 18 on sattumisvuosittaisista tuloksista lasketut korvausvastuun odotusarvojen ja ennustevirheiden hajontojen estimaatit sekä ennustevirheen hajonnan estimaatti suhteessa korvausvastuun odotusarvon estimaattiin. Ennustevirheen hajonnan estimaatteja ja niiden osuutta estimoiduista odotusarvoista voidaan verrata taulukoissa 14–15 laskettuihin Mackin mallin mukaisiin vastaaviin estimaatteihin. Vaikka odotusarvojen estimaatit ovat lähellä toisiaan (molemmat mallit tuottavat saman korvausvastuun estimaatin kuin Chain-ladder -menetelmä), estimoidut ennustevirheen hajonnat poikkeavat toisistaan. Tämä johtuu erilaisista oletuksista esimerkiksi korvausten variansseille. England & Verrall [5] suosittelevat käyttämään sattumisvuosittaisia ennustevirheiden ha-

jontojen estimaatteja arvioitaessa korvausvastuuseen liittyvää epävarmuutta. Jos ennustevirheen hajonnan estimaatin osuus korvausvastuun odotusarvosta on suuri erityisesti tuoreille sattumisvuosille, on selvitetävä syyt hajonnan estimaatin suuruudelle ja tarkistettava käytetyn mallin sopivuus⁴².

Sattumis- vuosi <i>i</i>	Maksetut kor- vaukset	Korvausvastuun odotusarvo	Ennustevirheen hajonta	Osuus odo- tusarvosta
1	562 870	0	0	0,00 %
2	450 248	117	252	215,38 %
3	622 673	846	764	90,31 %
4	640 263	1 450	905	62,41 %
5	607 603	3 216	2 871	89,27 %
6	667 248	26 491	10 782	40,70 %
7	285 205	185 919	67 365	36,23 %
Yhteensä	3 836 110	218 039	68 540	31,43 %

Taulukko 18. Bootstrap-/simulointimenetelmällä estimoidut sattumisvuosittaiset korvausvastuun odotusarvot ja ennustevirheen hajonnat sekä ennustevirheen hajonnan osuus odotusarvosta.

Kuvasta 10 nähdään, että korvausvastuun mahdollisesti toteutuvat arvot ovat symmetrisesti jakautuneet odotusarvon ympärille eivätkä esimerkiksi painottuneet erityisesti odotusarvoa suurempiin arvoihin⁴³. Näin ollen ei ole syytä olettaa korvausvastuun toteutuvan nimenomaan odotusarvoaan suurempana, vaan korvausvastuu voi yhtä hyvin jäädä odotusarvoaan pienemmäksi. Kuvassa 10 on esitetty myös korvausvastuun arvot, joita pienempiä ovat 25 % ja 75 % kierrosten tuloksina saaduista korvausvastuun arvoista (50 %:n luottamusväli). Riippuen halutusta turvaavuustasosta ja vakuutusyhtiön kokonaisriskiasemasta voidaan varmuuslisä määritellä siten, että yhtiö selviää velvoitteistaan esimerkiksi 90 %:n todennäköisyydellä (90 %:n prosenttipiste). Tällöin korvausvastuun odotusarvon estimaatti ja varmuuslisä yhteensä ovat 308 168 ja varmuuslisänä varataan 90 129 (1,3-kertaa ennustevirheen hajonnan estimaatti).

5 Yhteenvedo

Korvausvastuu on vakuutusyhtiön velkaa vakuutuksenottajille vahingoista, jotka ovat sattuneet, mutta joista ei ole maksettu kaikkia korvauksia. Taseen varsinainen korvausvastuu muodostuu vahinkokohtaisista varauksista, kollektiivisesta korvausvastuusta ja vahinkojen selvittelykuluvarauksesta. Kollektiivinen korvausvastuu sisältää estimaatin maksettavaksi tulevista korvauksista, joita ei ole varattu vahinkokohtaisesti, sekä var-

⁴² Vanhoilla sattumisvuosilla ennustevirheen hajonnan estimaatti suhteessa korvausvastuun odotusarvon estimaattiin on usein suuri, koska sattumisvuosi on jo pitkälle selvinnyt ja korvausvastuuta on vain vähän jäljellä.

⁴³ Symmetrisyys johtuu tässä tapauksessa siitä, että simulointi suoritettiin normaalijakaumasta.

muuslisän. Maksettavaksi tulevat korvaukset estimoidaan jollakin sopivalla korvausvastuun laskentamenetelmällä yhteisesti vahingoille, jotka selviävät keskimäärin samoin. Vakuutusyhtiölain mukaan korvausvastuu on arvioitava turvaavasti.

Korvausvastuu estimoidaan usein korvauskolmion muodossa esitettävästä tilastoaineistosta. Tilastoaineistona voivat olla vahinkojen lukumäärät, maksetut korvaukset ja/tai korvausmeno. Korvausmeno tarkoittaa maksettujen korvausten ja vahinkokohtaisten varausten summaa. Korvauskolmioista pystytään tarkastelemaan vahinkojen raportoitumista ja selviämistä sattumisvuosittain sekä esimerkiksi selviämisessä eri vuosina tapahtuneita muutoksia. Ennen korvausvastuun laskemista, on varmistettava käytetyn aineiston laatu ja se, miten hyvin havaitut korvaukset yleensäkin ennustavat maksettavaksi tulevia korvauksia.

Pitkähäntäisissä vakuutuslajeissa selviäminen kestää usein pidempään, kuin korvauskolmion vanhimmalle sattumisvuodelle on havaittu kehitysvuosia. Tällöin viimeisimpinä kehitysvuosina maksettavaksi tulevia korvauksia arvioitaessa on käytettävä esimerkiksi ekstrapolointia. Esimerkiksi Chain-ladder -menetelmässä ekstrapoloinnilla tarkoitetaan aineistosta laskettujen kehityskertoimien sovittamista käyrään ja sovitetun käyrän arvojen käyttämistä korvauskolmion ulkopuolisille kehitysvuosille. Ekstrapoloinnilla voidaan välttyä, jos korvausvastuu voidaan arvioida maksettujen korvausten korvauskolmion sijaan korvausmenokolmiosta, sillä korvausmeno selviää usein nopeammin kuin maksetut korvaukset.

Korvausinflaatio ilmenee korvauskolmiossa diagonaalisenä vaikutuksena, ja sillä on merkittävä vaikutus maksettavaksi tulevien korvausten suuruuteen. Korvausinflaation vaikutus otetaan huomioon korvausvastuuta estimoitaessa joko eksplisiittisesti tai implisiittisesti. Jos korvausinflaatio otetaan huomioon eksplisiittisesti, muutetaan maksettujen korvausten korvauskolmio saman vuoden rahan arvoon ennen korvausvastuun arviointia ja vastaavasti arvioidut, tulevana vuosina maksettavat korvaukset on muutettava maksuvuoden rahan arvoon. Jos sijoitustoiminnan tuotto-odotus otetaan huomioon diskonttaamalla korvausvastuu, oleelliseksi tekijäksi jää korvausinflaation ja tuotto-odotuksen välinen ero.

Korvausvastuun laskentamenetelmät voidaan jakaa deterministisiin menetelmiin ja stokastisiin malleihin. Näissä pyritään estimoimaan maksettavaksi tulevien korvausten odotusarvo. Tunnetuimmat deterministiset menetelmät ovat Chain-ladder -menetelmä ja Bornhuetter-Ferguson -menetelmä. Hovisen menetelmässä korvausvastuun estimaatti lasketaan näiden menetelmien selviämisyakauman suhteen painotettuna keskiarvona.

Deterministisillä menetelmillä ei pystytä arvioimaan korvausvastuuseen liittyvää epävarmuutta, koska korvausten satunnaisuutta ei ole otettu huomioon. Stokastisissa malleissa satunnaisuus sen sijaan otetaan huomioon olettamalla korvausten noudattavan tiettyä jakaumaa. Mack [10], [12] esittelee stokastiset mallit, joissa korvausvastuun odotusarvojen estimaatit ovat samat kuin deterministisissä Chain-ladder -menetelmässä ja Bornhuetter-Ferguson -menetelmässä. Sen lisäksi esimerkiksi Poisson-jakaumaan perustuva stokastinen malli, jota työssä kutsutaan Poisson-malliksi ylihajonnalla, tuottaa tietyin rajoituksin saman korvausvastuun odotusarvon estimaatin kuin deterministinen Chain-ladder -menetelmä.

Estimoidun korvausvastuun riittävyyden arvioimiseksi on arvioitava, kuinka paljon realisoitua korvausvastuu voi erota estimoidusta arvosta. Eroa kutsutaan ennustevirheeksi ja sitä aiheutuu muun muassa korvausten satunnaisuudesta ja mallin parametrien estimoinnista. Ennustevirhe on korvausvastuun arviointihetkellä satunnainen ja näin ollen mallin tarkkuutta voidaan stokastisissa malleissa arvioida ennustevirheen hajonnan perusteella. Mitä pienempi ennustevirheen hajonnan estimaatti on, sitä tarkempaa mallia pidetään. Tarkempien analyysien tekemiseksi, kuten luottamusvälien ja prosenttipisteiden tutkimiseksi, on kuitenkin tehtävä vielä oletus korvausvastuun jakaumasta. Analyysien perusteella arvioidaan tarvittavan varmuuslisän määrää, jotta yhtiö selviytyy velvoitteistaan riittävän suurella todennäköisyydellä.

Bootstrap-/simulointimenetelmällä saadaan arvio ennustejakaumasta ilman analyttistä laskentaa. Menetelmä muodostuu kahdesta vaiheesta: ensin tuotetaan uudet estimaatit ennustettavien korvausten odotusarvoille (bootstrap-vaihe), ja tämän jälkeen simuloidaan korvausten toteutuvat arvot jakaumista, joissa odotusarvo ja varianssi lasketaan bootstrap-vaiheen uusien estimaattien perusteella (simulointivaihe) [4]. Simuloidusta korvauksista saadaan summana korvausvastuun simuloitu arvo. Kun bootstrap- ja simulointivaihe on toistettu tuhansia kertoja peräkkäin, on saatu useita arvoja realisoituvalla korvausvastuulle. Nämä arvot muodostavat ennustejakauman.

Korvausvastuun odotusarvon estimaatti lasketaan yleensä usealla eri menetelmällä, jolloin estimaatille saadaan vaihteluväli. Tältä väliltä valitaan niin sanottu paras estimaatti tarkastelemalla, mikä menetelmästä sopii aineistoon parhaiten. Stokastisten mallien hyvänä puolena on, että parhaan estimaatin valinnassa voidaan ottaa huomioon, kuinka hyvin mallin oletukset sopivat aineistoon ja mikä malleista tuottaa estimoidun ennustevirheen hajonnan perusteella tarkimman estimaattorin. Valinnassa otetaan myös huomioon vakuutusyhtiölain vaatima turvaavuus, estimoitavien parametrien määrä sekä se, kuinka paljon joudutaan tekemään subjektiivisia arvioita. Esimerkiksi mitä vähemmän subjektiivisia arvioita joudutaan tekemään, sitä parempaa menetelmää yleensä pidetään. Erityisesti selviämislähtäen vaihteleville vakuutuslajeille sopii kokonaiskorvausmenoon perustuva Bornhuetter-Ferguson -menetelmä, kun taas selviämislähtäen tasaisille vakuutuslajeille sopii korvausten havaittuun kehitykseen perustuva Chain-ladder -menetelmä. Muussa tapauksessa Hovisen menetelmä tuottaa ennustevirheen hajonnalla mitattuna tarkimman estimaattorin, kun Bornhuetter-Ferguson -menetelmän ja Chain-ladder -menetelmän korvausvastuun estimaattorit ovat toisistaan riippumattomia.

Lähteet

- [1] BJÖRKWALL, S., HÖSSJER, O. & OHLSSON, E. (2008): *Non-parametric and parametric bootstrap techniques for arbitrary age-to-age development factor methods in stochastic claims reserving*. Research Report 2008:2, Mathematical Statistic, Stockholm University (ISSN 1650-0377).
- [2] BORNHUETTER, R. & FERGUSON, R. (1972): *The Actuary and IBNR*. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, November 1972.
- [3] DAYKIN, C. D., PENTIKÄINEN, T. & PESONEN, M. (1993): *Practical Risk Theory for Actuaries*, Chapman & Hall, Iso-Britannia 1994.
- [4] ENGLAND, P. (2002): *Addendum to "Analytic and bootstrap estimates of prediction errors in claims reserving"*. Insurance: Mathematics and Economics, 31, 461–466.
- [5] ENGLAND, P. & VERRALL, R. (1998): *Standard Errors of Prediction in Claims Reserving: A Comparison of Methods*, Workshop. General Insurance Convention & ASTIN Colloquium.
- [6] ENGLAND, P. & VERRALL, R. (2002): *Stochastic Claims Reserving in General Insurance*. Institute of Actuaries and Faculty of Actuaries, Printed by Bell & Bain Ltd., Glasgow.
- [7] ENGLAND, P. & VERRALL, R. (2006): *Predictive Distributions of Outstanding Liabilities in General Insurance*. Annals of Actuarial Science, 1, II, 221–270.
- [8] HEIKKINEN, J. (2005): *Yleistetyt lineaariset mallit*. Matematiikan ja tilastotieteen laitos, Helsingin Yliopisto, 6.9.–21.10.2005.
- [9] HESS, K. & SCHMIDT, K. (2002): *A Comparison of Models for the Chain-Ladder Method*. Insurance: Mathematics and Economics, 31, 351-364.
- [10] MACK, T. (1993): *Measuring the Variability of Chain Ladder Reserve Estimates*. Presented at the May 1993 meeting of the Casualty Actuarial Society.
- [11] MACK, T. (2000): *Credible Claims Reserves: The Benktander Method*. ASTIN BULLETIN, Vol. 30, No. 2, 2000, pp. 333-347.
- [12] MACK, T. (2008): *The Prediction Error of Bornhuetter-Ferguson*. Casualty Actuarial Society *E-Forum*, Fall 2008.
- [13] MACK, T. & VENTER, G. (1999): *A Comparison of Stochastic Models that Reproduce Chain Ladder Reserve Estimates*. ASTIN Colloquium, Tokyo, Japan.
- [14] PENTIKÄINEN, T. & RANTALA, J. (1992): *A Simulation Procedure for Comparing Different Claims Reserving Methods*. ASTIN Bulletin, Vol. 22, No. 2, 191-216.

- [15] PINHEIRO, P. J. R., ANDRARE E SILVA, J. M. & CENTENO, M. D. L. (2000): *Bootstrap Methodology in Claims Reserving*. Working Paper no. 11/00, Centre for Applied Maths to Forecasting & Economic Decision, Lisbon, Portugal.
- [16] RENSHAW, A. (1994): *On the Second Moment Properties and the Implementation of Certain GLIM Based Stochastic Claims Reserving Models*. Actuarial Research Paper No. 65, Department of Actuarial Science and Statistics, City University, London.
- [17] RENSHAW, A. & VERRALL, R. (1998): *A Stochastic Model Underlying the Chain-Ladder Technique*. British Actuarial Journal, 4, IV, 903-923.
- [18] STRUZZIERI, P. & HUSSIAN, P. (1998): *Using Best Practices to Determine a Best Reserve Estimate*. CAS Forum, Fall 1998.
- [19] TAYLOR, G. (2000): *Loss Reserving – An Actuarial Perspective*. Kluwer Academic Publishers, Boston / Dordrecht / London.
- [20] TILASTOKESKUS (2010): <http://www.stat.fi/til/khi/> 6.2.2010 klo 17:45
- [21] VENTER, G. (1998): *Testing the Assumptions of Age-to-Age Factors*. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Volume LXXXV, 1998.
- [22] WÜTHRICH, M. V. & MERZ, M. (2008): *Stochastic Claims Reserving Methods in Insurance*. John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, England.

Muita hyödyllisiä lähteitä

- BENKTANDER, G. (1976): *An Approach to Credibility in Calculating IBNR for Casualty Excess Reinsurance*. The Actuarial Journal Review, April 1976, p. 7.
- INSTITUTE OF ACTUARIES (1989): *Claims Reserving Manual 02/89*. England 1989.
- JACOBSSON, J. (1992): *Vakuutusyhtiön korvausvastuusta*. SHV-työ, Helsinki 31.8.1992.
- PANTZOPOULOU, E. (2003): *The Concept of Reserving and Reserving Methodologies in General Insurance*. Dissertation, Department of Actuarial Science, City University, London.
- SHERMAN, R. (1984): *Extrapolating, Smoothing and Interpolating Development Factors*. Proceedings of the Casualty Actuarial Society, Arlington, Virginia 1994.