Vakuutusyhtiöiden vakavaraisuutta kuvaavien riskimittojen laskentamenetelmiä

Vesa Kuikka

SHV-työ

1.10.2014

Abstract

An insurance company is responsible for carefully holding and managing its assets to ensure the payments reserved for its clients. Economic Capital is the central concept in this respect and it is also one example of a risk measure. Risk measures, especially modern mathematical methods for calculating the Economic Capital of an insurance company, are the subject of this study. An insurance company is facing risks that are interdependent and in extreme conditions the dependencies may be much stronger. The modelling of interdependent risk distributions under extreme conditions has become more important after the financial crisis of 2008.

Modeling of interdependent risks is presented from a modern point of view. Using copulas is an increasing trend in this area. After considering modeling of interdependent risks, some traditional methods and risk measures are presented, including risk factors, loss distributions and variance-covariance matrices. Solvency II regulation concerning Economic Capital is briefly described. Credit risks are considered as an important source of risks for banks and insurance companies. Using copulas is one of the methods in modelling credit risks. Copulas also have applications in extreme value theory.

Sisällysluettelo

Lähdeaineisto aiheittain

Seuraavassa taulukossa on ryhmitelty lähdeluettelon aineisto aiheiden ja lukujen mukaan. Tärkeimmät käytetyt lähteet ovat [29, 54, 97, 121, 142 ja 146]. Laaja lähdeluettelo löytyy lisäksi esimerkiksi lähteistä [121 ja 142].

2	Yleisesityksiä	9, 20, 25, 32, 38, 50, 54, 56, 63, 65, 106, 116, 117, 118, 121, 129, 130, 132, 142, 145, 146, 150, 151, 161, 162, 175, 178
	Usean toisistaan riippuvan riskijakauman yhdistäminen	1, 5, 8, 11, 12, 16, 21, 49, 57, 64, 85, 122, 140, 147, 149, 163
	Kopulat	27, 28, 68, 75, 76, 87, 91, 95, 98, 102, 105, 108, 114, 123, 124, 125, 126, 139, 143, 152, 171
	Systeeminen riski	19, 66, 128, 134
3	Value-at-Risk	3, 4, 17, 22, 23, 34, 35, 53, 59, 62, 96, 101, 103, 133, 136, 137, 138, 159, 160, 165, 168
	Koherentit riskimitat	6, 7, 13
	Muut perinteiset riskimitat	14, 15, 29, 31, 33, 37, 39, 40, 41, 42, 43, 44, 45, 46, 47, 51, 52, 55, 61, 70, 72, 73, 74, 79, 80, 81, 82, 83, 84, 86, 89, 90, 94, 99, 100, 109, 110, 112, 115, 119, 127, 130, 153, 156, 157, 158, 164, 166, 169, 170, 172, 173, 174
	Painotetut riskimitat (distortion risk measures)	10, 24, 36, 48, 60, 131, 144
	Konkurssimallit (ruin theory)	26, 30, 77, 78, 93, 155
4	Solvenssi II	32, 65, 176, 177
5	Luottoriskien mitat	61, 69, 88, 97, 113, 154
6	Äärimmäiset ilmiöt	2, 18, 58, 67, 92, 104, 120, 141, 148, 167
Kukin lähde on mainittu vain kertaalleen pääasiallisen ryhmän mukaan. Kopulat ja systeeminen riski käsittelevät määritelmänsä mukaan myös usean toisistaan riippuvan riskijakauman yhdistämistä. Luvun 2 lähteissä käsitellään tyypillisesti useampia riskimittoihin liittyviä aiheita. Luottoriskien mitat kuuluvat alaryhmänä luvun 2 aiheisiin ja osa äärimmäisten ilmiöiden teoriasta kuuluu luvun 1 tai 2 aiheiden alle.		

Eri maiden aktuaariyhdistysten ja vakuutusvalvojien sivustoilta löytyy sääntelyä ja vakuutusmatematiikkaa käsitteleviä aineistoja. Yhteenvedossa esitetään muutamia CRO Forumin kyselytutkimuksen (International models benchmarking study) tuloksia vakuutusyhtiöissä käytössä olevista mallinnusmenetelmistä ja riskimitoista.

1 Johdanto

Vakuutuksenottaja on hankkinut vakuutuksen vahingon, sairauden, tapaturman, eläketurvan tai kuoleman varalle joko itselleen tai toiselle edunsaajalle. Vakuutusyhtiöillä on muihin yrityksiin verrattuna suurempi vastuu huolehtia asiakkailta kerätyn ja sijoitustoiminnan kautta kertyneen varallisuuden määrästä, jotta varat suurella todennäköisyydellä riittävät vakuutusyhtiön velvoitteiden täyttämiseen. Vakuutusyhtiön riittävästä vakavaraisuudesta huolehtiminen on vakuutusyhtiön asiakkaiden kannalta tärkeää, jotta vakuutuksenottajien ja edunsaajien oikeus vakuutuskorvauksiin ja eläkkeisiin on turvattu.

Lainsäädännön kannalta vakuutusyhtiön vakavaraisuudesta huolehtiminen on siis ensisijaisesti vakuutusyhtiön asiakkaiden oikeuksien turvaamista ja vain toissijaisesti vakuutusyhtiön osakkeen- tai osuudenomistajien etu. Omistajien vastuu lähes aina rajoittuu vain sijoitettuun omaan pääomaan, mutta vakuutuksenottajien ja edunsaajien menetys mahdollisessa vakuutusyhtiön maksukyvyttömyys- tai konkurssitilanteessa voi olla huomattavasti merkittävämpi, jos korvaukset tai eläkkeet jäävät saamatta.

Euroopan Unionissa on yhteinen vakuutusyhtiöiden vakavaraisuutta koskeva sääntely, ns. Solvenssi II [176, 177]. Vakuutusyhtiön on otettava vakuutusriskit ja muut yhtiötä koskevat riskit huomioon vakavaraisuuspääomavaatimuksia laskettaessa Solvenssi II -säännöstön määräämällä tavalla [32, 65].

Vakavaraisuuspääomavaatimukset määräytyvät Solvenssi II -säännöstön mukaan yhtiön kantamien vakuutusriskien ja sijoitustoiminnan riskisyyden mukaan. Erityisesti vuoden 2008 finanssikriisin jälkeen erilaisten riskien keskinäisen riippuvuuden huomioon ottaminen on tullut yhä tärkeämmäksi. Vakavaraisuuspääomavaatimus muodostuu vakuutusyhtiön erilaisten riskien yhdistelmänä. Tähän hankalaan käytännölliseen ja matemaattiseen tarpeeseen on viime vuosina ryhdytty käyttämään mm. kopuloita. Tässä esityksessä kuvataan sekä perinteisempiä laskentamenetelmiä että uudempaa kopuloihin perustuvaa laskentaa. Kopuloita käsitellään esityksen luvuissa 2, 5 ja 6.

Tämä esitys ei etene kronologisesti, vaan toisessa luvussa esitellään usean riskijakauman yhdistämisen matemaattista mallintamista nykyaikaisilla menetelmillä, erityisesti kopuloiden käyttöä. Näiden jälkeen käsitellään perinteisiä riskimittoja. Luvussa neljä esitellään lyhyesti Solvenssi II -säännöstön mukaisia vakavaraisuuspääomavaatimuksia. Viidennessä luvussa esitellään tarkemmin luottoriskien laskentamenetelmiä. Luottoriskit ovat tärkeitä sekä vakuutusyhtiöiden että pankkien vakavaraisuuslaskennassa. Vakuutusyhtiön vastuuvelkaan on mahdollista käyttää samoja menetelmiä kuin yleisiin luottoriskeihin. Myös luottoriskien yhteydessä kopulat on eräs laskentatyökalu. Kuudennessa luvussa esitellään lyhyesti äärimmäisten arvojen teoriaa, joka on tärkeä riskien keskinäisten riippuvuuksien aiheuttamien ääri-ilmiöiden kannalta. Seitsemäs luku on yhteenveto.

Tässä esityksessä ei ole mahdollista käsitellä kattavasti kaikkia vakuutusyhtiöiden riskejä. Esitys painottuu vahinkovakuuttamiseen – henki- ja eläkevakuutusta ei käsitellä juuri ollenkaan. Aiheen laajuuden takia simulointi-, ja aikasarjamenetelmät sekä riskitekijöihin perustuvat rakennemallit on rajattu ulkopuolelle, vaikka niillä onkin vakuutusyhtiöiden riskien mallintamisessa huomattavaa käytännön merkitystä.

2 Riskien välisten riippuvuuksien mallintaminen

Vakavaraisuuspääoma

Keskeinen käsite vakuutusyhtiön tai muun finanssiyrityksen vakavaraisuutta arvioitaessa on vakavaraisuuspääoma [121]. Vakavaraisuuspääoma toimii puskurina vakuutusyhtiön kaikkia riskejä vastaan. Esimerkiksi vahinkovakuutusyhtiön vakavaraisuuspääoma on toimintapääoman ja tasoitusmäärän summa (ennen Solvenssi II voimaantuloa). Toimintapääoma on määrä, jolla yhtiön varat ylittävät velat ja tasoitusmäärä on vastuuvelan osa, joka on varattu tasaamaan vakuutusyhtiön vakuutusliikkeen poikkeuksellisten vuosien tulosta. Henki- ja eläkevakuutusyhtiöillä vakavaraisuuspääoma määritellään vastaavalla tavalla. Lainsäädännössä on määritelty tarkemmin, miten oman ja vieraan pääoman välimuodot käsitellään. Esimerkiksi pääomalainat hyväksytään varoihin vain tietyin ehdoin.

Vakavaraisuuspääoman määrälle voidaan lainsäädännössä asettaa vaatimuksia. Tässä esityksessä tullaan käsittelemään pääasiassa vakavaraisuuspääomavaatimuksia eikä niinkään erilaisia markkinoilla esiintyviä tai valvontaviranomaisten asettamia vakavaraisuuspääoman määritelmiä. Solvenssi II -säännöstö määrää eristä, joita voidaan hyväksyä vakavaraisuuspääomaan [176. 177]. Solvenssi II -direktiivin mukainen vakuutuslainsäädännön soveltaminen alkaa 1.1.2016.

Sanallisesti vakavaraisuuspääomaa luonnehditaan realistisesti arvioituna pääomamääränä, joka on käytettävissä riskien kattamiseen. Tyypillisimpiä riskejä ovat vakuutus-, markkina-, luotto- ja operatiiviset riskit. Solvenssi II sääntelee, mitkä riskit vakuutusyhtiön vakavaraisuuspääomaa laskettaessa on otettava huomioon.

Vakavaraisuuspääoman riittävyyttä tarkastellaan usein sitä vastaavan tappiojakauman avulla [121 2.1]. Luvussa 3 annetaan esimerkkejä tappiojakauman soveltamisesta, joten tässä yhteydessä esitetään pelkästään tappiojakauman käsitteen määritelmä. Tarkastellaan sijoitussalkkua, joka koostuu erilaisista sijoituksista, saatavista ja velkaeristä. Salkun erien arvoihin sisältyy riskejä arvon kehittymisen ja saatavien takaisin saamisen suhteen. Vakuutusyhtiön taseen tärkein velkaerä on vastuuvelka, jonka määrään sisältyy epävarmuutta vakuutusyhtiön tulevaisuudessa maksettavien korvausten ja eläkkeiden määrien satunnaisvaihtelujen takia. Velkaerät lasketaan salkun arvoon negatiivisina. Salkun käypä arvo hetkellä t on $V(t)$ ja aikaperiodin, esimerkiksi yhden vuoden, kuluttua satunnaismuuttujan arvo on $V(t+\Delta)$. Salkun tappio aikaperiodin kuluttua on

$$L_{[t,t+\Delta]}=-(V(t+\Delta)-V(t)).$$

Varojen ja velkojen erotuksen, eli vakavaraisuuspääoman, tappiojakaumasta lasketaan onko vakavaraisuuspääoma riittävä valvontaviranomaisten asettamiin vaatimuksiin tai yhtiön muihin tavoitteisiin nähden. Yleisimmin käytössä olevat menetelmät koostuvat kahdesta vaiheesta, ensin määritellään kunkin riskiryhmän tappiojakauma ja riskimitta ja sen jälkeen yhdistetään tulokset yhdeksi koko yhtiön tilaa kuvaavaksi tappiojakaumaksi. Samoja menetelmiä voidaan käyttää pääoman allokointiin, hajautusetujen laskentaan ja vakuutustuotteiden hinnoitteluun, mutta tässä esityksessä pääpaino on vakavaraisuuspääoman riittävyydellä.

Laskettaessa vakavaraisuuspääoman riittävyyttä tappiojakaumasta on laskennan aluksi kiinnitettävä, mitä riskimittaa, todennäköisyyskynnystä ja aikahorisonttia laskennassa käytetään. Yhtiön ulkoiset kriteerit voivat olla esimerkiksi lainsäädännöllisiä tai luokituslaitosten määrittelemiä; esimerkiksi AA-luottoluokituksen mukaisen yhtiön on täytettävä luottoluokkaa vastaavat ehdot. Luottoluokitusten mukaisia yhtiöitä koskevista tilastoista saadaan tietoa niiden tappiojakaumasta. Yleisimmin käytetty riskimitta on Value-at-Risk (merkitään myös VaR) ja tyypillisesti vakuutusyhtiön vakavaraisuuden kehittymistä tarkastellaan yhden vuoden aikahorisontilla.

Solvenssi II -säännöksissä vakavaraisuuspääomavaatimuksen todennäköisyyskynnykseksi asetetaan 99,5 %. Vakuutusyhtiöllä on oltava riittävästi varallisuutta, jotta sillä on 99,5 % todennäköisyys kyetä suoriutumaan velvoitteistaan yhden vuoden kuluttua; toisin sanoen todennäköisyys joutua maksukyvyttömäksi ei ole suurempi kuin 0,5 % 12 kuukauden sisällä. Määrä jolla koko yhtiölle laskettu 99,5 % todennäköisyystasoa vastaava vakavaraisuus-pääomavaatimus poikkeaa riskiryhmien vakavaraisuuspääomavaatimusten summasta on hajautusetua. Hajautusedun mittana voidaan käyttää suhteellista kaavaa (1), jossa riskiryhmän i vakavaraisuuspääomavaatimus on EC_i ja koko yhtiön yhdistetty vakavaraisuuspääomavaatimus on EC_T . Hajautusetu on käytännössä yleisesti 25 % – 50 % [146].

$$\frac{\sum EC_i - EC_T}{\sum EC_i} = 1 - \frac{EC_T}{\sum EC_i} \tag{1}$$

Solvenssi II muodostuu kolmesta pilarista [176, 177]. Ensimmäinen pilari sisältää määrällisiä säännöksiä, kuten varojen ja velkojen arvostamista, vastuuvelkaa, omaan varallisuuteen kuluvien erien luokittelua ja vakavaraisuutta koskevia säännöksiä. Pääomavaatimukset jakaantuvat kahteen tasoon, vakavaraisuuspääomavaatimuksiin (SCR = Solvency Capital Requirements) ja vähimmäispääomavaatimuksiin (MCR = Minimum Capital Requirements). Ensimmäinen näistä on riskiperusteinen vaatimus, ja vakavaraisuuspääomavaatimusrajan alitus johtaa valvontaviranomaisten puuttumiseen yhtiön toimintaan. Vähimmäispääomavaatimuksen on vastattava omien varojen määrää, jonka alittuessa vakuutuksenottajiin ja edunsaajiin kohdistuisi kohtuuton riski, jos vakuutusyhtiön sallittaisiin jatkaa toimintaansa. Solvenssi II sallii kaksi vaihtoehtoista tapaa laskea vakavaraisuuspääomavaatimus: standardimalliin tai yhtiön sisäiseen malliin perustuva laskenta. Vakavaraisuuspääomavaatimuksen on katettava kaikki vakuutusyhtiön tai jälleenvakuutusyhtiön mitattavissa olevat riskit ja mallissa otetaan huomioon myös riskejä laimentavat tekijät, kuten jälleenvakuutus. Solvenssi II:n toinen pilari sisältää laadullisia vaatimuksia kuten riskien hallintaa ja myös valvontaviranomaisten toimintaa koskevia säännöksiä. Kolmas pilari sisältää raportointia ja yhtiön tietojen julkaisemiseen liittyviä säännöksiä.

Riskien mallintamisen lähtökohtana ovat riskien (tarkemmin riskiryhmien) tappiojakaumat ja niiden riippuvuusrakenteet, jotka yhdistävät riskiryhmien tappiojakaumat koko yhtiön tappiojakaumaksi. Riskiryhmien tappiojakaumat ovat tässä mielessä yhteisjakauman reunajakaumia. Riskien riippuvuuksien realistinen mallintaminen on tärkeää, koska puutteellinen malli voi johtaa liian optimistiseen kuvaan yhtiön tilanteesta.

Riskien riippuvuus toisistaan

Riskien keskinäinen riippuvuus on monimutkainen ilmiö eikä ongelmaan ole esitetty yleispätevää ratkaisua. Riippuvuudet voivat syntyä monien makrotaloudellisten muutosten seurauksena. Esimerkiksi inflaatio, korot, valuuttojen vaihtokurssit ja osakkeiden arvot vaikuttavat taseen kummallakin puolella: varoihin ja velkoihin. Eräät riippuvuudet varallisuusarvoihin ovat ilmeisiä, kuten korkojen vaikutus bondien arvoihin ja inflaation vaikutus osakkeiden arvoihin, mutta lisäksi monen muunkin tyyppiset riippuvuudet vaikuttavat yhtiöiden varoihin ja vastuisiin. Inflaation taso vaikuttaa vakuutusyhtiön maksamien korvausten määrään ja tulevaisuudessa maksettavien korvausten varalla olevien varausten arvoon. Korko vaikuttaa suoraan kassavirtojen nykyarvoon ja toisaalta korkoa käytetään usein vakuutussyklin vaihetta ohjaavana tekijänä.

Eräät riippuvuudet eivät liity makrotaloudellisiin tekijöihin vaan riippuvat muista vakuutusyhtiön toimintaympäristössä vaikuttavista tekijöistä. Esimerkiksi suuren luonnonkatastrofin, kuten pyörremyrskyn, seurauksena näennäisesti erillisissä vakuutusryhmissä, omaisuus-, vahinko- ja henkivakuutuksessa, voivat korvausmäärät nousta yhtä aikaa.

Tilastollista riippuvuutta kuvataan yleisesti korrelaatiokertoimella. Useissa tapauksissa korrelaatiokerroin ei ole riittävä monien erilaisten riskien välisten riippuvuuksien esittämiseksi, vaan tarvitaan tarkempaa tietoa riippuvuusrakenteiden luonteesta. Korrelaatiokertoimen sijaan tarvitaan muunlaista riippuvuusrakenteen kuvaamista, kun riskien väliset riippuvuudet muuttuvat tappiojakauman tappioiden suuruuden mukaan. Esimerkiksi on mahdollista että riskien A ja B välillä on keskimäärin korrelaatio 50 %, mutta ääriolosuhteissa voi korrelaatio olla lähellä 100 %. Mahdollisimman hyvin reaalimaailmaa kuvaavaa mallia varten on mitattava havaittuja korrelaatioita erilaisissa olosuhteissa ja määrättävä riittävän kuvaavan mallin rakenneparametrit mahdollisimman todenmukaisesti.

Korrelaatio kuvaa vain yhtä riippuvuuden tyyppiä. Se antaa kahden satunnaismuuttujan lineaarisen riippuvuuden tason. Satunnaismuuttujat riippuvat usein toistaan lineaarista riippuvuutta monimutkaisemmalla tavalla, jolloin pelkästään korrelaatiokertoimeen perustuva laskenta voi johtaa harhaanjohtaviin tai virheellisiin johtopäätöksiin. Eräs syy korrelaatiokertoimen suosioon finanssialalla on varianssi-kovarianssimatriisiin ja normaalijakaumaan, tai yleisemmin elliptisiin jakaumiin, perustuvan modernin portfolioteorian (eng. modern portfolio theory) saama laaja asema. Kuitenkin normaalijakauman, ja usein myös elliptisten jakaumien, on todettu kuvaavan heikosti havaittuja riskien jakaumia ja niiden riippuvuuksia. Korrelaatio on yksi lukuarvo eli skalaari, joten senkään takia korrelaatio ei ole yksinään riittävä riippuvuuden mallintamiseen. Markkinoiden ääritilanteissa on havaittu oleellisesti suurempia riskien välisiä korrelaatioita kuin historialliset korrelaatioiden keskiarvot ovat olleet.

Satunnaismuuttujien X ja Y välinen korrelaation arvo on 1 jos ja vain jos on olemassa vakiokertoimet a ja b siten, että $Y=a+bX$. Jos satunnaismuuttujat ovat riippumattomia, korrelaatio on 0, mutta päinvastainen väite ei pidä paikkaansa. Kuitenkin erikoistapauksessa, kun X ja Y ovat yhteisjakaumaltaan normaalijakautuneita, korrelaation arvosta 0 seuraa riippumattomuus. Lineaarinen korrelaatio ρ ei ole invariantti mielivaltaisen epälineaarisen muunnoksen T suhteen: $\rho[T(X),T(Y)]\neq\rho[X,Y]$. Tämä on lineaarisen korrelaation vakava heikkous. Suorittamalla epälineaarinen muunnos T satunnaismuuttujiin X ja Y , teemme ainoastaan uudelleen skaalauksen satunnaismuuttujien jakaumiin; satunnaismuuttujien riippuvuussuhteet eivät muutu. Kuitenkin korrelaatiokerroin muuttuu epälineaarisessa muunnoksessa.

Yhteenvetona esitetään pelkän korrelaatiokertoimen käytön aiheuttamia heikkouksia [146]:

a) Korrelaatio on skalaariluku. Sillä ei ole mahdollista kuvata riittävästi riskien keskinäisten riippuvuuksien rakenteita.

b) Korrelaatiokertoimen arvoalue riippuu riskien tappiojakaumista. Kaikki arvot välillä [-1,1] eivät ole kaikilla jakaumilla mahdollisia. Tästä seuraa, että mallia ei ole kaikissa tapauksissa mahdollista kalibroida tarvittaviin korrelaatioarvoihin.

c) Täydellisesti positiivisesti riippuvilla riskeillä ei ole aina korrelaatiokerroin 1, ja täydellisesti negatiivisesti riippuvilla riskeillä ei ole aina korrelaatiokerroin -1.

d) Korrelaatiosta 0 ei seuraa satunnaismuuttujien riippumattomuus.

e) Korrelaatio ei ole invariantti monotonisissa muunnoksissa. Esimerkiksi satunnaismuuttujien $\log(X)$ ja $\log(Y)$ välinen korrelaatio ei yleensä ole sama kuin satunnaismuuttujien X ja Y välinen korrelaatio.

f) Korrelaatio on määritelty vain kun riskien varianssit ovat äärellisiä. Sen takia korrelaatio ei sovellu paksuhäntäisille jakaumille, joiden varianssi on ääretön.

Järjestyskorrelaatio on vaihtoehto lineaariselle korrelaatiolle riippuvuuden mittaamiseen. Järjestyskorrelaatioiden yleisimmät tyypit ovat Spearmanin kerroin (ρ_S) ja Kendallin Tau-korrelaatio (τ).

Spearmanin kerroin satunnaismuuttujille X ja Y lasketaan seuraavasti:

$$\rho_S[X,Y]=\rho[F_X(X),F_Y(Y)] ,$$

missä F_X ja F_Y ovat satunnaismuuttujien X ja Y kertymäfunktiot.

Järjestyskorrelaatiolle on voimassa invarianssi epälineaaristen muunnosten T suhteen:

$$\rho_{rank}[T(X),T(Y)]=\rho_{rank}[X,Y] .$$

Tämä on siis voimassa sekä Spearmanin kertoimelle että Kendallin Taulle. Järjestyskorrelaatio mittaa miten hyvin mielivaltainen monotoninen funktio kuvaa kahden satunnaismuuttujan riippuvuutta tekemättä minkäänlaisia oletuksia satunnaismuuttujien jakaumista. Sen takia on tarpeen tietää ainoastaan satunnaismuuttujien ilmentymien järjestys, ei niiden varsinaisia arvoja. Järjestyskorrelaatio ei siten ole satunnaismuuttujien reunajakaumien funktio. Tästä johtuu, että jakaumien yhdistämisessä käytettävät kopulat (kopuloita käsitellään myöhemmin) voidaan kalibroida havaitusta aineistosta laskettujen järjestyskorrelaatioiden avulla. Edellä esitetyistä lineaarisen korrelaation heikkouksista kohdat a) ja d) ovat myös Spearmanin korrelaation ja Kendallin Taun heikkouksia. Voidaan konstruoida satunnaislukuja, jotka ovat vahvasti toisistaan riippuvia, mutta niiden välinen järjestyskorrelaatio on pieni tai nolla.

Kendallin Tau mittaa kahden satunnaismuuttujan X ja Y taipumusta muuttua samansuuntaisesti (tai vastakkaisiin suuntiin). Kun satunnaismuuttujien ilmentymien erotuksilla (X_j-X_i) ja (Y_j-Y_i) on sama etumerkki sanotaan, että ilmentymien parit ovat konkordantteja ja kun etumerkit ovat vastakkaiset sanotaan, että parit ovat diskordantteja. Oletetaan, että havaintojen lukumäärä on n . Olkoon C konkordanttien parien lukumäärä ja D diskordanttien parien lukumäärä. Kendallin S :n ($S=C-D$) avulla määritellään parien kokonaismäärällä normitettu Kendallin Tau [146]:

$$\tau=\frac{S}{\frac{1}{2}n(n-1)} .$$

Edellä tarkastellut korrelaatiota kuvaavat mitat eivät käsittele riippuvuuksia ehdollistettuina muille riskeille. Käytännössä finanssikriiseissä tai luonnonkatastrofeissa, kuten hirmumyrskyjen ja maanjäristysten seurauksena, riskien väliset riippuvuudet tyypillisesti kasvavat. Tällaista ilmiötä kutsutaan häntäriippuvuudeksi (eng. tail dependency).

Häntäriippuvuudelle luonteenomaista on, että yksi äärimmäinen tapahtuma tai tapahtumien sarja aiheuttaa sellaisten riskien yhtäaikaisen realisoitumisen, joita normaaleissa olosuhteissa on totuttu pitämään lähes riippumattomina tai alhaisen korrelaation riskeinä. Poikeuksellisissa taloudellisissa olosuhteissa riskien riippuvuusrakenteet ovat erilaisia verrattuna normaaleihin markkinatilanteisiin. Pari esimerkkiä epänormaaleista tapahtumista, jotka ovat tuoneet esille riskien välisiä riippuvuuksia, ovat Word Trade Centerin 9/11 lentokoneiskut ja meneillään oleva vuosia kestänyt finanssikriisi. Pörssikurssien voimakkaat vaihtelut aiheuttavat myös riskien leviämistä laajemmalle kuin arvopaperisijoitusten arvojen heikkeneminen. Haasteena hyvälle vakavaraisuuspääoman mallille on saada sisällytettyä malliin keskeisimmät piirteet, jotka kuvaavat lukuisten reaalimaailman riskien monimutkaisia riippuvuuksia. Mallin tulisi kuitenkin olla riittävän yksinkertainen, jotta se olisi käytännössä hyödyllinen.

Reaalimaailman ja matemaattisen mallin eroavuuksilla on taipumus korostua äärimmäisissä olosuhteissa. Tämä liittyy kalibrointiongelmiin ja rakenteellisiin muutoksiin, joissa poikkeusolosuhteissa ilmiöiden säännönmukaisuudet voivat muuttua. Jos ääriolosta olisi käytettävissä havaintotietoa, olisi mahdollista konstruoida häntäriskimalli. Ääriolosuhteet ovat kuitenkin harvinaisia, ja mallintamiseen tarvittavaa tietoaineistoa ei ole lainkaan tai sitä ei ole riittävästi. Vaikka pitkältä historialliselta aikaväliltä kerätty ääriolosuhteita koskeva havaintoaineisto olisikin määrällisesti riittävää, aineisto ei ehkä kuvaa riittävän hyvin tulevaisuutta, koska vakuutettujen riskien ja markkinoiden riippuvuuksissa on tapahtunut aineiston keräämisen aikana muutoksia. Edelleen samanlaisia tai uudenlaisia muutoksia tulee tapahtumaan tulevaisuudessa aikajaksolla, jota mallilla on tarkoitus kuvata. Esimerkkejä riippuvuuksien muutoksista ovat markkinariskien globalisoituminen ja vakuutusten jälleenvakuutuksen lisääntyminen. Lisäksi taloudellisten yhteyksien sekä finanssi- ja vakuutustuotteiden monimutkaistuminen lisäävät riippuvuuksia varsinkin ääriolosuhteissa.

Edellä selitetyn monimutkaisten riippuvuuksien todellisuudessa on olemassa ainakin kolme eri lähestymistapaa:

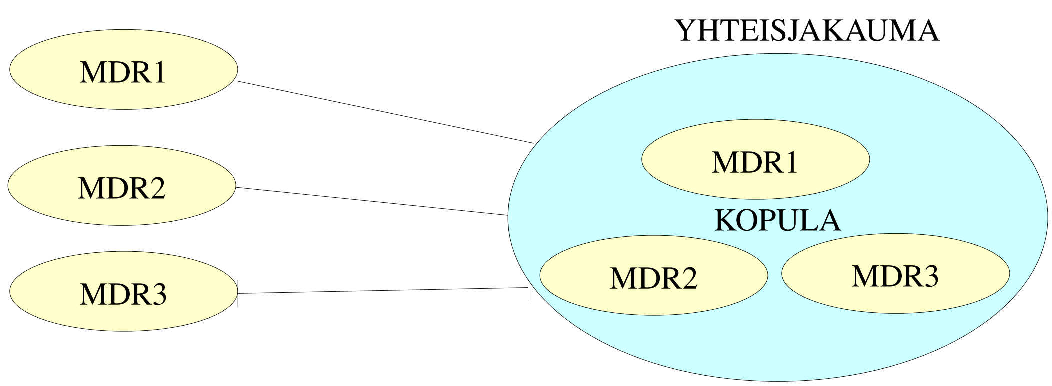
- Käytetään korrelaatiomatriisia, jolloin varianssi-kovarianssikertoimien avulla yhdistetään riskipääomia koko yhtiön vakavaraisuuspääomaksi.
- Käytetään kopuloita.
- Rakenteellisissa malleissa simuloidaan yleisiä riskitekijöitä, esimerkkinä inflaatio. Riskien jakaumat ja keskinäiset rakenteet määräytyvät yleisten muuttujien ja muiden riskien välisten riippuvuuksien kautta. Esimerkki rakenteellisesta mallista on Wilkien malli [163].

Kopulat

Kopulat ovat saamassa tunnustusta kansainvälisten vakuutusasiantuntijoiden ja valvontaorganisaatioiden piirissä parhaimpiin käytäntöihin kuuluvana työkaluna. Tämä edistää matemaattisen menetelmän leviämistä ja hyväksyttävyyttä kansainvälisesti. Kopuloiden käytöllä on monia hyötyjä. Ne ovat luontevia vakuutus- ja finanssimatematiikan mallinnusprosessissa, jossa monissa tapauksissa määritellään kunkin riskin reunajakaumat ja vasta sen jälkeen määritellään yhteisjakauma.

Kopuloilla voi kuvata riskien riippuvuusrakennetta paremmin kuin pelkällä korrelaatiomatriisilla on mahdollista. Korrelaatiomatriisia käytettäessä tappiojakauma oletetaan normaalijakautuneeksi. Kopuloissa voidaan käyttää realistisempia jakaumia. Kopuloilla riippuvuus ilmaistaan mallintamiseen sopivan ja tilannetta kuvaavan tappiojakauman ja sen parametrien avulla. Kopulaa käyttäen muodostettu usean muuttujan tappiojakauma mahdollistaa tappioarvioiden laskemisen halutulla kvantiililla, vastaavalla tavalla kuin korrelaatiomatriisiin perustuvassa menetelmässä. Suurin osa kopulajakaumista on helposti simuloitavissa Monte Carlo -menetelmillä.

Tappiojakauma voidaan mallintaa jakamalla tehtävä kahteen osaan. Ensiksi kuvataan kutakin riskiä erikseen määrittelemällä riskien reunajakaumat. Toisessa osassa määritellään riskien riippuvuussuhteet, mikä tarkoittaa yhteisjakauman selvittämistä. Kopula yhdistää erilliset riskijakaumien reunajakaumat usean muuttujan yhteisjakaumaksi (Kuva 1). Kopula itsessään on jakaumafunktio.



Kuva 1. Kopula yhdistää reunajakaumat (MDR1,MDR2 ja MDR3) yhteisjakaumaksi.

On olemassa runsas joukko kopuloita, joilla on erilaisia matemaattisia ominaisuuksia. Kopulat ovat joustavia siten, että riskejä joilla on erilaisia reunajakaumia voidaan yhdistää erilaisilla kopulajakaumilla. Kullakin kopulalla voidaan säätää riskien riippuvuusrakennetta kopulajakauman omilla parametreilla. Eräs lähestymistapa on valita riippuvuuden kuvaamiseen yksinkertainen malli, esimerkiksi korrelaatiomatriisi ja riskien jakaumat asymmetrisiksi riittävän paksuhäntäisiksi jakaumiksi. Yleinen käytäntö on yhdistää Gaussin kopulalla riskien jakaumat yhteisjakaumaksi. Monissa tilanteissa Gaussin kopula ei kuitenkaan ole riittävä, vaan tarvitaan Gaussin kopulaa monipuolisemman kopulan malli. Kopulan valintaan vaikuttaviin tekijöihin palataan jäljempänä.

Kopuloihin perustuvassa vakuutusyhtiön riskien mallintamisessa voidaan myös todeta joitakin heikkouksia. Monessa tapauksessa ei ole käytettävissä riittävästi havaintoaineistoa, jotta kopulan parametrit pystyttäisiin riittävän luotettavasti kalibroimaan. Tämä pätee varsinkin jakauman häntäosassa. Äärimmäiset tapahtumat, eli häntäosan tapahtumat, ovat harvalukuisia. Eri riskien yhdistelmien tapahtumat ovat vieläkin harvinaisempia ja niistä ei yleensä saada riittävästi havaintoja, jotka yksinään riittäisivät parametrien määräämiseen. Kopuloihin perustuva talousmalli voi tuntua "mustalta laatikolta" ("Black Box"), kun matemaattinen rakenne on vaikeasti hahmotettava ja osittain joudutaan käyttämään asiantuntija-arvioihin perustuvia parametrien arvoja. Laskennan tulosten välittäminen kaikille sidosryhmille voi olla vajavaista. Kopuloilla muodostettavat mallit ovat yleensä staattisia, jolloin laskennan tulokset saadaan määrätyn aikahorisontin päähän. Realistisempi malli voisi olla stokastisiin prosesseihin tai aikasarjoihin perustuva dynaaminen mallinnusmenetelmä.

Tarkastellaan kahta satunnaismuuttujaa X ja Y. Kummankin satunaismuuttujan jakauma voidaan erikseen esittää reunajakaumana (eng. marginal distribution function), joka matemaattisesti voidaan lausua joko tiheysfunktiona (eng. probability density function) tai kertymäfunktiona (eng. cumulative density function). Sekä reunajakauman tiheysfunktion että kertymäfunktion kuvaaja on kaksiulotteinen. Edellisen lisäksi on mahdollista, että käytössä on satunnaismuuttujien X ja Y yhteisjakauma, josta saadaan satunnaislukuparien $(X.Y)$ jakauma eli ilmentymien todennäköisyydet. Yhteisjakauma muodostaa siis kolmiulotteisen pinnan. Jos yhteisjakauma on tiedossa, tilanteesta on olemassa paras mahdollinen informaatio sattunaismuuttujien muutoksista ja riippuvuusrakenteesta. Kuitenkin käytännössä on lähes mahdotonta määritellä kaikkien riskijakaumien usean muuttujan yhteisjakaumaa.

Seuraavaksi esitetään kopulan matemaattinen määritelmä (Kopulan määritelmä ja Sklarin lause esitetään toisen kerran yksityiskohtaisemmin luottoriskejä käsittelevässä luvussa 5). Kopula on usean muuttujan yhteisjakauma joukossa $[0,1]^n$ siten, että jokainen reunajakauma on tasainen jakauma joukossa $[0,1]$. Siis kopula C on jakaumafunktio $P(U_1 \leq u_{1,.} .., U_d \leq u_d)$ siten, että jokaisella k on voimassa $P(U_k \leq u) = u$ kaikilla $u \in [0,1]$. Toisin sanoen $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ on kopula, jos seuraavat kolme ehtoa ovat voimassa:

1) $C(\bar{u}) = 0$, kun $\bar{u}$:lla on vähintään yksi 0-elementti,
2) $C(\bar{u}) = u$, kun $\bar{u} = (1, \ldots, 1, u, 1, \ldots, 1)$ ja
3) $C(\bar{u})$ on n-kasvava.

Kopuloita koskeva Sklarin lause on keskeinen kopuloiden matematiikassa: Jos $F(x_1, \ldots, x_n)$ on yhteisjakaumafunktio, jolla on reunajakaumafunktiot $F_1(x_1),\dots,F_n(x_n)$, on olemassa kopula C siten, että jokaisella $\bar{x}\in\mathbb{R}^n$ on $F(x_1,\dots,x_n)=C(F_1(x_1),\dots,F_n(x_n))$. Lisäksi, jos $F_1(x_1),\dots,F_n(x_n)$ ovat jatkuvia, C on yksikäsitteinen. Sklarin lause antaa matemaattisen perusteen sille, että kopula yhdistää erilliset riskien reunajakaumat yhteisjakaumaksi.

Lisäksi kopulalla on invarianssiominaisuus: Jos C on satunnaismuuttujien $(X_1,\dots,X_n)$ kopula, jokaiselle aidosti kasvavalle muunnosten joukolle $T_1,\dots,T_n$ on voimassa, että C on satunnaismuuttujien $(T_1(X_1),\dots,T_n(X_n))$ kopula. Sanallisesti invarianssiominaisuus voidaan lausua: Satunnaisvektorin kopula, jolla on jatkuvat reunajakaumafunktiot, on invariantti aidosti kasvavien satunnaisvektorin elementtien muunnosten muodostamalle satunnaisvektorille. Invarianssiominaisuus on vastaava kuin järjestyskorrelaatioiden yhteydessä.

Yleisimpiä kopuloita

Seuraavaksi käsittelemme millaisia kopuloita on olemassa ja kuinka kopulan valinta olisi hyvä tehdä. Tärkeä kopuloita erottava ominaisuus on niiden käyttäytyminen häntäjakauman alueella. Sen takia määritellään ensiksi, mitä tarkoitetaan häntäriippuvuudella. Olkoon (X,Y) 2-dimensioinen satunnaisvektori, jolla on reunajakaumat F_X ja F_Y . Ylähäntäriippuvuuskerroin määritellään seuraavasti:

$$\lambda_U(X,Y)=\lim_{u\to 1} P(Y>F_Y^{-1}(u)\,|\,X>F_X^{-1}(u)) .$$

Vastaavalla tavalla määritellään alahäntäriippuvuuskerroin:

$$\lambda_L(X,Y)=\lim_{u\to 0} P(Y\le F_Y^{-1}(u)\,|\,X\le F_X^{-1}(u)) .$$

Esimerkiksi, jos (X,Y) on 2-dimensioinen satunnaisvektori, jolla on kopula C , voidaan laskea, että

$$\lambda_U=\lim_{u\to 1}\left(\frac{1-2u+C(u,u)}{1-u}\right) \text{ ja } \lambda_L=\lim_{u\to 0}\left(\frac{C(u,u)}{u}\right) .$$

Tarkastellaan yleisimmin käytössä olevia kopuloita. Gaussin kopula on d-dimensioisen normaalijakauman kopula, jolla on korrelaatiomatriisi R :

$$C_R(u)=\Phi_R^d(\Phi^{-1}(u_1),\dots,\Phi^{-1}(u_d)) .$$

Gaussin kopulan häntäriippuvuuskertoimet ovat nollia: $\lambda_U=\lambda_L=0$. Tästä seuraa, että Gaussin kopula soveltuu huonosti paksuhäntäisten jakaumien riippuvuuksien mallintamiseen.

Riskien keskinäistä positiivista riippuvuutta häntäjakauman alueella on mahdollista mallintaa t-kopulalla, koska sillä on nollasta poikkeavat häntäriippuvuuskertoimet. Parametriksi t-kopula tarvitsee vapausasteen (eng. degree of freedom) korrelaatiomatriisin lisäksi. Vapausaste säätää häntäriippuvuuden voimakkuutta: mitä alhaisempi on vapausaste sitä voimakkaampi on riippuvuus häntäjakauman alueella. Ylä- ja alahäntäriippuvuuskertoimet ovat t-kopulalla samoja, ja t-kopulajakauma on symmetrinen. Heikkoutena joissakin tilanteissa mallinnettaessa useampaa kuin kahta riskiä t-kopulalla on se, että tällä kopulalla on korrelaatiomatriisin lisäksi vain yksi parametri, vapausaste, joka määrää häntäjakaumariippuvuuden. Kaikilla riskien pareilla on sama riippuvuus häntäjakaumassa ja se ei usein ole realistista käytännön tilanteessa. Rajoitteen voi ratkaista esimerkiksi yleistämällä t-kopula kopulaksi, josta käytetään nimitystä IT-kopula [121].

Eräs usein vahinkovakuutusriskien mallintamisessa käytetty kopulaperhe on Archimedeen kopulat. Yleisimmät niistä ovat Gumbelin ja Claytonin kahden muuttujan kopulat. Archimedeen kopuloilla on kyky mallintaa häntäriippuvuuksia. Archimedeen kopulat ovat jakaumaltaan asymmetrisia toisin kuin Gaussin ja t-kopula. Toinen eroavuus on, että Archimedeen kopuloita ei johdeta Sklarin lauseen avulla usean muuttujan jakaumista. Archimedeen kopulat eivät myöskään käytä korrelaatiomatriisia parametrina, vaan niiden häntäriippuvuuden määrää kopulaparametri. Seuraavassa kaavassa on annettu Gumbelin kopula, jonka parametri on θ sekä vastaava ylähäntäriippuvuuskerroin λ_U ja alahäntäriippuvuuskerroin λ_L :

$$C_\theta(u_{1,}u_2)=\exp(-[(-\ln u_1)^\theta+(-\ln u_2)^\theta]^{\frac{1}{\theta}}),\theta\geq 1,\lambda_U=2-2^{\frac{1}{\theta}},\lambda_L=0.$$

Vastaavat tiedot Claytonin kopulasta ovat:

$$C_\theta(u_{1,}u_2)=(u_1^{-\theta}+u_2^{-\theta}-1)^{\frac{1}{\theta}},\theta>0,\lambda_U=0,\lambda_L=2^{\frac{-1}{\theta}}.$$

Mallinnuksessa käytettävän kopulan valinta on oleellinen vaihe todellisuutta kuvaavan mallin kehittämisessä. Kaikkein yleisin kopula vakavaraisuuspääoman mallintamisessa on Gaussin kopula. Kuten aikaisemmin todettiin, sen puutteena on, että se ei kuvaa riittävästi äärimmäisten tapahtumien häntäriippuvuuksia. Gaussin kopulaa parempi valinta saattaa olla jokin muu kopula, esimerkiksi t-kopula tai Archimedeen perheen Gumbelin, Claytonin tai Frankin kopula. Vakavaraisuuspääoman mallintamisessa Gaussin kopulan jälkeen t-kopula on ilmeisin tarkasteltava vaihtoehto, tai mahdollisesti t-kopulan yleistys IT-kopula. Siinäkin tapauksessa, että päädytään t-kopulaan, tehtäväksi jää määrätä korrelaatiomatriisi ja äärimmäisten tapahtumien häntäriippuvuuden voimakkuuden määräävä vapausasteparametri.

Riskijakaumien yhdistäminen

Erilaisten riippuvuusrakenteiden tarkastelun tarkoituksena on kehittää riskit yhdistävä kokonaisriskiä kuvaava malli, jonka lopputuloksena saadaan vakavaraisuuspääoman tasovaatimuksia pankeille ja vakuutusyrityksille. Tyypillistä yrityksen vakavaraisuuspääoman laskemisessa on määrittää erillisten riskien osuudet ja yhdistää ne kokonaisriskin määräämäksi vakavaraisuuspääomavaatimukseksi. Tämän menettelyn mukaisia ovat neljä seuraavan listan menetelmistä. Seuraavaksi on listattu kokonaisriskin vakavaraisuuspääomavaatimuksen laskentamenetelmiä [146]:

1) Yksinkertainen riskien vakavaraisuuspääomavaatimusten yhteenlasku, jossa ei oteta huomioon hajautushyötyjä.
2) Riskien vakavaraisuuspääomavaatimusten yhteenlasku ottamalla huomioon hajautushyödyt kiinteällä kertoimella.
3) Varianssi-kovarianssimatriisiin perustuva vakavaraisuuspääomavaatimusten yhdistäminen.
4) Kopuloihin perustuva yhteisjakaumasta laskettava yrityksen vakavaraisuuspääoman laskenta.
5) Rakenteellinen mallintaminen, joka perustuu yleisiin markkinoiden riskitekijöihin.

Rakenteellisessa mallintamisessa taustalla vaikuttavat tekijät tunnistetaan ja niiden väliset vuorovaikutukset mallinnetaan. Taustatekijöiden vaikutus tarkasteltaviin riskeihin perustuu matemaattisiin riippuvuuksiin tarkasteltavien riskien ja taustatekijöiden välillä. Rakenteellista mallintamista käytetään usein yhdistettynä muiden edellä listattujen menetelmien kanssa kuten varianssi-kovarianssimatriisiin tai kopuloihin perustuvan menetelmän kanssa.

Mainituilla menetelmillä on kaikilla puutteita, jotka mallintajan tulee ottaa huomioon. Malleissa on eroja seuraavien ominaisuuksien suhteen [146]:

- Mallin tarkkuus, esimerkiksi paksuhäntäisten jakaumien ja häntäriippuvuuksien osalta
- Menetelmän johdonmukaisuus
- Laskennan tarkkuus ja havaintoaineiston saatavuus riittävän realistisen kalibroinnin tekemiseksi
- Mallin ymmärrettävyys ja tulosten selitettävyys
- Mallin joustavuus erilaisten riskien ja taloudellisten olosuhteiden suhteen
- Resurssien tarve mallin kehittämisessä ja laskennassa

Seuraavaksi tarkastellaan erikseen kutakin edellä listattua usean riskin kokonaisvakavaraisuuspääoman laskennan menetelmää. Ensimmäisenä mainittiin yksinkertainen yrityksen riskien vakavaraisuuspääomavaatimusten summaaminen ottamatta huomioon hajautushyötyjä. Käytännössä menetelmä antaa tyypillisesti ylärajan koko yrityksen vakavaraisuuspääomavaatimukselle. Matemaattisesti summausmenetelmän riippuvuusoletus on ekvivalentti täysin riippuville riskeille, eli riskien välinen korrelaatio on yksi. Menetelmän hyöty on, että havaintodataa ei tarvita riippuvuusrakenteen mallin kalibroimiseksi. Laskenta on yksinkertainen ja tulosten esittäminen ymmärrettävästi on helppoa. Koska menetelmä on konservatiivinen, se tyypillisesti yliarvioi tarvittavan pääoman ja voi aiheuttaa yritykselle ylimääräisiä kustannuksia varallisuuden riittävän turvaavasta säilyttämisestä. Menetelmä ei sisällä riskien vuorovaikutusmekanismeja, mikä ei pidä yhtä reaalimaailman kanssa.

Toisena menetelmänä listalla mainittiin riskien vakavaraisuuspääomien summaaminen ottamalla samalla huomioon hajautushyöty vähentämällä summaa kiinteällä prosenttiosuudella. Hyödyt ovat samoja kuin suorassa summausmenetelmässä ja lisäksi hajautushyödyt huomioidaan karkealla tavalla. Tämäkään menetelmä ei huomioi riskien keskinäisiä riippuvuuksia eikä kiinteä prosenttimäärä ole riittävä mallintamaan riskeissä tapahtuvia muutoksia eikä epälineaarisia riippuvuuksia.

Varianssi-kovarianssimatriisiin perustuva menetelmä sisältää paremman riskien keskinäisten riippuvuuksien käsittelyn, ja kahden riskin muodostaman parin väliset korrelaatiot voivat olla eri suuria. Kokonaishyöty hajauttamisesta määräytyy pääosin riskien välisistä korrelaatioista. Varianssi-kovarianssimenetelmän käytössä on useita huomioitavia seikkoja. Suuret finanssialan yritykset muodostavat usein ryhmän, joka koostuu useasta liiketoimintahaarasta tai organisaatioyksiköstä. Riskien luokittelun kannalta yritysryhmää voidaan katsoa kahdesta näkökulmasta: riskien taloudellisen luonteen mukaisesti vakuutus-, markkina-, luotto- ja operatiivisten riskien kannalta tai organisaation ja yhtiölakien mukaisina yksiköinä.

Riskiryhmien mahdollinen jakaminen hienojakoisemmalle tasolle on tärkeä suunnittelukohde. Luotettava korrelaatioparametrien arvojen määrääminen havaintoaineistosta vaikeutuu sitä enemmän, mitä hienojakoisemmalle tasolle riskit jaetaan. Mitä tarkemmalle tasolle riskit ryhmitellään sitä alhaisempi on riskiryhmän sisäinen hajautusetu ja sitä suurempi riskiryhmien välinen hajautusetu. Toinen tapa riskiryhmien tarkasteluun on muodostaa alemman tarkkuustason riskeistä vastaavasti alemman tason kovarianssimatriisit, jolloin niistä muodostuu sisäkkäinen rakenne. Esimerkkinä on Solvenssi II:n vahinko- ja henkivakuutusriskien kovarianssimatriisien muodostama menetelmä [142].

Luetteloidaan vielä varianssi-kovarianssimenetelmän hyödyt ja heikkoudet. Menetelmä on tarkempi kuin osariskeittäin laskettujen vakavaraisuuspääomien summausmenetelmät. Menetelmä on suhteellisen yksinkertainen, ymmärrettävä ja läpinäkyvä. Se mahdollistaa tyypillisesti korrelaatiomatriisin elementtien arvojen sopimisen käytettäväksi oletusparametreina vakuutusalalla ja pankkialalla. Sisäkkäinen korrelaatiomatriisien menetelmä mahdollistaa uusien riskien, liiketoimintayksiköiden tai alirakenteiden lisäämisen malliin helposti. Koska korrelaatio on yleisesti tunnettu riippuvuutta kuvaava matemaattinen käsite, varianssi-kovarianssimenetelmän tulosten esittäminen sidosryhmille ja yhtiön johdolle on helpompaa.

Varianssi-kovarianssimenetelmän heikkoutena on että vain harvoin on saatavilla riittävän luotettavia riskien välisten korrelaatioiden arvoja. Ainoastaan markkinariskeihin liittyviä havaintotietoja on jonkin verran. Korrelaatioita joudutaan arvioimaan asiantuntija-arvioilla. Varianssi-kovarianssimenetelmän taustalla on oletus normaali- tai yleisemmistä elliptisistä jakaumista, mikä on joidenkin riskien kohdalla puutteellinen oletus. Varianssi-kovarianssimenetelmä aliarvioi vinojen jakaumien vaikutusta eikä ota huomioon mahdollista voimakkaampaa riippuvuutta äärimmäisissä olosuhteissa häntäjakauman alueella. Korrelaatiokerrointen arvot ovat herkkiä riskien reunajakaumafunktioiden valinnalle ja parametreille. Matemaattisena ehtona korrelaatiomatriisin on oltava positiivisesti semidefiniitti, mitä oletusta ei useinkaan käytännössä tarkisteta; ja on mahdollista, että laskenta johtaa epäjohdonmukaisiin lopputuloksiin. Pelkästään varianssi-kovarianssimatriisiin perustuvalla vakavaraisuuspääomanlaskennalla ei ole mahdollista sisällyttää malliin epälineaarisia riippuvuussuhteita tai ilmiöitä.

Seuraavaksi kehittyneempi menetelmä perustuu kopuloihin, jolloin tilanteeseen sopivalla kopulajakaumalla yhdistetään marginaalijakaumat yhteisjakaumaksi. Menetelmä on joustavampi kuin varianssi-kovarianssimenetelmä. On valittavissa suuri joukko erilaisia kopuloita, joilla on erilaiset matemaattiset ominaisuudet symmetrisyyden ja häntäjakaumariippuvuuden osalta. Kopuloiden avulla on kehitettävissä realistisempi malli erityisesti häntäriippuvuuden voimakkuudelle. Riippuvuussuhteissa on mahdollista mallintaa epälineaarisuuksia ja muita välillisiä riippuvuuksia. Kopuloita on melko helppo simuloida Monte Carlo -menetelmillä. Kopuloiden käyttö on vaativaa ja mallintamisessa on useita huomioitavia näkökulmia. Kopulan parametrien määrääminen on vaikeaa, koska luonteensa mukaisesti yhteisjakauman häntäalueen tappiohavainnot ovat harvinaisia. Jokaiselle riskille tarvitaan mallia varten koko reunajakauma toisin kuin varianssi-kovarianssimatriisiin perustuvassa menetelmässä tarvitaan vain yksi asianmukainen vakavaraisuuspääomavaatimuksen arvo. Riskien jaottelun alatasolta lähtevä Monte Carlo -simulointi on vaativaa erityisesti, jos riskien lukumäärä on suuri. Kopulamenetelmien tulosten kommunikointi ulkopuolisille on vaikeampaa menetelmän laajempien mahdollisuuksien ja menetelmän suhteellisen tuntemattomuuden johdosta.

Viimeisenä mainittiin rakenteellinen mallintaminen, joka pitää sisällään lukuisia eri menetelmiä. Rakenteellinen mallintaminen on intuitiivisesti houkutteleva, koska riskien välisiä riippuvuuksia mallinnetaan suorempaan kuin muissa mainituissa menetelmissä. Tyypillisesti ensin simuloidaan yleisiä markkinoiden tai talouden riskitekijöitä, joiden perusteella mallinnetaan tarkasteltavat vakuutusriskit. Riskien väliset riippuvuussuhteet tulevat yleensä mallinnetuksi hienojakoisemmalla tasolla verrattuna varianssi-kovarianssimatriisiin perustuvaan laskentaan. Aikaisemmin käsitellyt muut menetelmät poikkesivat siten, että niissä mallinnettiin kukin vakuutusriski erillään ja sen jälkeen yhdistettiin yrityksen kokonaisriskiksi. Rakenteellisessa vakavaraisuuspääomatarpeen mallintamisessa hajautushyödyt tulevat automaattisesti huomioitua mallin sisällä.

Vahinkovakuutusriskien rakenteellisessa mallintamisessa markkinasykli on ilmeinen ehdokas mallin taustamuuttujaksi. Markkinasykliä voidaan kuvailla toistuvina vuorottelevina nousuina ja laskuina vakuutusyhtiölle tulevissa vakuutusmaksuissa ja liiketoiminnan tuloksessa. Syklin piirteisiin kuuluu dynaamisen systeemin takaisinkytkentä ja yleisesti vaikuttavat taloudelliset ja sosiaaliset shokit. Kullakin liiketoiminta-alueella on tyypillisesti oma syklinen kehitys, joka on riippuvainen koko yrityksen taloudellisesta tilanteesta. Rakenteelliset mallit kehitetään usein sopivasti valitun tuottavuusmitan mukaan, esimerkkinä kokonaistappiosuhde. Kokonaistappiosuhde on vakuutusmenojen ja kulujen suhde vakuutusyhtiön tuloihin. Rakenteellinen malli voi olla staattinen tai dynaaminen. Yksinkertaisessa autoregressiivisessä mallissa kokonaistappiosuhteen reunajakauma vuonna t on riippuvainen kokonaistappiosuhteen muutamista edellisten vuosien $t-1, t-2, \ldots$ arvoista. Tarkasteltavat reunajakaumat eivät ole tässä mielessä staattisia, toisin kuin esimerkiksi kopuloihin perustuvat simulointimenetelmät, joissa riskien reunajakaumat ovat kiinteitä.

Todetaan seuraavaksi rakenteellisten menetelmien hyödyt ja heikkoudet. Teoreettiselta kannalta menetelmät tutkivat riskien keskinäisten vaikutusten perusteita ja ne ovat luonteeltaan intuitiivisia, koska reaalimaailman ilmiötä mallinnetaan sellaisenaan. Rakenteellisilla menetelmillä on mahdollista saavuttaa tarkempia tuloksia, koska ne pyrkivät mallintamaan ilmiötä ja siihen vaikuttavia ulkoisia ja yhtiön sisäisiä shokkeja. Rakenteellisia menetelmiä voi käyttää yhdessä muiden menetelmien kanssa, esimerkiksi inflaatiota voidaan käyttää kulujen ja korvausten taustamuuttujana ja samalla ottaa huomioon kulujen ja korvausten muista tekijöistä johtuvia korrelaatioita. Menetelmällä mallinnetaan epälineaarisia ilmiöitä.

Rakenteellinen mallintaminen on vaativaa, ja mallin parametrien määrääminen on vaikeaa. Yleisiä taustamuuttujia ei ole mahdollista mallintaa kovin yksityiskohtaisella tasolla. Jos runsasta määrää riskitekijöitä ja taustamuuttujia simuloidaan Monte Carlo -menetelmällä, mallin läpinäkyvyys ja tulosten esitettävyys heikkenevät. Liian tarkka ja runsaasti parametreja sisältävä malli on liian monimutkainen: se ei ole enää ymmärrettävä ja voi johtaa väärään tarkkuuden tunteeseen.

Yritykset soveltavat usein eri menetelmien yhdistelmää laskiessaan vakavaraisuuspääomavaatimuksen. On mahdollista, että kukin vakuutusyritysryhmän yhtiö mallintaa vakavaraisuuspääomatarpeensa omista lähtökohdistaan riittävän yksityiskohtaisesti, mutta yritysryhmän tasolla on yhteinen vakavaraisuuspääomamenetelmä ja katastrofiskenaario sisältäen riskien keskinäisen riippuvuuden.

Mallien parametrit

Pearsonin lineaarinen korrelaatio kuvaa kahden satunnaismuuttujan välistä lineaarisen riippuvuuden voimakkuutta, mutta yleensä se ei ole riittävä kuvaamaan satunnaismuuttujien välistä monimutkaista riippuvuutta. Varianssi-kovarianssimatriisin elementit ovat sattunaismuuttujaparien lineaariset korrelaatiokertoimet, diagonaalilla ovat varianssit ja muissa positioissa ovat kovarianssit. Kysymys on, miten saadaan luotettavat havaintomaailmaa kuvaavat lukuarvot varianssi-kovarianssimatriisin elementeille. Seuraavat vaihtoehdot ovat mahdollisia:

- Historiallisiin aikasarjoihin perustuvina arvioina,
- Asiantuntija-arvioita tai toimialan yhteisiä arvioita ja
- Järjestysmenetelmillä, esimerkiksi arvioituna matala, keskisuuri tai voimakas korrelaatio.

Riskien välinen riippuvuus voi muuttua ääriolosuhteissa, joka voi pahimmillaan aiheuttaa vakuutusyhtiön maksukyvyttömyyden. Historiallisen havaintoaineiston mukaan normaaleissa markkinaolosuhteissa riskien väliset korrelaatiot saattavat olla matalia, mutta häiriötilanteissa, esimerkiksi luonnonkatastrofeissa ja markkinoiden rahoitusvaikeuksien seurauksena monet markkinat ja riskit vaikuttavat yhtäaikaisesti taloudellista tilannetta heikentävästi. Tämä kasvattaa riskien keskinäistä korrelaatiota. Yleinen vakuutusyhtiöissä käytössä oleva menettely vakavaraisuuspääomatarpeen laskennassa on käyttää normaalitilanteessa laskettuja korrelaatiokertoimia korkeampia arvoja. Menetelmä on käytännöllinen, läpinäkyvä ja intuitiivinen. Normaaliolosuhteissa havaittuja korrelaatiokertoimia suurempien korrelaatiokerrointen käyttäminen kasvattaa vakavaraisuuspääoman vaatimusta.

Vaikka korrelaatiokertoimien kasvattaminen kuvaamaan lisääntynyttä riippuvuutta ääritilanteissa tuntuukin houkuttelevalta, menettelyllä on teoreettiselta kannalta tarkasteltuna heikkouksia. Korkeammat korrelaatiokertoimen arvot eivät mallinna suoranaisesti voimakkaampaa häntäalueen riippuvuutta, vaan matemaattisesti tätä riippuvuutta mitataan häntäriippuvuuskertoimella [146]. Kun riskijakaumat yhdistetään Gaussin kopulalla, sen riskien häntäriippuvuudet ovat nollia riippumatta onko korrelaatioiden arvoja korotettu tai ei. Korotetuille korrelaatiokertoimien arvoille ei ole olemassa teoreettisia perusteluja eikä sen johdosta myöskään yleiskäyttöistä laskukaavaa. Historiallisesta aineistosta laskettujen korotettujen korrelaatiokertoimien arvot ovat herkkiä aineiston jakaumaoletuksille. Joissakin tapauksissa tulokset voivat olla jopa epäjohdonmukaisia [146]. On vaikeaa määrittää häntäalueen jakauman alueen lineaarisia korrelaatiokertoimia siten, että ne kuvaisivat luotettavasti todellista riippuvuutta kyseisellä jakauman alueella. Tulokset riippuvat suuressa määrin kvantiilista eli tarkasteltavasta tappiotasosta.

Seuraavaksi käsitellään kopuloiden sovittamista havaintoaineistoon. Tärkeimmät menetelmät ovat suurimman uskottavuuden menetelmä ja momenttimenetelmä. Tarkastellaan merkintöjen yksinkertaistamiseksi kaksiulotteista tapausta. Riskien reunajakaumafunktiot sovitetaan kullekin riskille erikseen. Määriteltyjen reunajakaumafunktioiden esityksistä muodostetaan yhteisjakauman havaintojen (x, y) käänteiskuvauksen yhteisjakauman arvojen (u,v) matriisi U, missä $F_X(x)=u$ ja $F_Y(y)=v$. Edellä havaintojen arvot x ja y ovat satunnaismuuttujien X ja Y ilmentymiä ja u ja v ovat arvoja yksikköjanalla $[0,1]$. Seuraavana vaiheena kopula sovitetaan matriisiin U suurimman uskottavuuden menetelmällä. Sekä Gaussin että t-kopula vaativat parametritietona lineaarisen korrelaatiomatriisin. Matriisi on vastaavan usean muuttujan normaalijakauman korrelaatiomatriisi. Tästä on seurauksena että, jos korrelaatiomatriisin arvot sovitetaan havaintoaineiston pohjalta, tuloksena saadaan vääränlainen matriisi Gaussin ja t-kopulan parametriksi yhteisjakauman Monte Carlo -simulointiin, paitsi jos riskien reunajakaumaoletus on normaalijakauma. Teoreettisesti oikea menetelmä on laskea riskien Kendallin Tau-korrelaatiokertoimet havaintoaineistosta ja sen jälkeen muuntaa lineaarisiksi korrelaatioparametreiksi kaavalla [146]:

$$\rho_{Gauss}=\sin\left(\frac{\pi\,\rho_{Kendall}}{2}\right).$$

Kaava on voimassa elliptisille kopuloille, joista Gaussin ja t-kopulat ovat merkittävimmät. Jos riskien reunajakaumat noudattavat normaalijakaumaperheelle sukuista jakaumaa, kuten neliöllistä Chi-, Gamma-, tai Log-normaalijakaumaa, parametrit ρ_{Gauss} ovat lähellä havaintoaineista laskettuja lineaarisen korrelaatiomatriisin elementtien arvoja. Kuitenkin on huomattava, että varsinkin Pareto-, Burr- ja Cauchy-jakaumilla ρ_{Gauss} poikkeaa huomattavasti lineaarisesta korrelaatiomatriisista.

Vakavaraisuusmallien tulosten esittäminen

Yrityksen vakavaraisuusmallinnuksen tulosten esittäminen sidosryhmille ja yrityksen johdolle on tärkeää mallinnustulosten vaikuttavuuden takia. Käsitellään seuraavaksi eri menetelmien antamien tulosten käyttökelpoisuutta informaation välittämisen kannalta. Seuraavassa listassa on yleisimmin käytettyjä tapoja esittää vakavaraisuusmallinnuksen tulokset.

- Vakavaraisuuspääomavaatimuksen yhdistäminen osariskien vakavaraisuuspääomavaatimuksista
- Riskien yhteisjakaumafunktio
- Hajontakuvio
- yhteisylitysjakaumatodennäköisyys
- Häntätiheysfunktio
- Kendallin Tau
- Häntäriippuvuuskerroin

- Implikoitu Gaussin korrelaatio

Vakavaraisuusmallinnusta voi tehdä kolmella tasolla:

- Vertailu yritystasolla, esimerkiksi yhtiön vakavaraisuuspääomavaatimus
- Erikseen kunkin kahden riskin välinen vertailu, esimerkiksi hajontakuvio
- Vertailu kaikkien riskiparien kesken, esimerkiksi häntätiheysfunktio

Yrityksen vakavaraisuuspääomamallinnuksella lasketaan kokonaispääomatarve tarvittavilla kvantiileilla. Yrityksen riskien vaatimien pääomatarpeiden yhdistämiseen voidaan käyttää erilaisia menetelmiä. Tarkastellaan seuraavaksi yksitellen menetelmien etuja ja heikkouksia käyttökelpoisuuden kannalta.

Vakavaraisuuspääomavaatimus on selkeä ja ymmärrettävä tiedon välittymisen kannalta. Menetelmän tulos antaa yhden mitta-arvon yrityksen taloudellisen tilanteen esittämiseksi. Jos annetaan vain yksi koko yritystä kuvaava lukuarvo, siitä ei välity tietoa miten vakavaraisuuspääomavaatimus on koostettu erillisistä riskeistä eri kvantiileilla. Menetelmä vaatii yleensä enemmän laskentaa kuin listan muut mitat.

Riskien yhteisjakaumafunktio on 3-dimensioinen arvojen (u,v) esitys riskitekijöiden jakaumista X ja Y, missä u ja v on määritelty funktioilla $F_X(x)=u$ ja $F_Y(y)=v$. Satunnaismuuttujien U ja V tulosjoukko on $[0,1]$. Kun riskien välillä on häntäriippuvuutta, suurempi tiheys havaitaan pisteen $(1,1)$ lähellä. Hyvänä puolena yhteisjakaumafunktion käyttämisellä tiedon esittämiseen on sen helppo ymmärrettävyys. Yhteisjakaumafunktion kuvaajat on suhteellisen helppoja muodostaa. Otoksen aiheuttama satunnaisvirhe voi vääristää häntäalueen riippuvuuden havaitsemista. Pelkkä yhteisjakaumafunktion kuvaaja ei tarjoa numeerista mittaa riskien keskinäisen riippuvuudelle. Yhteisjakaumafunktiota voi kerrallaan käytännöllisesti soveltaa vain kahden riskin välisen riippuvuuden esittämiseen.

Hajontakuviossa esitetään (u,v) vastaavalla tavalla kuin yhteisjakaumafunktiossa, mutta tiheysfunktion arvo eli kolmas ulottuvuus esitetään pisteiden tiheytenä kaksiulotteisessa kuvassa. Hajontakuvion edut ja heikkoudet ovat samat kuin yhteisjakaumafunktiolla. Pisteiden tiheys paikan (1,1) lähellä osoittaa tarkasteltavien kahden riskin välistä häntäriippuvuutta. Hajontakuviosta voi olla vaikea erottaa voimakasta häntäriippuvuutta ja alhaisemman häntäriippuvuuden korkeata korrelaatiota.

yhteisylitysjakaumatodennäköisyys antaa tarkasteltavien kahden riskin yhteistodennäköisyyden tietyn annetun kynnyksen ylittymisestä tai alittumisesta. Merkitään ylittymistodennäköisyyttä $RJEP$:llä ja alittumista $LJEP$:llä

$RJEP(z)=P(u>z,v>z)$ ja

$$LJEP(z)=P(u \leq z, v \leq z),$$

missä u ja v on määritelty kuten edellä. Esimerkiksi, kun tarkasteltavat satunnaismuuttujat ovat riippumattomia, $RJEP(z)$ ja $LJEP(z)$ ovat $(1-z)^2$ ja z^2 .

yhteisylitysjakaumatodennäköisyys on käytännöllinen ja ymmärrettävä ja menetelmän laskenta on melko helppo suorittaa. Riippuvuuden määrä voidaan laskea halutulla kvantiililla matemaattisesti selkeästi ja yksinkertaisesti. Menetelmä tarjoaa johdonmukaisen kaavan laskea kahden tai useamman riskin keskinäisen riippuvuuden voimakkuuden, riippumatta onko käytetty kopuloita, korrelaatioita tai jotain muuta menetelmää. Useammalle kuin kahdelle riskille $RJEP(z)$ ja $LJEP(z)$ on mahdollista laskea kutakin satunnaismuuttujien paria kohti ja esittää tulokset matriisina riskipareille.

yhteisylitysjakaumatodennäköisyyden heikkoutena voidaan sanoa, että suuri osa käytännön vakuutusmatemaatikoista on enemmän tottunut lineaarisen korrelaation käyttöön. Jos yhteisylitysjakaumatodennäköisyys ei ole tuttu käsite, se voi johtaa väärinkäsityksiin lukuarvojen tulkinnassa. yhteisylitysjakaumatodennäköisyyttä ei pidä myöskään sekoittaa häntäalueen korrelaatioon. Funktiot $RJEP(z)$ ja $LJEP(z)$ ovat todennäköisyyksiä välillä $[0,1]$ ja korrelaatiokertoimet vaihtelevat välillä $[-1,1]$. On vaikea esittää muunnosta suureista $RJEP(z)$ ja $LJEP(z)$ jollekin yleisemmin tunnetulle mitalle, kuten lineaarisen korrelaation arvolle. yhteisylitysjakaumatodennäköisyyden arvot riippuvat reunajakaumafunktioista, eivät pelkästään riskien välisistä riippuvuusrakenteista. Kuten yhteisjakaumafunktion ja hajontakuvion tapauksessa, otoksen aiheuttama satunnaisvirhe voi vääristää häntäalueen riippuvuuden havaitsemista.

Häntätiheysfunktio kahden riskin välillä on häntäriippuvuutta kuvaava ehdollinen todennäköisyys. Se määritellään oikean- ja vasemmanpuoleisessa häntäjakaumassa seuraavasti:

$$R(z)=P(u>z \mid v>z)=\frac{P(u>z, v>z)}{P(v>z)},$$

$$L(z)=P(u<v \mid v<z)=\frac{P(u<v, v<z)}{P(v<z)}.$$

Kaavoissa u ja v on määritelty samalla tavalla kuin aikaisemmin. Teknisesti ajatellen on mahdollista tarkastella useampaa kuin kahta satunnaismuuttujaa samaan aikaan, esimerkiksi kolmelle muuttujalle:

$$R(z)=P(u>z \mid v>z, w>z).$$

Häntätiheysfunktion hyödyt ja heikkoudet ovat samat kuin yhteisylitysjakaumatodennäköisyydellä. Häntätiheysfunktio liittyy häntäriippuvuuskertoimeen, joka on häntätiheysfunktion raja-arvo.

Kendallin Tau-korrelaatio on järjestyskorrelaatiomitta eli sen arvo lasketaan datapisteiden järjestyksen perusteella eikä datapisteiden arvoista. Kendallin Tau vaihtelee välillä $[-1,1]$. Se on intuitiivinen ja suhteellisen helppo ymmärtää. Lineariseen korrelaatioon tottuneelle Kendallin Tau saattaa olla luontevampi kuin muut riippuvuuden mitat. Kendallin Tau ei ole herkkä poikkeaville havainnoille, koska se ei riipu havaintojen lukuarvoista. Kendallin Tau tarjoaa johdonmukaisen menetelmän kahden tai useamman satunnaismuuttujan keskinäisen riippuvuuden mittaamiseen. Tulokset on mahdollista esittää kaikkien tarkasteltavien riskien matriisina tai vain kahdelle valitulle riskille. Laskennan suorittaminen on jonkin verran vaativampaa kuin muilla riippuvuusmitoilla. Kendallin Taun ja muiden mittojen välille on vaikea esittää muunnoskaavoja. Kendallin Tau ei ilmennä trendiä riippuvuudessa kvantiilin muuttuessa, se on skalaarisuure kuten lineaarinen korrelaatio.

Häntäriippuvuuskerroin on kahden riskin asymptoottinen riippuvuusmitta. Usean muuttujan jakaumalle, jolla on Gaussin kopula, minkä tahansa kahden riskin välinen häntäriippuvuuskerroin on 0. Tämä on oleellinen Gaussin kopulan puute riippuvuuksien mallintamisessa. Esimerkiksi jatkuvasti jakautuneiden riskien häntäriippuvuuskerroin t-kopulalle on [146]:

$$\lambda = 2t_{\nu+1}\left(-(\nu+1)^{\frac{1}{2}}\frac{(1-\rho)^{\frac{1}{2}}}{(1+\rho)^{\frac{1}{2}}}\right),$$

missä ρ on kahden sattunaismuuttujan välinen korrelaatiokerroin ja ν on t-kopulan vapausaste. Kuten aikaisemmin todettiin häntäriippuvuuskerroin λ on ehdollisten todennäköisyyksien $R(z)$ ja $L(z)$ raja-arvo. Oikea ja vasen raja-arvo ovat yleensä eri suuria. Koska t-kopula on symmetrinen, molemmat häntäriippuvuuskertoimet lasketaan samalla kaavalla. Esimerkin vuoksi seuraavassa taulukossa on annettu muutamia t-kopulan λ :n arvoja, kun riskiparien välien korrelaatio on 25 % [146]:

t:n vapausaste	λ
10	2,6 %
5	10,7 %
2	27,2 %

Häntäriippuvuuskerrointa voi pitää tarkimpana matemaattisena kahden riskin välisen häntäriippuvuuden mittana. Sen lukuarvo ei riipu tarkasteltavasta kvantiilista. Mittaluvun avulla voidaan johdonmukaisella menetelmällä vertailla kahden tai useamman riskin suhteellista riippuvuuden voimakkuutta. Tulokset voi esittää kaikkien tarkasteltavien riskien matriisina tai vain kahdelle valitulle riskille. Häntäriippuvuuskerroin on lineaariseen korrelaatioon verrattuna uudempi käsite ja saattaa olla vaikeammin hahmotettava perinteisiin riskimittoihin tottuneelle. Häntäriippuvuuskertoimen arvo on raja-arvona yksi luku eikä ilmennä riippuvuuden voimakkuuden muutosta kvantiilin kasvaessa. Gaussin kopulalla λ on aina 0 ja t-kopulalla λ :n arvoja rajoittaa korrelaation ja vapausasteen määräämä kaava. Kaikki λ :n arvot välillä $[0,1]$ eivät ole mahdollisia kiinnittämällä korrelaatio tai vapausaste ja vaihtelemalla niistä toista. Laskennassa tarvitaan riittävästi $R(z)$:n arvojen simulointeja, jotta simuloidut tulokset ovat riittävän tarkkoja λ :n määräämiseksi.

Viimeisenä riippuvuuden mittana esitetään ns. implikoitu Gaussinen korrelaatio. Menetelmässä $R(z)$ ja $RJEP(z)$ lasketaan useammalla kuin yhdellä kvantiililla ja kolmella vaihtoehdolla: riippumattomuusoletuksella, Gaussin kopulalla ja 5 vapausasteen t-kopulalla. Kahdessa viimeksi mainitussa vaihtoehdossa käytetään asianmukaisia korrelaatiokertoimia. Vaihtoehtojen antamia mittalukujen arvoja vertaillaan keskenään [146].

Menetelmä on hyödyllinen esimerkiksi t-kopulan ja Gaussin kopulan vertailussa erilaisilla riippuvuuden tasoilla. Implikoitu Gaussinen korrelaatio auttaa saamaan käsityksen t-kopulan häntäriippuvuuden voimakkuudesta erilaisilla kvantiileilla. Antamalla arvot eri kvantiileilla päästään vertailemaan t-kopulan ja Gaussin kopulan suhteellisia muutoksia kvantiilin muuttuessa. Mittaluku on melko helppo laskea ja matemaattisesti perusteltu. Simuloimalla on yksinkertaista tehdä kuvaajia jakaumien implikoitujen korrelaatiokertoimien havainnollistamiseksi. Heikkoutena voidaan mainita, että on vaikea esittää suhdetta muihin mittalukuihin: $R(z)$:n ja $RJEP(z)$:n arvoista on vaikea laskea niitä vastaavia korrelaatiokertoimen arvoja tai muita mittalukuja. Jakauman äärimmäisillä kvantiileilla on vähän havaintopisteitä, kahden tai useamman satunnaismuuttujan yhteisesiintyminen on vieläkin harvinaisempaa, joten laskenta häntäalueilla on herkkä otosvirheille. Menetelmää voi käyttää vain kahden satunnaismuuttujan keskinäiseen tarkasteluun kerrallaan.

Riippuvuus on monimutkainen vakavaraisuuden mallintamisen alue. On olemassa monia tapoja mallintaa ja parametrisoida malleja. Tyypillisesti tarkastellaan 12 kuukauden aikaperiodia; useamman vuoden kehityksen mallintamisessa haasteet kertautuvat.

Tiivistetään keskeisimmät edellä esitetyt asiat:

Yksinkertainen lineaarinen korrelaatiokerroin ei ole riittävä kuvaamaan riippuvuutta äärimmäisissä olosuhteissa, vaan kopulajakaumaan perustuva riippuvuuden mallintaminen kuvaa paremmin todellisuutta.

Jos kopulan käyttöön on päädytty, kopula ja sen parametrisointi on perustettava huolelliselle analyysille ja asiantuntijaosaamiselle. Paksuhäntäisten jakaumien parametrisoinnissa on vaikeuksia, ja käytännöllinen lähestymistapa on tarpeen.

On oltava erityisen varovainen, jos yritys käyttää korotettuja varianssi-kovarianssimatriisin korrelaatiokertoimien arvoja kuvaamaan häntäriippuvuuden voimakkuutta. Korotettujen korrelaatiokerrointen arvoja ei tule valita pelkästään vakuutusyhtiön varovaisuusperiaatteen pohjalta, vaan oletuksilla on oltava analyyttiset perusteet. Korrelaatiomatriisi on mahdollista kalibroida riippuvuudelle tietyllä vakavaraisuuden vaatimustasolla, mutta samat korrelaatiokertoimien arvot eivät aina sovellu muilla tappiotasoilla.

Kopulat eivät mallinna riippuvuusrakenteiden muuttumista ajan funktiona, joten pelkästään kopuloiden avulla vakuutusyhtiöille ominaisia taloudellisia syklejä ei voida tutkia.

Lineaariseen korrelaatiomatriisin arvojen määrääminen on jo sinällään vaativaa. Korrelaatiomatriisin on oltava positiivisesti semidefiniitti ja puuttuvien korrelaatiokertoimien täydentämiseen ei ole varmaa ja luotettavaa menetelmää. Käsitellyt muut menetelmät ovat korrelaatiomatriisiin perustuvaa menetelmää vaikeampia sekä matemaattisesti että käytännöllisen ymmärtämisen kannalta. Näin ollen on oleellinen riski mallivirheisiin ja väärin tulkintoihin, jos ei säännöllisesti verrata teoreettisia laskelmia käytännön havaintoihin ja asiantuntija-arvioihin.

Kun riskien korrelaatiokertoimia ei kaikille riskien pareille tunneta, Group Consultatif on ehdottanut seuraavaa tunnettujen korrelaatiokertoimien avulla esitettyä kaavaa [146]:

$$\rho(X_A, X_B) = \frac{\rho_X(A,B)+\rho_Y(A,B)}{2} \frac{\rho_A(X,Y)+\rho_B(X,Y)}{2} .$$

Kaavassa tarkastellaan kahta riskiä X ja Y sekä kahta liiketoimintayksikköä A ja B . Korrelaatiokerroin $\rho_X(A,B)$ on liiketoimintayksikön A riskin X ja liiketoimintayksikön B riskin X välinen korrelaatiokerroin. Vastaavasti määritellään $\rho_Y(A,B)$. Korrelaatiokerroin $\rho_A(X,Y)$ on riskien X ja Y välinen korrelaatio liiketoimintayksikössä A . Vastaavasti määritellään $\rho_B(X,Y)$. Kaavan tulokseksena saadaan arvio liiketoimintayksikön A riskin X ja liiketoimintayksikön B riskin Y väliseksi korrelaatioksi.

3 Perinteiset riskimitat

Riskimittojen tutkimuksen kehittyminen

Ennen kuin riskien mittaamiseen tarkoitettuja malleja oli olemassa, yrityksen tuloksen riskiä on pyritty ottamaan huomioon lisäämällä tulevaisuuden odotettuun tuottoon arvioitu riskilisä. Tämän alkeellisen menetelmän etuna oli, että sijoituksia voitiin verrata ja asettaa järjestykseen riskisyys huomioon ottaen.

Markowitz esitti tuoton hajontaa (varianssin neliöjuuri) käytettäväksi sijoituksen tuottoon liittyvän riskin mittaamiseen. Useasta sijoituksesta koostuvan salkun sijoitusten yhteinen riski saadaan sijoitusten tuottojen yhteisjakauman avulla. Yhteisjakauma on usean satunnaismuuttujan yhdessä muodostama jakauma, jonka yksittäisten sijoitusten tuottojen jakaumat ovat yhteisjakaumasta otettuja reunajakaumia. Markowitz käytti tuottojen jakaumien kahta ensimmäistä momenttia ja pareittain otettuja lineaarisia (Pearsonin) korrelaatiokertoimia kuvaamaan tuottojen keskinäisiä riippuvuussuhteita:

$$\rho_{x,y} = Cov(X,Y)/(\delta_X^2 \delta_Y^2)^{1/2},$$

missä δ_X^2 ja δ_Y^2 ovat sijoitusten *X* ja *Y* tuottojen varianssit ja kovarianssi:

$$Cov(X,Y) = E(X,Y) - E(X)E(Y).$$

Useasta sijoituksesta koostuvalle salkulle hajonta voidaan laskea salkun kaikkien sijoitusten pareittain lasketuista korrelaatioista. Salkun tuoton varianssi on

$$\delta = \sum_{x,y} w_x w_y \delta_x \delta_y \rho_{x,y},$$

missä sijoitusten *X* ja *Y* osuudet salkussa ovat w_x ja w_y.

Markowitzin malli on yhteydessä hyötyteorian hyötyfunktioihin, jotka mahdollistavat subjektiivisen sijoitusten ja niiden yhdistelmien paremmuuden järjestämisen. Ei-elliptisten, mutta kuitenkin symmetristen, jakaumien hyötyfunktioiden on oltava neliöllisiä, jotta paremmuuden vertailu on mahdollista. Markowitzin malli soveltuu vain elliptisille jakaumille, esimerkiksi normaali- ja äärellisen varianssin t-jakaumille. Kaikki symmetriset jakaumat eivät ole elliptisiä. Lineaaristen korrelaatiokertoimien (varianssi-kovarianssimenetelmä) käyttäminen ei-elliptisille jakaumille voi johtaa suurten tappioiden mahdollisuuden aliarviointiin.

1960-luvulla kehitettiin hinnoittelumalleja, joissa yksittäisen sijoituksen arvon ja koko markkinan tuottojen välistä lineaarista yhteyttä mitataan ns. beetakertoimella (β). Tunnettuja malleja ovat CAPM (Capital Asset Pricing Model) ja APT (Arbitrage Pricing Theory). Vaikka näistä malleista on olemassa versioita paksuhäntäisille jakaumille, niiden soveltuvuus muille kuin normaalijakaumille voi olla äärimmäisten tapahtumien tilanteessa heikko.

Multinormaalijakaumaan perustuvat mallit ovat käytännöllisiä, koska minkä tahansa multinormaalin yhteisjakauman kahden yksittäisen satunnaismuuttujan välinen riippuvuus voidaan täysin kuvata näiden kahden satunnaismuuttujan reunajakaumilla ja korrelaatiokertoimilla. Vinojen, huipukkaiden tai paksuhäntäisten satunnaismuuttujien jakaumille multinormaalijakauma ei yleensä ole realistinen arvio, varsinkaan äärimmäisten tapahtumien tilanteessa. Riskimittoja laskettaessa nimenomaan äärimmäiset suuria tappioita aiheuttavat tapahtumat ovat keskeisiä ja mallin tulisi olla silloin realistinen. Ongelmana on ollut, että yleisempien jakaumien tapauksille ei ole ollut teoreettista perustaa. Viimeisen noin kymmenen vuoden aikana on kuitenkin tutkittu muutamaa yleisempää jakaumaa.

Yhden muuttujan riskimittoja on tutkittu laajasti kirjallisuudessa ja teoriaa laajennettu sijoitussalkun tarkasteluun, jossa tuottojen jakaumat ja tuottojen väliset riippuvuudet ovat samoja. Käytännön tilanteissa on kuitenkin tarve laskea riskimitta erilaisten sijoitusten yhdistelmälle, jolloin jakaumat ja riippuvuudet voivat olla erilaiset. Tähän tarpeeseen on kehitetty kopulafunktioihin perustuva teoria, jossa voidaan tutkia usean muuttujan yhteisjakaumaa. Yhteisjakauman muodostavat satunnaismuuttujat, joilla on eri jakaumat ja mahdollisesti erilaiset keskinäiset riippuvuudet.

Äärimmäisten tapahtumien tutkimus on lisääntynyt viime aikoina. Tuottojen häntäjakauma on tuottojen riskejä tarkasteltaessa alue, johon tarkastelun painopiste on asetettava. Salkun sijoitusten tuottojen keskinäisten riippuvuuksien oikea mallintaminen on haasteellista ja tämä tutkimus on edelleen aktiivista.

Vuonna 1994 esitettiin Value-at-Risk-mitta (VaR), joka on määrätyllä aikaperiodilla ja todennäköisyystasolla *1-k* ylittyvä tappion määrä. Toisin sanoen Value-at-Risk on suurin mahdollinen tappio tarkasteltavalla aikaperiodilla ja todennäköisyydellä *k*. Matemaattinen määritelmä on

$$VaR_k = inf\{-F_X^{-1}(k)\}.$$

Epäjatkuvien tuottojakaumien tilanteessa mahdollinen monikäsitteisyys on määritelmässä otettu huomioon laskemalla infimum.

Yleisen riskimittojen teorian perusteita on esitetty lähteessä [6, 7], jonka mukaan koherentin riskimitan ρ on toteutettava seuraavat ehdot:

(a) Positiivinen homogeenisuus: $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ kaikilla satunnaismuuttujilla *X* ja kaikilla reaaliluvuilla λ.

(b) Subadditiivisuus: $\rho(X+Y)\leq\rho(X)+\rho(Y)$.

Jos lisäksi seuraavat kaksi ehtoa ovat voimassa, puhutaan koherentista riskimitasta:

(a) Monotonisuus: Satunnaismuuttujien relaatiosta $X\leq Y$ seuraa $\rho(X)\leq\rho(Y)$.

(b) Siirtymäinvarianssi (translaatioinvarianssi): $\rho(X+\alpha r_0)=\rho(X)-\alpha$ kaikilla satunnaismuuttujilla X ja reaaliluvuilla α ja kaikilla riskittömillä koroilla r_0 .

Joissakin tutkimuksissa kaksi ensimmäistä ehtoa on korvattu ehdolla, että ρ on konveksi:

$$\rho(\lambda X+(1-\lambda)Y)\leq\lambda\,\rho(X)+(1-\lambda)\rho(Y)\text{, missä } 0\leq\lambda\leq 1 .$$

Huomattakoon, että konveksisuudesta ei välttämättä seuraa positiivinen homogeenisuus. Riskimittaa, joka on siirtymäinvariantti, monotoninen ja konveksi kutsutaankin heikosti koherentiksi riskimitaksi. Riskimitta Value-at-Risk ei ole koherentti riskimitta, koska se ei toteuta subadditiivisuusehtoa. Esimerkki koherentista riskimitasta on CTE (Conditional Tail Expectation), joka on ehdollinen tappion odotusarvo ehdolla, että tappio on suurempi kuin Value-at-Risk-arvo. Näitä perinteisiä riskimittoja käsitellään jäljempänä tässä luvussa. Kirjallisuudessa on vaihtelevaa käytäntöä riskimittojen nimeämisessä. Useissa lähteissä ES-riskimitta vastaa tämän esityksen CTE-riskimitan määritelmää.

Johdanto riskimittoihin

Riskillä ymmärretään vahingollisen seurauksen tai tappion mahdollisuutta. Finanssi- ja vakuutuspuolella riskillä tarkoitetaan tapahtuman mahdollisuutta, joka voi vaikuttaa haitallisesti henkilön tai yrityksen kykyyn saavuttaa tavoitteensa. Vielä tarkemmin riski voidaan määritellä mitattavissa olevana tappion tai odotettavissa olevaa tulosta heikomman tuloksen todennäköisyytenä. Riskiin liittyy epätoivottavan tapahtuman todennäköisyys, jonka mittaamista erilaisilla riskimitoilla tässä esityksessä käsitellään. Varmaa tapahtumaa ei pidetä riskinä, kuten myöskään vakuuttamisessa varma tapahtuma ei voi olla vakuutuskorvaukseen oikeuttava. Täysin yleispätevää riskin määritelmää eri aloilla ja tilanteissa ei ole [121].

Riskimittojen käyttötarkoituksia on monia. Voidaan mainita kolme ehkä tärkeintä, jotka ovat pääoman tarpeen määrittäminen, riskien hallinta ja vakuutusalalla vakuutusmaksujen määrittäminen. Finanssilaitos tarvitsee lisäpääomaa odottamattomien tappioiden peittämiseen, jotta se toteuttaa lainsäädännön vaatimat vakavaraisuuspääomavaatimukset. Muita lisäpääoman rajoja voidaan tarvittaessa laskea muiden yrityksen sisäisten kontrollitarpeiden mukaan. Esimerkkinä mainitaan arvopaperipörssin kaupankäyjiltä vaatima talletusmaksu varmistamaan kaupankäyjän kyky selviytyä arvopaperikaupoista lopullisessa selvityksessä. Edellä toisena mainittua riskien hallintaa varten yritys voi laskea erilaisia riskimittoja, jotka eivät ole välttämättä rahayksikkömääräisiä. Yksinkertainen esimerkki tällaisesta riskimitasta on salkun volatiliteetti eli tuoton hajonta aikayksikössä. Kolmas esimerkki on vakuutusyhtiön perustoimintaan liittyvä vakuutusmaksujen määrääminen. Vakuutusmaksu on siis riskimitta, joka mittaa vakuutettua riskiä.

Luottoriski syntyy siitä, että luoton antaja ei saa luvattuja takaisinmaksueriä ja korkoja tai luoton saajan maksukyky on heikentynyt. Luottoriskejä on monen asteista maksajan täydellisestä maksukyvyttömyydestä luottoluokituksen alenemiseen tai maksukyvyn heikkenemiseen. Jälkimmäisessä tilanteessa luottoriski ei ehkä realisoidu, vaan kaikki maksut suoritetaan. Maksujen viivästymisen riski lasketaan myös luottoriskiksi.

Operatiiviset riskit koostuvat yhtiölle mahdollisesti syntyvistä tappioista, jotka johtuvat riittämättömistä tai puuttuvista sisäisistä prosesseista, henkilöistä tai järjestelmistä sekä ulkoisista järjestelmistä. Operatiivisten riskien mittaaminen on niiden luonteen takia vaikeaa, joten riskejä on käytännössä otettu huomioon skenaarioita käyttämällä.

Pankkitoimialalla tärkeimmät erilaiset riskit ovat markkina-, luotto- ja operatiiviset riskit. Markkinariski aiheutuu taloudellisen aseman perustana olevien markkinakomponenttien arvojen vaihtelusta tai vaihtelun mahdollisuudesta; markkinakomponentit ovat esimerkiksi osakkeiden ja velkakirjojen arvoja, valuuttojen vaihtokursseja, hyödykkeiden hintoja sekä näihin perustuvien erilaisten johdannaisten arvoja.

Riskien luokittelu markkina-, luotto- ja operatiivisiin riskeihin ei ole kaikissa tapauksissa yksikäsitteinen eikä pankkialallakaan kattava. Vakuutusalalla tulevat edellä mainittujen lisäksi erilaiset vakuutusriskit eli varsinaisissa vakuutussopimuksissa korvattavien tapahtumien tiheydessä ja ajallisessa vaihtelussa oleva satunnaisuus. Yleisiä kaikille toimialoille yhteisiä riskiluokkia ovat myös maksuvalmius- ja malliriskit. Malliriski syntyy, jos yhtiö käyttää virheellistä tai väärää mallia esimerkiksi riskien mittaamiseen. Tämäkin riski on todellinen ja sen objektiivinen suuruuden arviointi on vaikeaa. Riskien mittaamiseen on olemassa monia menetelmiä ja niissä tehdään yleensä approksimointeja. Mikään malli ei täydellisesti kuvaa todellisuutta.

Edellä mainittujen kolmen riskiluokan lisäksi vakuutusalalla on likviditeettiriski, joka aiheutuu tappiosta, joka syntyy tilanteessa, jossa vakuutusyhtiöllä ei ole likvidejä eli käytettävissä olevia varoja vakuutuskorvausten maksamiseen silloin, kun ne on sovittu suoritettavaksi. Sekä pankki- että vakuutusalalla on velkojen maksuun liittyvä likviditeettiriski. Likviditeettiriskin mittaamiseen ei ole ollut vastaavia menetelmiä kuin markkina- ja luottoriskien mittaamiseen. Käytännössä likviditeettiriskejä on otettu huomioon skenaarioiden avulla.

Vakuutusalalle ominainen riski on vakuutusriski (eng. underwriting risk). Esimerkkejä vakuutusriskistä ovat luonnonilmiöiden esiintymisten muuttuminen, eliniän ennustamattomat muutokset henkivakuutuksissa ja vakuutuksenottajien muuttuva käyttäytyminen esimerkiksi vakuutuksiin liittyvien takaisinostojen ja optioiden käytössä.

Edellä mainitut riskiluokat eivät kata kaikkia mahdollisia riskejä. Liiketoimintariskeillä tarkoitetaan liiketoimintaympäristössä tapahtuvan muutoksen aiheuttamaa tappiota tai tappiolle altistumista sekä näihin mahdollisiin muutoksiin tarvittavan sopeutumiskyvyn heikkenemistä. Liiketoimintariskien riskimittoihin pätee sama huomautus kuin operatiivisiin riskeihin ja likviditeettiriskeihin: mallintamisen vaikeuden takia liiketoimintariskejä huomioidaan käytännössä skenaarioilla.

Asianmukainen riskien hallinta ottaa huomioon kaikki mahdolliset riskit ja niiden väliset keskinäiset riippuvuudet. Riskien hallinnassa tulee ottaa huomioon myös edellä mainitut vaikeasti mallinnettavat riskit. Riskien hallinta sisältää sekä varojen että vastuiden (eng. ALM = Asset & Liabilities management) samanaikaisen hallinnan, jossa yritys pyrkii hyvään tuottoon ja riittävään vakavaraisuuteen, jotta myös satunnaisista riskeistä mahdollisesti aiheutuvat tappiot voidaan kattaa. Nykyinen käytäntö ei ole päässyt tavoitetilaan, jossa kaikki riskit ja niiden väliset riippuvuudet kyettäisiin mallintamaan riittävän luotettavasti vakuutusyhtiön asiakkaiden etuuksien turvaavuutta ajatellen [121 1.1.2].

Matemaattisen käsittelyn lähtökohdaksi otetaan useasta riskistä koostuva portfolio:

$$X=\sum_{i=1}^{d} w_i X_i \, ,$$

missä $w_i, i=1,\ldots,d$ ovat riskien suhteelliset painoarvot portfoliossa. Huomattakoon, että on mahdollista ottaa kerrallaan tarkasteluun vain yrityksen osa tai esimerkiksi jokin vakuutuslaji. Koko yrityksen riskien hallinnassa on kuitenkin mallinnettava yhteisjakauma $(X_1,\ldots,X_d)$. Yhteisjakauman riippuvuuksien määrittäminen tehdään yleensä mallin kalibroinnilla. Kalibrointi voidaan tehdä hierarkisesti useammalta tasolta koostaen. Yrityksen sijoitusten tai vakuutussopimusten lukumäärä on tyypillisesti suuri, joten laskennan kannalta joudutaan yksittäisiä sijoituksia ja vakuutuksia yhdistämään samankaltaisten positioiden osalta. Yhdistettyjen positioiden laskenta parantaa omalta osaltaan yleiskuvan muodostumista.

Yritysten taloudellisten riskien hallinta on tullut yhä tärkeämmäksi markkinoilla tapahtuneiden häiriöiden ja jopa väärinkäytösten jälkeen. Lähteessä [121 1.2.1] on kerrottu muutamasta tärkeimmästä laajoja varallisuuden arvojen laskuja aiheuttaneista tapahtumista. Viimeisiä näistä ovat olleet Lehman & Brothersin konkurssi v. 2008 ja eräiden euromaiden velkaongelmat viime vuosina.

Toisaalta riskien lisääntyessä markkinoille on syntynyt lukuisia uusia rahoitusinstrumentteja, joita voi käyttää riskeiltä suojautumiseen. Finanssilaitokset voivat paketoida riskipitoisia sijoituksia ja myydä niitä edelleen markkinoille instituutiosijoittajille tai vähittäismarkkinoille. Suojautumiseen voi käyttää esimerkiksi optioita, termiinejä, swappeja ja muita johdannaisia. Varjopuolena on että sekä johdannaisia että muita innovatiivisia tuotteita voi käyttää voimakkaaseen riskinottoon, varsinkin jos vastaavaa suojattavaa sijoitusta ei ole portfoliossa.

Markkinoiden kehittyminen monimutkaisemmaksi, uudet johdannaiset sekä markkinoiden laajentuminen ja keskinäisen riippuvuuden lisääntyminen ovat johtaneet yritysten sisäisen riskien hallinnan korostumiseen ja toisaalta julkisen valvonnan ja sääntelyn lisääntyvään tarpeeseen. Pankkipuolella sääntely on lisääntynyt vaiheittain alkaen vuoden 1988 Basel I -sopimuksesta uusimpaan Basel III -vaiheeseen. Ensimmäisessä vaiheessa otettiin huomioon luotto- ja markkinariskit, Basel II -sopimuksessa vuonna 2001 otettiin mukaan operatiiviset riskit. Basel II ja Basel III antavat mahdollisuuden soveltaa sisäisiä yhtiökohtaisia riskimalleja.

Sääntelyn lisääminen, ei sekään, ole täysin kiistatonta. Sääntely lisää riskien hallinnan aiheuttamia kustannuksia. Sääntely voi pahimmillaan itse aiheuttaa uusia riskejä, joita voivat olla sääntelystä johtuvat vääristävät markkinailmiöt tai liiallisen itseluottamuksen syntyminen. Vääristävä markkinatapahtuma voisi syntyä, kun kaikki saman toimialan yritykset käyttävät samaa riskimittaa ja reagoivat yleisen markkinatilanteen ajamina samankaltaisin sijoitus- tai liiketoimintapäätöksin.

Vakuutusalalla on toteutettu vastaavaa sääntelyä kuin pankkipuolella. Pankkien sääntelyn tavoitteena ovat pankkien asiakkaiden aseman turvaaminen myös pankin selvitys- ja konkurssitilanteissa sekä yleisen markkinaluottamuksen säilyttäminen. Vakuutusyhtiöiden sääntelyn erityinen tarkoitus on taata vakuutusasiakkaiden korvaus- ja eläkesaatavat. Sääntelyllä pyritään turvaamaan saatavat vakuutusyhtiöltä myös vakuutusyhtiön selvitys- ja konkurssitilanteissa. Vakuutusasiakkaiden etu on toissijaisesti myös estää vakuutusyhtiöiden joutuminen taloudelliseen kriisiin yhtiön vakavaraisuudella eli riittävillä pääomilla sekä sijoitusten ja vastuiden riskien hallinnalla.

Riskiin liittyvän satunnaisuuden ja sen todennäköisyyden matemaattinen määrittely on peräisin A.N. Kolmogorovilta vuodelta 1933. Hän määritteli aksiomaattisesti todennäköisyysavaruuden käsitteen (Ω, Γ, P)) [121]. Satunnaismuuttuja on funktio todennäköisyysavaruudessa $X:\Gamma \rightarrow \mathbb{R}$. Esimerkki satunnaisfunktiosta on sijoituksen tai velan arvo. Vakuutusalalla puhutaan vastuuvelasta, joka jakaantuu kahteen osaan vakuutusmaksuvastuuseen ja korvausvastuuseen. Vakuutusmaksuvastuu muodostuu tulevista vakuutustapahtumista aiheutuvista vastuista ja korvausvastuu on jo tapahtuneista vakuutustapahtumista aiheutunutta velkaa korvaukseen oikeutetuille.

Riskin matemaattisessa mallintamisessa keskeinen käsite on riskin X jakaumafunktio F_X tarkasteltavan aikajakson kuluttua:

$$F_X(x)=P(X\leq x).$$

Jakaumafunktio on todennäköisyys, että satunnaismuuttuja X on pienempi tai yhtä suuri kuin vakio x. Kun tarkastellaan portfoliota, joka sisältää useita riskipositiota, satunnaismuuttuja X on moniulotteinen vektori. Esimerkiksi kun riskejä on d kpl, merkitään $X=(X_{1,}..,X_d)$. Riskit ovat tarkasteltavan tapauksen mukaan esimerkiksi osakkeita, annettuja lainoja, otettuja velkoja tai vakuutussopimuksiin perustuvia sitoumuksia vakuutuksenottajille. Portfoliossa voi olla sekä varoja että velkoja. Riskejä voidaan tarkastella lisäksi stokastisena prosessina $\{X_t\}$ ajan t funktiona joko jatkuvan ajan funktiona tai diskreettien aikajaksojen $t=1,\ldots$ sarjana.

Eri tyyppisiä riskimittoja

Riskin mittaamiseen on useita lähestymistapoja. Lähteessä [121] on mainittu neljä pääryhmää: nimellisarvoihin perustuva, riskitekijöihin perustuva laskenta, skenaarioista laskettavat riskimitat ja tappiojakaumasta laskettavat riskimitat. Näitä kaikkia on käytössä ja seuraavaksi annetaan niistä kustakin esimerkkejä sekä mainitaan niiden hyviä ja huonoja puolia.

Alkeellisimpia mainituista riskimitoista ovat nimellisarvoihin perustuvat menetelmät, joissa tarkastellaan portfolion sisältämien sijoitusten arvojen summaa, jossa yksittäisiä arvoja on mahdollisesti painotettu sijoitusluokan riskisyyden mukaan. Tämä menetelmä on ollut käytössä pankkien vakavaraisuussääntelyssä operatiivisten riskien standardikaavassa. Etuna on luonnollisesti menetelmän yksinkertaisuus, mutta siinä on vakavia heikkouksia. Menetelmä ottaa huomioon sijoitetut varat, mutta ei velkoja eikä suojauksia. Menetelmä ei ota huomioon myöskään hajauttamista.

Riskitekijöihin perustuvat riskimitat antavat portfolion arvon muutoksen, kun määrätty riskitekijä muuttuu tietyllä määrällä. Matemaattisesti tällainen riskitekijä on useimmiten portfolion arvon derivaatta riskitekijän suhteen. Tärkeitä esimerkkejä riskitekijöihin perustuvista riskimitoista ovat lainan duraatio ja osakkeiden johdannaisten arvojen muutosten määrää kuvaavat ns. “kreikkalaiset”. Ne ovat johdannaisen arvon osittaisderivaattoja erilaisten arvoon vaikuttavien tekijöiden suhteen. Myöhemmin esille tulevassa Blackin ja Scholesin mallissa riskitekijöitä ovat johdannaisen perusteena olevan osakkeen arvo, johdannaisen kesto, toteutushinta, korko ja volatiliteetti. Osittaisderivaattoja voidaan mainittujen tekijöiden lisäksi laskea useamman tekijän suhteen samaan aikaan, jolloin saadaan lisää uusia riskimittoja. Riskitekijöihin perustuvat riskimitat ovat erittäin hyödyllisiä ja ne ovat laajassa käytössä johdannaisten arvojen muutosten hallinnassa. Riskitekijään perustuvaa riskimittaa ei voi käyttää position kokonaisriskin määrittelyyn, paitsi jos position riski ei riipu muista tekijöistä. Eri riskitekijöihin perustuvien riskimittojen arvoja yhteen laskemalla ei muodostu kokonaisriskiä kuvaavaa riskimittaa.

Skenaarioihin perustuvassa menetelmässä tarkastellaan ennalta määriteltyjen riskitekijöiden muutosten seurauksia yksittäisen position tai portfolion arvossa. Riskimitta on eri skenaarioiden aiheuttamien tappioiden maksimi. Menetelmä on helpointa ymmärtää esimerkin avulla. Chicagon pörssissä johdannaiskauppaa käyviltä asiakkailta vaaditaan vakuutena skenaarioihin perustuva talletusmaksu. Se lasketaan maksimina kuudentoista eri skenaarion aiheuttamista tappioista. Skenaarioista neljätoista muodostuu määrätystä volatiliteetin noususta tai laskusta yhdistettynä seitsemään määrättyyn termiinisopimuksen arvon muutokseen. Lisäksi pienemmällä painoarvolla lasketaan kaksi ääriskenaariota.

Tappiojakaumaan perustuvat riskimitat muodostavat tärkeimmän ja laajimman riskimittojen luokan. Riskimitaksi otetaan jokin lukuisista tarkastellun aikavälin tappiojakaumasta lasketuista tilastollisista suureista. Esimerkkejä tällaisista ovat hajonta, Value-at-Risk ja tappion odotusarvo. Näitä käsitellään myöhemmin tarkemmin. Mikään yksittäinen riskimitan arvo ei tietenkään voi kuvata riskiä täydellisesti, ja riskimitoilla on aina omat heikkoutensa. Valitsemalla tarkasteltavaksi jakaumaksi vain tappiojakauma teemme rajauksen riskimittaa määriteltäessä, mutta riskien hallintaa ajatellen tämä valinta on hyvin luonnollinen. Tappiojakaumaa voidaan tutkia eri tasoilla, esimerkiksi yksittäisen position, sijoitusluokan, salkun tai koko yrityksen osalta. Erilaisia riskejä ja eri tasoilla laskettuja riskimittojen arvoja voidaan vertailla keskenään. Tappiojakauman mallintamisessa varojen ja velkojen yhtäaikainen tarkastelu on mahdollista. Samoin hajauttaminen voidaan ottaa huomioon.

Tappiojakaumiin perustuvat riskimitat eivät nekään ole ongelmattomia. Tappiojakauma perustuu historialliseen tietoon, joka ei aina kuvaa hyvin tulevaisuutta. Lisäksi jakauman määrittäminen riittävän tarkasti on vaikeaa, esimerkiksi riskien kannalta tärkeän jakauman hännän arviointiin ei aina ole riittävästi aineistoa. On mahdollista päätyä puutteelliseen tai väärään jakaumaa kuvaavaan malliin. Tyypillinen mallintamisen virhe voi olla normaalijakauman käyttäminen tilanteessa, jossa suuret tappiot ovat normaalitodennäköisyyttä suurempia.

Tappiojakauma

Tappiojakauma on tärkein käsite riskimittoja laskettaessa. Tässä esitetään tappiojakauman matemaattista käsittelyä lähteen [121] merkinnöillä. Lähteen mukaan esitetään kaksi esimerkkiä, miten tappiojakauma voidaan esittää riskitekijöiden muutosten lineaarisena approksimaationa. Esimerkit ovat osakkeista ja nollakuponkilainoista koostuvien salkkujen tappiojakaumien laskeminen. Jäljempänä palataan tappiojakaumien tarkasteluun myös edistyneemmillä menetelmillä, jolloin lineaarisen approksimaation aiheuttamilta mallinnuksen puutteilta voidaan välttyä.

Portfolion arvoa kuvaavaa satunnaismuuttujaa ajan hetkellä s merkitään $V(s)$:lla. Aikajakson $s+\Delta$ kuluttua portfolion tappio on

$$L_{[s,s+\Delta]} := -[V(s+\Delta)-V(s)] .$$

Vakuutusmatemaattisissa sovelluksissa on yleinen käytäntö ilmoittaa tappio positiivisena arvona. Tarkemmin sanottuna kyseessä on voitto- ja tappiojakauma, mutta koska mielenkiinto kohdistuu jakauman ylempään puoleen kutsutaan jakaumaa lyhyemmin tappiojakaumaksi. Jakauman voittoa osoittavat arvot ovat kaavoissa negatiivisia.

Tavallisimpia käytännössä tarkasteltavia aikajaksoja ovat yksi päivä, kymmenen päivää ja yksi vuosi. Vakuutussovelluksissa yksi vuosi on tyypillinen ja rahoitusmarkkinoilla niiden luonteen mukaisesti myös lyhyemmät tarkastelujaksot ovat tärkeitä. Kun aikajaksona Δ on yksi vuosi, merkitään yksinkertaisemmin:

$$L_{t+1} := L_{[t,(t+1)]} = -(V_{t+1} - V_t) \ . \tag{2}$$

Edellisessä kaavassa otettiin käyttöön myös aikasarjan merkintä $V(t) := V_t$. Tavoitteena on laskea V_t ja sitä kautta L_t. Mallinnetaan V_t ajan t ja d-dimensioisen satunnaismuuttujan $Z_t = (Z_{t,1}, \ldots, Z_{t,d})'$ avulla

$$V_t = f(t, Z_t) \ . \tag{3}$$

Vektorin Z_t komponentteja kutsutaan riskifaktoreiksi. Tässä esityksessä tullaan merkitsemään pystyvektoria yläpilkulla. Funktio $f: \mathbb{R}_+ x \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ on mitallinen funktio. Riskitekijät ja funktio f määritellään kussakin tapauksessa tutkittavan portfolion ja valitun mallinnuksen mukaisesti. Kun lasketaan ehdollista tappiojakaumaa, riskitekijöiden arvot oletetaan tunnetuiksi hetkellä *t*. Esitys (3) määrittelee miten riskit kuvautuvat mallissa salkun arvoksi ja edelleen kaavan (2) mukaan tappiojakaumaksi.

Määritellään riskifaktoreiden muutokset $X_{t \in \mathrm{N}}$ seuraavasti

$$X_t := Z_t - Z_{t-1} \ . \tag{4}$$

Tappio on

$$L_{t+1} = -(f(t+1, Z_t + X_{t+1}) - f(t, Z_t)) \ . \tag{5}$$

Edellisessä kaavassa oletettiin, että portfolion kokoonpano säilyy samana tarkastellulla aikavälillä. Koska portfolion kokoonpano kuitenkin muuttuu pidempää aikajaksoa tarkasteltaessa, esimerkiksi vuoden aikana, kaava (4) ei sovellu suoraan näissä tilanteissa. Aikajakso on jaettava osiin tai portfolion sisällön muuttuminen on huomioitava mallissa muulla tavalla.

Portfolion tappiojakaumaa L_{t+1} voidaan tutkia kahdesta eri näkökulmasta joko ehdollisena tai ei-ehdollisena jakaumana. Ehdollisen jakauman $X_{t+1} | F_t$ tilanteessa satunnaismuuttujan historia

F_t tunnetaan. Historialla F_t tarkoitetaan yleensä tarkasteltavan satunnaismuuttujan generoimaa sigma-algebraa $F_t=\sigma(\{X_s: s\leq t\})$. Stationaarisen jakauman tapauksessa voidaan tarkastella myös ei-ehdollista, yleisellä Δ :n pituisella aikavälillä syntynyttä, tappiojakaumaa X_t .

Jos funktio *f* on differentioituva, niin tappion ensimmäisen kertaluvun approksimaatio voidaan kirjoittaa

$$L_{t+1}:=-(f_t(t,Z_t)+\sum_{i=1}^{d} f_{Z_t}(t,Z_t)x_i) \ , \tag{6}$$

missä funktion f alaindeksit tarkoittavat osittaisderivaattaa. Kaavan (5) approksimaatio on hyvä tilanteessa, jossa riskifaktoreiden muutokset ovat pieniä tai riippuvuus riskifaktoreista on lineaarinen tai likimain lineaarinen.

Jotta edellä esitetyt yleiset kaavat tulisivat helpommin ymmärrettäviksi, annetaan konkreettinen esimerkki [121 Example 2.4 ja 2.5]. Tarkastellaan portfoliota, joka koostuu *d*:stä osakkeesta, joiden suhteelliset osuudet λ_i ja arvot ovat $S_i, i=1,\ldots,d$. Otetaan riskifaktoreiksi osakkeiden arvojen logaritmit:

$$Z_{t,i}=\ln(S_{t,i})$$

ja siten riskifaktoreiden muutokset ovat portfolion osakkeiden logaritmisia tuottoja

$$X_{t+1,i}=\ln(S_{t+1,i})-\ln(S_{t,i}) \ . \tag{7}$$

Tästä saadaan portfolion arvolle V_t ja tappiolle L_{t+1} lausekkeet

$$V_t=\sum_{l=1}^{d} \lambda_i \exp(Z_{t,i}) \text{ ja}$$

$$L_{t+1}=-(V_{t+1}-V_t)=-\sum_{i=1}^{d} \lambda_i S_{t,i}(\exp(X_{t+1,i})-1) .$$

Edellisestä kaavasta saadaan kaavaa (6) vastaava lineaarinen approksimaatio

$$L_{t+1}^{\Delta}=-\sum_{i=1}^{d} \lambda_i S_{t,i} X_{t+1,i} .$$

Edellä kirjoitettiin portfolion arvo ja tappio lausekkeena logaritmisten osakkeiden arvojen funktiona.

Merkitään riskifaktoreiden muutosten ehdollinen odotusarvovektori on $\mu_t = E(X_t | F_t)$ ja vastaava kovarianssimatriisi $\Sigma_t = Var(X_t | F_t)$. Osakkeista muodostuneen salkun tappioarvon odotusarvolle ja hajonnalle saadaan arvot, kun merkitään osakkeen suhteellista arvoa portfoliossa w_t :llä:

$$E(L_{t+1}^{\Delta} | F_t) = -V_t \sum_{l=1}^{d} w_{t,i} \mu_{t,i} = V_t w_t \cdot \mu_t \quad \text{ja} \quad Var(L_{t+1}^{\Delta} | F_t) = V_t^2 w_t \cdot \Sigma_t \cdot w_t \tag{8}$$

missä $w_{t,i} = \lambda_i \dfrac{S_{t,i}}{V_t}$.

Kaavan (8) arvot ovat siis ehdollisen jakauman odotusarvo ja varianssi. Vastaavat ei-ehdolliset arvot saadaan käyttämällä odotusarvona ja kovarianssimatriisina ei-ehdollisia odotusarvovektoria ja kovarianssimatriisia μ ja Σ . Portfolion osakkeen i odotusarvo $E(X_i) = \mu_i$ lasketaan kaavan (7) satunnaismuuttujien $X_{0,i}, X_{1,i}, \ldots, X_{t,i}$ odotusarvojen keskiarvona.

On tunnettua, että osakkeiden arvojen logaritmiset muutokset aikayksikköä kohti noudattavat melko hyvin normaalijakaumaa eli toisin sanoen arvojen muutokset ovat log-normaalisti jakautuneet. Kun osakkeiden arvon muutoksille tehdään mainittu oletus, ehdollinen ja ei-ehdollinen odotusarvovektori ovat samoja. Vastaava pätee kovarianssimatriiseille. Jos osakkeiden arvonkehitys mallinnettaisiin jollakin muulla tavalla, ehdollinen ja ei-ehdollinen tulos voivat olla erisuuria [121].

Edelliseen osakesalkkuesimerkkiin perustuen sovelletaan esitettyjä kaavoja eurooppalaiseen osakkeen osto-optioon. Oletetaan, että osakkeen arvo alkuhetkellä on S ja vuotuinen volatiliteetti on σ . Eurooppalaisen osto-option, jonka toteutushinta on K ja kesto on T Blackin ja Scholesin kaavan [121] mukainen arvo on

$$V = S * \Phi(d_1) - K * \exp(-r(T-s)) \Phi(d_2) ,$$

missä

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S}{K}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2)(T-s)}{\sigma \sqrt{(T-s)}} \quad \text{ja} \quad d_2 = d_1 - \sigma \sqrt{(T-s)}.$$

Riskifaktoreiksi ja vastaaviksi riskifaktoreiden muutoksiksi otetaan

$$Z_t=(\ln(S_t), r_t, \sigma_t)' \quad \text{ja} \quad X_{t+1}=(\ln(S_{t+1})-\ln(S_t), r_{t+1}-r_t, \sigma_{t+1}-\sigma_t)'.$$

Tappion lineaarinen approksimaatio on

$$L_{t+1}^{\Delta}=-(V_s\Delta+V_S S_t X_{t+1,1}+V_r X_{t+1,2}+V_\sigma X_{t+1,3}).$$

V :n alaindeksit tarkoittavat osittaisderivaattoja ajan, osakkeen alkuarvon, koron ja volatiliteetin suhteen.

Toisena esimerkkinä tarkastellaan nollakuponkilainoista muodostuvaa portfoliota, kun lainojen maturiteetit ovat T_i ja arvot hetkellä t ovat $p(t,T_i), i=1,\ldots,d$. Maturiteetin T_i lainojen lukumäärää merkitään λ_i :llä. Koska nollakuponkilainojen avulla voidaan esittää kuponkituottoja antavien lainojen portfolioita, tässä esitettävää malli on käyttökelpoinen yleisemmin kuin vain nollakuponkilainoilla. Kun jatkuvaa tuottoa ajan hetkellä t maturiteetin T_i funktiona merkitään $y(t,T_i)$:llä, nimellisarvoltaan yhden rahayksikön nollakuponkilainan arvo on

$$p(t,T_i)=\exp(-(T_i-t)y(t,T_i)).$$

Otetaan riskifaktoreiksi tuotot $y(t,T_i), i=1,\ldots,d$. Portfolion arvo ajan hetkellä t on

$$V_t=\sum_{i=1}^{d}\lambda_i p(t,T_i).$$

Tappion lineaariseksi approksimaatioksi saadaan ottamalla osittaisderivaatat ajan ja tuottojen suhteen

$$L_{t+1}=-\sum_{i=1}^{d}\lambda_i p(t,T_i)(y(t,T_i)-(T_i-t)X_{t+1,i}),$$

missä riskitekijöiden muutokset ovat $X_{t+1,i}=y(t+1,T_i)-y(t,T_i)$. Tehdään melko karkea oletus, että tuottokäyrä on riippumaton maturiteetista $y(t,T)=y(t)$ ja yhden aikajakson (esimerkiksi yhden vuoden) kuluttua tuotto muuttuu samaan suuntaan maturiteetista riippumatta $y(t+1)=y(t)+\delta$. Nämä approksimaatiot tehdään usein käytännön laskujen yksinkertaistamiseksi. Tappion lineaarinen approksimaatio tulee muotoon

$$L_{t+1}=V_t(y_t-\sum_{i=1}^{d}\lambda_i\frac{p(t,T_i)}{V_t}(T_i-t)\delta)=-V_t(y_t-D\delta)\ ,$$

missä duraatio D on

$$D=\sum_{i=1}^{d}\lambda_i\frac{p(t,T_i)}{V_t}(T_i-t).$$

Duraatio on portfolion sisältämien lainojen diskontatulla kassavirralla painotettujen maturiteettien summa.

Laskelma antaa sivutuloksena tunnetun immunisaatiomenetelmän vakuutusyhtiön varojen ja velkojen muodostaman portfolion tasapainottamiselle. Portfolio rakennetaan siten, että sen arvo on immuuni korkokäyrän muutoksille, jossa korkokäyrä muuttuu maturiteetista riippumatta seuraavasti $y(t+1)=y(t)+\delta$. Immunisaatiossa sijoitetaan portfolion varat siten, että varojen ja velkojen muodostaman koko portfolion duraatio on nolla.

Value-at-Risk

Tappiojakaumaan perustuvista riskimitoista tunnetuin on Value-at-Risk (merkitään myös VaR).Value-at-Risk antaa tarkasteltavalla aikavälillä tappiomäärän ylärajan, jota suuremmaksi tappio ei jollakin todennäköisyydellä α nouse. Todennäköisyys α on luottamustaso, jolla tappio jää alle määrän VaR_α . Maksimitappion riippuvuus luottamustasosta merkitään siis alaindeksillä. Matemaattisesti VaR_α on α -kvantiili:

$$VaR_\alpha=inf\{l\in\mathbb{R}:P(L>l)\leq 1-\alpha\}=inf\{l\in\mathbb{R}:F_L(l)\geq\alpha\}\ .$$

Tappiojakauman jakaumafunktiota merkittiin F_L :llä. VaR_α tiivistää tappiojakauman yhteen lukuarvoon, joten sillä on omat puutteensa. Erityisesti VaR_α ei sisällä mitään tietoa tappiosta, jotka tapahtuvat alle 1- α todennäköisyydellä. Jakauman häntäosan mallintamisen vaikeudesta johtuen malliriski on todellinen, ja useamman riskin yhteisjakaumaa mallinnettaessa malliriski voi edelleen kasvaa. Riskien vaihtelut ja riskien volatiliteetit saattavat riippua toisistaan tavalla, jota ei kyetä mallintamaan riittävän hyvin. Esimerkkejä tällaisesta ovat markkinoilla tapahtuvat romahdukset, jotka koskevat monia sijoitusluokkia ja siten monella tapaa vaikuttavat talouden toiminnoissa.

Riskimitta VaR_α ei ota huomioon riskiä, joka syntyy suuren markkinaosapuolen likviditeettiriskistä. Suuren transaktion toteuttaminen itse aiheuttaa häiriön markkinoilla, esimerkiksi suuren osakemäärän myynti laskee myytävän osakkeen hintaa. Yksittäisen toimijan toimenpiteet vaikuttavat harvoin koko markkinaan, mutta osamarkkinoilla, esimerkiksi yksittäisessä sijoitusrahastossa vaikutukset saattavat olla merkittäviä.

Käytännössä tarkastellaan esimerkiksi luottamustasoja α =0,95 tai α =0,99. Markkinariskeissä aikaväliksi otetaan tyypillisesti yhden tai kymmenen päivän jakso ja luotto- ja operatiivisissa riskeissä yhden vuoden jakso. Vakuutusyhtiön tilanteessa tyypillinen aikaväli on yksi vuosi tai vuotta pidempi jakso. Vakuutusyhtiön kokonaisriskiin sisältyvät vakuutusriskit sekä edellä mainitut markkina-, luotto- ja operatiiviset riskit.

Kun jakaumafunktio on jatkuva ja aidosti kasvava, kvantiili on jakaumafunktion käänteisfunktio:

$$q_\alpha = F^{-1}(\alpha)\ . \tag{9}$$

Käytännössä tappiojakaumia mallinnetaan usein jatkuvilla jakaumilla, jolloin VaR_α saadaan suoraan kaavan (9) mukaan tappiojakaumafunktion käänteisfunktiona. Normaalijakaumalle $N(\mu,\sigma^2)$ ja Studentin t-jakaumalle $t(\nu,\mu,\sigma^2)$ saadaan:

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma\,\Phi^{-1}(\alpha) \qquad \text{(normaalijakauma)} \tag{10}$$

$$VaR_\alpha = \mu + \sigma\, t_\nu^{-1}(\alpha) \qquad \text{(Studentin t-jakauma).} \tag{11}$$

Edellä normaalijakauman parametrit ovat jakauman odotusarvo ja varianssi. Studentin t-jakauman parametri ν >2 on vapausaste, μ on jakauman odotusarvo ja parametri σ^2 antaa jakauman varianssin kaavasta $var(L) = \nu\sigma^2/(\nu-2)$. Studentin t-jakauma on tappiojakauman mallina useissa tilanteissa parempi kuin normaalijakauma.

VaR_α ei ota huomioon jakauman todennäköisyystason $u \geq \alpha$ ylittävän tappion määrää. Tämän puutteen korjaa riskimitta $TVaR_\alpha$, joka on jakauman häntäosan yli otettu VaR_α :n odotusarvo:

$$TVaR_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_u(L)\,du\ .$$

Seuraavaksi esitetään kirjallisuudessa usein esiintyvät kolme riskimittaa, joilla on läheinen suhde VaR_α ja $TVaR_\alpha$ -riskimittoihin [29]:

$$CTE_\alpha = \mathbf{E}(L \mid L > VaR_\alpha) \qquad \text{(Conditional Tail Expectation)}$$

$$CVaR_\alpha = \mathbf{E}(L - VaR_\alpha \mid L > VaR_\alpha) = CTE_\alpha - VaR_\alpha \qquad \text{(Conditional VaR)}$$

$$ES_\alpha = \mathbf{E}(L - VaR_\alpha)_+ \qquad \text{(Expected Shortfall).}$$

Näiden ja $TVaR_\alpha$:n välillä on seuraavat riippuvuudet [29]:

$$TVaR_\alpha = VaR_\alpha + \frac{1}{1-\alpha} ES_\alpha$$

$$CTE_\alpha = VaR_\alpha + \frac{1}{\bar{F}_X(VaR_\alpha)} ES_\alpha$$

$$CVaR_\alpha = \frac{ES_\alpha}{\bar{F}_X(VaR_\alpha)}$$

Jos jakaumafunktio on jatkuva, saadaan yhtäsuuruus $TVaR_\alpha = CTE_\alpha$ [29].

Salkun markkinariskien laskennallisia menetelmiä

Markkinariskien laskennan perusmenetelmät ovat varianssi-kovarianssimenetelmä, historiatietoihin perustuva simulointi ja Monte Carlo -menetelmä.

Varianssi-kovarianssimenetelmässä oletetaan riskitekijöiden noudattavan jotakin sopivaa jakaumaa, jonka jakaumaparametrien avulla voidaan lausua tappiojakauman lineaarinen approksimaatio. Tavallisin ja tunnetuin käytetty jakauma on multinormaalijakauma $X_{t+1} \sim N_d(\mu, \Sigma)$, missä jakauman parametrit ilmaisevat odotusarvon ja varianssi-kovarianssimatriisin (lyhyemmin sanottuna kovarianssimatriisi). Jakauman dimensiota on merkitty d :llä.

Oletetaan tappiojakauman olevan lineaarista muotoa $L_{t+1}^{\Delta} = -(c_t + b_t^{'} X_{t+1})$, missä c_t ja vektori $b_t^{'}$ ovat mallin kertoimia. Multinormaalijakauman perusominaisuuksien perusteella tappiojakauma noudattaa yhden muuttujan normaalijakaumaa $L_{t+1}^{\Delta} \sim N(-c_t - b_t^{'} \mu, b_t^{'} \Sigma b_t)$. Esimerkiksi riskimitta voidaan laskea suoraan kaavasta (10) käyttämällä jakauman L_{t+1}^{Δ} odotusarvoa ja hajontaa.

Aikaisemmin esitetyssä esimerkissä $L_{t+1}^{\Delta} = -V_t w_t^{'} X_{t+1}$ eli kerroin on $b_t^{'} = V_t w_t^{'}$. Kuten aikaisemmin todettiin, voidaan tarkastella joko ei-ehdollista tai ehdollista tapausta. Esitetyn menetelmän heikkoutena on, että lineaarinen malli ei aina kuvaa hyvin tappiojakauman riippuvuutta riskitekijöistä. Vaikka lineaarinen malli olisikin riittävä, yleensä normaalijakauman oletus ei vastaa todellista tappiojakaumaa. Kokemusperäiset havainnot, varsinkin lyhyemmillä aikajaksoilla päivästä neljännesvuoteen, tukevat useissa tilanteissa huipukasta ja paksuhäntäisempää jakaumaa [121]. Normaalijakaumaoletuksesta seuraa tappiojakauman häntäosan ja vastaavien riskimittojen, kuten VaR_α aliarviointi. Mallin virhe siis vaikuttaa ei-turvaavaan suuntaan ja voi täten johtaa pahimmillaan yhtiön vakavaraisuuden vaarantaviin johtopäätöksiin. Normaalijakaumaoletuksesta johtuva mallivirhe on sekä ei-ehdollisen että ehdollisen tappiojakauman ongelma.

On kuitenkin olemassa muitakin jakaumia kuin normaalijakauma, joiden lineaarinen muunnos noudattaa edelleen samaa jakaumatyyppiä kuin alkuperäinen jakauma. Tällaisia jakaumia ovat usean muuttujan Studentin t-jakauma ja yleistetty hyperbolinen jakauma. Sanotaan, että mainitut jakaumat ovat suljettuja lineaarisen muunnoksen suhteen. Kun riskitekijät noudattavat usean muuttujan Studentin t-jakaumaa $X_{t+1} \sim t_d(\nu, \mu, \Sigma)$, tappiojakauman lineaarinen approksimaatio noudattaa jakaumaa $L_{t+1}^{\Delta} \sim t(\nu, -c_t - b_t^{'} \mu, b_t^{'} \tilde{\Sigma} b_t)$ ja esimerkiksi riskimitta VaR_α lasketaan kaavasta (11).

Historiatietoihin perustuva simulointi käyttää havaittuja tappioiden arvoja $\tilde{L}_{t-n+1}, \ldots, \tilde{L}_t$, kun vastaavat havaitut riskitekijät ovat $X_{t-n+1}, \ldots, X_t$. Havaintotietoihin perustuvista arvoista voidaan laskea haluttu riskimitan arvo olettamalla havaitut tappioarvot otannan tulokseksi. Järjestetään tappioarvot suuruusjärjestykseen $\tilde{L}_{n,n} \leq \ldots \leq \tilde{L}_{1,n}$, josta esimerkiksi VaR_α voidaan arvioida $\tilde{L}_{[n(1-\alpha)],n}$, missä hakasuluilla tarkoitetaan suurinta kokonaislukua, joka ei ylitä arvoa $n(1-\alpha)$. Esimerkiksi, jos n=1000 ja α =0,99 arvioidaan VaR_α ottamalla 10. suurin tappioarvo. Vastaavasti riskimitan CTE_α arvio on 10 suurimman tappioarvon keskiarvo.

Jos havaintopisteiden lukumäärä n ei ole riittävän suuri, sovitetaan havaittuihin tappioarvoihin sopiva teoreettinen jakauma ja tämän jälkeen lasketaan riskimitta analyyttisesti sovitettujen jakauman parametrien arvoilla vastaavasti kuin aikaisemmin laskettiin riskimittoja varianssi-kovarianssimenetelmällä. Koska havaittu jakauma kuvaa usein todellista jakauman häntää heikosti, ja häntäjakauma on nimenomaan tarkastellun kohteena riskimittoja laskettaessa, voidaan häntäjakaumaan sovittaa äärimmäisten arvojen teorian mukainen jakauma. Tällainen jakauma voi olla esimerkiksi yleistetty Pareto-jakauma.

Historiatietoihin perustuvalla menetelmällä on muutamia vahvuuksia. Menetelmä on yksinkertainen ja helposti ymmärrettävä. Riskimitan arviointi on yksiulotteinen tehtävä, eikä tilastollinen moniulotteinen riskitekijöihin ja niiden riippuvuuksiin perustuva mallintamisongelma. Heikkoutena on edellä mainittu havaintotietojen riittävyys siten, että ne kuvaavat nykytilannetta ja tulevaisuutta. Historiatietoihin perustuva menetelmä antaa arvion ei-ehdollisesta tappiojakaumasta eikä ehdollista jakaumaa edellä esitetyllä historiatietoihin perustuvalla menetelmällä saada.

Simulointimenetelmässä historiallisista riskitekijöiden muutoksista $X_{t-n+1}, \ldots, X_t$ riippuvasta mallista simuloidaan haluttu määrä m kpl ennustetun riskitekijän arvoja $\tilde{X}_{t+1}^{(1)}, \ldots, \tilde{X}_{t+1}^{(m)}$. Näistä edelleen lasketaan m kpl tappioennusteen arvoja $\tilde{L}_{t+1}^{(1)}, \ldots, \tilde{L}_{t+1}^{(m)}$. Simuloitavien arvojen lukumäärää m voidaan kasvattaa halutun suuruiseksi, jolloin simuloidusta jakaumasta laskettavien riskimittojen tarkkuus kasvaa ja mallin kyky kuvata todellisuutta asettaa rajan tulosten tarkkuudelle. Riskimitan arvo lasketaan vastaavalla tavalla kuin esitettiin historiallisiin tietoihin perustuvassa menetelmässä. Nyt käytetään mallista simuloituja arvoja, eikä suoraan kokemusperäisiä arvoja.

Jos mallista on suoraan laskettavissa analyyttisella kaavalla riskimitan arvo, simulointia ei tarvita. Realistisemmat mallit, joissa mahdollisesti mallinnetaan myös riskitekijöiden keskinäisiä riippuvuuksia, johtavat siihen, että joudutaan käyttämään simulointimenetelmiä. Sekä ei-ehdollinen että ehdollinen jakauma ovat mahdollisia riippuen onko malli staattinen jakaumamalli vai dynaaminen aikasarjamalli. Mallin heikkoutena suuressa tai johdannaisia sisältävässä salkussa voi olla laskennan raskaus. Tähänkin ongelmaan on olemassa omia menetelmiään, joilla laskentaa voidaan keventää, englanninkielisiltä nimiltään: "Variance reduction" ja "Importance sampling" [121].

Dynaaminen mallintaminen mahdollistaa myös ehdollisen tappiojakauman ennustamisen. Dynaamista mallinnusta voidaan jatkaa pidemmälle tulevaisuuteen kuin yhden aikaperiodin päähän. Laskennan tarkkuutta – ei mallin tarkkuutta – voidaan yleensä kasvattaa pidemmän aikajakson ennustamisessa, verrattuna yhden aikaperiodin laskentaan, jossa laskettavan aikaperiodin pituutta vain kasvatettaisiin.

Joissakin malleissa ennuste pidemmälle aikaperiodille voidaan laskea suoraan analyyttisella kaavalla. Oletetaan, että riippumattomat samoinjakautuneet riskitekijöiden muutokset noudattavat normaalijakaumaa $N_d(0,\Sigma)$, jolloin summan jakauma on $\sum_{i=1}^{h} X_{t+i} \sim N_d(0, h\Sigma)$ ja tappiojakauma noudattaa jakaumaa $L_{t+h}^{(h)\Delta} \sim N(0, h b_t' \Sigma b_t)$. Nähdään, että VaR_α ja CTE_α skaalautuvat ajan neliöjuuren mukaan:

$VaR_\alpha^{(h)} = \sqrt{h} VaR_\alpha^{(1)}$ ja

$CTE_\alpha^{(h)} = \sqrt{h} CTE_\alpha^{(1)}$,

missä aikajakso *h* merkittiin sulkuihin yläindeksinä.

Vakavaraisuuspääoman käsitteestä

Vakavaraisuuspääoman käsitettä on käytetty erityisesti pankkitoimialalla ja sen käyttö on laajentunut myös vakuutusalalla. Vakavaraisuuspääomaa voidaan sellaisenaan pitää eräänä riskimittana. Vakavaraisuuspääomavaatimuksen laskentaa sivutaan tämän esityksen kaikissa luvuissa.

Osa riskeistä on pankki- ja vakuutusalalla samoja, vaikka niiden sijoitustoiminnassa onkin joitakin eroja, luottoriskit ovat yleensä pankeissa tärkeämpiä niiden perustehtävän takia. Erityinen kysymys vakuutusalalla on vakavaraisuuspääoman määrääminen vakuutusriskien osalta. Vakavaraisuuspääoman määritys perustuu markkina-arvoihin tai käypiin arvoihin, koska ne kuvaavat paremmin todellista tilannetta verrattuna kirjanpitoarvoihin.

Tarkka Solvenssi II -direktiivin mukainen vakavaraisuuspääomavaatimuksen laskenta edellyttää säännöstön mukaista vastuuvelan, velkojen, hyväksyttyjen omien varojen ja vakuutusyhtiön kaikkien riskien käsittelyä [176, 177]. Euroopan Unionin Solvenssi II:n vakavaraisuuspääomavaatimuksia esitellään yksinkertaistaen seuraavassa luvussa, mutta tarkka vakaraisuuspääomavaatimuksen laskenta vaatii edellä lueteltujen seikkojen täsmällistä huomioon ottamista. Niiden esittely rajataan tämän esityksen ulkopuolelle, joten tarvittaessa lukijan on turvauduttava suoraan vakuutusyhtiölakiin tai Solvenssi II -direktiivin tekstiin. Aikaisemman lainsäädännön mukainen vakavaraisuuspääoman käsite ei ole kirjanpidollisella tarkkuudella sama kuin Solvenssi II:n vakavaraisuuspääoma. Tietenkin Euroopan talousalueen ulkopuolisissa maissa käsitteiden sisältö voi poiketa, koska ne noudattavat omaa lainsäädäntöään.

Useimmissa englanninkielisissä lähteissä termillä Economic Capital saatetaan tarkoittaa vähimmäispääoman määrää, joka tarvitaan tappioiden kattamiseksi tietyllä luottamustasolla. Esimerkiksi lähteiden [50, 121] Economic Capital -käsite vastaa lähinnä tämän esityksen vakavaraisuuspääomavaatimusta.

Vakavaraisuuspääomaan liittyy keskeisiä vakuutusyhtiöiden taloudellista tilaa kuvaavia tunnuslukuja. Esimerkiksi vahinkovakuutusyhtiön vastuunkantokyky on yhtiön vakavaraisuuspääoman määrä jaettuna jälleenvakuuttajien osuuden jälkeisellä vakuutusmaksutuotolla edelliseltä 12 kuukaudelta (lähteen [50] tunnusluku RAROC on vastuunkantokyvyn käänteisluku, Risk-Adjusted Return on Capital). Vahinko- ja henkivakuutusyhtiön vakavaraisuusaste on yhtiön vakavaraisuuspääoman suhde vastuuvelkaan. Tunnuslukujen laajempi käsittely rajataan tämän esityksen ulkopuolelle.

4 Solvenssi II:n vakavaraisuuspääomavaatimukset

Euroopan Unionin Solvenssi II -direktiivin määrälliset säännökset koostuvat varojen ja velkojen arvostamista, vastuuvelkaa, omaa varallisuutta ja vakavaraisuutta koskevista säännöksistä [176, 177]. Tässä luvussa esitellään yksinkertaistaen vakavaraisuuspääomavaatimusten laskentaa Solvenssi II:n mukaan. Solvenssi II sisältää vakuutusyhtiön vakavaraisuuspääomavaatimuksen ja vähimmäispääomavaatimuksen. Mitä riskisempi on vakuutusyhtiön tilanne sitä korkeammat ovat vakavaraisuuspääomavaatimukset. Seuraavaksi esitellään ensiksi vakavaraisuuspääomavaatimuksen ja sen jälkeen vähimmäispääomavaatimuksen laskentaa.

Vakavaraisuuspääomavaatimus

Vakavaraisuuspääomavaatimuksen tarkoituksena on asettaa yrityksen oma varallisuus vähintään sellaiselle tasolle, jolla vakuutuksenottajien edut ovat kohtuullisella varmuudella turvatut. Vakavaraisuuspääomavaatimus on laskettava standardikaavalla tai käyttämällä kokonaista tai osittaista sisäistä mallia. Lainsäädännön mukaan on siis olemassa kaksi vaihtoehtoa, joista vakuutusyhtiö voi lain sallimissa puitteissa valita. Vakavaraisuuspääomavaatimusta laskettaessa on oletettava, että liiketoiminta jatkuu. Vakavaraisuuspääomavaatimuksen on katettava olemassa oleva liiketoiminta ja seuraavien 12 kuukauden kuluessa odotettavissa oleva uusi liiketoiminta. Olemassa olevan liiketoiminnan osalta vakavaraisuuspääomavaatimuksen on katettava ainoastaan odottamattomat tappiot. Vakavaraisuuspääomavaatimuksen on vastattava vakuutusyhtiön oman varallisuuden Value-at-Risk-arvoa, joka on laskettu 99,5 % todennäköisyydellä yhden vuoden ajanjaksolle.

Vakavaraisuuspääomavaatimuksen laskenta käsittää ainakin seuraavat riskimodulit: vahinkovakuutusriski, henkivakuutusriski, sairausvakuutusriski, markkinariski ja vastapuoliriski (perusvakavaraisuuspääomavaatimus). Kukin riskimoduleista kalibroidaan käyttämällä Value-at-Risk-arvoa, joka on laskettu 99,5 % todennäköisyydellä yhden vuoden ajanjaksolle. Riskimodulien muotoilussa otetaan tarvittaessa huomioon hajautusvaikutukset. Katastrofeihin liittyvissä riskeissä voidaan tarvittaessa käyttää maantieteellisiä erittelyjä henkivakuutus-, vahinkovakuutus- ja sairausriskimodulien laskennassa. Standardikaavan mukaan vakavaraisuuspääomavaatimus on perusvakavaraisuuspääomavaatimuksen ja operatiivista riskiä koskevan pääomavaatimuksen summa sekä korjaus, jolla otetaan huomioon vakuutustekniseen vastuuvelkaan ja laskennallisiin veroihin liittyvä vaimennusvaikutus. Vakavaraisuuspääomavaatimus on laskettava vähintään kerran vuodessa.

Operatiiviseen riskiin sisältyvät oikeudelliset riskit, mutta eivät strategisiin päätöksiin liittyvät riskit eivätkä maineriskit. Operatiivisen riskin vakavaraisuuspääomavaatimus lasketaan vakuutusyhtiön eri vakuutustyyppien volyymien mukaan: pääasiassa vastuuvelkojen määrien , maksutulojen ja vakuutusyhtiön hallinnollisten kulujen perusteella.

Vakavaraisuuspääomavaatimusta koskeva standardikaava on

$$Basic\,SCR=\sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} SCR_i SCR_j},$$

missä indeksit *i* ja *j* tarkoittavat vahinko-, henki-, sairaus-, markkina- ja vastapuoliriskimoduleita. Direktiivissä korrelaatiokertoimia on merkitty *Corr*-merkinnällä. Korrelaatiokertoimien arvot matriisina esitettynä ovat:

i,j	Markkina	Vastapuoli	Henki	Sairaus	Vahinko
Markkina	1	0,25	0,25	0,25	0,25
Vastapuoli	0,25	1	0,25	0,25	0,5
Henki	0,25	0,25	1	0,25	0
Sairaus	0,25	0,25	0,25	1	0
Vahinko	0,25	0,5	0	0	1

Esimerkiksi vahinkovakuutus- ja vastapuoliriskien välillä on korrelaatiokerroin 0,5. Vahinkovakuutusriskeillä ei ole korrelaatiota sairaus- ja henkivakuutusriskien kanssa.

Vahinkovakuutusriskimodulia koskeva standardikaava on

$$SCR_{non-life}=\sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} SCR_i SCR_j},$$

missä indeksit *i* ja *j* tarkoittavat vahinkovakuutuksen vakuutusmaksu- ja korvausvastuuriskialamodulia ja katastrofiriskialamodulia.

Henkivakuutusriskimodulia koskeva standardikaava on

$$SCR_{life}=\sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} SCR_i SCR_j},$$

missä indeksit *i* ja *j* tarkoittavat henkivakuutuksen kuolevuus-, pitkäikäisyys-, työkyvyttömyys- ja kuolevuus-, kustannus-, muuttamis-, raukeamis- sekä katastrofiriskialamoduleita.

Markkinariskimodulia koskeva standardikaava on

$$SCR_{market}=\sqrt{\sum_{i,j} Corr_{i,j} SCR_i SCR_j},$$

missä indeksit i ja j tarkoittavat markkinariskin korko-, osake-, omaisuus-, korkomarginaali-, markkinariskikeskittymis- ja valuuttariskialamoduleita.

Vastapuoliriskin ja sairausvakuutusriskin vakavaraisuuspääomavaatimukset lasketaan myös Solvenssi II -sääntelyyn liittyvän ohjeistuksen mukaisesti. Solvenssi II:n lainsäädäntökehikon rakenne on selitetty tarkemmin lähteessä [178]. Vastapuoliriskin ja sairausvakuutusriskin vakavaraisuuspääomavaatimusten laskentakaavat eivät perustu välttämättä korrelaatio-matriiseihin. Myös nämä mainitut riskimodulit on kalibroitava käyttämällä Value-at-Risk-arvoa, joka on laskettu 99,5 % todennäköisyydellä yhden vuoden ajanjaksolle.

Vähimmäispääomavaatimus

Vähimmäispääomavaatimuksen on vastattava sitä omien varojen määrää, jonka alittuessa vakuutuksenottajiin ja edunsaajiin kohdistuisi kohtuuton riski, jos vakuutusyrityksen sallittaisiin jatkaa toimintaansa.

Vähimmäispääomavaatimuksen absoluuttisen vähimmäistason on oltava [177]:

i. vahinkovakuutusyrityksissä kytkösyritykset mukaan luettuna 2 500 000 euroa lukuunottamatta tapauksia, jotka sisältävät vakuutusluokkiin 10 – 15 kuuluvia riskejä, jolloin tason on oltava vähintään 3 700 000 euroa;

ii. henkivakuutusyrityksissä kytkösyritykset mukaan luettuna 3 700 000 euroa;

iii. jälleenvakuutusyrityksissä 3 600 000 euroa lukuunottamatta kytkösyrityksiä, joissa vähimmäispääomavaatimus on 1 200 000 euroa;

iv. yrityksissä, jotka harjoittavat samanaikaisesti henki- ja vahinkovakuutustoimintaa i ja ii-alakohdissa mainittujen rahamäärien summa.

Kohta iv tarkoittaa direktiivin 73 artiklan kohdassa 5 [176] lueteltujen maiden vakuutusyhtiöitä, joissa lainsäädäntö on mahdollistanut samanaikaisen vahinko- ja henkivakuutustoiminnan. Suomen lainssäädännön mukaan toimivissa vakuutusyhtiöissä henki- ja vakuutustoiminta ei ole ollut mahdollista samassa vakuutusyhtiössä. Useimmissa tapauksissa suomalainen vahinkovakuutusyhtiö harjoittaa direktiivin vahinkovakuutusluokkiin 1 ja 2 (tapaturmat ja sairaus) liittyvää vakuutustoimintaa. Kohta iv ei koske näitä vakuutusyhtiöitä. Uuden Solvenssi II -säännöstön mukaan henki- ja vakuutustoiminta on pidettävä erillään toisistaan.

Absoluuttisen vähimmäistason ylittyessä vähimmäispääomavaatimus lasketaan seuraavien muuttujien tai joidenkin niistä lineaarisena funktiona: vakuutustekninen vastuuvelka, vakuutusmaksut, riskipääoma, laskennalliset verot ja hallinnolliset kulut. Käytetyistä muuttujista on vähennettävä jälleenvakuutuksen osuus. Lineaarinen funktio on kalibroitava tasolle, joka vastaa vakuutusyhtiön oman varallisuuden Value-at-Risk-arvoa, joka on laskettu 85 %

todennäköisyydellä yhden vuoden ajanjaksolle. Vähimmäispääomavaatimus ei saa laskea alle 25 % tai ylittää 45 % vakavaraisuuspääomavaatimuksesta. Vähimmäispääomavaatimus on laskettava vähintään neljännesvuosittain ja laskennan tulokset on ilmoitettava Finanssivalvonnalle. Jos vähimmäispääomavaatimus on määräytynyt 25 % tai 45 % -rajan perusteella, yrityksen on toimitettava Finanssivalvonnalle tietoja miksi näin on tapahtunut.

5 Luottoriskien mallintamisesta

Toisistaan riippuvat luottoriskit

Tässä luvussa mallinnetaan luottoriskiä ja erityisesti usean yhtiön muodostaman salkun luottoriskiä, jossa yksittäisen yrityksen maksukyvyttömyys (eng. default) riippuu muiden yhtiöiden tilanteesta esimerkiksi yleisen taloudellisen tilanteen muutoksen kautta. Tässä yhteydessä käytetään termiä yritys, jolla ymmärretään yleisemmin velallista tai muuta vastapuolta, jolla on maksuvelvoite saajalle. Vuoden 2008 finanssikriisin jälkeen todettiin, että useimmat luottoriskiä kuvanneet mallit eivät ottaneet riittävällä tavalla yritysten välistä riippuvuutta huomioon ääriolosuhteissa. Tässä luvussa mallinnetaan salkun luottoriskiä siten, että maksukyvyttömyyden riippuvuus otetaan huomioon. Vaikka käsiteltävänä ovat luottoriskit, samoja menetelmiä voi soveltaa muihinkin toisistaan riippuviin riskeihin. Luottoriskin ottaminen esimerkiksi on perusteltua siksi, että erityisesti pankkipuolella luottoriskit ovat markkina- ja operatiivisiin riskeihin verrattuna suurempia.

Vakuutuspuolella vastaavia malleja voi soveltaa esimerkiksi toisistaan riippuvien vakuutusriskien mallintamiseen kokonaisuutena. Samoin sekä pankki- että vakuutusyhtiöissä nykyisen integroituneiden markkinoiden aikana markkinariskejä on realistisissa malleissa käsiteltävä toisistaan riippuvina. Edelleen samaa ajatusta voi luontevasti laajentaa ylemmälle tasolle, jolloin markkina-, vakuutus-, luotto- ja operatiivisia riskejä mallinnetaan toisistaan riippuvina. Solvenssi II on eräs tapa ottaa huomioon riskien välistä riippuvuutta, mutta tässä esitetään menetelmiä, joiden avulla on mahdollista kehittää paremmin todellisuutta kuvaavia malleja. Toisaalta riskien käyttäytyminen ääriolosuhteissa on kuitenkin jollakin tavalla yllätyksellistä, joten liian monimutkaiset mallit eivät tuo lisäarvoa. Liika monimutkaisuus voi hämärtää tilanteen ymmärtämistä ja luottaminen malliin, jota ei täysin ymmärretä voi johtaa vääriin johtopäätöksiin. Tässä esitettävät riippuvuutta kuvaavat mallit ovat kuitenkin varsin yksinkertaisia.

Seuraavaksi esitettävässä mallissa luottoriskillä tarkoitetaan maksukyvyttömyyden sattumisen todennäköisyyttä jonkin määrätyn ajanjakson aikana, esimerkiksi seuraavan yhden vuoden aikana. Maksukyvyttömyyden tapahtumisen ajankohdalla tarkasteltavan ajanjakson sisällä ei ole merkitystä. Tätä on lähteessä [97] kutsuttu staattiseksi luottoriskin mallintamiseksi. Luottojohdannaisten hinnoittelussa tarvitaan dynaamista luottoriskin mallintamista, jossa maksukyvyttömyyden tapahtuman tai luottokelpoisuuden muutoksen ajankohta on otettava huomioon.

Mallit on lähteessä [97] jaettu sekoitus- ja kynnysmalleihin (eng. mixture and threshold models). Kynnysmallit ovat kuitenkin vain sekoitusmallien erikoistapaus. Malleja käsitellään erikseen, koska niissä on erilainen lähestymistapa maksukyvyttömyyden tapahtumisen mallintamiseen.

Otetaan aluksi käyttöön muutamia merkintöjä, jotka samalla selventävät mallinnettavaa tilannetta. Maksukyvyttömyysindikaattorilla tarkoitetaan satunnaismuuttujaa Y_i, joka saa arvon 1, jos yhtiö joutuu maksukyvyttömäksi tarkasteltavan ajanjakson T sisällä ja muussa tapauksessa arvon 0. Merkitään e_i :llä vastapuolelta olevaa saatavan määrää ja tappion osuutta l_i :llä, jos maksukyvyttömyys tapahtuu. Maksukyvyttömyystilanteessa on siis mahdollista saada osa saatavasta takaisin. Näillä merkinnöillä tappio on

Jos salkussa on m eri saatavaa, yhteensä

$$L^{(m)}=\sum_{i=1}^{m} l_i e_i Y_i .$$

Salkkuja, joissa saatavien määrät ja tappio-osuudet ovat samat kutsutaan homogeenisiksi salkuiksi. Tässä esityksessä tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi vain homogeenisia salkkuja. Otetaan vielä käyttöön maksukyvyttömyystapahtumien lukumäärälle merkintä $N^{(m)}$

$$N^{(m)}=\sum_{i=1}^{m} Y_i .$$

Homogeenisessa salkussa $l_i=l$ ja voidaan asettaa $e_i=1$, joten

$$L^{(m)}=l\sum_{i=1}^{m} Y_i=l\,N^{(m)} .$$

Siten homogeenisessa salkussa maksukyvyttömyydestä johtuvan tappion laskenta voidaan suorittaa tarkastelemalla maksukyvyttömyystapahtumien jakaumaa. Homogeenisen salkun maksukyvyttömyystodennäköisyydet ovat samat kaikilla vastapuolilla.

Aluksi tarkastellaan yksinkertaista binomimallia, joka yleensä soveltuu heikosti maksukyvyttömyystodennäköisyyksien mallintamiseen, mutta binomimallia laajentamalla saadaan huomattavasti realistisempi malli. Binomimallissa on m vastapuolta, jotka joutuvat maksukyvyttömiksi todennäköisyydellä p ajanjakson T sisällä. Oletetaan, että indikaattorit Y_i ovat riippumattomia ja samoinjakautuneita. Maksukyvyttömäksi joutuvien vastapuolten lukumäärä on $N^{(m)}$ riippumattomien Bernoulli-jakautuneiden satunnaismuuttujien summa, joten se on binomijakautunut parametreilla m ja p. Siten todennäköisyys, että tapahtuu k maksukyvyttömyystapahtumaa on

$$P(N^{(m)}=k)=\binom{m}{k} p^k (1-p)^{\mathrm{m-k}} ,$$

ja maksukyvyttömyystapahtumien odotusarvo on $E N^{(m)} = m p$. Edellä oletetut binomimallin riippumattomuuden ja samoinjakautumisen oletukset ovat harvoin voimassa todellisuudessa. Maksukyvyttömyystapahtumilla on todettu olevan riippuvuuksia siten, että poikkeavissa tai äärimmäisissä tilanteissa maksukyvyttömyyksien todennäköisyydet kasvavat huomattavasti. Binomimalli johtaa liian pieniin salkun suurten tappioiden todennäköisyyksiin. Käytetään sanontaa, että binomimallin tappiojakauman häntä ei ole paksu. Melko yksinkertaisella binomijakauman täydennyksellä voidaan muodostaa malli, joka huomioi maksukyvyttömyystapahtumien riippuvuuden ja samalla koko salkun tappiojakauman paksumman hännän.

Satunnaisvektori $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)'$ noudattaa Bernoullin sekoitusjakaumaa, jolla on satunnaistekijä Ψ , jos on olemassa funktiot $p_i : \mathbb{R} \rightarrow [0,1], 1 \leq i \leq m$ siten, että ehdolliset satunnaismuuttujat $Y_i | \Psi$ ovat riippumattomia Bernoulli-jakautuneita satunnaismuuttujia ja $P(Y_i = 1 | \Psi = \psi) = p_i(\psi)$. Määritelmä yleistyy suoraan korkeampaan dimensioon, jolloin satunnaisvektorilla Ψ on $p < m$ komponenttia, joiksi voidaan ottaa sopivia makrotaloudellisia tekijöitä, esimerkiksi korko- tai osakeindeksejä.

Koska maksukyvyttömyyttä kuvaavat indikaattorifunktiot ovat riippumattomia ja ne noudattavat Bernoullin jakaumaa, saadaan

$$P(Y = y | \Psi = \psi) = \prod_{i=1}^{m} P(Y_i = y_i | \Psi = \psi) = \prod_{i=1}^{m} p_i(\psi)^{y_i} (1 - p_i(\psi))^{1 - y_i}.$$

Edellisestä kaavasta saadaan todennäköisyys $P(Y = y)$ integroimalla satunnaistekijän Ψ kaikkien mahdollisten arvojen yli. Tarkastellaan yksinkertaisuuden vuoksi tilannetta, jossa salkun maksukyvyttömyyden todennäköisyydet ovat samoja $p(\psi) = p_i(\psi) = P(Y_i = 1 | \Psi = \psi)$. Satunnaismuuttujaa $p(\psi)$ kutsutaan sekoitusmuuttujaksi. Käyttämällä odotusarvon ja iteroidun odotusarvon määritelmiä saadaan

$$P(Y_i = 1) = E(p(\Psi)) . \tag{12}$$

Todennäköisyys, että salkussa tapahtuu tietty määrä maksukyvyttömyystapahtumia on edellä esitetyn perusteella

$$P(N^{(m)} = k | \Psi = \psi) = \binom{m}{k} p(\psi)^k (1 - p(\psi))^{m-k} .$$

Jotta saamme ei-ehdollisen todennäköisyyden on integroitava $p(\psi)$:n yli:

$$P(N^{(m)}=k)=\binom{m}{k}\int_0^1 p(\psi)^k(1-p(\psi))^{\text{m-k}}dG(p(\psi)),$$

missä G on sekoitusmuuttujan $p(\psi)$ kertymäfunktio eli $G(x)=P(p(\psi)\leq x)$. Sekoitusmuuttujan jakaumana voidaan käyttää esimerkiksi Beta-, Probit-normal- tai Logit-normaalijakaumia [97]. Esimerkiksi, jos sekoitusmuuttujan jakauma on Beta-jakauma, saadaan

$$P(N^{(m)}=k)=\binom{m}{k}\frac{\beta(a+k,b+m-k)}{\beta(a,b)}\ ,\quad a,b>0\text{ , missä}$$

$$\beta(a,b)=\int_0^1 z^{a-1}(1-z)^{b-1}\ ,\quad 0<z<1\ .$$

Aikaisemmin käsitellyssä binomimallissa maksukyvyttömyysindikaattorit olivat riippumattomia, joten niiden välinen korrelaatio on nolla. Sekoitusmallissa ehdolliset maksukyvyttömyysindikaattorit ovat riippumattomia, mutta ilmeisesti ei-ehdolliset indikaattorifunktiot ovat korreloituneita. Näytetään seuraavaksi, että näin on ja lisäksi sekoitusjakauman ensimmäinen ja toinen momentti määräävät korrelaatiokertoimen. Merkitään $\pi=P(Y_{i_1}=1,\ldots,Y_{i_k}=1)$, missä $\{i_1,\ldots,i_k\},k\in\{2,\ldots,m\}$ on joukon $\{1,\ldots,m\}$ mielivaltainen osajoukko. Kahden indikaattorifunktion välinen korrelaatio on

$$Corr(Y_i,Y_j)=\frac{Cov(Y_i,Y_j)}{\sqrt{Var(Y_i)Var(Y_j)}}=\frac{E(Y_iY_j)-E(Y_i)E(Y_j)}{E(Y_i^2)-E(Y_i)^2}=\frac{\pi_2-\pi^2}{\pi-\pi^2}\ .$$

Vastaavasti kuin kaava (12) saadaan

$$\pi_k=P(Y_{i_1}=1,\ldots,Y_{i_k}=1)=E(E(Y_1\ldots Y_k|\Psi))=E(p(\Psi)^k)\text{ , joten}$$

$$Corr(Y_i,Y_j)=\frac{E(p(\Psi)^2)-E(p(\Psi))^2}{E(p(\Psi))-E(p(\Psi))^2}=\frac{Var(p(\Psi))}{E(p(\Psi))(1-E(p(\Psi)))}\geq 0\,.$$

Seuraavaksi tarkastellaan salkkua, jossa saatavien lukumäärä on suuri. Yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että $e_i=1$. Realistisessa tilanteesta tappio-osuudet l_i ja maksukyvyttömyysindikaattorit Y_i eivät ole riippumattomia, vaan heikossa markkinatilanteessa myös tappio-osuudet ovat suurempia. Lähteessä [69] on käsitelty tilannetta, jossa l_i ovat stokastisia ja salkun yksittäiset luottoriskit eivät ole samoja.

Yksinkertaistetussa tilanteessa $p(\psi)=p_i(\psi)$ kaikilla *i*. Suurten lukujen lain mukaan [69] $\lim_{m\to\infty}\frac{N^{(m)}}{m}=p(\Psi)$ m.v. mitan $P(.|\Psi)$ suhteen. Tästä seuraa raja-arvon suppeneminen jakauman mielessä

$$\lim_{m\to\infty}P\left(\frac{N^{(m)}}{m}\le x\right)=P(p(\Psi)\le x)=G(x)\ . \tag{13}$$

Siten maksukyvyttömien suhteellisen osuuden jakauma lähestyy sekoitusmuuttujan jakaumaa. Jos sekoitusmuuttujan jakaumalla on paksu häntä, myös salkun tappiojakaumalla on paksu häntä ja suurten luottotappioiden todennäköisyys on korkea.

Kynnysmalliin perustuvat luottoriskit

Edellisessä kappaleessa ei otettu kantaa miten vastapuolen maksukyvyttömyys syntyy. Tässä käsitellään malleja, joissa maksukyvyttömyys tapahtuu, kun stokastisen prosessin arvo laskee määrätyn kynnysarvon alle. Tarkasteltava prosessi on yleensä vastapuolen varojen määrä.

Esitettävä malli perustuu Robert C. Mertonin vuonna 1974 julkaisemaan artikkeliin yrityksen luottoriskistä. Yrityksen taseessa on kolme pääosaa, jotka ovat varat, oma pääoma ja vieras pääoma. Keskeinen stokastinen prosessi on yrityksen varojen määrä, jota merkitään V_t :llä. Varoja yritys on saanut ottamalla velkaa nimellisarvoltaan $\bar{D}$ ja sijoittamalla omaa pääomaa. Velan arvo hetkellä t on D_t ja oman pääoman arvo E_t , joten tarkasteltavalla aikavälillä $0\le t\le T$:

$$V_t=D_t+E_t\ .$$

Mertonin mallissa yrityksen ottaman velan arvoa ajanhetkellä t esittää nollakuponkibondin arvo, joka vaihtelee Brownin liikkeen mukaan. Oletetaan, että

$$dV_t=rV_t dt+\sigma V_t dW_t\ ,$$

missä W_t on standardi Brownin liike, $r\ge 0$ on vakiokorko ja $\sigma>0$ on varojen arvon volatiliteetti. Korkona käytetään markkinoiden riskitöntä korkoa. Tämä johtuu siitä, että ei voida etukäteen odottaa varallisuusarvon, eikä minkään sen johdannaisen, tuottava eri suuren korkotuoton kuin riskitön sijoitus. Muussa tapauksessa syntyisi arbitraasimahdollisuus. Oletetaan, että tulevaisuudesta ei ole tietoa varallisuuden tavanomaisesta poikkeavasta tuotto-odotuksesta. Historiallinen varallisuusarvon tuotto tai tuleva toteutuva tuotto voi tietenkin poiketa riskittömästä korosta.

Yritys joutuu maksukyvyttömäksi, jos varojen määrä alittaa vieraan pääoman ajanhetkellä T eli

$V_T < D_T$. Tässä tilanteessa velan myöntäjät saavat jäljellä olevan varallisuuden V_T ja osakkeenomistajat menettävät kokonaan sijoittamansa pääoman. Jos yritys ei joudu maksukyvyttömäksi, velan myöntäjät saavat takaisin koko velan nimellisarvon $\bar{D}$ ja osakkeenomistajille jää loput $V_T - \bar{D}$. Nämä maksut voidaan esittää seuraavassa muodossa:

$$D_T = min(V_T, \bar{D}) = \bar{D} - (\bar{D} - V_T)^+$$

$$E_T = max(V_T - \bar{D}, 0) = (V_T - \bar{D})^+ .$$

Velan arvo sen maksuhetkellä on velan nimellisarvo vähennettynä eurooppalaisen myyntioption hinnalla. Oman pääoman arvo on vastaavasti eurooppalaisen osto-option arvo.

Varojen arvoa kuvaavan yhtälön ratkaisu saadaan Itôn lemman avulla ajanhetkellä T [97]:

$$V_T = V_0 \exp((r - \frac{\sigma^2}{2}) T + \sigma W_T).$$

Käyttämällä standardin Brownin liikkeen ominaisuutta kirjoitetaan $W_T = \sqrt{T} Z$, missä Z on normaalijakautunut $N(0,1)$. Kuten edellä todettiin, maksukyvyttömyyden aiheuttaa ehto $V_T < \bar{D}$, joten maksukyvyttömyyden todennäköisyys on

$$P(V_T < \bar{D}) = P(\ln(V_T) < \ln(\bar{D})) = P(\ln(V_0) + (r - \frac{\sigma^2}{2}) T + \sigma \sqrt{T} Z < \ln(\bar{D})) =$$

$$P(Z < \frac{\ln(\frac{\bar{D}}{V_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2}) T}{\sigma \sqrt{T}}) = \Phi(\frac{\ln(\frac{\bar{D}}{V_0}) - (r - \frac{\sigma^2}{2}) T}{\sigma \sqrt{T}}) .$$

Standardia normaalijakauman kertymäfunktiota merkittiin Φ :llä. Mertonin mallista voidaan kehittää luottoriskien riippuvuutta kuvaava laajennettu malli vastaavalla tavalla kuin binomimallista saatiin sekoitetun jakauman malli. Tarkastellaan salkkua, jossa on m saatavaa. Saatavan *i* arvo ajanhetkellä t on $V_{t,i}$. Jotta mallissa saatavien arvot saadaan riippumaan toisistaan, oletetaan, että kuhunkin arvoon vaikuttaa kaksi stokastista prosessia: kaikille yhteinen stokastinen prosessi ja saatavan oman arvonkehityksen prosessi:

$dV_{t,i} = r V_{t,i} dt + \sigma_i V_{t,i} dB_{t,i}, r \geq 0, \sigma_i > 0$, missä

$$B_{t,i} = \sqrt{\rho} W_{t,0} + \sqrt{1-\rho} W_{t,i}, \rho \geq 0 .$$

Prosessit $W_{t,i}$ ovat riippumattomia standardeja Brownin liikkeitä ja siten myös $B_{t,i}$ ovat standardeja Brownin liikkeitä. Brownin liikkeen ominaisuuden perusteella kirjoitetaan $B_{t,i}$ muotoon

$$B_{t,i}=\sqrt{\rho t}\,\Psi+\sqrt{t(1-\rho)}\,Z_i\ .$$

Ratkaisuksi saadaan

$$V_{t,i}=V_{0,i}\exp((r-\frac{\sigma_i^2}{2})t+\sigma_i(\sqrt{\rho t}\,\Psi+\sqrt{t(1-\rho)}\,Z_i))\ .$$

Vastapuoli i joutuu maksukyvyttömäksi, kun $V_{T,i}<\bar{D}$ ajanhetkellä T :

$$V_{0,i}\exp((r-\frac{\sigma_i^2}{2})T+\sigma_i(\sqrt{\rho T}\,\Psi+\sqrt{T(1-\rho)}\,Z_i))<\bar{D}_i <=>$$

$$\sqrt{1-\rho}\,Z_i<\frac{\ln(\frac{\bar{D}_i}{V_{0,i}})-(r-\frac{\sigma_i^2}{2})T}{\sigma_i\sqrt{T}}-\sqrt{\rho}\,\Psi <=>$$

$$Z_i<\frac{C_i-\sqrt{\rho}\,\Psi}{\sqrt{1-\rho}}\text{ , missä}$$

$$C_i=\frac{\ln(\frac{\bar{D}_i}{V_{0,i}})-(r-\frac{\sigma_i^2}{2})T}{\sigma_i\sqrt{T}}\ .$$

Maksukyvyttömyyden todennäköisyys riippuu kaikille vastapuolille yhteisestä markkinatekijästä, joka noudattaa standardia normaalijakaumaa. Vastapuolen maksukyvyttömyyden todennäköisyys ehdollistettuna tekijälle Ψ on

$$p_i(\Psi)=P(Y_i=1|\Psi)=P(Z_i<\frac{C_i-\sqrt{\rho}\,\Psi}{\sqrt{1-\rho}}|\Psi)=\Phi(\frac{C_i-\sqrt{\rho}\,\Psi}{\sqrt{1-\rho}})\ . \tag{14}$$

Viimeinen yhtälö seurasi siitä, että Z_i oletetaan riippumattomaksi tekijästä Ψ kaikilla i . Käytetään nyt tietoa, että $B_{i,t}$:n jakauma on standardi normaalijakauma. Vastapuolen maksukyvyttömyyden todennäköisyydeksi saadaan

$$p_i = P(Y_i = 1) = P(V_{T,i} < \bar{D}_i) = P(V_{0,i} \exp((r - \frac{\sigma_i^2}{2})T + \sigma_i(\sqrt{T} Z_i)) < \bar{D}_i)$$

$$P(Z_i < \frac{\ln(\frac{\bar{D}_i}{V_{0,i}}) - (r - \frac{\sigma_i^2}{2})T}{\sigma_i \sqrt{T}}) = P(Z_i < C_i) = \Phi(C_i) .$$

Tästä saamme tärkeän kaavan vakiolle C_i :

$$C_i = \Phi^{-1}(p_i) .$$

Seuraavaksi tarkastellaan salkkua, joka sisältää useita luottoriskejä. Oletetaan jälleen yksinkertaisuuden vuoksi, että jokaisen vastapuolen todennäköisyys joutua maksukyvyttömäksi on sama $\pi = p_i$ ja $p(\psi) = p_i(\psi)$ kaikilla i . Tästä seuraa, että myös vakiot C_i ovat samoja. Kaavasta (14) nähdään, että ehdollinen maksukyvyttömyyden todennäköisyys on

$$p_i(\Psi) = \Phi(\frac{\Phi^{-1}(\pi) - \sqrt{\rho}\,\psi}{\sqrt{1-\rho}}) .$$

Ehdolla, että $\Psi = \psi$ indikaattorifunktiot Y_i ovat Bernoulli-jakautuneita parametrilla $p(\psi)$. Joten ehdollinen todennäköisyys, että tapahtuu k maksukyvyttömyystapahtumaa noudattaa binomijakaumaa parametreilla m ja $p(\psi)$:

$$P(N^{(m)} \leq k \mid \Psi = \psi) = \sum_{i=1}^{k} P(N^{(m)} = i \mid \Psi = \psi) = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} p(\psi)^i (1 - p(\psi))^{m-i} .$$

Ei-ehdollinen maksukyvyttömyystodennäköisyys saadaan integroimalla:

$$P(N^{(m)} \leq k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{m}{i} \int_{-\infty}^{-\infty} p(u)^i (1 - p(u))^{m-i} f_\Psi(u) du ,$$

missä f_Ψ on standardin normaalijakauman tiheysfunktio. Edelliseen kaavaan voidaan sijoittaa $p(u)$ ja laskea todennäköisyyksiä numeerisesti.

Salkulle, jossa on suuri määrä luottoriskejä, voidaan laskea approksimaatio. Aikaisemmin saatiin tulos, että sekoittuneen Bernoulli-jakauman tapauksessa maksukyvyttömyyssuhde lähenee sekoitustekijän jakaumaa. Tämä sama tulos on voimassa myös Mertonin malliin perustuvassa sekoitusmallissa. Lasketaan kertymäfunktio $G(x)$:

$$G(x)=P(p(\psi)\leq x)=P(\Phi(\frac{\Phi^{-1}(\pi)-\sqrt{\rho}\psi}{\sqrt{1-\rho}})\leq x)=$$

$$P(\frac{\Phi^{-1}(\pi)-\sqrt{\rho}\psi}{\sqrt{1-\rho}}\leq\Phi^{-1}(x))=P(-\Psi\leq\frac{1}{\sqrt{\rho}}(\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x)-\Phi^{-1}(\pi)))=$$

$$P(\Psi\leq\frac{1}{\sqrt{\rho}}(\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x)-\Phi^{-1}(\pi)))=\Phi(\frac{1}{\sqrt{\rho}}(\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x)-\Phi^{-1}(\pi))). \tag{15}$$

Kaavan viimeinen lauseke antaa arvion suuren luottoriskejä sisältävän salkun maksukyvyttömyyssuhteelle:

$$P(\frac{N^{(m)}}{m}\leq x)=\Phi(\frac{1}{\sqrt{\rho}}(\sqrt{1-\rho}\Phi^{-1}(x)-\Phi^{-1}(\pi)))\,.$$

Indikaattorifunktioiden välistä korrelaatiota ei ole mahdollista laskea analyyttisesti, mutta lähteessä [97] on todistettu lause 3.4.1, jonka mukaan, jos parametri $\rho=0$ indikaattorifunktioiden välinen korrelaatio on nolla ja jos $\rho\neq 0$ indikaattorifunktioiden välinen korrelaatio on nollasta poikkeava.

Kopuloihin perustuvat riskimitat

Keskinäisten riskien riippuvuus on tärkeä tekijä vakuutusyhtiöiden riskien hallinnassa. Tässä esitetään kopuloihin perustuvaa riskien laskentaa, konkreettisena esimerkkinä käytetään salkun luottoriskin laskentaa. Kopulamenetelmien suosio on viime aikoina lisääntynyt vakuutusyhtiöiden vakavaraisuuspääomien laskennassa, jolloin mallinnetaan vakavaraisuuspääomavaatimuksissa säännellyt katettavat riskit, joista yksi on luottoriski.

Käytännön aineistoja tarkastelemalla on havaittu, että multinormaalijakaumaan ja lineaariseen korrelaatioon perustuvat mallit eivät aina kuvaa todellisuutta riittävän hyvin, varsinkaan ääritilanteissa. Kopuloiden avulla voidaan muodostaa monimuuttujamalleja, joissa ei rajoituta multinormaalijakaumiin eikä korrelaatiomatriisimenetelmään.

Aluksi esitetään yleistä teoriaa kopuloista. Kopula määritellään joukolla $[0,1]^d$ kertymäfunktiona, jonka reunajakaumat ovat standardeja tasaisia jakaumia. Tästä seuraavat kolme kopulan C ominaisuutta:

1. $C(u_1,\ldots,u_d)$ on kasvava jokaisen argumentin u_i suhteen;

2. $C(1,\ldots,1,u_i,1,\ldots,1)=u_i$ kaikilla $i\in\{1,\ldots,d\}$, missä $u_i\in[0,1]$;
3. Kaikilla $(a_1,\ldots,a_d),(b_1,\ldots,b_d)\in[0,1]^d$, kun $a_i\leq b_i$ on voimassa ja $\sum_{i_1=1}^{2}\ldots\sum_{i_d=1}^{2}(-1)^{i_1+\ldots+i_d}C(u_{1i_1},\ldots,u_{di_d})\geq 0$, missä $u_{j1}=a_j$ ja $u_{j2}=b_j$ kaikilla $j\in\{1,\ldots,d\}$.

Ensimmäinen ehto seuraa siitä, että kopula on kertymäfunktio. Toinen ehto on seurausta reunajakauman määritelmästä. Kolmas ehto varmistaa sen, että $P(a_1\leq U_1\leq b_1,\ldots,a_d\leq U_d\leq b_d)$ on aina ei-negatiivinen.

Kopuloiden ominaisuuksia kuvaa tärkeä Sklarin lause:

a) Olkoon F yhteisjakaumafunktio, jonka reunajakaumat ovat $F_1,\ldots,F_d$. Tällöin on olemassa kopula $C:[0,1]^d\rightarrow[0,1]$ siten, että kaikilla $x_1,\ldots,x_d\in\bar{\mathbb{R}}$, $\bar{\mathbb{R}}=[-\infty,\infty]$

$F(x_1,\ldots,x_d)=C(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d))$.

Jos $F_1,\ldots,F_d$ ovat jatkuvia, kopula C on yksikäsitteinen.

b) Kääntäen, jos C on kopula ja $F_1,\ldots,F_d$ ovat jakaumafunktioita, $F=C(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d))$ on yhteisjakaumafunktio, jonka reunajakaumafunktiot ovat $F_1,\ldots,F_d$.

Salkun luottoriskien tarkastelussa yhteisjakaumafunktion mallintaminen on usein vaikeaa, mutta reunajakaumafunktiot ovat yleensä helpommin saatavissa esimerkiksi havaintoaineiston perusteella. Sklarin lauseen keskeinen merkitys on siinä, että se mahdollistaa yhteisjakauman ja reunajakaumien liittämisen toisiinsa. Yhteisjakauma ja reunajakaumat voidaan mallintaa erikseen ja sen jälkeen muodostaa Sklarin lauseen avulla kokonaismalli.

Laskemalla pisteessä $x_i=F_i^{-1}$ saadaan

$$C(x_1,\ldots,x_d)=F(F_1^{-1}(x_1),\ldots,F_d^{-1}(x_d)).$$

Edellinen kaava kertoo kuinka kopula saadaan yhteisjakaumafunktiosta ja reunajakaumafunktioista.
Kopulan määritelmä voidaan antaa myös seuraavassa muodossa:

Jos satunnaisvektorilla $X=(X_1,\ldots,X_d)$ on usean muuttujan jakaumafunktio F ja jatkuvat reunajakaumafunktiot $F_1,\ldots,F_d$, niin F:n (tai toisin sanoen X:n) kopula on $(F_1(x_1),\ldots,F_d(x_d))$:n jakaumafunktio C.

Usein hyödyllinen ominaisuus on, että kopula ei muutu, jos reunajakaumille tehdään muunnos aidosti kasvavilla funktioilla:

Oletetaan, että satunnaisvektorilla $(X_1,\ldots,X_d)$ on jatkuvat reunajakaumafunktiot ja kopula C

ja olkoot $T_1, \ldots, T_d$ aidosti kasvavia funktiota. Tällöin satunnaisvektorilla $(T_1(X_1), \ldots, T_d(X_d))$ on kopula C.

Kopuloiden tärkeimmät luokat ovat elliptiset kopulat ja Archimedeen kopulat. Tarkastellaan kumpaakin lyhyesti yleisellä tasolla. Elliptiset kopulat ovat usein käytettyjä kopuloita, jopa tilanteissa joihin ne soveltuvat heikosti [97]. Elliptisiä kopuloita ovat Gaussin kopula ja Studentin t-kopula.

Olkoon vektori Z d :n muuttujan standardi normaalijakautunut $N_d(0,R)$, missä R on korrelaatiomatriisi. Tällöin Z :n kopula on Gaussin kopula. Gaussin kopula on Sklarin lauseen mukaan:

$$C_R^{Ga}(u)=P(\Phi(X_1)\le u_1, \ldots, \Phi(X_d)\le u_d)=\Phi_R(\Phi^{-1}(u_1), \ldots, \Phi^{-1}(u_d)),$$

missä Φ_R tarkoittaa standardia multinormaalijakauman kertymäfunktiota, jolla on korrelaatiomatriisi R . Myös ei-standardilla multinormaalijakaumalla on sama kopula. Tämä voidaan todistaa suorittamalla sarja aidosti kasvavia muunnoksia satunnaismuuttujaan [97].

Olkoon vektori X standardi usean muuttujan Student t-jakauma, jolla on korrelaatiomatriisi R ja vapausaste ν . Standardi usean muuttujan Studentin t-kopula on Sklarin lauseen mukaan:

$$C_{\nu,R}^{t}(u)=t_{\nu,R}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \ldots, t_{\nu,R}^{-1}(u_d)).$$

Elliptisten kopuloiden käyttö on melko yksinkertaista, mutta heikkoutena on, että ne joudutaan simuloimaan analyyttisen matemaattisen muodon puuttuessa. Toinen suurempi huono puoli on elliptisten kopuloiden ominaisuuksien rajoittuneisuus. Niillä ei useinkaan voida realistisesti mallintaa äärimmäisten tapahtumien välistä riippuvuutta riittävästi. Käytännössä todettu riippuvuus on voimakkaampaa ja tappiojakaumilla on paksummat hännät kuin elliptisillä kopuloilla on mahdollista kuvata.

Archimedeen kopuloiden avulla on mahdollista kuvata riippuvuuksia laajemmin kuin elliptisillä kopuloilla. Archimedeen kopuloita ei määritellä Sklarin lauseen avulla, vaan ne perustuvat sopivan generaattorifunktion φ käyttöön. Esitetään seuraavaksi generaattorifunktioita koskeva lause:

> Olkoon $\varphi:[0,1]\to[0,\infty]$ jatkuva ja aidosti vähenevä funktio siten, että $\varphi(0)=\infty$ ja $\varphi(1)=0$. Olkoon $C:[0,1]^2\to[0,1]$ annettu seuraavasti:

$$C(u_1, u_2)=\varphi^{-1}(\varphi(u_1)+\varphi(u_2)),$$

> missä φ^{-1} on φ :n käänteisfunktio. Tällöin C on kopula jos ja vain jos φ on konveksi.

Lauseen todistus on esitetty lähteessä [97]. Huomattakoon, että edellinen lause on annettu kahdelle dimensiolle. Korkeammissa dimensioissa konveksisuus ei riitä, vaan lisäksi generaattorifunktion käänteisfunktion φ^{-1} on oltava täysin monotoninen. Täysin monotonisuuden määritelmä on annettu lähteessä [97].

Annetaan esimerkkinä kaksiulotteinen Claytonin kopula. Claytonin kopulan generaattorifunktio ja sitä vastaava käänteisfunktio ovat

$\varphi(t)=t^{-\theta}-1$ ja

$$\varphi^{-1}(t)=(t+1)^{\frac{-1}{\theta}}$$

missä $\theta>0$. Claytonin kopulaksi saadaan

$$C_\theta^{Cl}(u_{1,}u_2)=\varphi^{-1}(u_1^{-\theta}-1+u_2^{-\theta}-1)=(u_1^{-\theta}+u_2^{-\theta}-1)^{\frac{-1}{\theta}}.$$

Edellä Claytonin kopulassa oli vain yksi parametri. Claytonin kopula on mahdollista määritellä myös kahdella parametrilla.

Lähteessä [97] on esitetty eräs menetelmä, jolla voidaan johtaa kopuloita. Minkä tahansa ei-negatiivisen satunnaismuuttujan Laplace-muunnoksen käänteisfunktio on vaadittavat generaattorifunktioehdot täyttävä kopula. Tätä varten esitetään Laplace-muunnoksen määritelmä.

Olkoon X ei-negatiivinen satunnaismuuttuja, jolla on kertymäfunktio F. Tällöin X:n Laplace-muunnos on

$$L_X(s)=E[e^{-sX}]=\int_0^\infty e^{-sx}dF(x),\, s\geq 0,$$

missä integraali on kertymäfunktion F Lebesgue-Stieltjes-integraali. Jos tiheysfunktio f on olemassa, $L_X(s)=\int_0^\infty e^{-sx}f(x)dx,\, s\geq 0.$ Asetetaan $L_X(\infty)=0$, jolloin Laplace-muunnos täyttää vaadittavat ehdot [97]. Generaattorifunktioksi voidaan valita

$$\varphi(s)=L_X^{-1}(s).$$

Seuraavaksi lasketaan konkreettinen esimerkki, joka antaa yhteyden Archimedeen kopulan ja ei-negatiivisen satunnaismuuttujan Laplace-muunnoksen välillä. Olkoon X Gamma-jakautunut parametreilla $1/\theta$ ja 1 eli $Gam(1/\theta, 1)$. Siis satunnaismuuttujan X tiheysfunktio on

$$f_X(x) = \frac{x^{\frac{1}{\theta}-1}}{\Gamma(\frac{1}{\theta})},$$

missä gammafunktio $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$ Lasketaan satunnaismuuttujan X Laplace-muunnos

$$L_X(t) = E[e^{-tX}] = \int_0^\infty e^{-tx} f(x) dx = \int_0^\infty e^{-tx} \frac{x^{\frac{1}{\theta}-1}}{\Gamma(\frac{1}{\theta})} dx = \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{\theta})} \int_0^\infty (\frac{y}{1+t})^{\frac{1}{\theta}} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\frac{1}{\theta})}{\Gamma(\frac{1}{\theta})(1+t)^{\frac{1}{\theta}}} =$$
$$(1+t)^{\frac{-1}{\theta}} = \varphi^{-1}(t).$$

Tulokseksi saatiin, että parametreilla $1/\theta$ ja 1 Gamma-jakautuneen sattunaismuuttujan Laplace-muunnos on Claytonin kopulan generaattorifunktion käänteisfunktio.

Seuraavaksi esitetään Marshallin ja Olkinin lause , joka antaa keinon muodostaa satunnaismuuttujavektoreita, joilla on usean muuttujan Archimedeen kopula kertymäfunktiona:

Olkoon Ψ ei-negatiivinen satunnaismuuttuja, jolla on Laplace-muunnos L_Ψ. Edelleen olkoon $\varphi(t) = L_\Psi^{-1}(t)$ ja $\varphi^{-1}(t) = L_\Psi(t)$. Tällöin on olemassa jono $V_1, \dots, V_d$ samoinjakautuneita välillä $[0,1]$ määriteltyjä satunnaismuuttujia, jotka ovat satunnaismuuttujan Ψ suhteen ehdollisesti riippumattomia ja

$$P(V_i \le v_i | \Psi) = e^{-\Psi\varphi(v_i)}.$$

Lisäksi satunnaisvektorin $V_1, \dots, V_d$ kertymäfunktio on Archimedeen kopula, jolla on generaattorifunktio φ :

$$P(V_1 \le v_1, \dots, V_d \le v_d) = \varphi^{-1}(\varphi(v_1) + \dots + \varphi(v_d)).$$

Esitetään Marshallin ja Olkinin lauseen todistus:

Olkoon $U_1, \dots, U_d$ jono riippumattomia standardeja tasaisesti jakautuneita satunnaismuuttujia, jotka ovat riippumattomia Ψ :stä. Määritellään V_i seuraavasti

$V_i = \varphi^{-1}(\frac{-\ln U_i}{\Psi})$ kaikilla $i \in \{1, \dots, d\}$. Tästä seuraa, että ehdollinen satunnaismuuttujan

$V_i|\Psi$ kertymäfunktio on

$$P(V_i \le v_i|\Psi) = P(\varphi^{-1}(\frac{-\ln U_i}{\Psi}) \le v_i|\Psi) = P(\frac{-\ln U_i}{\Psi} \ge \varphi(v_i)|\Psi) = P(\ln U_i \le -\Psi\varphi(v_i)|\Psi) =$$

$$P(U_i \le e^{-\Psi\varphi(v_i)}|\Psi) = e^{-\Psi\varphi(v_i)}.$$

Toinen yhtälö seuraa siitä, että φ on aidosti vähenevä. Lauseen ensimmäisen osan mukaan

$$P(V_1 \le v_1, \dots, V_d \le v_d) = E[P(V_1 \le v_1, \dots, V_d \le v_d|\Psi)] = E[\prod_{i=1}^{d} P(V_i \le v_i|\Psi)] = E[\prod_{i=1}^{d} e^{-\Psi\varphi(v_i)}] =$$

$$E[\exp(-\sum_{i=1}^{d} \varphi(v_i)\Psi)] = L_\Psi(\sum_{i=1}^{d} \varphi(v_i)) = \varphi^{-1}(\sum_{i=1}^{d} \varphi(v_i)).$$

Lähteessä [97] on laskettu tappioiden jakaumia kolmella eri kopulalla. Nämä ovat elliptiset kopulat Studentin t- ja Gaussin kopula sekä Archimedeen kopuloista Claytonin kopula. Laskenta on tehty simuloimalla, koska analyyttista kaavaa ei ole saatavilla. Parametrit on pyritty valitsemaan siten, että jakaumia on mahdollista vertailla keskenään. Yksittäisen yrityksen maksukyvyttömyystodennäköisyys ja korrelaatiomatriisi ovat samat kaikissa kolmessa simuloinnissa; erot syntyvät maksukyvyttömyystapahtumien riippuvuudesta eli valitusta kopulasta.

Tarkastellaan äärimmäisiä tapahtumia jakauman kummassakin laidassa. Studentin t-kopulan ja Claytonin kopulan tapauksessa simuloinnissa saadaan paksuhäntäisiä jakaumia verrattuna Gaussin kopulaan. Maksukyvyttömyystapahtumien riippuvuus toisistaan on suurempi t-kopulalla ja Claytonin kopulalla kuin Gaussin kopulalla. Käytetyillä parametreilla [97] Claytonin kopulan antamat tulokset sijoittuvat Gaussin ja Studentin t-kopulan välille.

Gaussin kopulalle tunnusomaista on keskiarvon ympärille keskittyvä jakauma. Gaussin kopulatodennäköisyys, että hyvin vähäinen tai hyvin suuri määrä salkun yrityksistä joutuu maksukyvyttömäksi on alhainen. Studentin t-kopulalla jakauma on hyvin erimuotoinen ja se ei keskity vastaavalla tavalla keskiarvon ympärille, jolloin todennäköisyys sille, että vain muutama tai hyvin suuri määrä yrityksiä joutuu maksukyvyttömyyteen on suurempi verrattuna Gaussin kopulan tulokseen.

Seuraavaksi muodostetaan kynnysarvoon perustuva sekoitusmalli käyttämällä kopuloita. Teoria perustuu edellä esitettyyn Marshallin ja Olkinin lauseeseen. Olkoon Ψ ei-negatiivinen satunnaismuuttuja, jonka Laplace-muunnos on L_Ψ. Asetetaan $\varphi(t) = L_\Psi^{-1}(t)$, jolloin $\varphi^{-1}(t) = L_\Psi(t)$, kuten aikaisemmin. Olkoot $V_{T,1}, \dots, V_{T,m}$ ehdollisesti riippumattomia Ψ :n suhteen ja $P(V_{T,i} \le v_i | \Psi) = e^{-\Psi\varphi(v_i)}$. Marshallin ja Olkinin lauseen mukaan vektorilla $V_{T,1}, \ldots, V_{T,m}$ on usean muuttujan jakauma, joka on Archimedeen kopula generaattorifunktiolla φ . Lauseen mukaan ehdollinen maksukyvyttömyyden todennäköisyys on

$$p(\Psi) = P(Y_i = 1 | \Psi) = P(V_{T,i} < D | \Psi) = e^{-\Psi\varphi(D)}.$$

Satunnaismuuttuja Ψ kuvaa ympäröivää makrotaloudellista tilannetta. Lasketaan ei-ehdollinen todennäköisyys:

$$\pi = P(Y_i = 1) = E[P(V_{T,i} < D | \Psi)] = E[e^{-\Psi\varphi(D)}] = L_\Psi(\varphi(D)) = \varphi^{-1}(\varphi(D)) = D .$$

Tässä sekoitusmallissa siis kynnysmallin kynnysarvo D on yksittäisen yrityksen maksukyvyttömyyden todennäköisyys. Saadaan siten seuraava kaava:

$$p(\Psi) = e^{-\Psi\varphi(\pi)} . \tag{16}$$

Seuraavaksi tarkastellaan suurta salkkua, jossa on lukumääräisesti paljon yrityksiä. Oletaan jälleen, että yritysten maksukyvyttömyystodennäköisyydet ovat samat eli kyseessä on homogeeninen salkku. Kuten aikaisemmin kaava (13) on voimassa, joten käsiteltävässä mallissa

$$G(x) = P(p(\Psi) \le x) = P(\exp(-\Psi\varphi(\pi)) \le x) = P(-\Psi \le \frac{\ln x}{\varphi(\pi)}) =$$

$$P(\Psi \ge \frac{-\ln x}{\varphi(\pi)}) = 1 - P(\Psi \le \frac{\ln x}{\varphi(\pi)}) = 1 - F(\frac{\ln x}{\varphi(\pi)}).$$

Siis suuressa salkussa voidaan approksimoida suhteellista maksukyvyttömien yritysten määrää seuraavasti:

$$P(\frac{N^{(m)}}{m} \le x) = 1 - F(\frac{-\ln x}{\varphi(\pi)}),\ x \in [0,1], \tag{17}$$

missä F on tekijän Ψ kertymäfunktio ja φ on Archimedeen kopulan generaattorifunktio. Lasketaan edellisen avulla maksukyvyttömyyden jakauma sekoitusmallissa, joka perustuu Claytonin kopulaan. Aikaisemmin on laskettu, että $\Psi = Gam(\frac{1}{\theta}, 1)$ ja generaattorifunktio on $\varphi(t) = t^{\theta} - 1, \theta \ge 0.$ Claytonin kopulalla on kaavan (16) mukaan $p(\Psi) = e^{-\Psi(\pi^{-\theta} - 1)}$. Kaavasta

(17) Claytonin kopulalla

$$P(\frac{N^{(m)}}{m} \leq x) = 1 - F(\frac{-\ln x}{\pi^{-\theta} - 1}) = 1 - \frac{\gamma(\frac{1}{\theta}, \frac{-\ln x}{\pi^{-\theta} - 1})}{\Gamma(\frac{1}{\theta})},$$

missä $\gamma(s, x) = \int_0^x t^{(s-1)} e^{-t} dt$.

Kaavasta nähdään, että tarkasteltaessa jakauman häntäaluetta suurilla θ :n arvoilla kertymäfunktio kasvaa hitaammin ja johtaa suurempaa suhteelliseen maksukyvyttömyyteen salkussa eli paksuun häntään [97].

Luottoriskien riskimitat

Seuraavaksi tarkastellaan luottoriskien riskimittoja ja erityisesti Value-at-Risk ja CTE-riskimittoja. Kerrataan tässä aikaisemmin esillä olleet määritelmät. Value-at-Risk-mitan voidaan sanoa olevan arvo, jota suuremmaksi tappio L ei muodostu tietyllä todennäköisyydellä:

$$Var_\alpha(L) = inf\{y \in \mathbb{R} : P(L \geq y) \leq 1 - \alpha\}.$$

Matemaattisesti $Var_\alpha(L)$ on tappiojakauman $F_L(x)$ α -kvantiili. Hyödyllinen ominaisuus on, että kun *L*:n jakaumafunktio on jatkuva $Var_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha)$. Aikaisemmin todettiin, että $Var_\alpha(L)$ on translaatioinvariantti, positiivisesti homogeeninen ja monotoninen, mutta ei subadditiivinen. Toinen $Var_\alpha(L)$ -riskimitan heikkous on, että se ei anna tietoa kuinka suuri tappio syntyy, jos tappio ylittää määrän $Var_\alpha(L)$. Riskimitta ei ole koherentti, koska se ei toteuta subadditiivisuutta.

CTE toteuttaa mainittujen kolmen ominaisuuden lisäksi myös subadditiivisuuden, joten se on koherentti riskimitta. CTE-riskimitta liittyy $Var_\alpha(L)$ -mittaan ja se antaa tietoa mahdollisesta tappion määrästä. CTE-riskimitta vastaa kysymykseen: "Jos tappio ylittää määrän $Var_\alpha(L)$, kuinka suuri on odotettavissa oleva tappio":

$$CTE_\alpha(L) = E[L \mid L \geq Var_\alpha(L)].$$

Kun jakauman kertymäfunktio on jatkuva, luvussa 2 esitetyn mukaisesti riskimittojen $Var_\alpha(L)$ ja CTE välillä on voimassa:

$$CTE_\alpha(L) = \frac{1}{(1-\alpha)} \int_\alpha^1 Var_u(L)\, du\,. \tag{18}$$

Todistetaan edellinen kaava. Käyttämällä ehdollisen odotusarvon ja $Var_\alpha(L)$:n määritelmää saadaan

$$CTE_\alpha(L) = E[L \mid L \geq Var_\alpha(L)] = \frac{E[L * I_{[L \geq Var_\alpha(L))}(L)]}{P(L \geq Var_\alpha(L))} = \frac{E[L * I_{[Var_\alpha(L),\infty)}(L)]}{(1-\alpha)}.$$

Seuraavaksi käytetään tietoa, että jatkuvalla aidosti kasvavalla kertymäfunktiolla $Var_\alpha(L) = F_L^{-1}(\alpha)$ sekä L ja $F_L^{-1}(U)$ ovat samoinjakautuneita, missä U on standardi tasan jakautunut satunnaismuuttuja.

$$E[L * I_{[Var_\alpha(L),\infty)}(L)] = E[F_L^{-1}(U) * I_{[F_L^{-1}(\alpha),\infty)}(F_L^{-1}(U))] = E[F_L^{-1}(U) * I_{[\alpha,1)}(U)] =$$

$$\int_\alpha^1 F_L^{-1}(u) f_U\, du = \int_\alpha^1 Var_u(L)\, du.$$

Toisen yhtäläisyyden kohdalla käytettiin $F_L^{-1}(\alpha) \leq F_L^{-1}(U) < \infty$ <=> $\alpha \leq U < 1$ ja viimeisen yhtäläisyyden kohdalla tasaisen jakauman tiheysfunktio on $f_U = 1.$

Seuraavaksi laskemme yllä esiteltyjen kahden riskimitan arviot suuren salkun tapauksessa. Jälleen käsitellään homogeenista salkkua, jossa tappioiden lukumäärä tarkasteltavalla aikajaksolla on l :

$$Var_\alpha(L^{(m)}) = lmG^{-1}(\alpha) \text{ ja} \tag{19}$$

$$CTE_\alpha(L^{(m)}) = \frac{lm}{(1-\alpha)} \int_\alpha^1 G^{-1}(u)\, du. \tag{20}$$

Todistetaan edelliset kaavat.

$$Var_\alpha(L^{(m)}) = inf\{y \in \mathbb{R} : P(L^{(m)} \leq y) \geq \alpha\} = inf\{y \in \mathbb{R} : P(\frac{L^{(m)}}{lm} \leq \frac{y}{lm}) \geq \alpha\} =$$

$$inf\{y \in \mathbb{R} : P(\frac{N^{(m)}}{m} \leq \frac{y}{lm}) \geq \alpha\} \rightarrow inf\{y \in \mathbb{R} : G(\frac{y}{lm}) \geq \alpha\} = inf\{lmx \in \mathbb{R} : G(x) \geq \alpha\} =$$

$$lm \times inf\{x \in \mathbb{R} : G(x) \geq \alpha\} = lm \times G^{-1}(\alpha).$$

Jälkimmäinen kaava (20) saadaan suoraan kaavasta (18). Sekoitusjakaumana voidaan käyttää erilaisia jakaumia. Lähteessä on [97] on laskettu Beta-, Probit-normaali-, Logit-normaali- ja Clayton kopulan mukaisia sekoitusmuuttujia Bernoullin sekoitusmallissa. Tässä otetaan esimerkiksi vain Claytonin kopulan tapaus. Claytonin kopulan generaattorifunktio on $\phi(t) = t^{-\theta} - 1$ ja Bernoullin jakauman sekoitusmuuttuja on $p(\Psi) = e^{-\Psi(\pi^{-\theta}-1)}$, missä $\theta > 0$ ja $\Psi = Gam(\frac{1}{\theta}, 1)$. Lasketaan vastaavalla tavalla kuin aikaisemmin:

$$P(p(\Psi > q)) = P(e^{-\Psi(\pi^{-\theta}-1)} > q) = \frac{\gamma(\frac{1}{\theta}, -\frac{\ln q}{\pi^{-\theta}-1})}{\Gamma(\frac{1}{\theta})}.$$

Käytetään kaavaa $G(q) = P(p(\Psi) \leq q) = 1 - P(p(\Psi) > q)$, ratkaistaan G :n käänteisfunktio ja käytetään sitä kaavoissa (19) ja (20). Jos käänteisfunktiota ei voida ratkaista analyyttisesti, se joudutaan simuloimaan. Mainitaan vielä toinen esimerkki. Aikaisemmin käsitellyssä Mertonin teoriaan perustuvassa mallissa kaavasta (14) voidaan ratkaista G^{-1} :

$$G^{-1}(y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(y)\sqrt{\rho} + \Phi^{-1}(\pi)}{\sqrt{1-\rho}}\right).$$

Kaavaa voidaan käyttää tässä kappaleessa esitetyllä tavalla riskimittojen laskemiseen.

Lähteessä [97] on esitetty tuloksia, joiden mukaan sekoitusjakauman valinta ei aiheuta suurta mallivirhettä ennen 99%:n kvantiilia. Tappiojakauman kahden ensimmäisen momentin ja korrelaatiokertoimen määrittäminen sitä vastoin vaikuttavat tappiojakaumaan enemmän.

6 Äärimmäisten arvojen teoria ja riskimitat

Tässä luvussa esitetään yleistä äärimmäisten arvojen teoriaa, jota voidaan käyttää vakuutusyhtiöiden vakavaraisuusmallinnuksessa. Äärimmäisten arvojen teoriassa tarkastellaan jakaumien häntäaluetta. Keskeisimmät mallit ovat lohkomaksimeihin ja kynnysarvojen ylittymiseen perustuvia. Yleistetty äärimmäisten arvojen jakauman teoria on analoginen keskeiselle raja-arvolauseelle. Standardi yleistetty äärimmäisten arvojen jakaumafunktio (GEV = Generalized Extreme Value Distribution) on [121]

$H_\xi = \exp(-(1+\xi x)^{-1/\xi}), \xi \neq 0$ ja

$H_\xi = \exp(-e^{-x}), \xi = 0,$

missä $1+\xi x > 0$. Standardista jakaumasta saadaan kolmen parametrin luokka asettamalla $H_{\xi,\mu,\sigma} = H_\xi(\frac{(x-\mu)}{\sigma})$, missä $\mu \in \mathbb{R}$ on paikkaparametri ja $\sigma > 0$ on skaalausparametri. Parametri ξ on muotoparametri ja se määrää jakauman tyypin. Kun muotoparametri on suurempi kuin 0 kyseessä on Fréchet-jakauma, kun muotoparametri on 0 kyseessä on Gumbel-jakauma ja kun muotoparametri on pienempi kuin nolla Weibull-jakauma. Finanssisovelluksissa usein käytetty on Fréchet-jakauma ja jonkin verran Gumbel-jakauma. Tämä seuraa jakaumien ominaisuuksista: Fréchet-jakaumat ovat paksuhäntäisempiä kuin Gumbel-jakaumat. Weibull-jakaumalla on äärellinen päätepiste $x_F = \sup\{x \in \mathbb{R} : F(x) < 1\}$ eli se ei ulotu koko reaaliakselille.

Määritellään lohkomaksimi n :n riippumattoman samalla tavalla jakautuneen satunnaismuuttujien jonon maksimina $M_n = max\{X_1, \ldots, X_n\}$. Oletetaan, että riippumattomien samalla tavalla jakautuneiden satunnaismuuttujien jono M_n suppenee eli raja-arvo joillakin reaaliarvoisilla jonoilla (d_n) ja $(c_n), c_n > 0$ kaikilla n on olemassa [121]:

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n - \frac{d_n}{c_n} \leq x) = \lim_{n\to\infty} F^n(c_n x + d_n) = H(x). \tag{21}$$

Määritellään, että jakauma kuuluu joukkoon $F \in MDA(H)$ (MDA=Maximum Domain of Attraction), jos edellinen ei-degeneroitunut raja-arvo H on olemassa. Ei-degeneroituneella tarkoitetaan, että jakauma ei ole keskittynyt yhteen pisteeseen. Kääntäen, jos $F \in MDA(H)$ jollekin ei-degeneroituneelle H , tällöin H on kaavan (21) mukainen yleistetty äärimmäisten arvojen jakaumafunktio H_ξ jollakin yksikäsitteisellä ξ . Paikka- ja skaalausparametrit voivat riippua valituista jonoista (d_n) ja (c_n) , mutta jonot voidaan valita aina siten, että raja-arvona saadaan standardi jakaumafunktio H_ξ .

Esimerkkeinä Pareto- ja eksponenttijakaumien GEV-rajajakaumat saadaan suoraan laskemalla raja-arvot kaavan (21) mukaan. Pareto-jakauman $Pa(\alpha,\kappa)$ kertymäfunktio on

$F(x)=1-(\frac{\kappa}{\kappa+x})^{\alpha}, \alpha>0, \kappa>0$ ja $x\geq 0$. Jonoiksi valitaan $c_n=\frac{\kappa n^{1/\alpha}}{\alpha}$ ja $d_n=\kappa n^{1/\alpha}-\kappa$.

Saadaan kaavan (21) mukaan

$$F(c_n x+d_n)=1-(\frac{\kappa}{\kappa+c_n x+d_n})^{\alpha}=1-(\frac{\kappa}{\kappa+\kappa\frac{n^{1/\alpha}}{\alpha}x+\kappa n^{1/\alpha}-\kappa})^{\alpha}=1-\frac{1}{n}(1+\frac{x}{\alpha})^{-\alpha}, 1+\frac{x}{\alpha}\geq n^{-1/\alpha}.$$

Edelleen raja-arvo on

$$\lim_{n\to\infty}F^n(c_n x+d_n)=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n}(1+\frac{x}{\alpha})^{-\alpha})^n=\exp(-(1+\frac{x}{\alpha})^{-\alpha}), 1+\frac{x}{\alpha}>0.$$

Edellisestä nähdään, että $F\in MDA(H_{1/\alpha})$. Eksponenttijakaumalle saadaan vastaavalla tavalla laskemalla tulos $F\in MDA(H_0)$.

Lähes kaikki tilastotieteessä ja vakuutusmatematiikassa käytetyt jakaumat kuuluvat luokkaan $F\in MDA(H_{\xi})$ jollakin muotoparametrin arvolla ξ. Jakaumat, joilla on Fréchet-rajajakauma, voidaan luonnehtia hitaasti vaihtelevien tai säännöllisesti vaihtelevien funktioiden avulla. Positiivinen Lebesgue-mitallinen funktio L on välillä $(0,\infty)$ hitaasti vaihteleva, jos $\lim_{x\to\infty}\frac{L(tx)}{L(x)}=1, t>0$, ja positiivinen Lebesgue-mitallinen funktio h on välillä $(0,\infty)$ säännöllisesti vaihteleva indeksillä ρ, jos $\lim_{x\to\infty}\frac{h(tx)}{h(x)}=t^{\rho}, t>0$. Hitaasti vaihtelevat funktiot muuttuvat potenssifunktioita hitaammin suurilla x:n arvoilla.

Säännöllisesti vaihtelevat voidaan esittää potenssifunktion ja hitaasti vaihtelevan funktion tulona: $h(x)=x^{\rho}L(x)$. Seuraava lause on voimassa: Muotoparametrin arvolla $\xi>0$ $F\in MDA(H_{\xi})$ <=> $1-F(x)=x^{-1/\xi}L(x)$ jollakin hitaasti vaihtelevalla funktiolla L. Toisin sanoen jakaumat, joilla on Fréchet-rajajakauma, ovat säännöllisesti vaihtelevia funktioita, joilla on negatiivinen indeksi. Jakaumien häntäjakauma vähenee kuten potenssifunktio indeksillä $1/\xi$. On mahdollista osoittaa, että korkeammat momentit $E(X^k)=\infty$, kun $k>1/\xi$. Esimerkiksi aikaisemmin käsitelty Pareto-jakauma toteuttaa ehdon $1-F(x)=x^{-\alpha}L(x)$, missä $L(x)=(\kappa^{-1}+x^{-1})^{-\alpha}$ on hitaasti vaihteleva funktio, koska $L(x)\to\kappa^{\alpha}$, kun $x\to\infty$. Muita jakaumia, joilla on Fréchet-rajajakauma ovat esimerkiksi itse Fréchet-jakauma, käänteinen Gamma-jakauma, Studentin t-jakauma, Log-gamma-jakauma, F-jakauma ja Burr-jakauma.

Jakaumia, joilla on Gumbel-rajajakauma ($MDA(H_0)$) ei ole pystytty luonnehtimaan yhtä helposti, kuin Fréchet'n luokkaan kuuluvia jakaumia. Aikaisemmin todettiin, että eksponenttijakaumalla on Gumbel-rajajakauma. Voidaankin sanoa, että tässä jakaumien luokassa jakauman hännät vähenevät oleellisesti eksponentiaalisesti. Kuitenkin luokan sisällä on suurta vaihtelua häntäjakauman paksuudessa. Sekä normaalijakauma että Log-normaalijakauma kuuluvat Gumbel-luokkaan. Normaalijakauman häntä on huomattavasti ohuempi verrattuna Log-normaalijakauman häntään. Tilastollisesti tarvitaan riittävän laaja aineisto, jotta Log-normaalijakauma voidaan erottaa Fréchet-luokan jakaumista. Positiivisten satunnaismuuttujien Gumbel-luokan jakaumilla äärelliset momentit ovat rajoitettuja: $E(X^k)<\infty$ kaikilla $k>0$.

Muita jakaumia, jotka kuuluvat luokkaan $MDA(H_0)$ ovat Gumbel-jakauman lisäksi Gamma-, Chi-squared-, standardi Weibull, Benktander I ja II -jakaumat. Benktander-jakaumia on käytetty jonkin verran vakuutussovellusten tappiojakaumien mallintamiseen.

Weibull-luokan jakaumafunktioilla on vähiten käyttöä vakuutussovelluksissa, koska niillä on äärellinen oikean puolen loppuarvo, kuten aikaisemmin todettiin. Weibull-luokkaa voidaan luonnehtia seuraavasti: Muotoparametrin arvolla $\xi<0$

$$F\in MDA(H_{1/\xi}) \iff x_F<\infty, 1-F(x_F-x^{-1})=x^{1/\xi}L(x)$$

jollakin hitaasti vaihtelevalla funktiolla L. Voidaan mainita tärkeä jakauma, joka kuuluu Weibull-luokkaan. Beta-jakauma ja sen erikoistapauksena tasainen jakauma kuuluvat tähän luokkaan.

GEV-teoriaa voidaan useimmiten käyttää myös aidosti stationaaristen aikasarjojen ominaisuuksien tutkimiseen. Teoriaa voidaan soveltaa, kun stationaarisella aikasarjalla on olemassa ns. äärimmäisyysindeksi θ (eng. extremal index), jonka määritelmä on esitetty lähteessä [97] kappaleessa 7.1.3. Jos äärimmäisyysideksi $\theta<1$, lohkomaksimeilla on taipumus klusteroitua, jolloin tämä on otettava huomioon. Jos $\theta=1$, klusteroitumista ei tapahdu ja stationaarisen aikasarjan lohkomaksimit käyttäytyvät kuten vastaavat riippumattomat samoinjakautuneet satunnaismuuttujajonon jäsenet. Aikasarjojen mallintaminen usein esiintyvä tehtävä vakuutus- ja muiden finanssiyritysten sijoitussalkun laskennassa.

GEV-mallin käytännön sovellus on äärimmäisten tapahtumien analysointi. Ongelman asettelussa voidaan lähteä kahdesta suunnasta: joko tuottotason tai tuottojakson arvioinnista. Ensimmäisessä tapauksessa asetetaan ääritapahtuman taajuus ja lasketaan sen mukainen tapahtuman suuruus. Toisessa tapauksessa asetetaan ääritapahtuman suuruus ja lasketaan sen mukainen tapahtumien taajuus.

Olkoon H kertymäfunktio n :n pituisten lohkojen maksimien muodostamalle satunnaismuuttujalle. Suure $r_{n,k}=q_{1-1/k}(H)$ eli H :n $(1-1/k)$ -kvantiili on k:s tuottotaso. Toisin sanottuna tarkoitetaan tuottotasoa, joka ylitetään keskimäärin kerran jokaisessa k:ssa n:n pituisessa jaksossa. Havaittuun aineistoon perustuva arvio tuottotasolle saadaan ratkaisemalla:

$$\hat{r}_{n,k}=H^{-1}{}_{\hat{\xi},\hat{\mu},\hat{\sigma}}(1-\frac{1}{k})=\hat{\mu}+\frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}}((-\ln(1-\frac{1}{k}))^{-\hat{\xi}}-1).$$

Tuottojakson arviointiongelman ratkaisu GEV-mallissa on lyhyemmin ilmaistavissa seuraavalla kaavalla. Olkoon H kertymäfunktio n :n pituisten lohkojen maksimien muodostamalle satunnaismuuttujalle.

Tapahtuman $\{M_n>u\}$ tuottojakso on $k_{n,u}=\dfrac{1}{1-H_{\hat{\xi},\hat{\mu},\hat{\sigma}}(u)}$.

Edellinen kaava perustuu oletukselle, että tason u ylitys tapahtuu täsmälleen yhden kerran $k_{n,u}$:ssa n :n pituisessa jaksossa. Jos aineistossa esiintyy merkittävässä määrin klusterointia, ylityksiä voi tapahtua useampia $k_{n,u}$:ssa jaksossa. Kaava lausuttiin havaintoaineistoon perustuvan sovituksen antaman kertymäfunktion avulla. Jos teoreettinen jakauma tunnetaan, lasketaan arvot suoraan tunnetuilla teoreettisilla parametrien arvoilla.

Seuraavaksi siirrytään käsittelemään kynnysarvon ylittymiseen perustuviin malleihin. Lohkomaksimeihin perustuvat mallit eivät käytä tehokkaasti hyväkseen havaintoaineistoja, sillä vain lohkojen maksimit huomioidaan kustakin lohkosta. Kynnysarvomenetelmässä havainnot, jotka ylittävät annetun tason ovat mukana laskennassa. Määritellään aluksi yleistetty Pareto-jakauma (GPD = Generalized Pareto Distribution). Yleistetyn Pareto-jakauman kertymäfunktio on [121]

$$G_{\xi,\beta}(x)=1-(1+\xi\frac{x}{\beta})^{1/\xi},\xi\neq 0 \text{ ja}$$

$$G_{\xi,\beta}(x)=1-\exp(\frac{-x}{\beta}),\xi=0,$$

missä $\beta>0, x\geq 0$, kun $\xi\geq 0$ ja $0\leq x\leq -\beta/\xi$ kun $\xi<0$. Vastaavasti kuin GEV-jakaumat myös GPD-jakaumat luokitellaan muotoparametrin ξ arvojen mukaan. Kun $\xi>0$, on $G_{\xi,\beta}$ tavallisen Pareto-jakauman kertymäfunktio parametreilla $1/\xi$ ja β/ξ . Kun $\xi=0$, kyseessä on eksponenttijakauma. Kun $\xi<0$, jakauma on lyhyt häntäinen Pareto II -jakauma. Kaikille kolmelle jakaumaluokalle on voimassa: $G_{\xi,\beta}\in MDA(H_\xi), \xi\in\mathbb{R}$. Paksuhäntäisessä luokassa $\xi>0$ momentit ovat äärettömiä $E(X^k)=\infty$, kun $k>1/\xi$. Kun $\xi<1$, odotusarvo on olemassa ja sillä on arvo $E(X)=\beta/(1-\xi)$.

Seuraavaksi esitetään kaksi todennäköisyyslaskennan funktiota, joihin käytetään GPD-jakaumia. Kynnyksen u ylittävän satunnaismuuttujan X ehdollinen kertymäfunktio *X*:n kertymäfunktion F

avulla on

$$F_u(x)=P(X-u\leq x\,|\,X>u)=\frac{F(x+u)-F(u)}{1-F(u)},0\leq x<x_F-u, \tag{22}$$

missä $x_F<\infty$ on jakauman F oikeanpuoleinen loppupiste. Satunnaismuuttujan X , jolla on äärellinen odotusarvo, keskimääräinen ylitysfunktio (eng. mean excess function) määritellään seuraavasti:

$$e(u)=E(X-u\,|\,X>u).$$

Funktio $e(u)$ on kynnyksen u ylittävän tappion odotusarvo ehdolla, että kynnys u on ylittynyt. Tämä funktio on yleisemmin tunnettu laitteiden tai elollisten olentojen eliniän stokastisista tarkasteluista. Eksponentiaalisesti jakautuneella satunnaismuuttujalla on ns. muistamattomuusominaisuus, jonka mukaan $F_u(x)=F(x)$ kaikilla x :n arvoilla. Laitteen osan jäljellä oleva elinikä on muistamattomuusominaisuuden mukaan riippumaton ajasta, jonka laite on tarkasteluhetkeen mennessä kestänyt.

Tarkastellaan satunnaismuuttujaa X , jonka kertymäfunktio on $G_{\xi,\beta}$ ehdollista kertymäfunktiota F_u . Kaavasta (22) saadaan tulos

$$F_u(x)=G_{\xi,\beta(u)}(x),\ \beta(u)=\beta+\xi u, \tag{23}$$

missä $0\leq x<\infty$, jos $\xi\geq 0$ ja $0\leq x<-(\beta/\xi)-u$ kun $\xi<0.$ Ylitysjakauma säilyttää kaavan (23) mukaan GPD-muodon samalla parametrin ξ arvolla, skaalausparametrin muuntuessa lineaarisesti kynnysarvon u mukaan. Edelleen saadaan GPD:n ylitysfunktio:

$$e(u)=\frac{\beta(u)}{1-\xi}=\frac{\beta+\xi u}{1-\xi},$$

missä $0\leq u<\infty$, jos $0\leq\xi<1$ ja $0\leq u<-\beta/\xi$ kun $\xi<0$. Ylitysfunktio $e(u)$ on lineaarinen kynnysarvon u suhteen. Tämä on GPD:n luonteenomainen ominaisuus, jota hyödynnetään erityisesti havaintoaineistojen käsittelyssä. Seuraavaksi esitetään yleinen lause, jonka mukaan GPD on laajan jakaumien perheen ylityskertymäfunktion rajajakauma [121].

On olemassa positiivinen mitallinen funktio $\beta(u)$, jolla

$$\lim_{u\to x_F}\sup_{0\leq x<x_F-u}|F_u(x)-G_{\xi,\beta(u)}(x)|=0, \text{ jos ja vain jos } F\in MDA(H_\xi), \xi\in\mathbb{R}.$$

Edellisen lauseen mukaan jakaumat, joiden rajajakauma kuuluu GEV-luokkaan on sama joukko, joiden ylitysrajajakauma kuuluu GPD-luokkaan. Lisäksi muotoparametri ξ on sama kummassakin luokassa. Lähes kaikki yleisessä käytössä olevat jatkuvat jakaumat kuuluvat luokkaan $MDA(H_\xi)$ jollakin ξ :n arvolla. Lauseen ovat esittäneet Pickands, Balkema ja de Haan v. 1974 ja 1975.

Oletetaan, että F on tappiojakauman kertymäfunktio, jolla on oikeanpuoleinen loppupiste $x_F<\infty$ ja jollakin korkealla kynnysarvolla u on voimassa $F_u(x)=G_{\xi,\beta}(x)$, kun $0\leq x<x_F-u$ jollakin $\xi\in\mathbb{R}$ ja $\beta>0$. Tämän oletuksen vallitessa korkeammalle kynnysarvolle $v\geq u$ pätee $F_v(x)=G_{\xi,\beta+\xi(v-u)}(x)$.

Todistetaan tämä ominaisuus:

$$1-F_v(x)=\frac{1-F(v+x)}{1-F(v)}=\frac{1-F(u+(v+x-u))}{1-F(u)}\frac{1-F(u)}{1-F(u+(v-u))}=\frac{1-F_u(x+v-u)}{1-F_u(v-u)}=$$

$$\frac{1-G_{\xi,\beta}(x+v-u)}{1-G_{\xi,\beta}(v-u)}=1-G_{\xi,\beta+\xi(v-u)}(x).$$

Ylitysjakauma korkeammalla kynnysarvolla säilyttää kaavan GPD-muodon samalla parametrin ξ arvolla, skaalausparametrin muuntuessa lineaarisesti kynnysarvon v mukaan. Kun $\xi<1$ ylitysfunktio on

$$e(v)=\frac{\beta+\xi(v-u)}{1-\xi}=\frac{\xi v}{1-\xi}+\frac{\beta-\xi u}{1-\xi},$$

missä $u\leq v<\infty$, jos $0\leq\xi<1$ ja $u\leq v\leq u-\beta/\xi$ kun $\xi<0$. Kaavan lineaarisuutta v :n suhteen käytetään hyväksi havaintoaineistojen GPD-mallin mukaisessa analysoinnissa. Havaintotietojen lineaarisen osuuden avulla voidaan säätää kynnysarvoa, ja lineaarisuus on merkkinä GPD-mallin sopivuudesta havaintoaineiston selittäjänä. Kynnysarvo pyritään asettamaan mahdollisimman alhaiseksi, jotta analyysiin saadaan mahdollisimman paljon datapisteitä. Toisaalta kynnysarvo on valittava riittävän korkeaksi, jotta GPD-malli on sovellettavissa.

Käytetään edellä esiteltyä teoriaa riskimittojen mallintamiseen. Oletetaan, että GPD-mallin käytön edellytykset ovat voimassa, jolloin saadaan todennäköisyydelle:

$$1-F(x)=P(X>u)P(X>x\mid X>u)=(1-F(u))P(X-u>x-u\mid X>u)=$$

$$(1-F(u))(1-F_u(x-u))=(1-F(u))(1+\xi\frac{x-u}{\beta})^{-1/\xi}. \tag{24}$$

Edellisen mukaan, jos tunnetaan $(1-F(u))$, voidaan laskea häntätodennäköisyys. Kaavasta (24) voidaan ratkaista korkean kvantiilin eli VaR-riskimitan kaava:

$$VaR_\alpha=q_\alpha(F)=u+\frac{\beta}{\xi}((\frac{1-\alpha}{1-F(u)})^{-\xi}-1).$$

Edellisestä kaavasta saadaan kaavan (18) perusteella odotettu tappio:

$$CTE_\alpha=\frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 q_x(F)dx=\frac{VaR_\alpha}{1-\xi}+\frac{\beta-\xi u}{1-\xi}.$$

Riskimitta voidaan lausua myös $CTE_\alpha=VaR_\alpha+e(VaR_\alpha)$. Korkeilla kvantiileilla suhde on

$\lim\limits_{\alpha\to 1}\frac{CTE_\alpha}{Var_\alpha}=(1-\xi)^{-1},\xi\geq 0$ ja

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{CTE_\alpha}{Var_\alpha}=1,\xi<0.$$

Eräs yleinen tapa GPD-mallin parametrien määräämiseksi on suurimman uskottavuuden menetelmä. GPD:n tiheysfunktiosta voidaan laskea lauseke [121]

$$\ln L(\xi,\beta;Y_1,\ldots,Y_{N_u})=\sum_{j=1}^{N_u}\ln(g_{\xi,\beta}(Y_j))=-N_u\ln(\beta)-(1+\frac{1}{\xi})\sum_{j=1}^{N_u}\ln(1+\xi\frac{Y_j}{\beta}),$$

joka maksimoidaan ehdoilla $\beta>0$ ja $1+\xi Y_j/\beta>0$ kaikilla j. Maksimointitehtävän tuloksena saadaan GPD-mallin mukainen ylitekertymäfunktio $G_{\hat{\xi},\hat{\beta}}$. Kaavan häntätodennäköisyydelle voidaan käyttää seuraavaa estimaattoria, kun havaintojen kokonaismäärä on n ja alle kynnysarvon u olevien määrä on N_u.

$$(1-\hat{F}(x))=\frac{N_u}{n}(1+\hat{\xi}\frac{x-u}{\hat{\beta}})^{-1/\hat{\xi}},$$

joka on voimassa, kun $x\geq u$. Riskimitoille VaR_α ja CTE_α saadaan vastaavat estimaattorit, kun $\alpha\geq 1-N_u/n$.

Kopulat on todettu tämän esityksen aikaisemmissa luvuissa keskeiseksi usean riskijakauman yhdistämisen matemaattiseksi apuvälineeksi. Äärimmäisten tapahtumien usean muuttujan kopuloita on käsitelty lähteessä [121] luvuissa 7.5 ja 7.6 sekä lähteessä [98].

7 Yhteenveto

Tämän esityksen tavoitteena on ollut esitellä joitakin keskeisiä riskimittojen laskentamenetelmiä. Tyypillisesti vakuutusyhtiöt käyttävät useita laskentamenetelmiä sisäisessä riskienhallinnassaan sekä lainsäädännön vaatimassa vakavaraisuusmallinnuksessa.

Vakuutusyhtiöiden riskit ovat pitkälti samoja kuin pankkitoiminnassa, vakuutusyhtiöillä vaikuttavat lisäksi vakuutusriskit. Vakuutusyhtiön on täytettävä Euroopan Unionin Solvenssi II -direktiivin mukaisen lainsäädännön asettamat vakavaraisuuspääomavaatimukset, joita ovat vähimmäispääomavaatimus MCR ja vakavaraisuuspääomanvaatimus SCR. Tämän lainsäädännön ensisijainen tavoite on turvata vakuutuksenottajien ja edunsaajien edut myös vakuutusyhtiön maksukyvyttömyys- ja konkurssitilanteissa.

Vähimmäispääomavaatimus vastaa omien varojen määrää, jonka alittuessa vakuutuksenottajiin ja edunsaajiin kohdistuisi kohtuuton riski, jos vakuutusyrityksen sallittaisiin jatkaa toimintaansa. Vaakavaraisuuspääomavaatimus on lievempi vaatimus ja sen tarkoituksena on asettaa yrityksen oma varallisuus vähintään sellaiselle tasolle, jolla vakuutuksenottajien edut on kohtuullisella varmuudella turvattu. Vakavaraisuuspääomavaatimuksen on vastattava oman varallisuuden Value-at-Risk-arvoa, joka on laskettu 99,5 % todennäköisyydellä yhden vuoden ajanjaksolle. Vähimmäispääomavaatimuksen on absoluuttisten vähimmäismäärien lisäksi vastattava oman varallisuuden Value-at-Risk-arvoa, joka on laskettu 85 % todennäköisyydellä yhden vuoden ajanjaksolle.

Edellä mainittu Value-at-Risk on yleisin käytetty riskimitta sekä pankki- että vakuutusalalla. Value-at-Risk-mittaa voi käyttää yksittäisten riskien tai riskiryhmien tasolta aina koko yrityksen vakavaraisuuspääoman tarkasteluun. Muista perinteisistä riskimitoista voidaan mainita CTE-riskimitta. CTE on subadditiivinen, jolloin useampia riskejä yhdistettäessä hajautushyötyjen takia CTE-riskimitta ei voi olla suurempi kuin yksittäisten riskien riskimittojen arvojen summa. Value-at-Risk-riskimitalla ei ole subadditiivisuusominaisuutta, mutta normaalitilanteissa Value-at-Risk-mitta on kuitenkin käyttökelpoinen. Solvenssi II:ssa on päädytty Value-at-Risk-riskimitan käyttämiseen yksinkertaisuuden takia. Lisäksi vähäisellä havaintoaineistolla CTE:n laskeminen odotusarvona voi olla epävakaampaa verrattuna Value-at-Risk-arvon määrittämiseen.

Poikkeuksellisissa vakuutustoiminnan tilanteissa tai markkinahäiriöissä vakuutusyhtiön riskien keskinäinen riippuvuus voi oleellisesti muuttua normaalitilanteeseen verrattuna. Esimerkkinä vakuutuspuolelta on luonnonkatastrofin aiheuttama eri vakuutustyyppien välisen riippuvuuden lisääntyminen ja jälleenvakuutuksen kautta tapahtuva menojen siirto jälleenvakuutuksia vastaanottaneille vakuutusyhtiöille. Esimerkkinä markkinariskeistä on vuoden 2008 finanssikriisin aiheuttama markkinahäiriö, joka vaikuttaa edelleen eri puolilla maailmaa. Luottoriskien hallintaan on olemassa omia menetelmiä, joista eräitä käsiteltiin tämän esityksen luvussa 5. Vakuutusyhtiön vastuuvelka on nimensä mukaisesti myös velkaerä, joten eräs tutkimisen arvoinen mahdollisuus on soveltaa vastuuvelan hallintaan samoja menetelmiä kuin luottoriskien mallintamisessa. Luottoriskien mallintamisen yhteydessä sovellettiin jakaumien mallintamiseen myös kopuloita, joilla on vakuutusyhtiöiden riskienhallinnassa lisääntyvää käyttöä eri riskien aiheuttamien tappiojakaumien kuvaamisessa.

Vakuutusyhtiön vakavaraisuuspääomavaatimusten laskennassa voidaan joutua käyttämään eri menetelmiä vahinkovakuutusriskin, henkivakuutusriskin, sairausvakuutusriskin, markkinariskin tai vastapuoliriskin laskennassa. Solvenssi II:n mukaisessa standardikaavassa vakuutusyhtiön eri riskien vakavaraisuuspääomavaatimukset yhdistetään kokonaispääomavaatimukseksi, joka perustuu riskien välisiin korrelaatiokertoimiin ja normaalijakaumaan. Solvenssi II -säännöstön mukainen toinen vaihtoehto on vakuutusyhtiön oman sisäisen mallin kehittäminen ja käyttäminen. Lainsäädäntö asettaa korkeita laatuvaatimuksia oman mallin tasolle ja käytölle. Lisäksi mallin on saatava Finanssivalvonnan lupa ennen käyttöönottoa. Oman mallin etuja ovat parempi ymmärrys vakuutusyhtiön omista riskeistä ja mahdollisesti matalammat vakavaraisuuspääomavaatimukset. Alhaisemmat vakavaraisuuspääomavaatimukset mahdollistavat vakuutusyhtiöille joustavamman varojen käytön. Vakuutusyhtiön sisäinen malli voi olla parempi poikkeus- ja ääritilanteiden kuvaamisessa. Edellisen perusteella sisäinen malli voi olla myös vakuutusyhtiön asiakkaiden etu.

Riskienhallinnan merkitys on kasvanut viime vuosina erityisesti finanssikriisin seurauksena. On kiinnitetty huomiota siihen, että riskijakaumien laskentamallit ja niihen perustuvat vakavaraisuusmallit eivät ole riittävällä tavalla ottaneet huomioon poikkeuksellisia markkinatilanteiden tai vakuutusriskien vaihteluita eikä näiden eri riskien välisiä riippuvuuksia. Tilannetta heikentää lisäksi se, että riskienväliset riippuvuudet muuttuvat häiriötilanteissa, ja näistä riippuvuuksien muutoksista on vähän havaintotietoa. Realististen ääri-ilmiöt sisältävien mallien rakentaminen on siten hankalaa.

Solvenssi II:n korrelaatiokertoimiin ja normaalijakaumaan perustuvalla laskentamallilla on huomattavia puutteita poikkeustilanteissa, normaaliolosuhteissa malli on kuitenkin riittävän kuvaava ja yksinkertainen käyttää. Viime vuosina kopuloiden tutkimus ja käyttö vakuutusyhtiöiden riskien tappiojakaumien mallintamisessa on lisääntynyt. Kopulat mahdollistavat realistisempien tappiojakaumien käytön riskien mallintamisessa ja niiden yhdistämisessä koko yhtiön kaikki riskit kattavaksi tappiojakaumaksi. Kopulajakaumasta voidaan laskea vakavaraisuuspääomavaatimukset Solvenssi II:n mukaisen sisäisen mallin puitteissa. Solvenssi II:n standardikaava ei perustu kopuloihin.

Mahdollisia kopulajakaumia on runsaasti. Vakuutusyhtiön riskien tappiojakaumien mallintamiseen ja jakaumien yhdistämiseen sopivia ovat esimerkiksi Gaussin kopula ja t-kopula. Suositeltavampi on t-kopula, jolla on mahdollista kuvata Gaussin kopulaa paremmin riskien keskinäisiä riippuvuuksia poikkeus- ja ääriolosuhteissa. Tämä ilmenee siinä, että Gaussin kopulan häntäriippuvuuskertoimet ovat nollia, mutta t-kopulan nollasta poikkeavia.

CRO Forumissa (CRO = Chief Risk Officers) vuonna 2008 suoritetun International models benchmarking study -kyselytutkimuksen mukaan vakuutusyhtiöiden riskien tappiojakaumien yhdistämisessä käytettiin 60 % kovarianssimatriiseja, 30 % simulointia ja vain 5 % kopuloita. Solvenssi II -säännöstön voimaantulon jälkeen kaikissa Euroopan Unionin maiden vahinko- ja henkivakuutusyhtiöissä, jotka noudattavat standardimallia on käytössä varianssi-kovarianssimenetelmä. Solvenssi II:n mukaisena sisäisenä mallina tai yhtiön omana mallina sekä simulointi että varsinkin kopulat ovat ilmeisesti nousussa. Samassa kyselytutkimuksessa kysyttiin vakavaraisuuspääomavaatimusten laskennassa käytettyjä riskimittoja. Tulokset olivat Value-at-Risk 76 %, CTE 24 % ja muut 12 %. Sama vakuutusyhtiö voi käyttää useita rinnakkaisia malleja. Kyselyssä selvitettiin riskimitan osalta tulevaisuuden suunnitelmia 2 – 3 seuraavalle lähivuodelle (vuosille 2009 – 2011): Value-at-Risk 71 %, CTE 29 % ja muut 6 %. Suunnitelmissa oli siis lievää siirtymistä Value-at-Risk-riskimitasta CTE-riskimittaan. Kyselyssä oli mukana Solvenssi II - säännöstön ulkopuolisia maita, jotka voivat käyttää oman maansa lainsäädännön mukaisia menetelmiä ja riskimittoja.

Lainsäädäntö velvoittaa vakuutusyhtiöitä laajempaan riskienhallintaan kuin pelkästään vakavaraisuuspääomavaatimusten täyttämiseen. Vakuutusyhtiöiden omassa riskien arvioinnissa kehitetään laskentamenetelmiä, joita ei Solvenssi II -säännöstö suoranaisesti rajoita. Erilaisten menetelmien käyttö on suotavaa malliriskien havaitsemiseksi ja tarkempien tulosten saamiseksi eri riskeistä. Vakuutusyhtiön omassa riskienhallinnassa on mahdollista käyttää esimerkiksi äärimmäisten tapahtumien mallintamisen laskentamenetelmiä, joita esiteltiin luvussa 6. Mallintamisella on vakavaraisuuslaskennan lisäksi muitakin tavoitteita, esimerkiksi yhtiön taloudellisen tilan seurannassa, päätöksenteossa, yhtiön arvon määrittämisessä ja vakuutustuotteiden hinnoittelussa.

8 Lähteet

[1] Aas K, Dimakos X K, Oksendal A, Risk capital aggregation, Norwegian Computing Center SAMBA/40/05 Report, 2005

[2] Abarbanel H, Koonin S, Levine H, MacDonald G, Rothaus O, Statistics of extreme events with applications to climate, JSR-90-305 report, January 1992

[3] Alexander C, Value-at-Risk Models, John Wiley & Sons Ltd, 2008

[4] Ali H O, Jilani F, VaR computation of non-gaussian stochastic model, Journal of Advanced Management Science Vol 2 No 1 61-64, March 2014

[5] Ané T, Kharoubi C, Dependence structure and risk measure, Journal of Business Vol 76 No 3 411-438, 2003

[6] Artzner P, Delbaen F, Eber J-M, Heath D, Coherent measures of risk, July 1998

[7] Artzner P, Application of coherent risk measures to capital requirements in insurance, North American Actuarial Journal Vol 3 No 2 11-25, 1999

[8] Azamighaimasi A, Portfolio risk and dependence modeling: Application of factor copula models, International Journal of Banking and Finance Vol 9 No 3 1-14, 2012

[9] Balbás A, Mathematical methods on modern risk measurement: A survey, Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat. Vol 101 (2) 205-219, 2007

[10] Balbás A, Garrido J, Mayoral S, Properties of distortion risk measures, Methodology and Computing in Applied Probability Vol 11 No 3 385-399, 2008

[11] BASEL committee on banking supervision - The Joint Forum, Developments in modelling risk aggregation, October 2010

[12] Bauerle N, Muller A, Modeling and comparing dependencies in multivariate risk portfolios, Astin bulletin Vol 28 No 1 59-76, 1998

[13] Bellini F, Caperdoni C, Coherent distortion risk measures and higher-order stochastic dominances, North American Actuarial Journal Vol 11 No 2 35-42, 2007

[14] Bellini F, Gianin E R, Optimal portfolios with Haezendonck risk measures, Statistics & Decisions Vol 28 No 2, 2008

[15] Bellini F, Gianin R, On Haezendonck risk measures, Journal of Banking & Finance 32 986-994, 2008

[16] Berg D, Aas K, Models for construction of multivariate dependence: A comparison study, European Journal of Finance 15 639-659, 2009

[17] Berry R, Value-at-Risk: An overview of analytical VaR, Risk Management, September

2008

[18] Bier V M, Haimes Y Y, Lambert J H, Matalas N C, Zimmerman R, A survey of approaches for assessing and managing the risk of extremes, Risk Analysis Vol 19 No 1 83-94, 1999

[19] Billio M, Getmansky M, Lo A W, Pelizzon L, Econometric measures of systemic risk in the finance and insurance sectors, NBER Working paper No 16223, July 2010

[20] Brachinger H W, Measurement of risk, Optimization and Operations Research Encyclopedia of Life Support Systems EOLLS, Publishing Oxford UK 1119-1137, 2003

[21] Brockmann M, Kalkbrener M, On the aggregation of risk, The Journal of Risk Vol 12 No 3 45-68, Spring 2010

[22] Broll U, Wahl J E, Optimum bank equity capital and Value at Risk, Working Paper, 2002

[23] Cabedo J D, Moya I, Estimating oil price Value at Risk using the historical simulation approach, Energy Economics Vol 25 No 3 239-253, 2003

[24] Campana A, Ferretti P, What do distortion risk measures tell us on excess of loss reinsurance with reinstatements?, Mathematical and Statistical Methods for Actuarial Sciences and Finance 53-61, 2010

[25] CAS Dynamic Risk Modeling Handbook Working Party, Dynamic Risk Modeling Handbook Chapter 9 – Measures of Risk

[26] Charpentier A, Optimal reinsurance with ruin probability target, 7th International Workshop on Rare Events Simulation, September 2008

[27] Charpentier A, Fermanian J-D, The estimation of copulas: Theory and practice, Copulas: From Theory to Application in Finance, ed: Rank J, Risk Publications London Section 2, 2007

[28] Chauhan P, Study the impact of smile and tail dependence on the prices of european style bivariate equity and interest rate derivatives using copulas and UVDD model, Master's thesis, December 2009

[29] Denuit M, Dhaene J, Goovaerts M, Kaas R, Actuarial Theory for Dependent Risks Measures, Orders and Models, John Wiley & Sons, Ltd 2005

[30] Cheng S, Gerber H U, Shiu E S W, Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model, Insurance: Mathematics and Economics 26 239-250, 2000

[31] Weihao Choo, Piet de Jong, Loss reserving using loss adversion functions, Macquarie University Centre for Financial Risk, Insurance, Mathematics & Economics Vol 45 No 2 271-277, 2009

[32] Christiansen M, Niemeyer A, The fundamental definition of the Solvency Capital Requirement in Solvency II, Preprint Series: 2012 – 02 Universität ULM, February 2, 2012

[33] Daníelsson J, Jorgensen B N, Sarma M, de Vries C G, Comparing downside risk measures for heavy tailed distributions, Economics Letters Vol 92 No 2 202-208, 2006

[34] Daníelsson J, Jorgensen B N, Samorodnitsky G, Sarma M, de Vries C G, Subaddivity re-examined: the case for Value-at-Risk, FMG Discussion Papers, October 2005

[35] Daníelsson J, Jorgensen B N, Samorodnitsky G, Sarma M, de Vries C G, Fat tails, VaR and subaddivity, Journal of Econometrics Vol 172 No 2 283-291, 2013

[36] Darkiewicz G, Dhaene J, Goovaerts M, Distortion risk measures for sums of random variables, Blätter der DGVFM Vol 26 No 4 631-641, 2004

[37] Darkiewicz G, Dhaene J, Goovaerts M, Risk measures and dependencies of risks, Brazilian Journal of Probability and Statistics 19 155-178, 2005

[38] Daykin C D, Pentikäinen T, Pesonen M, Practical Risk Theory for Actuaries, Chapman & Hall, London, 1994

[39] Denuit M, Dhaene J, Goovaerts M, Kaas R, Laeven R, Risk measurement with the equivalent utility principles, Statistics & Risk Modeling Vol 24, 2006

[40] Dhaene J, Goovaerts M J, Dependency of risks and stop-loss order, Onderzoeksrapport nr 9545, December 1995

[41] Dhaene J, Wang S, Young V, Goovaerts M J, Comonotonicity and maximal stop-loss premiums, Bulletin of the Swiss Association of Actuaries, Vol 2 99-113, 2000

[42] Dhaene J, Denut M, Goovaerts M J, Kaas R, Vyncke D, The concept of comonotocity in actuarial science and finance: Theory, Insurance: Mathematics and Economics Vol 31 No 1 3-33, August 2002

[43] Dhaene J, Denut M, Goovaerts M J, Kaas R, Vyncke D, The concept of comonocity in actuarial science and finance: Applications, Mathematics and Economics Vol 31 No 2 133-161, August 2002

[44] Dhaene J, Vanduffel S, Tang Q, Goovaerts M J, Kaas R, Vyncke D, Solvency capital, risk measures and comonotonicity: a review, DTEW Research Report 0416 1-33, July 2004

[45] Dhaene J L M, Goovaerts M J, Kaas R, Economic capital allocation derived from risk measures, North American Actuarial Journal, Vol 7 No 2 1-16

[46] Dhaene J, Henrard L, Ladsman Z, Vandendorpe A, Vanduffel S, Some results on the CTE based capital allocation rule, Insurance: Mathematics and Economics Vol 42 855-863, 2008

[47] Dhaene J, Laeven R J A, Vanduffel S, Darkiewicz G, Goovaerts M J, Can a coherent risk measure be too subadditive, The Journal of Risk and Insurance Vol 75 No 2 365-386, 2008

[48] Dhaene J, Kukush A, Linders D, Tang Q, Remarks on quantiles and distortion risk

measures, European Actuarial Journal Vol 2 No 2 319-328, December 2012

[49] Dhaene J, Linders D, Schoutens W, Vyncke D, A multivariate dependence measure for aggregating risks, Journal of Computational and Applied Mathematics Vol 263 78-87, June 2014

[50] Doff R R, Risk management for insurance firms A framework for fair value and economic capital, 2006

[51] Dowd K, Cairns A J G, Blake D, Mortality-dependent finacial risk measures, Insurance: mathematics and Economics 30 (2006) 427-440

[52] Dowd K, Blake D, After VaR: The theory, estimation and insurance applications of quantile-based risk measurs, Discussion paper PI-0603, June 2006

[53] Duffie D, Pan J, An overview of Value at Risk, The Journal of Derivatives Vol 4 No 3 7-49, Spring 1997

[54] Embrechts P, Hofert M, Statistics and Quantitative Risk Management for Banking and Insurance, Annual Rewiev of Statistics and its Application Vol 1 493-514, 2014

[55] Embrechts P, Actuarial versus financial pricing of insurance, Conference on Risk Management of Insurance Firms, May 15-17, 1996

[56] Embrechts P, Frey R, Furrer H, Stochastic processes in insurance and finance, in Handbook of Statistics Vol 19 365-412, Elsevier Science, Amsterdam , January 1999

[57] Embrechts P, McNeil A, Straumann D, Correlation: Pitfalls and alternatives, RISK Magazine 69-71, May 1999

[58] Embrechts P, Resnick S I, Samorodnitsky G, Extreme value theory as a risk management tool, North American Actuarial Journal, Vol 2 No 2, April 1999 30-41

[59] Embrechts P, Neslehová J, Wuthrich M V, Additivity properties for Value-at-Risk under Archimedean dependence and heavy-tailedness, Insurance: Mathematics and Economics 44 164-169

[60] Erdman D, Major S, Rioux J, Evaluation of parameter risk via first-order approximation of distortion risk measures, The Journal of Operational Risk Vol 5 No 1 29-46, Spring 2010

[61] Escobar M, Frielingsdorf T, Impact of factor models on portfolio risk measures: a structural approach, The Journal of Credit Risk Vol 8 No 2 47-79, Summer 2012

[62] Andrey Feuerverger, Augustine C.M. Wong, Computation of Value-at-Risk for nonlinear portfolios, Journal of Risk Volume 3 No 1, Fall 2000 37-55

[63] Finan M B, An introductory guide in the construction of actuartial models: A preparation for the Actuarial Exam C/4, July 2013

[64] Fischer M, Multivariate copulae, Dependence Modelling – Vine Copula Handbook 19-36,

World Scientific Publishing Co Pte. Ltd

[65] Forsberg M O, Solvency II / SST and modeling of risk aggregation, Master Thesis, June 2010

[66] Fouque J-P, Li-Hsien Sun, Systemic risk illustrated, in Handbook on on Systemic Risk Ed: Fouque J-P, Langsam J A, Cambridge University Press, 2013

[67] Franklin J, Sisson S, Assessment of strategies for evaluating extreme risks, Acera project no 0602 report, March 2007

[68] Frees E W, Valdez E A, Understanding relationships using copulas, Actuarial Research Clearing House Vol 1 5-45, 1998

[69] Frey R, McNeil A J, Dependent Defaults in Models of Portfolio Credit Risk, Journal of Risk Vol 6 No 1 59-62, Fall 2003

[70] Frittelli M, Gianin E R, Putting order in risk measures, Journal of Banking & Finance 26 1473-1486, 2002

[72] Furman F, Zitikis R, Weighted risk capital allocations, Insurance: Mathematics and Economics 43 (2008) 263-269

[73] Furman E, Lansman Z, Economic capital allocations for non-negative portfolios of dependent risks, ASTIN Bulletin 38 (2) 601-619, January 2007

[74] Föllmer H, Knispel T, Convex risk measures: Basic facts, law-invariance and beyond, asymptotics for large portfolios, in Handbook of the Fundamentals of Financial Decision Making, World Scientific Publishing Co 507-554

[75] Genest C, Rivest L-P, On the multivariate probability integral transformation, Statistics & Probability Letters 53 391-399, 2001

[76] Genest C, Favre A-C, Everything you always wanted to know about copula modeling but were afraid to ask, Journal of Hydrologic Engineering 347-368, July/August 2007

[77] Gerber H U, Mathematical fun with the compound binomial process, Astin Bulletin Vol 18 No 2 161-168

[78] Gerber H U, Shiu E S W, On the merger of two companies, North American Actuarial Journal, Vol 10 No 3 60-67

[79] Goovaerts M J, Dhaene J, On the characterization of Wang's class of premium principles, Transactions of the 26th International Congress of Actuaries Vol 4 121-134, 1998

[80] Goovaerts M J, Kaas R, Dhaene J, Tang Q, A unified approach to generate risk measures, Astin Bulletin Vol 33 No 2 173-191, 2003

[81] Goovaerts M J, Kaas R, Laeven R J A, A note on additive risk measures in rank-dependent

utility, Insurance: Mathematics and Economics 47 187-189, 2010

[82] Goovaerts M J, Kaas R, Laeven R J A, Decision principles derived from risk measures, Insurance: Mathematics and Economics Vol 47 No 3, 294-302, December 2010

[83] Goovaerts M, Linders D, Van Weert K, Tank F, On the interplay between distortion, mean-value and Haezendonck-Goovaerts risk measures, Insurance: Mathematics & Economics, 51 10-18, 2012

[84] Gourieroux C, Wei Liu, Sensitivity analysis of distortion risk measures, RePEc – Working Papers in Economics No 33, 2006

[85] Grundke P, Integrated risk management: Top down or bottom up?, 2006

[86] Gzyl H, Mayoral S, On the relationship between distorted and spectral risk measures, MPRA Paper No 1940, November 2007

[87] Habiboellah F, Copulas Modeling dependencies in financial risk management, BMI Master Thesis, 2007

[88] Heitfield E, Burton S, Chomsisengphet S, Systemic and idiosyncratic risk in syndicated loan portfolios, Journal of Credit Risk Vol 2 No 3, Fall 2006 3-31

[89] Hesselager O, Andersson U, Risk sharing and capital allocation 2002

[90] Heyde C C, Kou S G, Peng X H, What is a good risk measure: Bridging the gaps between data, coherent measures, and insurance risk measures, June 26 2006

[91] Xubiao He, Pu Gong, Measuring the coupled risks: A copula-based CvaR model, Journal of Computational and Applied Mathematics 223 (2009) 1066-1080

[92] Herrera R, González N, The modeling and forecasting of extreme events in electricity spot markets, International Journal of Forecasting 30 (2014) 477-490

[93] Hu Q, Wang Y, Yang X, The hitting time density for a reflected Brownian motion, Computational Economics, March 2011

[94] Hurlimann W, Distortion measures and economic capital, North American Actuarial Journal, Volume 8, Number 1 86-95

[95] Hurlimann W, Fitting bivariate cumulative returns with copulas, Computational Statistics & Data Analysis 45 355-372, 2004

[96] Hull J, White A, Value at Risk when daily changes in market variables are not normally distributed, Journal of Derivatives Vol 5 No 3 9-19, Spring 1998

[97] Johansson S, von Brömsen T, Modelling dependent defaults in static credit portfolios, Master Thesis, 2011

[98] Jäschke S, Siburg K E, Stoimenov P A, Modelling dependence of extreme events in energy markets using tail copulas, Preprint 2011-02 Technische Universität Dortmund , January 2011

[99] Kaas R, Dhaene J, Vyncke D, Goovaerts M J, Denuit M, A simple geometric proof that comonotonic risks have the convex-largest sum, Astin Bulletin Vol 32 No 1 71-80, 2002

[100] Kaiser T, Brazauskas V, Interval estimation of actuarial risk measures, North American Actuarial Journal, Vol 10 No 4 249-268

[101] Kaura V, Portfolio optimization using Value at Risk, Project report 2004

[102] Kaut M, Wallace S W, Shape-based scenario generation using copulas, Computational Management Science Vol 8 No 1-2 181-199, 2011

[103] Kiohos A, Dimopoulos A, Estimation portfolio VaR with three different methods: Financial institution risk management approach, SPOUDAI Vol 54 No 2 (2004) 59-83

[104] Koutsoyiannis D, Statistics of extremes and estimation of extreme rainfall: I. Theoretical investigation, Hydrological Sciences Journal des Sciences Hydrologiques 49(4) 575-590, August 2004

[105] Kozubík A, Copula functions and dependent insurance risks, Journal of Information, Control and Management Systems Vol 3 No 2 109-118, 2005

[106] Krokhmal P, Zabarankin M, Uryasev S, Modeling and optimization of risk, Surveys in Operations Research and Management Science 16 49-66, 2011

[107] Kuosmanen H K, Vakuutusyhtiön arvon määrityksestä, SHV-työ, 2000

[108] Käärik M, Selart A, Käärik E, The use of copulas to model conditional expectation for multivariate data, Int. Statistical Inst.: Proc. 58th World Statistical Congress, 2011

[109] Laeven R J A, Goovaerts M J, Premium calculation and insurance pricing, in Encyclopedia of Quantitative Risk Analysis and Assessment, 2008

[110] Landsman Z, Sherris M, Risk measures and insurance premium principles

[111] Leppisaari M, Äärimmäisten ilmiöiden mallintamisesta, SHV-työ, 2013

[112] Letmark M, Robustness of Conditional Value-at-Risk (CvaR) when measuring market risk across different asset classes, Master's thesis, March 2010

[113] Changzhi Liang, Xiaoqian Zhu, Yilin Li, Xiaolei Sun, Jianming Chen, Jianping Li, Integrating credit and market risk: A factor copula based method, Procedia Computer Science 17 656-663, 2013

[114] Li D X, On default correlation: A copula function approach, The RiskMetrics Group Working Paper Number 99-07, April 2000

[115] Loisel S, Trufin J, Properties of a risk measure derived from the expected area in red, Laboratoire de sciences actuarielle et financière Report, 2014

[116] Mack T, Measuring the variability of Chain Ladder reserve estimates, Report 1993

[117] Mack T, Distribution-free calculation of the standard error of Chain Ladder reserve estimates, Astin Bulletin Vol 23 No 2 213-225, 1993

[118] Mack T, The standard error of Chain Ladder reserve estimates: Recursive calculation and inclusion of a tail factor, Astin Bulletin Vol 29 No 2 361-366, 1999

[119] MacLean L, Ziemba B, A primer on risk measures, Wilmott magazine 52-55

[120] McNeil A J, Extreme value theory for risk managers, May 1999

[121] McNeil A J, Frey R, Embrechts P, Quantitative Risk Management Concepts, Techniques and Tools, Princeton University Press 2005

[122] Medova E A, Smith R G, A framework to measure integrated risk, Research papers in management sciences University of Cambridge WP 09/2003

[123] Nelsen R B, Dependence and order in families of Archimedean copulas, Journal of Multivariate Analysis 60 111-122, 1997

[124] Nelsen R B, Quesada-Molina J J, Rodríguez-Lallena J A, Úbeda-Flores M, Distribution functions of copulas: a class of bivariate probability integral transforms, Statistics & Probability Letters 54 277-282, 2001

[125] Nelsen R B, Properties and applications of copulas: a brief survey, in Proceedings of the First Brazilian Conference on Statistical Modelling in Insurance and Finance Ed: Dhaene J, Kolev N, Morettin D 10-28

[126] Nguyen T, Molinari R D, Risk aggregation by using copulas in internal models, Journal of Mathematical Finance, November 2011

[127] Noether G E, Why Kendall Tau?, Teaching Statistics Vol 3 No 2 41-43, May 1981

[128] van Oordt M R C, Chen Zhou, Systemic tail risk, DNB Working Paper 400, 2013

[129] Panjer H H, Overview: An actuary's perspective on developments in risk measurement, Symposium “Integrated Approaches to Risk Measurement in the Financial Services Industry” 9-10, 1997

[130] Panjer H H, Measurement of risk, solvency requirements and allocation of capital within financial conglomerates, 27th International Congress of Actuaries, 2002

[131] Jin Peng, Shengguo Li, Distortion risk measures of uncertain systems, IEEE 2011

[132] Perrin Towers, Chapter 5. Factors to consider in developing an EC program & Chapter 6.

Succesfully implementing EC: Risk representation issues, in Economic Capital for Life Insurance Companies, Society of Actuaries, February 2008

[133] Peterson B, Boudt K, Component VAR for a non-normal world, Risk 78-81, November 2008

[134] Pierret D, The systemic risk of energy markets, CORE Discussion Papers 2013018, 2013

[135] Pulkkinen A, Vahinkovakuutusyhtiön riskipääoman määritys ja jakaminen vakuutuslajeille, Suppea SHV-työ

[136] Rau-Bredow H, Value at Risk, Expected Shortfall, and marginal risk contribution, in Risk Meausres for the 21th Century, Wiley, Chichester 61-68, 2004

[137] Ren J, Value-at-Risk and ruin probability, The Journal of Risk Vol 14 No 3 53-62, Spring 2012

[138] Rombolotti A, From risk-based betas to Value-at-Risk: Estimating monetary risk with market data, 2014

[139] Romera R, Molanes M, Copulas in finance and insurance, Statistics and Econometrics Working Papers ws086321, November 2008

[140] Rosenberg J V, Schuermann T, A general approach to integrated risk management with skewed, fat-tailed risk, Federal Reserve Bank of New Yourk Staff Reports No 185, May 2004

[141] Sanders D E A, The modelling of extreme events, Report, April 2005

[142] Sandström A, Handbook of Solvency for Actuaries and Risk Managers Theory and Practice, Chapman & Hall/CRC Finance Series, 2011

[143] Schmidt T, Coping with copulas, Copulas – From Theory to Applications in Finance, December 2006

[144] Serada E N, Bronshtein E M, Rachev S T, Fabozzi F J, Wei Sun, Stoyanov S, Distortion risk measures in portfolio optimization, in Handbook of Portfolio Construction 649-673, 2010

[145] Sharpe W F, Capital asset prices: A theory of market equilibrium under conditions of risk, The Journal of Finance Vol XIX No 3 425-442, 1964

[146] Shaw R, Spivak G, Correlations and dependencies in econometric capital models, General Insurance Convention, September 2009

[147] Skoglund J, Risk aggregation and economic capital, SAS White paper, 2010

[148] Smith R L, Statistics of extremes, with applications in environment, insurance and finance, Lecture notes 1-62, 12 March 2003

[149] Staudt A, Tail risk, systemic risk and copulas, Casualty Actuarial Society E-Forum Vol 2,

Fall 2010

[150] Stolyarov G, Study guide on measuring the variability of Chain-Ladder reserve estimates for casualty actuarial society (CAS) Exam 7, Spring 1994

[151] Szegö G, Measures of risk, Journal of Banking & Finance 26 1253-1272, 2002

[152] Tang A, Valdez E A, Economic capital and the aggregation of risks using copulas, 28th International Congress of Actuaries, 2006

[153] Toma A, Dedu S, Quantitative techniques for financial risk assessment: a comparative approach using different risk measures and estimation methods, Procidia Economics and Finance 8 (2014) 712–719

[154] Tops R, Copulas and correlation in credit risk, Barchelor of Science Thesis, August 2010

[155] Trufin J, Albrecher H, Denuit M M, Properties of a risk measure derived from ruin theory, The Geneva Risk and Insurance Rewiev 36 174-188, 2011

[156] A. Tsanakas, E. Desli, Risk measures and theories of choice, British Actuarial Journal, July 2003

[157] Anreas Tsanakas, To split or not to split: Capital allocation with convex risk measures, Insurance: Mathematics and Economics Vol 44 No 2 268-277, 2009

[158] Vandenhende F, Lambert P, Improved rank-based dependence measures for categorical data, Statistics & Probability Letters 63 157-163, 2003

[159] Venkataraman S, Value at Risk for a mixture of normal distributions: The use of quasi-Bayesian estimation techniques, Economic Perspectives – Federal Reserve Bank of Chicago Vol 21 No 2 2-13, 1997

[160] de Vries A, The Value at Risk, May 19 2000

[161] Wang S S, A universal framework for pricing financial and insurance risks, Astin Bulletin, Vol 32 No 2 2002 213-234

[162] Wang S S, Aggregation of correlated risk portfolios: Models and algorithms, CAS Committee on Theory of Risk, November 1998

[163] Wirch J L, Coherent beta risk measures for capital requirements, Thesis, 1999

[164] Wirch J L, Hardy M R, Ordering of risk measures for capital adequacy, Preprint, 2000

[165] Wirch J L, Raising Value at Risk, North American Actuarial Journal, Vol 3 No 2 106-115

[166] Zhang Ai-li, Wang Wen-yuan, Hu Yi-jun, On the generalized risk measures, Appl. Math. J. Chinese Univ. 2012, 27(3) 281-289

[167] Zhengjun Zhang, Huang J, Extremal financial risk models and portfolio evaluation,

Computational Statistics & Data Analysis Vol 51 No 4 2313-2338, December 2006

[168] ZhiYi Lu, LePing Liu, ShengWang Meng, Optimal reinsurance with concave ceded loss functions under VaR and CTE risk measures, Insurance: Mathematics and Economics 52 46-51, 2013

[169] Li Zhu, Haijun Li, Tail distribution risk and its asymptotic analysis, Insurance: Mathematics and Economics Vol 51 No 1 115-121, 2012

[170] Zinchenko N, Andrusiv A, Risk process with stochastic premiums, Theory of Stochastic Processes Vol 14 (30) No 3-4 189-208

[171] Zvezdov I, Insurance portfolio risk aggregation and solvency capital computation with mathematical copula techniques, MPRA Paper No 38953, May 2012

[172] Yaari M E, The dual theory of choice under risk, Economica Vol 55 No 1 95-115, January 1987

[173] Yildirim I, Coherent and convex measures of risk, Masters thesis, 2005

[174] Yunzhou Zhu, Lixin Zhang, Yi Zhang, Optimal reinsurance under Haezendonck risk measure, Statistics & Probability Letters Vol 83 No 4 1111-1116, April 2013

[175] CRO Forum, International models benchmarking study, 2009

[176] Solvenssi II -direktiivi, http://eur-lex.europa.eu/legal-content/FI/TXT/?uri=OJ:L:2009:335:TOC

[177] Omnibus II -direktiivi, http://eur-lex.europa.eu/legal-content/FI/TXT/?uri=OJ:L:2014:153:TOC

[178] Hallituksen esitysluonnos: perustelut, kohta 2.3 EU:n lainsäädäntö sivulla 19, http://www.stm.fi/vireilla/lainsaadantohankkeet/toimeentulo_ja_vakuutusasiat/solvenssi_ii