

1. Vahinkovakuutusyhtiö AUTO harjoittaa ainoastaan henkilöautojen vakuuttamista (pl. liikennevakuutus).

Yhtiön tunnuslukuja:

- vakuutusmaksutuotto 100 M€
- pitkän aikavälin odotettu vahinkosuhte 70%
- vakuutusmaksuvastuu keskimäärin puolet vakuutusmaksutuotoista
- korvausvastuu on keskimäärin 30%:a vakuutusmaksutuotoista
- yhtiön varat on sijoitettu hajautetusti eri valtioiden joukkovelkakirjalainoihin
- yhtiön varojen pitkän aikavälin tuottovaatimus on 5%

Lisäksi yhtiön vakuutusmatemaatikko on tehnyt seuraavat analyysit:

- keskimääräinen vahingon suuruus on 1000 €
  - suurin mahdollinen vahinko on 200 000 €
  - realistinen katastrofivahingon suuruus on 3 M€
- a. Määrittele käsitteenä tasoitusmäärä
  - b. Laske vahinkovakuutusyhtiö AUTON tasoitusmäärän tavoitevyöhykkeen ala- ja yläraja. Yhtiö ei harjoita jälleenvakuuttamista. Perustevakio  $a$  on 15%.
  - c. Jos yhtiön AUTO tasoitusmäärä on sama kuin sen tasoitusmäärän tavoitevyöhykkeen alaraja, niin kuinka monessa vuodessa yhtiö saavuttaa tavoitevyöhykkeen ylärajan? Miten tilanne muuttuu, jos perustevakioksi  $a$  muutetaan nolla?
  - d. Määrittele käsitteenä oikaistu vakavaraisuuspääoma.
  - e. Määritä AUTON oikaistun vakavaraisuuspääoman vähimmäismäärä sekä tavoiteraja. Yhtiön tasoitusmäärä on yhtä suuri kuin tasoitusmäärän tavoitevyöhykkeen yläraja. Kuinka paljon vakavaraisuuspääoman tavoiteraja on suurempi kuin sen vähimmäismäärä?
  - f. Määrittele käsitteenä toimintapääoma.
  - g. Määrittele AUTON toimintapääoman vähimmäismäärä. Jos yhtiön tasoitusmäärä on tavoitevyöhykkeen ylärajalla, niin kuin suuri on tällöin käytännössä yhtiön minimi vakavaraisuuspääoma?
  - h. Kuinka paljon yhtiö tuottaa voittoa suhteessa vakavaraisuuspääomaansa, jos
    - yhtiön toimintakulusuhde on 20%
    - yhtiön tasoitusmäärä on tavoitevyöhykkeen ylärajalla
    - yhtiön toimintapääoma vastaa sen vähimmäismäärää
    - yhtiöllä ei ole muuta velkaa kuin vastuovelka
    - yhteisövero on 26%

HUOM! Muista voittoa laskiessasi myös sijoitustuotot

- i. Arvioi yhtiötä sijoituskohteena markkinoilla, missä riskitön korko on 4%, markkinoiden riskipreemio on 6 %:a sekä vakuutusalan keskimääräinen beta on 0.9.

2. Henkivakuutusyhtiö Jokamies omistaa kaksi vakuutusosakeyhtiötä nimiltään Harmi ja Torvi. Kumpikin harjoittaa vahinkovakuutusluokkiin 1-7 kuuluvaa vakuutusliikettä. Harmi-yhtiön maksutulo ja korvausmeno ovat viime vuosina pysyneet jokseenkin vakiona. Torvi-yhtiön korvaukset vuodelta 2009 näyttävät nousevan yhtä suuriksi kuin kahden edellisen vuoden yhteensä. Vuoden 2008 tappioiden vuoksi vuodelta 2009 ei makseta veroja.

Kaikkien kolmen yhtiön tuloseennusteet vuodelta 2009 ja (arvioidut) taseet 31.12.2009 on annettu liitteenä. Tarkastele erillisyhtiöiden vakavaraisuutta Vakuutusyhtiölain 11 luvun mukaisesti (toimintapääoma, sen vähimmäismäärä ja vaatimukset), ja muodosta Jokamies-yhtiön mukautettu vakavaraisuuslaskelma.

Jos Torvi-yhtiö ottaa takautuvasti vuoden 2009 alusta 20% osamääräjälleenvakuutuksen koko kannalleen liitteestä löytyvät vaihtoehtoisen tilinpäätösennusteen mukaisesti, miten muuttuu yhtiön vakavaraisuus? Entä Jokamies-konsernin mukautettu vakavaraisuus?

(20p)

3. Selvitä työeläkeyhtiön vakavaraisuuden valvontamekanismi. Selvitä vastauksessasi myös mitä vakavaraisuudesta riippuvia rajoituksia yhtiön toiminnalle on asetettu. Vastauksessa ei huomioida lakia lakisääteistä eläkevakuutustoimintaa harjoittavien eläkelaitosten vanhuuseläkkeiden rahastointia ja toimintapääomaa koskevien säännösten väliaikaista muuttamista (853/2008)

(10p)

4. Osakkeen eurooppalaisen osto-option eräpäivä on tasan vuoden päässä ja lunastushinta 2 €. Osakkeen nykyhintaa on 1,8 €. Riskitön jatkuva korko on 5 % vuodessa. Option hinta on 20 c. Merkitään osakkeen hintaa hetkellä  $t$  (tästä lukien vuosina) symbolilla  $S_t$ .
- a) Oletetaan, että Black-Scholes mallia on käytetty option hinnoittelussa. Laske osakkeen volatilitteetti (prosenttiyksikön tarkkuus riittää).
- b) Uusi johdannainen tästä osakkeesta on laskettu juuri liikkeelle. Johdannaisen arvo vuoden kuluttua on satunnaismäärä  $D$ , missä
- $D$  on 1 €, jos  $S_{0,5}$  on  $> 2$  € ja  $S_1 > 2S_{0,5}$ ,
  - $D$  on 50 c, jos  $S_{0,5} < 2$  € ja  $S_1 > 2S_{0,5}$ ,
  - $D$  on muissa tapauksissa nolla.

Johda tämän johdannaisen ostohinnalle lauseke käyttäen normaalijakauman tiheys- ja/tai kertymäfunktiota.

(10p)

5. Vahinkovakuutusyhtiö V:n solvenssimarginaali  $U(t)$  hetkellä  $t$  määräytyy ehdoista  $U(0) = u_0$  ja

$$U(t) = (1 + r(t))(U(t-1) + V(t)), \quad t = 1, 2, \dots,$$

missä  $u_0 > 0$  on alkupääoma,  $r(t)$  vuoden  $t$  sijoitustoiminnan tuottoaste ja  $V(t)$  vuoden  $t$  vakuutusliikkeen tulos. Viimeksi mainittu on muotoa

$$V(t) = (1 + i(1)) \cdots (1 + i(t-1))Z(t),$$

missä  $i(s)$  on vuoden  $s$  inflaatioaste ja  $Z(1), Z(2), \dots$  ovat inflaatiosta puhdistettuja tuloksia (tyhjä tulo tulkitaan ykköseksi). Mallissa  $Z$ -,  $r$ - ja  $i$ -muuttujat ovat kaikki stokastisia. Oletetaan, että

$$\mathbb{P}(r(t) > -1) = 1 \text{ ja } \mathbb{P}(i(t) > -1) = 1 \text{ kaikilla } t = 1, 2, \dots$$

Tarkastellaan solvenssitestiä, jossa yhtiön sallitaan jatkaa toimintaansa, mikäli selviytymistodennäköisyys

$$\mathbb{P}(U(1) \geq 0, \dots, U(t_0) \geq 0)$$

on vähintään  $1 - \varepsilon$ . Parametrit  $t_0 \in \{1, 2\}$  ja  $\varepsilon \in (0, 1)$  ovat valvontaviranomaisen määrittämiä vakioita.

- a) Tarkastellaan hypoteettista yhtiötä, jonka inflaatioaste on identtisesti nolla ja sijoitustoiminnan tuottoaste  $r'(t)$  määräytyy yhtälöstä

$$1 + r'(t) = (1 + r(t)) / (1 + i(t)), \quad t = 1, 2, \dots$$

Mallin muut osat säilyvät ennallaan. Osoita, että hypoteettisen ja alkuperäisen yhtiön selviytymistodennäköisyydet ovat samat.

- b) Korvataan alkuperäisessä mallissa  $r(t)$  tuottoasteella  $\bar{r}(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , missä

$$\mathbb{P}(\bar{r}(t) \geq r(t)) = 1, \quad \forall t.$$

Mallin muut osat säilyvät ennallaan. Olkoon  $\bar{U}(t)$  solvenssimarginaali hetkellä  $t$  näin syntyvässä mallissa. Osoita, että jos  $U(1), \dots, U(t_0) \geq 0$ , niin  $\bar{U}(1) \geq U(1), \dots, \bar{U}(t_0) \geq U(t_0)$ .

- c) Osoita, että alkuperäisen mallin selviytymistodennäköisyydet pienenevät, jos  $i(t)$  korvataan inflaatioasteella  $\bar{i}(t)$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , missä

$$\mathbb{P}(\bar{i}(t) \geq i(t)) = 1, \quad \forall t.$$

Mallin muut osat säilyvät ennallaan.

6. Sijoittajalla on hetkellä nolla käytettävissään pääoma  $W > 0$ . Tämä sijoitetaan vuodeksi markkinoille, joilla sijoituskohteina ovat arvopaperit  $1, \dots, n$ . Arvopaperin  $j$  hinta hetkellä nolla on  $p_j$  ja arvo hetkellä yksi rajoitettu ja positiivinen satunnaismuuttuja  $\xi_j$ . Arvopaperi 1 on vuoden nollakuponkibondi vuosikorolla  $i > 0$ . Toisin sanoen  $p_1 = 1/(1+i)$  ja  $\xi_1 \equiv 1$ . Muut arvopaperit ovat riskillisiä. Oletetaan, että nämä tuottavat keskimäärin bondia enemmän eli että  $\mathbb{E}(\xi_j / p_j) > 1 + i, j = 2, \dots, n$ . Sijoitus tehdään hetkellä nolla ja realisoidaan hetkellä yksi. Arvopapereista ei synny kassavirtoja kyseisen vuoden aikana. Lainan ottaminen ja arvopapereiden lyhyeksi myynti ovat kiellettyjä.

Sijoituskohteiden valinta perustetaan hetken yksi varallisuuden arvoon ja utiliteetin odotusarvohypoteesiin. Utiliteettifunktio olkoon  $u$ . Oletetaan, että  $u$  on aidosti kasvava, aidosti konkaavi ja derivoituva kaikkialla.

- Muotoile sijoituskohteiden valintaongelma optimointitehtäväksi.
- Osoita, että optimaalinen sijoitusallokaatio ei muodostu pelkästään bondeista.

(10p)

7. Sijoitusmarkkina koostuu kolmesta omaisuusluokasta, A, B ja C. Vuotuiset tuotot  $R_a, R_b$  ja  $R_c$  ovat seuraavanlaiset

omaisuusluokka	tuoton odotusarvo %	tuoton hajonta %
A	9	20
B	6	20
C	3	10

Tuottojen korrelaatiot ovat seuraavat: Korrelaatio  $(R_a, R_b) = -0,25$ , korrelaatio  $(R_b, R_c) = -0,5$  ja korrelaatio  $(R_a, R_c) = -0,5$ .

- Laske kunkin omaisuuslajin tuoton varianssi sekä omaisuuslajien väliset kovarianssit.
- Kerro, millainen on tehokas sijoitussalkku (efficient portfolio), kun käytetään keskiarvo-varianssi mittaa.

Tehokkaat salkut ovat tässä yhteydessä muotoa  $(2/9, 2/9, 5/9) + c(4, 1, -5)$ , missä  $c$  on valittu sopivasti ja missä vektori määrittää kunkin lajin sijoitusosuuden.

- Määritä tehokkaan salkun varianssille lauseke  $c$ :n funktiona.
- Päättele tai laske minimivarianssi ja määritä salkku, jolla siihen päästään.
- Oletetaan, että riskitön korko on 4 %. Määrittele sen perusteella kunkin omaisuuslajin markkina-arvo käyttäen CAPM-mallia, kun kokonaismarkkinan arvo on 180 milj. €.

(15p)