111

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
THE ACTUARIAL SOCIETY OF FINLAND

WORKING PAPERS ISSN 0781- 4410

SUOMEN AKTUAARIYHDISTYS
The Actuarial Society of Finland

111
Rakkolainen, Teppo

Aikamuunnettujen CGMY-prosessien ja t-kopulan käyttö realistisen taseenhallinnan rakentamiseen

(2012)

AIKAMUUNNETTUJEN CGMY-PROSESSIEN JA t-KOPULAN KäYTTö REALISTISTEN TASEENHALLINTAMALLIEN RAKENTAMISEEN

SUPPEA SHV-TYÖ

TEPPO A. RAKKOLAINEN

Sisältö

Abstract

The purpose of this short treatise is to present a modelling approach based on using so-called time-changed Carr–Geman–Madan–Yor processes (CGMY processes) to model the marginal probability distributions of financial variables and the use of a copula function to model the variables' dependency structure. The treatise aims to present the relevant probabilistic theory as succinctly as possible, with emphasis on the connections between the theoretical properties and the practical or empirical facts motivating their necessity. The applicability of the approach is illustrated with a simple asset–liability management (ALM) related optimization problem, which is considered using simulation techniques.

This treatise makes absolutely no claim to any new original scientific results, but instead is meant to help bridge the gap between an advanced modeling approach still largely confined to academic studies on one hand, and the clear and present practical need for models both sufficiently complex to capture adequately the observed behavior of financial variables and sufficiently simple to be implementable in practice on the other hand.

1. Johdanto

Tietoisuus klassisen rahoitusteorian taustalla olevien tilastollisten mallien riittämättömyydestä taloudellisten aikasarjojen realistiseen mallintamiseen on viimeisten kolmen vuosikymmenen aikana lisääntynyt huomattavassa määrin, ja nykyään voitaneenkin sanoa lähes kaikkien olevan selvillä siitä, että esimerkiksi Black–Scholes–Merton-mallin taustalla oleva oletus tuottojen logaritmien normaalijakautuneisuudesta ei ole hyväksyttävä approksimaatio todellisuudelle. Normaalijakauman ominaisuuksista periytyy myös edelleen voimissaan oleva harhakäsitys (lineaarisista) korrelaatioista riippuvuusrakenteen tyhjentävänä kuvauksena. Normaalijakaumaoletus ja korrelaatiorakenne riippuvuuden mittarina voivat kuitenkin helposti johtaa varsinkin riskienhallinnan näkökulmasta vaarallisen harhaanjohtaviin tuloksiin, sillä rahoitussuureiden havaittuja todennäköisyysjakaumia tarkasteltaessa normaalijakauma tyypillisesti aliarvioi suurien keskiarvosta poikkeamien todennäköisyyttä eli jakauman häntien paksuutta ja korrelaatio puolestaan mittaa ainoastaan lineaarista riippuvuutta (ks. [8], [9]). Edelleen normaalijakauman varianssi on vakio (deterministinen), mikä on ristiriidassa käytännössä havaittujen rahoitussuureiden aikasarjojen ajassa muuttuvan (stokastisen) volatiliteetin ja ns. volatiliteetin kasautumisen tai pysyvyyden (*volatilitity clustering/persistence*) kanssa (ks. [9], [11]).

Mainittuun tietoisuuden lisääntymiseen ovat vaikuttaneet erityisesti erilaiset kriisit, joihin ei ole osittain puutteellisista malleista johtuen osattu varautua. Esimerkkeinä hyvin tunnetuista tällaisista kriiseistä voidaan mainita muun muassa ns. musta maanantai vuonna 1987 ja hedgerahasto Long Term Capital Managementin ajautuminen selvitystilaan vuonna 1998. On kuitenkin hyvä huomata, että käytettyjen tilastollisten mallien puutteellisuudet oli jo huomattavasti aiemmin 1960- ja 1970-luvulla nostettu esiin akateemisissa piireissä ainakin B. Mandelbrotin toimesta (ks. [8]). Mandelbrot esitti, että taloudellisten aikasarjojen mallintamiseen soveltuvat paremmin jakaumat, joiden käyttäytymisen määrittävät muutamat harvinaiset suuret poikkeamat. Nämä jakaumat tunnetaan nimellä stabiilit jakaumat (*α-stable distributions*), ja ne ovat erittäin paksuhäntäisiä – niiden varianssi ei ole äärellinen ja parametristä α riippuen odotusarvokaan ei välttämättä ole äärellisenä olemassa. Myöhempi tutkimus näyttää kuitenkin viittaavan siihen, että useimpien rahoitussuureiden jakaumat eivät ole näin paksuhäntäisiä, vaan jakauman alimmat momentit 4.-10. kertalukuun asti ovat äärellisiä (ks. [9]).

Vaikkakin ns. perinteisten mallien puutteellisuus tiedostetaan laajalti, niin kehittyneemmät tilastolliset mallit ovat korvanneet niitä käytännössä (siis akateemisen yhteisön ulkopuolella) suhteellisen hitaasti. Tähän osasyynä on luonnollisesti uusien mallien suurempi vaativuus sekä käsitteellisesti että laskennallisesti – malli, jonka parametrien estimointiin tai havaintojen simulointiin ei ole käytettävissä nopeita ja luotettavia algoritmeja, ei käytännön toiminnassa ole kovinkaan hyödyllinen, ja toisaalta – ymmärrettävästi ja aivan oikein – harva on halukas käyttämään työkalua, jonka toimintaa ei ymmärrä (tai usko ymmärtävänsä...) hyvin. 1990-luvulla rahoitusteorian piirissä toden teolla herännyt kiinnostus Lévy-prosesseihin ja niihin liittyvin todennäköisyysjakaumiin (engl. *infinitely divisible distributions*) on kuitenkin kantanut hedelmää siinä mielessä, että viimeisten kahdenkymmenen vuoden aikana on tutkimuskirjallisuudessa kehitetty runsaasti erilaisia näihin prosesseihin perustuvia malleja, jotka mahdollistavat taloudellisten aikasarjojen aiempaa realistisemman tilastollisen mallinnuksen, ja näitä malleja on jonkin verran myös käytetty käytännön sovelluksissa (tuore käytännöllisesti orientoitunut esitys on [11]). Lévy-prosessit mahdollistavat jakaumien vinouden ja paksuhäntäisyyden huomioimisen mallinnuksessa, ja vaikka Lévy-prosessin volatiliteetti on deterministinen, niin tekemällä prosessille stokastinen aikamuunnos (*random change of time*) saadaan prosessi, jonka volatiliteetti on stokastinen (ks. [1]).

Ns. kopulafunktiot, joilla voidaan yhdistää useita erillisiä yksiulotteisia todennäköisyysjakaumia monulotteiseksi yhteisjakaumaksi, tarjoavat korrelaatiomatriiseja paremman tavan mallintaa riippuvuusrakenteita. Toisin kuin korrelaatiokertoimet, kopulafunktiot ovat ainoastaan riippuvuusrakenteen funktioita, jolloin riippuvuudet voidaan mallintaa erillään reunajakaumista. Tämä on usein edullista, jos riippuvuuksista on vähemmän informaatiota kuin reunajakaumista (ks. [9]).

Tämän esityksen tarkoituksena on esitellä ja havainnollistaa erään kirjoittajan mielestä erittäin lupaavan ja liian vähän tunnetun (tai ainakin käytetyn) Lévy-prosesseihin perustuvan malliluokan käyttömahdollisuuksia taseenhallintaan liittyvässä mallinnuksessa. Esityksen aluksi luvussa 2 esitellään tämän malliluokan ominaisuuksia, ja luvussa 3 kopulafunktioiden käyttöä riippuvuusrakenteen mallintamisessa. Tämän jälkeen havainnollistavana sovellusesimerkkinä luvussa 4 esitetään yksinkertainen taseenhallintaongelma ja tarkastellaan sitä Monte Carlo -simulaatioita käyttäen. Luvun 5 yhteenveto päättää esityksen.

2. Aikamuunnettu CGMY-prosessi ja taloudellisten aikasarjojen tyypilliset tilastolliset ominaisuudet

2.1. **Taloudellisten aikasarjojen tilastollisista ominaisuuksista.** Taloudellisten aikasarjojen analysoinnin yhteydessä tarkastellaan tavallisesti ns. logaritmisia tuottoja tai yhtäpitävästi havaintojen logaritmien differenssejä. Differenssien käytöllä pyritään saamaan tarkasteltavat aikasarjat stationaarisiksi[1], jota ominaisuutta tavanomaisten tilastollisten menetelmien soveltaminen edellyttää. Logaritmimuunnoksella puolestaan päästään peräkkäisten havaintojen summautuvuuteen, ja approksimaation

$$\ln X_t - \ln X_{t-1} = \ln\left(\frac{X_t}{X_{t-1}}\right) = \ln(1 + r_{t-1,t}) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} r_{t-1,t}^k \approx r_{t-1,t}$$

ansiosta logaritmien differenssit voidaan samaistaa tuottojen kanssa (muistaen toki kuitenkin, että approksimaation tarkkuus heikkenee tuottojen $r_{t-1,t}$ itseisarvon kasvaessa). Rahoitussuureiden empiiristen jakaumien tarkasteluissa on havaittu, että tuottojen logaritmien aikasarjojen käyttäytymiselle ovat tyypillisiä seuraavat ominaisuudet:

(1) jakaumat ovat vinoja;

[1]Aikasarja X_t on *vahvasti stationaarinen*, jos $F(x_{t_1}, x_{t_2}, \ldots, x_{t_n}) = F(x_{t_1+s}, x_{t_2+s}, \ldots, x_{t_n+s})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall s \in (0, \infty)$; aikasarja X_t on *heikosti stationaarinen*, jos $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ ja $\mathrm{var}(X_t) = \sigma$ kaikilla $t > 0$. Stationaarisuus tarkoittaa siis sitä, että aikasarjan tilastolliset ominaisuudet pysyvät (jossain mielessä) samanlaisina riippumatta valitusta tarkasteluaikavälistä.

(2) jakaumat ovat paksuhäntäisiä – tämä pätee usein sekä ehdollistamattomaan että volatiliteetin suhteen ehdollistettuun jakaumaan, ts. stokastinen volatiliteetti ei yksinään täysin selitä paksuhäntäisyyttä;
(3) peräkkäiset havainnot eivät ole keskenään merkitsevästi autokorreloituneita, mutta havaintojen neliöt tai itseisarvot sen sijaan ovat (eli havainnot eivät ole riippumattomia toisistaan);
(4) volatiliteetti muuttuu ajassa;
(5) suuria poikkeamia seuraa tavallisesti lisää suuria poikkeamia, ja pieniä muutoksia lisää pieniä muutoksia (volatiliteetin kasautuminen tai pysyvyys);

(ks. [9], [1], [6]). Kaikki nämä ominaisuudet ovat riskienhallinnan kannalta mallinnuksessa oleellisen tärkeitä, sillä jakauman paksuhäntäisyyden huomioimatta jättäminen ja havaintojen välisen riippumattomuuden olettaminen johtavat tavallisesti siihen, että malli merkittävästi aliarvioi riskejä. Niin ikään volatiliteetin muutokset vaikuttavat oleellisesti riskiarvioihin – matalan volatiliteetin aikana estimoidun vakiovolatiliteettiin perustuvan mallin riskiarviot ovat eivät vain hyödyttömiä vaan suorastaan vaarallisen harhaanjohtavia siirryttäessä korkean volatiliteetin ajanjaksoon.

2.2. **Lévy-prosessit.** Tässä osiossa esitellään ns. CGMY-prosessi, Lévy-prosessi, joka mahdollistaa monet todellisten taloudellisten aikasarjojen ominaisuudet huomioon ottavan mallinnuksen. Esittelyn on tarkoitus olla lyhyt ja siinä mielessä käytännöllisesti orientoitunut, että esiteltävien stokastisen analyysin määritelmien ja tulosten määrä on pyritty pitämään mahdollisimman pienenä. Esityksen ymmärrettävyyden ja esitystavan loogisuuden kannalta on kuitenkin tarpeen esittää tässä yhteydessä joitakin Lévy-prosesseja koskevia perusmääritelmiä. Yksityiskohtaisempien Lévy-prosesseja koskevien määritelmien, tulosten ja niiden todistusten osalta suositellaan tutustumista joko lähteeseen [2] tai [7].

Tavalliseen tapaan mallinnuksen lähtökohtana on *filtraatiolla varustettu todennäköisyysavaruus* $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$, missä Ω on tapausavaruus, $\mathcal{F}$ on jokin joukon Ω osajoukkojen σ-algebra, $\mathbb{P}$ todennäköisyysmitta ja $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ on *filtraatio*, eli ei-vähenevä ja oikealta jatkuva σ-algebran $\mathcal{F}$ ali-σ-algebrojen kokoelma. Intuitiivisesti filtraation voidaan ajatella kuvaavan käytettävissä olevan informaation kehitystä ajassa, eli tulkitaan, että $\mathcal{F}_t$ on "aikavälillä $[0, t]$ käytettävissä oleva informaatio". *Satunnaismuuttuja* X on todennäköisyysavaruudessa Ω määritelty sellainen reaalilukuarvoinen kuvaus $X : \omega \mapsto X(\omega)$, että $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$ kaikilla avoimilla joukoilla $B \subset \mathbb{R}$ (eli kuvaus X on $\mathcal{F}$*-mitallinen* – käytämme jatkossa joukon $\mathbb{R}$ tai sen jonkin osajoukon $A \subseteq \mathbb{R}$ avoimien joukkojen virittämästä σ-algebrasta merkintää $\mathcal{B}(A)$[2]). X siis liittää kuhunkin tapausavaruuden alkioon (*tapahtumaan*) $\omega \in \Omega$ reaaliluvun $X(\omega)$. *Stokastinen prosessi* $X := \{X_t(\omega) : t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ on aikaindeksoitu satunnaismuuttujien kokoelma. Prosessin X sanotaan olevan *adaptoitunut filtraatioon* $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, jos X_t on $\mathcal{F}_t$ -mitallinen satunnaismuuttuja kaikilla $t \geq 0$. Intuitiivisesti tämä tarkoittaa sitä, että "satunnaismuuttujan X_t arvo riippuu vain menneisyyttä ja nykyhetkeä koskevasta informaatiosta, ei tulevaisuutta koskevasta". Tässä esityksessä filtraationa on aina prosessin

[2]Tätä σ-algebraa sanotaan Borelin σ-algebraksi, josta siis merkintä $\mathcal{B}$.

luonnollinen filtraatio, eli $\mathcal{F}_t = \sigma(X_t)$, satunnaismuuttujan X_t virittämä σ-algebra. Stokastinen prosessi on luonnollisesti aina adaptoitunut luonnolliseen filtraatioonsa. Jos valitaan jokin tietty tapausavaruuden alkio $\omega \in \Omega$, niin tällöin ajan funktio $t \mapsto X_t$ on stokastisen prosessin X *realisaatio* tai *polku*.

Klassisen matemaattisen rahoitusteorian lähtökohtana on Wiener-prosessina (tai Brownin liikkeenä) tunnettu stokastinen prosessi, joka voidaan karakterisoida seuraavasti:
Määritelmä. *(Wiener-prosessi)* $W := \{W_t : t \geq 0\}$ on *Wiener-prosessi*, jos

(1) $\mathbb{P}(W_0 = 0) = 1$;
(2) $W_t - W_s$ ja $W_u - W_v$ ovat riippumattomia toisistaan kaikilla $v < u < s < t$;
(3) $W_{t+s} - W_t \sim N(0, s)$, kaikilla $t \geq 0$, $s \geq 0$;
(4) $t \mapsto W_t$ on jatkuva funktio $\mathbb{P}$-todennäköisyydellä 1. ■

.

Rahoitusteorian piirissä keskeisessä roolissa on Wiener-prosessista johdettu *geometrinen Brownin liike*

$$S_t := S_0 \cdot e^{\mu t + \sigma W_t},$$

joka on Black–Scholes–Merton-mallissa oletettu kohde-etuuden arvon kehitystä kuvaavaksi prosessiksi. Tämän mallin eräs implikaatio on, että logaritmisten tuottojen $\ln(S_t/S_0)$ tulisi olla normaalijakautuneita, mitä ne eivät empiiristen havaintojen perusteella todellakaan ole. Tämän johdosta on etsitty malleja, joiden tilastolliset ominaisuudet sopisivat paremmin yhteen havaitun käyttäytymisen kanssa. Eräs kehityssuunta on ollut Wiener-prosessin korvaaminen jollain muulla Lévy-prosessilla, jolloin luovutaan ylläolevan määritelmän ominaisuuksista 3 ja 4, eli lisäysten jakauma voi olla muutakin kuin normaali eikä prosessin realisaatioiden tarvitse olla ajan funktioina jatkuvia (ts. sallitaan, että prosessin tila muuttuu hyppäyksittäin).
Määritelmä. *(Lévy-prosessi)* $L := \{L_t : t \geq 0\}$ on *Lévy-prosessi*, jos

(1) $\mathbb{P}(L_0 = 0) = 1$;
(2) $L_t - L_s$ ja $L_u - L_v$ ovat riippumattomia toisistaan kaikilla $v < u < s < t$;
(3) $L_{t+s} - L_t$ ja L_s ovat samoin jakautuneet kaikilla $t \geq 0$, $s \geq 0$;
(4) $\lim_{s \to t} \mathbb{P}(|L_s - L_t| > 0) = 0$ (L_t on todennäköisyysmielessä jatkuva).
(5) $\mathbb{P}$-todennäköisyydellä 1 kuvaus $t \mapsto L_t$ on oikealta jatkuva ja vasemmanpuoleiset raja-arvot ovat olemassa. ■

.

Lévy-prosesseilla on siis edelleen riippumattomat ja stationaariset lisäykset, mutta lisäysten jakauma voi olla mikä tahansa englanniksi nimellä *infinitely divisible distributions* tunnetun jakaumaperheen jäsen: satunnaismuuttujan X jakauma kuuluu tähän jakaumaperheeseen, jos jokaista $n \in \mathbb{N}$ kohti on olemassa sellainen riippumattomien ja samoin jakautuneiden satunnaismuuttujien jono $X_1^{(1/n)}, \ldots, X_n^{(1/n)}$, että X ja summa $X_1^{(1/n)} + \ldots + X_n^{(1/n)}$ ovat samoin jakautuneet. Tämä on yhtäpitävää sen kanssa, että satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio[3] $\phi_X(u) = (\phi_{X^{(1/n)}}(u))^n$, satunnaismuuttujan $X^{(1/n)}$ karakteristisen

[3]Satunnaismuuttujan X karakteristinen funktio $\phi_X(u) := \mathbb{E}\left(e^{iuX}\right)$ määrittelee – nimensä mukaisesti – yksikäsitteisesti satunnaismuuttujan jakauman.

funktion n-kertainen tulo. Lévy-prosesseihin liittyvät jakaumat voivat olla vinoja ja paksuhäntäisiä. Matemaattisen rahoitusteorian piirissä onkin viimeisen vuosikymmenen aikana aktiivisesti tutkittu *geometriseen Lévy-prosessiin*

$$S_t := S_0 \cdot e^{L_t},$$

perustuvia hinnoittelumalleja.

Lévy-prosessit ovat vakuutus- ja rahoitussovellusten näkökulmasta viehättävä malliluokka sikäli, että ne yhdistävät rahoitusteorian "perusprosessin", Wiener-prosessin, ja klassisen riskiteorian "perusprosessin", yhdistetyn Poisson-prosessin. Voidaan nimittäin osoittaa, että Lévy-prosessin L karakteristinen funktio voidaan esittää ns. *Lévy–Hintshin-hajotelmana* muodossa

$$\phi_t(u) = \mathbb{E}\left[e^{iuL_t}\right] = \exp\left\{-\left[i\mu u + \frac{\sigma^2 u^2}{2} - \int_{\mathbb{R}} \left(e^{iuz} - 1 - iuz\mathbf{1}_{|z|<1}\right)\nu(dz)\right]\cdot t\right\} =: e^{-\Psi(u)t},$$

missä *Lévy-mitta* ν on sellainen, että

$$\nu(\{0\}) = 0 \text{ ja } \int_{\mathbb{R}} \min(z^2, 1)\nu(dz) < \infty.$$

Intuitiivisesti voidaan ajatella Lévy-mitan ν kuvaavan tietyn kokoisten hyppyjen määrän odotusarvoa yhden aikayksikön kuluessa. Suuretta $\Psi(u)$ sanotaan Lévy-prosessin *karakteristiseksi eksponentiksi.* Ylläolevasta karakterisen funktion esityksestä voidaan johtaa Lévy-prosessin L ns. *Itô–Lévy-hajotelma*

$$L_t = \mu t + \sigma W_t + \int_0^t \int_{|z|\geq 1} zN(ds, dz) + \left(\int_0^t \int_{|z|<1} zN(ds, dz) - t\int_{|z|<1} z\nu(dz)\right),$$

missä $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \geq 0$, W on Wiener-prosessi ja N on *stokastinen Poisson-mitta* (*Poisson random measure*), joka voidaan yleisesti määritellä seuraavasti.

Määritelmä. *(Stokastinen Poisson-mitta)* Olkoon $(S, \mathcal{S}, \eta)$ jokin σ-äärellinen[4] mitta-avaruus ja olkoon $N : \mathcal{S} \to \{0, 1, 2, \ldots\} \cup \{\infty\}$ sellainen kuvaus, että $\{N(A) \,:\, A \in \mathcal{S}\}$ on todennäköisyysavaruudessa $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ määriteltyjen satunnaismuuttujien kokoelma. N on *stokastinen Poisson-mitta intensiteetillä* η, jos

(1) satunnaismuuttujat $N(A_1), \ldots, N(A_n)$ ovat toisistaan riippumattomia aina kun joukot $A_1, \ldots, A_n$ ovat erillisiä;
(2) kaikilla $A \in \mathcal{S}$ satunnaismuuttujan $N(A)$ jakauma on Poisson-jakauma parametrillä $\eta(A) \in [0, \infty]$;
(3) N on mitta $\mathbb{P}$-todennäköisyydellä 1. ■

.

Stokastista Poisson-mittaa voidaan havainnollistaa tarkastelemalla prosessia

$$J_t := \mu t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

[4]ts. $S = \cup_{i=1}^{\infty} S_i$, missä $\eta(S_i) < \infty$ kaikilla $i \in \mathbb{N}$.

missä $\mu \in \mathbb{R}$, $\{Y_i : i \geq 1\}$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia ja $\{N_t : t \geq 0\}$ on Poisson-prosessi jonka intensiteetti on λ (eli kyseessä on jälleen kerran riskiteoriasta tuttu deterministisen trendin ja yhdistetyn Poisson-prosessin summa). Olkoot $\{T_i : i \geq 0\}$ Poisson-prosessin N_t saapumisajat, F satunnaismuuttujan Y_1 kertymäfunktio, ja olkoon $A \in \mathcal{B}([0,\infty)) \times \mathcal{B}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. Tällöin

$$N(A) := \#\{i \geq 0 : (T_i, Y_i) \in A\} = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{1}_{(T_i,Y_i)\in A}$$

(eli joukkoon A kuuluvien hypyn ajanhetken ja hypyn koon muodostamien parien lukumäärä) on prosessia J vastaava stokastinen Poisson-mitta, jonka intensiteetti η toteuttaa yhtälön $\eta(A) := \lambda \int_A F(dx)dt$. Edeltävän määritelmän ehtojen toteutuminen on varsin helppo tarkistaa (ks. [7] s. 37–38).

2.3. **Lévy-prosessin hyppykomponentin ja Lévy-mitan välisistä yhteyksistä.** Itô–Lévy-hajotelmasta nähdään, että L_t on deterministisen trendin μt, diffuusiokomponentin eli vakiolla $\sigma > 0$ skaalatun Wiener-prosessin W_t ja kahdesta komponentista koostuvan hyppyprosessin summa. Viimeksimainitun hyppyprosessin ominaisuudet määräytyvät Lévy-mitan ominaisuuksista. Mikäli Lévy-mitalle on voimassa

$$\nu(\mathbb{R}) := \int_{\mathbb{R}} \nu(dz) < \infty,$$

niin sanotaan, että hyppyprosessilla on äärellinen aktiviteetti (*finite activity*). Tällöin millä hyvänsä äärellisellä aikavälillä tapahtuvien hyppyjen lukumäärä on $\mathbb{P}$-todennäköisyydellä 1 äärellinen ja hyppyprosessi voidaan esittää yhdistettynä Poisson-prosessina, eli muodossa

$$\sum_{k=1}^{M_t} Y_k,$$

missä M_t on Poisson-prosessi, jonka intensiteetti $\lambda_M = \nu(\mathbb{R})$ ja Y_k ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden kertymäfunktio on $\nu((-\infty, z])/\lambda_M$. Ensimmäinen Itô–Lévy-hajotelman hyppyprosesseista, niin sanotut "suuret hypyt", voidaan esittää yhdistettynä Poisson-prosessina, sillä koska $\int_{\mathbb{R}} \min(z^2, 1)\nu(dz) < \infty$, niin $\int_{|z|\geq 1} \nu(dz) < \infty$. Sen sijaan on mahdollista, että

$$\int_{|z|<1} \nu(dz) = \infty,$$

jolloin hajotelman hyppyprosessin toisella komponentilla ("pienet hypyt") on ääretön aktiviteetti (*infinite activity*). Tällöin kullakin äärellisellä aikavälillä tapahtuu $\mathbb{P}$-todennäköisyydellä 1 numeroituvasti ääretön määrä (pieniä) hyppyjä, mikä voidaan haluttaessa tulkita niin, että prosessin hyppyjen saapumisintensiteetti on ääretön.

Lévy-prosessin realisaatioiden käyttäytymisen osalta voidaan edelleen huomata, että niiden kokonaisvaihtelu on rajoitettua (*finite variation*), jos ja vain jos

$$\sigma = 0 \text{ ja } \int_{\mathbb{R}} \min(|z|, 1)\nu(dz) < \infty,$$

ts. mikäli prosessilla ei ole lainkaan diffuusiokomponenttia (Wiener-prosessin realisaatioiden kokonaisvaihtelu on ääretön) ja mikäli lisäksi pienten hyppyjen prosessin kokonaisvaihtelu on äärellinen (suurten hyppyjen prosessin realisaatioiden kokonaisvaihtelu on aina äärellinen, koska kyseinen prosessi on yhdistetty Poisson-prosessi). Mikäli Lévy-prosessin kokonaisvaihtelu on äärellinen, niin se voidaan esittää deterministisen trendin ja hyppyprosessin summana muodossa

$$L_t = \tilde{\mu}t + \int_{[0,t]} \int_{\mathbb{R}} zN(dz, ds),$$

missä $\tilde{\mu} = \mu + \int_{|z|<1} z\nu(dz)$. Prosessin karakteristinen eksponentti voidaan edelleen esittää tällöin muodossa

$$\Psi(u) = -i\tilde{\mu}u + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{iuz})k(z)dz$$

missä $k(z)$ on *Lévy-mitan tiheysfunktio*.

Rahoitussuureiden mallinnuksessa on usein käytetty niin sanottuja *hyppydiffuusioita* (*jump diffusions*), jolloin tarkasteltavalla Lévy-prosessilla on sekä diffuusiokomponentti että hyppykomponentti, jolla on äärellinen aktiviteetti (ts. $\sigma > 0$, ja $\nu(\mathbb{R}) < \infty$). Tällöin ajatellaan, että diffuusiokomponentti kuvaa ”normaalia” satunnaisvaihtelua, joka on tulosta lukuisista tiuhaan tahtiin tapahtuvista pienistä shokeista, joiden voidaan tulkita olevan markkinareaktioita ”tavanomaisiin uutisiin”, kun taas yhdistetty Poisson-prosessi kuvaa harvakseltaan tapahtuvia suuria shokkeja, joiden voidaan tulkita olevan reaktioita ”poikkeuksellisiin uutisiin”. Diffuusio-osa siis on jatkuvapolkuinen approksimaatio hyvin tiuhaan tapahtuville kooltaan pienille hypyille. Kuten edellä havaitsimme, Lévy-prosessit mahdollistavat kuitenkin myös näiden pienten hyppyjen mallintamisen suoraan hyppyprosessina. Näin on tehty lähteessä [3], jossa kirjoittajat toteavat, että heidän suorittamiensa vertailevien tilastollisten analyysien tulokset viittaavat siihen, että osakeindekseillä ei ole lainkaan diffuusiokomponenttia, eikä sen merkitys yksittäisten osaketuottojen aikasarjoissakaan ole suuri – toisin sanoen, mikäli mallinnuksessa käytetään hyppyprosessia, jolla on ääretön aktiviteetti, niin diffuusiokomponentti ei tuo juurikaan lisäarvoa mallin havaintoaineistoon sopivuuden kannalta. Huomautettakoon, että lähteessä [5] tehdyissä epäparametrisissä testeissä on kuitenkin päädytty toisensuuntaisiin tuloksiin, eli diffuusiokomponentin tarpeellisuuteen.

2.4. **CGMY-prosessi.** *Stabiilit prosessit* (*stable processes*) ovat Lévy-prosesseja, joiden tilan jakauma on stabiili jakauma. Satunnaismuuttujan Y jakauma on stabiili jakauma, jos kaikilla $n \geq 1$

$$a_n Y + b_n \sim Y_1 + \ldots + Y_n,$$

missä $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$ ja satunnaismuuttujat $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat toisistaan riippumattomia ja samoin jakautuneita siten, että $Y_i \sim Y$ kaikilla $i = 1, 2, \ldots, n$. Voidaan osoittaa, että tällöin on oltava $a_n = n^{1/\alpha}$ jollekin $\alpha \in (0, 2]$, ja luku α on tällöin stabiilin jakauman indeksi. Jos $b_n = 0$, niin sanotaan jakauman olevan *aidosti stabiili*. Tapauksessa $\alpha = 2$ on kyseessä normaalijakauma ja tapauksessa $\alpha = 1$ Cauchyn jakauma. Kuten aiemmin mainittiin, stabiilit jakaumat ovat hyvin paksuhäntäisiä; mitä pienempi indeksin α arvo on, sitä hitaammin tiheysfunktion arvo lähestyy nollaa jakauman hännissä eli sitä paksuhäntäisempi jakauma on. Edellä mainittuja kahta erikoistapausta lukuunottamatta (eli tapauksessa

$\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$) stabiilin jakauman karakteristinen eksponentti voidaan esittää muodossa

$$\Psi_Y(u) = c \cdot |u|^\alpha \left(1 - i\beta \tan\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right) \operatorname{sgn}(u)\right) + iu\mu,$$

missä $\beta \in [-1,1]$, $\mu \in \mathbb{R}$, $c > 0$ ja $\operatorname{sgn}(x) := \mathbf{1}_{\{x>0\}} - \mathbf{1}_{\{x<0\}}$. Tapauksessa $\alpha = 1$ puolestaan vastaavasti

$$\Psi_Y(u) = c \cdot |u| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} \operatorname{sgn}(u) \ln|u|\right) + iu\mu,$$

missä $c = c_1 + c_2$, $c_1, c_2 \geq 0$ ja $\beta = (c_1 - c_2)/(c_1 + c_2)$, jos $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$, ja $c_1 = c_2$, jos $\alpha = 1$. Lévy–Hintshin-kaavan nojalla tästä seuraa, että stabiilin prosessin Lévy-mitan tiheys

$$k_Y(z) = \begin{cases} c_1 \cdot \frac{1}{|z|^{1+\alpha}}, & z < 0 \\ c_2 \cdot \frac{1}{|z|^{1+\alpha}}, & z > 0. \end{cases}$$

Stabiilin prosessin hyppyaktiviteetti on ääretön; sen kokonaisvaihtelu voi olla rajoittamatonta (jos $\alpha \in (1,2)$) tai rajoitettua (jos $\alpha \in (0,1)$).

Tutkimusraportissa [3] esiteltiin kirjoittajien mukaan nimetty Carr–Geman–Madan–Yor-prosessi (lyhyesti CGMY-prosessi), johon liittyvä todennäköisyysjakauma kuuluu ns. vaimennettujen stabiilien jakaumien (*tempered stable distributions*) perheeseen. Vaimennus viittaa tässä yhteydessä tämän jakauman stabiilin jakauman vastaavaa muistuttavan Lévy-mitan tiheysfunktion

$$k_{CGMY}(x) = \begin{cases} C \cdot \frac{\exp(-G \cdot |x|)}{|x|^{1+Y}}, & x < 0 \\ C \cdot \frac{\exp(-M \cdot |x|)}{|x|^{1+Y}}, & x > 0 \end{cases}$$

lausekkeessa esiintyviin eksponentiaalisiin termeihin $\exp(-G \cdot |x|)$ ja $\exp(-M \cdot |x|)$, jotka vaimentavat stabiilin jakauman häntien potenssifunktion omaista käyttäytymistä (ns. *power tails*) kaukana todennäköisyysjakauman hännissä, mikä johtaa jakauman kaikkien momenttien äärellisyyteen. Toisaalta kuitenkin jakauman käyttäytyminen muistuttaa stabiilin jakauman käyttäytymistä häntien "alkupäässä" – sopivalla vaimennustekijöiden kalibroinnilla ääritapahtumien todennäköisyyksien suuruusluokka saadaan "realistiseksi" halutulla alueella. Tähän läheisesti liittyen vaimennettujen stabiilien jakaumien käyttäytyminen myös sopii yhteen sen empiirisen havainnon kanssa, että rahoitussuureiden aikasarjojen käyttäytyminen riippuu havaintojen aikavälistä – mitä lyhyempi aikaväli on, sitä huomattavammin paksuhäntäisyys ja muut normaalijakaumasta poikkeavat piirteet ovat läsnä, mutta aikavälin pidentyessä nämä piirteet lievenevät (ks. [13]).Tuottoja mallinnettaessa voidaan momenttien äärellisyyttä pitää käytännön näkökulmasta järkevänä oletuksena sikäli, että äärettömät momentit implikoisivat joillekin johdannaisinstrumenteille äärettömiä hintoja (ks. [11]) – toki voidaan Mandelbrotin tapaan esittää vasta-argumenttina, että tämä tarkoittaa yksinkertaisesti sitä, että tällaisia johdannaisia ei tulisi olla markkinoilla vaan niiden olemassaolo ja hinnoittelu perustuvat täydelliseen väärinymmärrykseen kohde-etuuden arvon tilastollisista ominaisuuksista (ks. [8]). Tämän työn kirjoittajan näkemys asiasta on, että mallit ovat todellisuuden approksimaatioita ja käytännössä oleellista on, onko approksimaatio riittävän hyvä käyttötarkoitukseensa – normaalijakauman ja rahoitusalan riskienhallinnan osalta vastaus on osoittautunut kielteiseksi, sen sijaan aikamuunnettujen Lévy-prosessien osalta kirjoittaja on varsin toiveikas.

CGMY-jakauman kullakin parametrillä on selkeä yhteys jakauman käyttäytymiseen. Parametri $C > 0$ kuvaa prosessin keskimääräistä vaihtelun tasoa eli volatiliteettia. Parametrit $G \geq 0$ ja $M \geq 0$ säätelevät Lévy-mitan tiheysfunktion arvon vähenemisnopeutta jakauman vasemmassa ja oikeassa hännässä. Mikäli ne ovat erisuuret, on jakauma vino, ja erotus $G-M$ kuvaa negatiivisten tuottojen määrää suhteessa positiivisiin, kun taas summa $G+M$ kuvaa itseisarvoltaan suurten tuottojen määrää suhteessa itseisarvoltaan pieniin tuottoihin. Parametrin $Y < 2$ arvo säätelee Lévy-mitan tiheysfunktion monotonisuutta ja käyttäytymistä nollan ympäristössä ja tätä kautta prosessin hyppyaktiviteettia ja prosessin realisaatioiden kokonaisvaihtelua: jos $Y < 0$, niin aktiviteetti on äärellinen, kun taas jos $0 < Y < 2$, niin aktiviteetti on ääretön; jos $Y < 1$, niin realisaatioiden kokonaisvaihtelu on äärellinen, kun taas jos $1 < Y < 2$, niin kokonaisvaihtelu ei ole äärellinen, mutta neliöllinen vaihtelu (*quadratic variation*) on äärellinen. Lévy-mitan tiheysfunktion monotonisuus liittyy eri suuruisten hyppyjen saapumisintensiteetien välisiin suhteisiin: monotonisen tiheysfunktion tapauksessa suuria hyppyjä esiintyy harvemmin kuin pieniä. Lévy-mitan tiheysfunktio on monotoninen, jos parametri $Y > -1$.

2.5. **Stokastisista aikamuunnoksista.** CGMY-prosessi on siis Lévy-prosessi, ja sellaisena sillä on riippumattomat lisäykset ja vakiovolatiliteetti. Kuten todettiin, taloudellisissa aikasarjoissa logaritmien differenssit (eli lisäykset) tyypillisesti eivät ole riippumattomia toisistaan (vaikkakin ovat keskenään korreloimattomia). Tämä ilmenee lisäysten neliöiden autokorreloituneisuutena. Edelleen taloudellisten aikasarjojen volatiliteetti vaihtelee ajassa ja tavallisesti suuria poikkeamia seuraa lisää suuria poikkeamia (volatiliteetin kasautuminen).

Näiden tärkeiden ominaisuuksien saamiseksi mukaan mallinnukseen voidaan suorittaa CGMY-prosessille niin sanottu stokastinen aikamuunnos, jossa prosessin ajatellaan olevan deterministisen kalenteriajan t sijasta uuden stokastisen ajan $\tau(t)$ funktio. Tämä menettely voi kuulostaa aluksi eksoottiselta, mutta itse asiassa on vakuutusmatematiikankin puolelta tuttu: kyseessä on oikeastaan siirtyminen kalenteriajasta ns. operatiiviseen aikaan (*operational/business time*). Intuitiivisesti asiaa voidaan havainnollistaa vaikkapa näin: pörssin kaupankäynnissä operatiivinen aika τ kuluu nopeammin silloin kun kaupankäyntivolyymit ovat suuria ja kauppoja tapahtuu paljon lyhyessä ajassa (kuten monesti kriisiaikoina), ja hitaammin silloin kun volyymit ovat pieniä ja kauppoja tapahtuu harvoin. Operatiivinen aika siis kuluu eri nopeudella riippuen aktiviteetin tasosta. Stokastisten prosessien teorian näkökulmasta aikamuunnos muuttaa nopeutta, jolla prosessi etenee realisoituvaa polkuaan myöten. Aikamuunnetun Lévy-prosessin lisäykset eivät ole enää riippumattomia, koska kaikki lisäykset ovat saman (ei-havaittavan) aikamuunnoksen funktioita.

Stokastista prosessia aikamuunnettaessa lähtökohtana on kalenteriajassa t tapahtuva prosessi $(X_t)_{t\geq 0}$. Aikamuunnoksessa käytetään kasvavaa jonoa *pysäytysaikoja* $\hat{\tau} = (\hat{\tau}(\theta))_{\theta\geq 0}$, jonka avulla määritellään "uusi" prosessi

$$\hat{X}_\theta := X_{\hat{\tau}(\theta)} =: X \circ \hat{\tau}$$

”uudessa” ajassa θ. Mikäli prosessin $\hat{X}$ rakenne on yksinkertainen, niin voidaan yrittää määrittää sellainen kasvava pysäytysaikojen jono $\tau := (\tau(\theta))_{\theta \geq 0}$, että alkuperäinen prosessi X voidaan esittää muodossa

$$X_t = \hat{X}_{\tau(t)} = \hat{X} \circ \tau.$$

Tämä esitys ei välttämättä ole voimassa identtisesti (ts. kaikilla $\omega \in \Omega$ ja kaikilla $t \geq 0$), vaan useimmiten tyydytään siihen, että se on voimassa $\mathbb{P}$-todennäköisyydellä 1 (*semi-strong representation*) tai ainoastaan jakaumamielessä $X \sim \hat{X} \circ \tau$ (*weak representation*).

Stokastisen volatiliteetin malleissa tarkasteltava prosessi ilmaistaan usein *stokastisena integraalina* muodossa

$$X = \int H d\tilde{X}_s =: H \cdot \tilde{X},$$

missä siis X ilmaistaan *stokastisen volatiliteetin* H integraalina ”sopivan” yksinkertaisen stokastisen prosessin $\tilde{X}$ suhteen. Stokastisten aikamuunnosten ja stokastisen volatiliteetin välinen yhteys voidaan tällöin ilmaista yhtälönä

$$H \cdot \tilde{X} = \hat{X} \circ \tau.$$

Siis stokastinen volatiliteetti voidaan yhtä hyvin mallintaa stokastisen aikamuunnoksen kautta kuin ”suoraan” stokastista integrointia käyttämällä. Huomautettakoon, että stokastisen integraalin osalta prosessin $\tilde{X}$ on kuuluttava niin sanottujen *semimartingaalien*[5] luokkaan – stokastisen aikamuunnoksen osalta prosessin $\hat{X}$ ei tarvitse olla semimartingaali. Wiener-prosessin avulla voidaan havainnollistaa, mistä on kysymys. Skaalattu Brownin liike $B := \sigma W$ voidaan esittää stokastisena (Itô-)integraalina muodossa

$$B_t = \sigma W_t = \int_0^t \sigma dW_s =: H_1 \cdot W$$

Tämän prosessin volatiliteetti $H_1 = \sigma$ on deterministinen. Jos volatiliteetista tehdään stokastinen esimerkiksi antamalla sen riippua prosessin B tilasta, niin saadaan prosessi

$$B_t' := \int_0^t \sigma(B_t) dW_s =: H_2 \cdot W,$$

jolloin volatiliteetti on stokastinen prosessi $H_2 = (\sigma(B_t))_{t \geq 0}$.

Tarkemmin stokastinen aikamuunnos voidaan määritellä seuraavasti.

Määritelmä. *(Stokastinen aikamuunnos)* Satunnaismuuttujien kokoelma $\hat{T} = (\hat{T}(\tau))_{\tau \geq 0}$ on *stokastinen aikamuunnos* ajasta τ aikaan $t = \hat{T}(\tau)$, jos

(1) $(\hat{T}(\tau))_{\tau \geq 0}$ on ei-vähenevä ja oikealta jatkuva;
(2) kaikilla $\tau \geq 0$ satunnaismuuttujat $\hat{T}(\tau) \in [0, \infty]$ ovat pysäytysaikoja filtraation $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ suhteen, ts. $\{\hat{T}(\tau) \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\tau \geq 0$, $t \geq 0$. ■

Intuitiivisesti edeltävän määritelmän ehto (2) tarkoittaa sitä, että kullakin ajanhetkellä t tiedetään, onko pysäytysaika $\hat{T}(\tau)$ saavutettu vai ei.

---

[5] Semimartingaali on prosessi, joka voidaan esittää muodossa $X = X_0 + A_t + M_t$, missä prosessin A poluilla on rajoitettu kokonaisvaihtelu ja prosessi M on ns. lokaali martingaali.

Tässä esityksessä käytetty malli on tyyppiä

$$X_t = \mu t + L_{\int_0^t y_s ds},$$

missä L on CGMY-prosessi, $\mu \in \mathbb{R}$ ja aikamuunnoksessa käytetty aktiviteettiprosessi y on aidosti positiivinen ja riippumaton tuottoja kuvaavasta prosessista X. Eli CGMY-prosessin osalta kalenteriaika t korvataan operatiivisella ajalla $\tau(t) = \int_0^t y_s ds$, joka siis on stokastisen prosessin aikaintegraali. Mikäli aikamuunnoksessa käytetty stokastinen prosessi y on keskiarvoon palautuva (*mean reverting*), niin tämä keskiarvoon palautuminen aikaansaa havaittuun prosessiin volatiliteetin kasautumista. Sopivia prosesseja ovat esimerkiksi ns. Cox–Ingersoll–Ross(CIR)-prosessin

$$dy(t) = \kappa(y(t) - \eta) \cdot dt + \lambda \cdot \sqrt{y(t)} \cdot dW(t), \;\; y(0) = y_0,$$

aikaintegraali

$$\tau(t) = \int_0^t y(s) ds$$

tai Ornstein–Uhlenbeck-tyyppiset Lévy-hyppyprosessit. Tässä esityksessä käytämme yksinkertaisuuden vuoksi aikamuunnoksessa CIR-prosessin aikaintegraalia. CIR-prosessin parametreistä η määrittää keskimääräisen tason, jolle prosessi pyrkii palautumaan, κ määrittää, kuinka nopeasti tämä palautuminen tapahtuu ja skaalaustekijä λ määrittää prosessin stokastista dynamiikkaa ajavan Wiener-prosessin vaikutuksen voimakkuuden.

3. Riippuvuusrakenteen mallintaminen kopulafunktion avulla

3.1. **Kopulafunktiot.** Normaalijakautuneiden satunnaismuuttujien riippuvuusrakenne on täysin määrätty, kun tunnetaan varianssit ja parittaiset korrelaatiokertoimet. Tämä on hyvin erikoinen ja poikkeuksellinen ominaisuus – useimmilla muilla todennäköisyysjakaumilla muuttujien väliset riippuvuudet voivat olla paljon monimutkaisempia. Korrelaatiokertoimet mittaavat ainoastaan lineaarista riippuvuutta, ja lisäksi ne eivät ole ainoastaan riippuvuusrakenteen vaan myös muuttujien reunajakaumien funktioita. Tästä johtuen ne eivät ole erityisen hyviä kuvaamaan riippuvuusrakennetta mikäli todennäköisyysjakaumat eivät ole normaaleja.

Paremman tavan mallintaa riippuvuusrakenteita tarjoaa seuraava määritelmä.

Määritelmä. *(kopulafunktio)* d-ulotteinen *kopulafunktio* on sellainen hyperkuutiossa $[0, 1]^d$ määritelty kertymäfunktio, jonka jokainen reunajakauma on tasainen jakauma välillä $[0, 1]$. ■

Kopulafunktioiden merkitys moniulotteisten todennäköisyysjakaumien kannalta käy ilmi seuraavasta tunnetusta lauseesta.

Lause. *(Sklar 1959)* Olkoon F d-ulotteinen kertymäfunktio, jonka yksiulotteiset reunajakaumat ovat $F_1, \ldots, F_d$. Silloin on olemassa sellainen kopulafunktio $C : [0, 1]^d \to [0, 1]$, että

$$F(x_1, \ldots, x_d) = C\left(F_1(x_1), \ldots, F_d(x_d)\right).$$

Jos reunajakaumat ovat jatkuvia, niin C on yksikäsitteinen; muussa tapauksessa C on yksikäsitteisesti määritelty reunajakaumien kertymäfunktioiden arvojoukkojen karteesisessa tulossa. Kääntäen, jos C on kopulafunktio ja $F_1, \dots, F_d$ ovat yksiulotteisten jakaumien kertymäfunktioita, niin F on sellaisen yhteisjakauman kertymäfunktio, jonka reunajakaumat ovat $F_1, \dots, F_d$. ■

Sklarin lauseen nojalla voidaan siis muodostaa moniulotteisia todennäköisyysjakaumia yhdistämällä reunajakaumia kopulafunktiolla. Jos reunajakaumat ovat jatkuvia, niin valitsemalla lauseen yhtälössä $x_i = F_i^{\leftarrow}(u_i) := \inf\{x : F_i(x) \geq u_i\}$, $u_i \in [0,1]$, $i = 1, \dots, d$, saadaan yhtälö

$$C(u_1, \dots, u_d) = F\left(F_1^{\leftarrow}(u_1), \dots, F_d^{\leftarrow}(u_d)\right),$$

josta nähdään, kuinka kopulafunktio voidaan laskea yhteisjakaumasta ja reunajakaumista. Jatkuvien reunajakaumien tapauksessa voidaan myös luonnollisella tavalla määritellä yhteisjakauman kopulafunktio:

Määritelmä. *(jakauman F kopulafunktio)* Jos d-ulotteisen satunnaisvektorin X yhteisjakauma on F ja reunajakaumat $F_1, \dots, F_d$ ovat jatkuvia, niin yhteisjakauman F kopulafunktio on satunnaisvektorin $(F_1(X_1), \dots, F_d(X_d))$ kertymäfunktio. ■

Tällainen jakauman kopulafunktio on invariantti reunajakaumien aidosti kasvavien muunnosten suhteen, ts. jos satunnaisvektorin $(X_1, \dots, X_d)$ reunajakaumat ovat jatkuvia ja sen kopulafunktio on C, niin C on myös satunnaisvektorin $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))$ kopulafunktio mikäli funktiot T_i ovat aidosti kasvavia.

3.2. **Implisiittiset kopulafunktiot.** Sklarin lausetta käyttäen voidaan johtaa ns. *implisiittisiä kopulafunktioita* sellaisista tunnetuista moniulotteisista jakaumista, joilla on jatkuvat reunajakaumat. Tunnetuin esimerkki lienee *Gaussin kopula*, joka voidaan määritellä lähtien normaalijakautuneesta satunnaisvektorista $X \sim N_d(\mathbf{0}, P)$ seuraavasti:

$$C_P^{Gauss}(u) := \mathbb{P}\left(\Phi(X_1) \leq u_1, \dots, \Phi(X_d) \leq u_d\right) = \mathbf{\Phi}_P\left(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)\right),$$

missä Φ on standardoidun normaalijakauman kertymäfunktio ja $\mathbf{\Phi}_P$ on satunnaisvektorin X yhteisjakauman kertymäfunktio. Gaussin kopula on ainoastaan korrelaatiomatriisin P funktio, koska normaalijakauman tapauksessa korrelaatiot riittävät määrittelemään koko riippuvuusrakenteen. Normaalijakaumalta Gaussin kopula perii eräitä riskienhallintasovellusten kannalta arveluttavia ominaisuuksia. Se on nimittäin asymptoottisesti riippumaton jakauman hännissä, mikä tarkoittaa sitä, että riittävän kauas häntiin (ts. itseisarvoltaan hyvin suuriin muutoksiin) mentäessä muutokset satunnaisvektorin eri komponenteissa tapahtuvat toisistaan riippumattomasti – ja näin tapahtuu täysin korrelaatiokertoimien arvoista riippumatta, kunhan korrelaatiokertoimen itseisarvo ei ole tarkalleen 1! On helppo ymmärtää, että rahoitusmarkkinasovelluksissa tällainen käyttäytyminen ei vastaa todellisuutta: kriisitilanteissa osakemarkkinoilla saatetaan kokea ennätyksellisiä kurssilaskuja ja samanaikaisesti kaikkien muidenkin riskisijoitusten arvot romahtavat sijoittajien paetessa vähäriskisiksi kokemiinsa sijoituksiin, jotka puolestaan kokevat ennätyksellisiä arvonnousuja.

Muodollisesti häntäriippuvuutta voidaan mitata *häntäriippuvuuskertoimilla* (*coefficient of tail dependence*) λ_u ja λ_l, jotka määritellään satunnaismuuttujaparille korkeiden kvantiilien ylittämisen ehdollisten todennäköisyyksien raja-arvoina:

$$\lambda_u := \lim_{q \to 1-} \mathbb{P}\left(X_2 > F_2^{\leftarrow}(q) \,|\, X_1 > F_1^{\leftarrow}(q)\right)$$

(oikeanpuoleinen häntä) ja

$$\lambda_l := \lim_{q \to 0+} \mathbb{P}\left(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(q) \,|\, X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(q)\right)$$

(vasemmanpuoleinen häntä), mikäli nämä raja-arvot ovat olemassa ja kuuluvat välille $[0,1]$. Kertoimen arvo 0 merkitsee sitä, että satunnaismuuttujat ovat asymptoottisesti riippumattomia. Mikäli satunnaismuuttujien jakaumat ovat jatkuvia, voidaan kertoimet esittää niiden yhteisjakauman kopulan C avulla:

$$\lambda_l = \lim_{q \to 0+} \frac{\mathbb{P}\left(X_2 \leq F_2^{\leftarrow}(q)\,,\, X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(q)\right)}{\mathbb{P}\left(X_1 \leq F_1^{\leftarrow}(q)\right)} = \lim_{q \to 0+} \frac{C(q,q)}{q}$$

ja

$$\lambda_u = \lim_{q \to 1-} \frac{\mathbb{P}\left(X_2 > F_2^{\leftarrow}(q)\,,\, X_1 > F_1^{\leftarrow}(q)\right)}{\mathbb{P}\left(X_1 > F_1^{\leftarrow}(q)\right)} = \lim_{q \to 1-} \frac{\hat{C}(1-q, 1-q)}{1-q} = \lim_{q \to 0+} \frac{\hat{C}(q,q)}{q},$$

missä $\hat{C}$ on ns. selviämiskopula, joka toteuttaa yhtälön $\bar{F}(x_1, \ldots, x_d) = \hat{C}\left(\bar{F}_1(x_1), \ldots, \bar{F}_d(x_d)\right)$ ($\bar{F}_i = 1 - F_i$ on tavanomainen selviämisfunktio). Jos satunnaisvektori X on symmetrinen vektorin a suhteen siinä mielessä, että $X - a$ ja $a - X$ ovat samoin jakautuneet, niin tästä seuraa, että satunnaisvektorin X kopula on myös symmetrinen ja $\hat{C} = C$. Kaikki elliptiset jakaumat ovat tässä mielessä symmetrisiä (ks. [9]).

Gaussin kopulan tapauksessa häntäriippuvuuskertoimet voidaan laskea. Normaalijakauman elliptisen symmetrian nojalla $\lambda_u = \lambda_l =: \lambda$, eli häntäriippuvuus on samanlaista kummassakin hännässä . Häntäriippuvuuskerroin (laskennan yksityiskohdista ks. [9] s. 211) on

$$\lambda = 2 \lim_{x \to -\infty} \Phi\left(\frac{x\sqrt{1-\rho}}{\sqrt{1+\rho}}\right) = 0,$$

eli Gaussin kopula on asymptoottisesti riippumaton hännissä, mikäli $|\rho| < 1$.

Samaan tapaan kuin Gaussin kopula voidaan määritellä *t-kopula* lähtien t-jakautuneesta satunnaisvektorista $X \sim t(\nu, P)$:

$$C^t_{\nu,P}(u) := \mathbf{t}_{\nu,P}\left(t_\nu^{-1}(u_1), \ldots, t_\nu^{-1}(u_d)\right),$$

missä t_ν on standardoidun yksiulotteisen t-jakauman kertymäfunktio ja $\mathbf{t}_{\nu,P}$ on satunnaisvektorin X yhteisjakauman kertymäfunktio; ν on t-jakauman vapausaste ja P on korrelaatiomatriisi. On hyvä huomata, että tässä tapauksessa korreloimattomuudesta ($P = I_d$) ei seuraa riippumattomuus, sillä korreloimattomat t-jakautuneet satunnaismuuttujat eivät ole riippumattomia. Riskimallinnuksen näkökulmasta hyvä uutinen on, että t-kopula ei ole asymptoottisesti riippumaton kummassakaan hännässä: sen häntäriippuvuuskerroin

$$\lambda = 2 \cdot t_{\nu+1}\left(-\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}}\right) > 0$$

mikäli $\rho > -1$ (laskennan yksityiskohdista ks. [9] s. 211). Häntäriippuvuuden voimakkuus riippuu parametrin ν arvosta: mitä pienempi tämä arvo on, sitä voimakkaampaa on häntäriippuvuus; kun $\nu \to \infty$, niin kopula lähestyy Gaussin kopulaa ja asymptoottista riippumattomuutta hännissä.

Implisiittisten kopuloiden jakaumien simulointi on yksinkertaista, mikäli pystytään simuloimaan satunnaislukuja näiden kopuloiden perustana olevasta jakaumasta: jos satunnaisvektorin X kertymäfunktio on F, niin satunnaisvektorin $U := (F_1(X_1), \ldots, F_n(X_n))$ kertymäfunktio on jakauman F kopulafunktio C. Siis esimerkiksi t-kopulan simulointi onnistuu simuloimalla ensin $X \sim t_n(\nu, 0, P)$, jolloin vektori $U = (t_\nu(X_1), \ldots, t_\nu(X_n))$ (missä t_ν on standardoidun yksiulotteisen t-jakauman kertymäfunktio) on jakautunut t-kopulan mukaisesti. Sklarin lauseen käänteinen tulos osoittaa, että vastaavalla menettelyllä on mahdollista simuloida niin sanottuja *metajakaumia* (*meta distributions*): Jos satunnaisvektorin U kertymäfunktio on kopula C, niin satunnaisvektorin $X := (F_1^{\leftarrow}(U_1), \ldots, F_n^{\leftarrow}(U_n))$ reunajakaumat ovat $F_1, \ldots, F_n$ ja sen yhteisjakauman kertymäfunktio on $C\left(F_1(x_1), \ldots, F_n(x_n)\right)$. Metajakauma muodostetaan siis yhdistämällä jokin kopulafunktio haluttuihin reunajakaumiin. Tämä simulointimenetelmä on usein erittäin hyödyllinen riskienhallintaan liittyvissä Monte Carlo -simulaatiosovelluksissa, sillä tällöin meillä on usein käytettävissä runsaasti havaintoaineistoa yksittäisistä riskeistä, jolloin saattaa olla mahdollista estimoida reunajakaumia hyvinkin tarkasti, kun taas informaatio riippuvuusrakenteesta saattaa olla huomattavasti vähäisempää, jolloin yhteisjakauman estimointi voi olla vaikeaa tai mahdotonta, missä tapauksessa saattaa olla perusteltua estimoida yksinkertaisin soveltuva implisiittinen kopula ja käyttää sitä reunajakaumien yhdistämiseen

4. Havainnollistava esimerkki

4.1. **Yksinkertainen taseenhallintaongelma.** Havainnollistaaksemme aikamuunnetun CGMY-prosessin ja kopulafunktioiden käyttömahdollisuuksia tarkastelemme tässä esityksessä seuraavanlaista taseenhallintaongelmaa. Yhtiöllä on alkuhetkellä $t = 0$ käytettävissään alkuvarallisuus A_0, jonka se voi sijoittaa joko korkeariskisiin (”osake”) tai vähäriskisiin (”korko”) sijoituksiin. Oletamme, että yhtiö voi valita ”strategisen allokaationsa” riskitason eli pitää jatkuvasti osuuden $\theta \in [0, 1]$ varallisuudestaan riskillisessä sijoituskohteessa. Yhtiöllä on niin ikään alkuvastuu $L_0 < A_0$, jonka kehitys on sidottu kuluttajahintojen kehitykseen eli inflaatioon. Yhtiön vastuu realisoituu ajanhetkellä $T > 0$, ja yhtiö on antanut vastuulle tuottotakuun $100 \cdot g$ %. Lisäksi yhtiö toimii riskiperusteisen vakavaraisuusrajoitteen puitteissa, eli yhtälön $A_t > (1 + p(\theta))L_t$, missä vakavaraisuusraja

$$p(\theta) := -(\theta\mu_S + (1-\theta)\mu_B - g) + q_\alpha\sqrt{\sigma_S^2\theta^2 + \sigma_B^2(1-\theta)^2 + \rho_{SB}\theta(1-\theta)\sigma_S\sigma_B}$$

tulisi jatkuvasti olla voimassa. Tässä μ_i ja σ_i ovat tavanomaiseen tapaan sijoituskohteen i odotettu tuotto ja keskihajonta, $i = B$ viittaa vähäriskiseen sijoituskohteeseen , $i = S$ korkeariskiseen sijoitukseen, ρ_{SB} on sijoituskohteiden välinen korrelaatio ja q_α on normaalijakauman kvantiilipiste. Yhtiön tavoitteena on maksimoida odotettu sijoitustuottonsa siten, että tuottotakuun alittavan tuoton realisoitumisen todennäköisyys ja vakavaraisuusrajan alittamisen todennäköisyys eivät ylitä tiettyä turvaavuustasoa. Yhtiön optimointitehtävä on siis

$$\begin{array}{ll} \sup_{\theta\in[0,1]} & \mathbb{E}\left\{\frac{A_T^\theta}{L_T}\right\} \\ \text{s. e.} & \mathbb{P}_{guaranteefail} := \mathbb{P}\left(\frac{A_T^\theta}{L_T} < (1+g)\right) \leq \alpha_1 \\ & \mathbb{P}_{insolvent} := \mathbb{P}\left(\frac{A_t^\theta}{L_t} < 1 + p(\theta)\right) \leq \alpha_2,\ \forall t \in (0,T]. \end{array}$$

Havaintoesimerkkiä varten valitsemme $L_0 = 100$, $A_0 = 130.4$, $T = 1$, $g = 0.03$ ja $q_\alpha = 1.96$ ja käytämme tuotto-, hajonta- ja korrelaatioparametreinä vakavaraisuusrajassa käytetystä havaintoaineistosta estimoituja suureita; tällöin alkuvarallisuus $A_0 = 130.4$ riittää juuri ja juuri kattamaan vakavaraisuusvaatimuksen tilanteessa $\theta = 1$ (koska $p(1) \approx 0.304$), eli yhtiön riskinkantokyky alkutilanteessa riittää juuri ja juuri maksimaalisen riskin ottamiseen.

4.2. **Havaintoaineisto ja käytetyt estimointi- ja simulointimenetelmät.** Havaintoaineistona käytetään riskillistä sijoituskohdetta kuvaavan Dow Jones Industrial Average -osakeindeksin (DJIA) päivittäisiä arvoja ajalta 3.2.1930–31.12.2010, riskittömän sijoituksen tuottoa kuvaavaa Yhdysvaltain liittovaltion 10 vuoden joukkovelkakirjan (US10Y) päivittäin laskettua tuottoa maturiteettiin ajalta 2.2.1962–31.12.2010 sekä Yhdysvaltain kausitasoitetun kuluttajahintaindeksin (USCPI) kuukausittaisia arvoja ajalta helmikuu 1947 – joulukuu 2010. Näille estimoidaan reunajakaumat, jotka yhdistetään t-kopulafunktiolla, jonka estimointiin käytetään edellämainittujen aikasarjojen kuukausittaisia havaintoja ajalta tammikuu 1981 – joulukuu 2010. Näin reunajakaumien estimointiin voidaan käyttää pidempää ja tiheämpää havaintoaineistoa, jollainen on osakeindeksien ja riskittömän koron osalta olemassa, kun taas riippuvuusrakenteen estimoinnissa ei inflaatioaikasarjan kuukausitasoisuuden johdosta voida käyttää kuukausitasoista tiheämpää aineistoa.

CGMY-prosessi on jatkuva-aikainen prosessi, mutta se joudutaan luonnollisesti estimoimaan diskreetistä havaintoaineistosta, ja havaintojen aikavälin tulisi olla mieluusti varsin lyhyt – tässä esityksessä käytetyn kuluttajahintaindeksin kuukauden mittainen aikaväli on jo varsin pitkä. Edelleen on hyvä huomata inflaation aikasarjamallinnukseen liittyvät stationaarisuusongelmat: useissa tutkimuksissa on havaittu inflatorisen 1970-luvun muodostavan ns. rakenteellisen katkoksen (*structural break*) aikasarjassa, joka 1970-lukua edeltävältä ja 1980-luvun jälkeiseltä osaltaan tarkasteltuna olisi differenssistationaarinen, mutta kokonaisuutena ja 1970-luvun osalta ei ole saatettavissa stationaariseksi ensimmäisten differenssien ottamisella, vaan on käytettävä toisia differenssejä. Kirjallisuuden perusteella näyttää olevan avoin ongelma, onko inflaation mallinnus yhdellä aikasarjalla mahdollista vai onko tarpeen mallintaa erilaisia inflaatioregiimejä eri malleilla. Koska tämän esityksen puitteissa kyseessä on nyt havainnollistava esimerkki, ei tässä yhteydessä ole tarkoituksenmukaista lähteä ottamaan kantaa tähän vaikeaan ekonometriseen ongelmaan. Kantaa ei myöskään

	$\hat{C}$	$\hat{G}$	$\hat{M}$	$\hat{Y}$	$\hat{\kappa}$	$\hat{\eta}$	$\hat{\lambda}$
DJIA	0.5593	10.55	10.55	1.6068	1.066	0.03230	0.419003
US10Y	0.0116	11.35	11.35	1.9782	1.512	$1.07E-7$	0.000734
USCPI	0.0048	6.531	6.531	1.9906	0.867	0.00013	0.018152

TAULUKKO 1. Aikamuunnettujen CGMY-prosessien parametrien estimaatit. $\hat{C}$, $\hat{G}$, $\hat{M}$ ja $\hat{Y}$ ovat CGMY-prosessin parametrien estimaatit; $\hat{\kappa}$, $\hat{\eta}$ ja $\hat{\lambda}$ aikamuunnoksessa käytetyn CIR-prosessin parametrien estimaatit.

oteta siihen, onko järkevää estimoida riippuvuusrakenne pelkästään maltillisen inflaation aikakaudelta, vaikka reunajakaumien estimoinnissa käytetään ajanjaksoja, jotka sisältävät myös 1970-luvun.

Reunajakaumien estimoinnissa käytetään lähteessä [6] esitettyä yleistettyä momenttimenetelmää aikamuunnetuille Lévy-prosesseille. Menetelmässä käytetään aikasarjan autokovarianssirakennetta aikamuunnoksessa käytettävän CIR-prosessin parametrien estimointiin, ja muunnettavan Lévy-prosessin kumulantit estimoidaan havaitun aikasarjan neljän ensimmäisen kumulantin avulla. Näistä kumulanteista johdetaan sitten CGMY-prosessin parametrit käyttäen hyödyksi CGMY-prosessin teoreettisten kumulanttien tunnettuja lausekkeita. Estimointitulokset on esitetty Taulukossa 1. Niistä nähdään, että estimoiduista parametrin Y arvoista päätellen korkosijoitusten tuoton ja inflaation differenssien osalta malliksi voisi riittää aikamuunnettu Brownin liike ($\hat{Y}$ lähellä arvoa 2) , kun taas osaketuottojen osalta aikamuunnettu CGMY-prosessi saattaa tuoda lisäarvoa. Kaikissa tapauksissa jakauman vinouden näyttäisi selittävän stokastinen volatiliteetti, sillä $\hat{G} = \hat{M}$ eli aikamuuntamaton CGMY-prosessi on symmetrinen martingaali (käytetyn estimointimenetelmän yksityiskohdat ovat hieman erilaiset riippuen siitä, oletetaanko CGMY-prosessi martingaaliksi vai ei; tässä tehty johtopäätös prosessin martingaaliominaisuudesta perustuu siihen, että menetelmän lähtökohtana kummassakin tapauksessa on CGMY-prosessin kumulanttien estimointi, ja tämän estimoinnin tulokset eivät anna syytä luopua martingaalioletuksesta, toisin sanoen, estimoidut kumulanttien arvot ovat konsistentteja sen kanssa, että datan generoinut prosessi on aikamuunnettu martingaali).

Kopulafunktion estimoinnissa käytetään lähteessä [9] esiteltyä kaksivaiheista Kendallin τ-järjestyskorrelaatioiden matriisiin ja t-jakauman vapausasteen ν suurimman uskottavuuden menetelmällä estimointiin perustuvaa menettelyä. Näin menetellen saadaan t-jakauman korrelaatiomatriisille estimaatti

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} 1.000 & -0.104 & -0.035 \\ -0.104 & 1.000 & 0.118 \\ -0.035 & 0.118 & 1.000 \end{pmatrix}$$

ja vapausasteelle $\hat{\nu} = 10.16$.

Näillä tiedoilla voidaan nyt simuloida havaintoja $u_i = (u_{i,1}, u_{i,2}, u_{i,3})$ estimoidusta kolmiulotteisesta t-kopulasta ja soveltamalla kuhunkin komponenttiin vastaavan aikamuunnetun CGMY-jakauman kertymäfunktion käänteisfunktiota saadaan simuloitua havaintoja

θ	0	0.25	0.50	0.75	1
$\hat{\frac{A_T}{L_T}}$	1.3089	1.3197	1.3299	1.3399	1.3566
$\hat{\mathbb{P}}_{insolvent}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.16
$\hat{\mathbb{P}}_{guaranteefail}$	0.00	0.00	0.00	0.00	0.16

TAULUKKO 2. Simulaatioharjoituksen tulokset.

halutusta metajakaumasta

$$x_i = \left(F_1^{-1}(u_{i,1}), F_2^{-1}(u_{i,2}), F_3^{-1}(u_{i,3})\right).$$

Tarvittavat reunajakaumien kertymäfunktiot voidaan laskea numeerisesti joko soveltamalla Fourier-käänteismuunnosta aikamuunnetun CGMY-jakauman karakteristiseen funktioon tai sitten voidaan simuloida suuri määrä havaintoja kyseisestä jakaumasta ja käyttää tämän simuloidun aineiston empiiristä kertymäfunktiota. Tässä esityksessä on valittu jälkimmäinen tapa.

Tämän luvun alussa esitettyä optimointitehtävää voidaan nyt tarkastella Monte Carlo -menetelmällä, koska pystymme simuloimaan kuukausihavaintoja meta-t-jakaumasta, jonka riippuvuusrakenne on estimoidun t-kopulan mukainen ja reunajakaumat ovat estimoituja CGMY-prosesseja vastaavat. Simuloimalla useita halutun pituisia aikasarjoja saamme suuren joukon "historioita", joiden "läpi"voimme ajaa erilaisen riskitason θ portfolioita. Tässä esityksessä tarkastelemme riskitasoja $\theta \in \{0, 0.25, 0.50, 0.75, 1\}$ ja suoritamme 100 kappaletta 12 kuukausihavainnon simulaatioita jokaista riskitasoa kohti Monte Carlo -estimaattien määrittämiseksi. Simulaatioiden vähäinen määrä johtuu yksinkertaisesti käytettyjen algoritmien vaatimasta suhteellisen mittavasta suoritusajasta – näinkin pienen simulaatioharjoituksen suoritus työkoneellani kestää *enter*-näppäimen painalluksesta tulosten tulostumiseen noin viisitoista tuntia, ja kun tarkoitus on havainnollistaa, että toimivia ja verrattain helposti implementoitavia algoritmeja aikamuunnettujen CGMY-mallien estimointiin on olemassa, niin tämän työn puitteissa ei ole tarkoituksenmukaista tehdä mittavia simulaatioita ja herkkyysanalyysejä. Käytettyjä algoritmeja ja ohjelmakoodia optimoimalla suoritusaikaa voitaisiin varmasti parantaa, esimerkiksi käyttämällä inflaatio- ja korkomuuttujien osalta aikamuunnetun CGMY-prosessin sijasta aikamuunnettua Brownin liikettä. Taulukossa 2 on esitetty simulaatioharjoituksen tulokset, jotka sinällään ovat intuition mukaiset: riskin kasvattaminen parantaa saavutettua loppuhetken keskimääräistä varojen ja vastuiden suhdetta, mutta riskin kasvattaminen alkaa tietyn rajan jälkeen kasvattaa selvitystilaan joutumisen todennäköisyyttä. Raja luonnollisesti riippuu myös alkuvarallisuuden tasosta, tässä esimerkissä se oli mitoitettu niin, että yhtiön riskinkantokyky alkutilassa juuri ja juuri riittää maksimiriskin kantamiseen, joka osaltaan selittänee, miksi tässä havaintoesimerkissä riskitaso voidaan nostaa huomattavan korkeaksi ennen kuin "konkurssitodennäköisyydet"nousevat tasolle, joka ei ole minkään tyypillisesti järkevänä pidetyn tavoitearvon (esimerkiksi $\alpha_1 = \alpha_2 = 5$ %) alapuolella.

5. Yhteenveto

Tässä esityksessä tarkasteltu mallinnustapa mahdollistaa monien taloudellisten aikasarjojen todellisten ja riskienhallinnan kannalta merkittävien havaittujen piirteiden huomioimisen mallinnuksessa. Näitä ominaisuuksia ovat muun muassa tuottojen jakaumien paksuhäntäisyys, ajassa muuttuva volatiliteetti ja häntäriippuvuus sekä muut riippuvuusrakenteen ominaisuudet, joita lineaariset korrelaatiot eivät kykene tyydyttävästi huomioimaan. Mallinnus on myöskin toteutettavissa käytännössä, sillä toimivia ja täysin implementoitavissa olevia algoritmeja tarvittavien jakaumien estimointiin ja simulointiin on olemassa.

Käytännön kannalta ongelmallista on edelleen algoritmien vaatima varsin mittava suoritusaika, sekä mallinnuksessa käytettyjen stokastisten prosessien vaativuus teknisessä mielessä. Myönnettävä on myös, että käytännössä algoritmien implementointi ei kuitenkaan ole vaikeustasoltaan triviaali tehtävä, vaan ainakin kirjoittajan mielestä loppujen lopuksi varsin vaativa harjoitus.

Viitteet

[1] Barndorff-Nielsen, O. E., and Shiryaev, A. N. *Change of Time and Change of Measure*. World Scientific, 2011.

[2] Bertoin, J. *Lévy Processes*. Cambridge University Press, 1996.

[3] Carr, P., Geman, H., Madan, D. B., and Yor, M. The Fine Structure of Asset Returns: an Empirical Investigation. Journal of Business 75:2, 305–332, 2002.

[4] Carr, P., Geman, H., Madan, D. B., and Yor, M. Stochastic Volatility for Lévy Processes. Mathematical Finance 13:3, 345–382, 2003.

[5] Cont, R., and Mancini, C. Nonparametric Tests for Pathwise Properties of Semimartingales. Bernoulli 17:2, 781–813, 2011.

[6] Kallsen, J., and Muhle-Karbe, J. Method of Moment Estimation in Time-Changed Lévy Models. Statistics and Decisions 28, 169–194, 2011.

[7] Kyprianou, A. E. *Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications*. Springer, 2006.

[8] Mandelbrot, B. *Fractals and Scaling in Finance. Discontinuity, Concentration, Risk*. Springer, 1997.

[9] McNeil, A., Frey, R., and Embrechts, P. *Quantitative Risk Management: Concepts, Techniques and Tools*. Princeton University Press, 2005.

[10] Poirot, J., and Tankov, P. Monte Carlo Option Pricing for Tempered Stable (CGMY) Processes. Asia–Pacific Financial Markets 13, 327–344, 2006.

[11] Rachev, S. T., Kim, Y. S., Bianci, M. L., and Fabozzi, F. J. *Financial Models with Lévy Processes and Volatility Clustering*. Wiley, 2011.

[12] Shevchenko, P. V. *Modelling Operational Risk Using Bayesian Inference*. Springer, 2011.

[13] Stoyanov, S. V., Rachev, S. T., Ratcheva-Iotova, B., and Fabozzi, F. J. Fat-tailed Models for Risk Estimation. Journal of Portfolio Management 37:2, 2011.

[14] Yu, J. Empirical Characteristic Function Estimation and Its Applications. Econometric Reviews 23:2, 93–123, 2004.