

SHV-tutkinto

Vakuutusmatematiikan sovellukset
1.12.2005 klo 9-15

1. (10 p)

Selvitä

- a) tariffimallin valintaa (additiivinen, multiplikatiivinen)
- b) seuraavia tariffin parametrien estimointimenetelmiä
 - Bailey-Simon
 - reunajakaumamenetelmä
 - pienimmän neliösumman menetelmä

2. (10 p)

Vakuutusyhtiö Työnvaara on tuonut markkinoille seuraavanlaiseen kolmitilamalliin perustuvan työttömyysvakuutuksen:

Tilat ovat TYÖSSÄ, TYÖTÖN ja KUOLLUT.

Siirtymisintensiteetti tilasta TYÖSSÄ tilaan TYÖTÖN on $\sigma(x)$ ja tilaan KUOLLUT on $\mu(x)$ (kuolevuus), siirtymisintensiteetti tilasta TYÖTÖN tilaan TYÖSSÄ on $\rho(x)$ (työllistyvyys) ja tilaan KUOLLUT on $\nu(x)$ (kuolevuus), missä x on vakuutetun ikä. Korvausta maksetaan tilassa TYÖTÖN oleville vakuutetuille.

Vakuutusmaksut peritään työssäkävijöiltä tasamaksuperiaatteella eli työttömiltä vakuutusmaksua ei peritä. Vakuutusaikana prospektiivisesti laskettu vakuutusmaksuvastuu on positiivinen.

Ilmoita perustellen, millainen vaikutus seuraavilla seikoilla on vakuutusmaksuun eli pitäisikö vakuutusmaksua nostaa, laskea vai onko vaikutus epävarma (ts. maksu nousee tai laskee tai on ennallaan muutoksista riippuen):

- a) Tilassa TYÖSSÄ olevien kuolevuus $\mu(x)$ nousee ja TYÖTÖN tilassa olevien työllistyvyys $\rho(x)$ nousee.
- b) TYÖTÖN tilassa olevien kuolevuus $\nu(x)$ alenee ja työllistyvyys $\rho(x)$ alenee.
- c) TYÖTÖN tilassa olevien kuolevuus $\nu(x)$ nousee ja työttömäksitulointensiteetti $\sigma(x)$ alenee.
- d) Laskuperustekorko alenee ja työllistyvyys $\rho(x)$ nousee.

Jos kuolevuus $\mu(x) = 0,01$ ja työttömäksitulointensiteetti $\sigma(x) = 0,05$ iästä 45 viiden vuoden ajan, niin mikä on todennäköisyys sille, että 45 vuoden ikäisenä tilassa TYÖSSÄ oleva henkilö pysyy samassa tilassa koko sen viisi vuotta?

3. (10 p)

Alla olevassa taulukossa on vahinkomenon kertymä ja ilmoitettujen vahinkojen lukumäärä, jaoteltuna vahinkovuosiin ja kertymävuosiin.

Vahinkomeno (1.000 €)

Vahinkovuosi	Kehitysvuosi				
Vuosi	0	1	2	3	4
2001	3.417	4.291	4.581	4.714	4.900
2002	4.814	6.888	7.007		
2003	5.844	8.000			
2004	6.654				

Ilmoitettujen vahinkojen lukumäärän kertymä

2001	414	460	482	488	500
2002	453	506	526		
2003	496	558			
2004	540				

- Arvioi kunkin sattumisvuoden vahinkojen lukumäärä käyttäen chain-ladder menetelmää
- Arvioi keskimääräinen lopullisen vahingon suuruus kunkin vahinkovuoden osalta
- Käyttäen em. tuloksia arvioi tarvittavan varauksen määrä, olettaen, että tähän päivään mennessä vahinkoja on korvattu yhteensä 19.212.000 €.
- Miten pitäisi, vai pitäisikö ollenkaan, varauksen laskentaa muuttaa, jos tietyn rajan - x € - ylittäneet vahingot varataan tapauskohtaisesti?

4 H (10 p)

Terttu Tehokas, syntynyt 30.12.1966, otti vuoden 1988 lopussa jatkuvamaksuisen yhdistetyn henkivakuutuksen, joka erääntyy 50 vuoden iässä (Y50). Vakuutus noudatti silloin voimassa ollutta laskuperustetta 10%:n kappakuormituksella. Vakuutussumma oli alussa 100 000 mk.

Terttu on maksanut veloitetut vuosimaksut, jotka ovat vuosien varrella korottuneet indeksikorotuksella 25%. Vakuutussumma on noussut indeksikorotusten ja muiden asiakashyvitysten ansiosta 60%. Aivan viime vuosina hyvitykset ovat lakanneet ja Terttu kysyy vakuutusyhtiöstään kuinka suuri hänen takaisinostoarvonsa mahtaisi olla vuoden 2005 lopussa.

- Mikä oli Tertun vuosimaksu kun vakuutus alkoi?
- Laske 2005 lopussa erääntyvä vuosimaksu ja vakuutussumma tänään.
- Laske Tertun vakuutuksen muutosarvo (takaisinostoarvo) vuoden 2005 lopussa $V(2005)$. Kuinka suuri muutosarvo olisi ollut jos summa ja maksu olisivat pysyneet samoina kuin vakuutuksen alkaessa?
- Erottele muutosarvon kasvu $V(2005) - V(2004)$ osiin jotka johtuvat vakuutusmaksusta, korosta, kuormituksista ja riskimaksusta.

Liitteenä olevassa taulukossa on vuoden 1988 laskuperusteen peruslukuja. Yksi euro on 5,94573 mk.

5 H (10 p)

Pekka Poikamies aloitti vakuutussäästämisen 30.9.2005. Vakuutusmuodoksi hän valitsi Keskinäisen henkivakuutusyhtiö Finlandian elämänvaravakuutuksen (kuolinkorvaus = 0). Maksukuormitus on $\kappa = 0,04$, muita kuormituksia ei ole. Finlandian runsaasta rahastovalikoimasta löytyivät rahasto A, johon Pekka ohjaa 2/3 kustakin maksusta, ja rahasto B johon ohjataan loput 1/3.

Täytä alla olevan taulukon tyhjät ruudut ja selvitä, mistä syistä Pekan säästö (muutosarvo) tänään poikkeaa maksettujen maksujen määrästä.

pvm	Pekan I-luku	Maksettu maksu €	Osuuden hinta €		Osuuksien lukumäärä		Muutos- arvo €
			A	B	A	B	
30.9.2005	962 841	20 000	0,0955	5,0000			
31.10.2005	962 738	0	0,0957	4,9000			
15.11.2005	962 635	10 000	0,0960	4,8500			
30.11.2005	962 635	0	0,0990	4,8100			
1.12.2005	962 530	0	0,1000	4,8000			

4 E (10 p)

- a) Selosta lyhyesti, miten TEL:n työkyvyttömyysmalli ns. Z-malli on konstruoitu.
- b) Mallissa $Z(t,u)$ -funktio antaa todennäköisyyden sille, että vastasyntynyt on elossa iässä t ja on tällöin ollut työkyvyttömän ajan u . Käytössä on vakiokuolevuus (mallin parametri a_4).

Tarkastellaan stokastista prosessia $Y(t)$, jonka kolme tilaa ovat:

- 1, jos henkilö on aktiivi tai ollut työkyvyttömän vähemmän kuin ajan e_0
- 2, jos henkilö on ollut työkyvyttömän vähintään ajan e_0
- 3, jos henkilö on kuollut.

Määrittele lausekkeet intensiteetille μ_{12} ja intensiteettien summalle $\mu_{21} + \mu_{23}$.

Laskennassa voi hyödyntää sitä, että satunnaismuuttujasta $T^P(t)$ (työkyvyttömyyden tuleva kesto t -ikäisellä työkyvyttömällä) tunnetaan lauseke

$$P(T^P(t) > h | Y(t)=2) = \sum_{j=0}^2 e^{-\mu_j h} ((Z_j(t, e_0) - Z_j(t, t)) / c_j) / C$$

$$\text{missä } C = (\sum_{j=0}^2 ((Z_j(t, e_0) - Z_j(t, t)) / c_j))$$

5 E (10 p)

Seuraavassa on eräitä tunnuslukuja TEL-eläkeyhtiö A:n toiminnasta:

Vakuutettu palkkasumma	3 500 M€
VIU-vastuut vuoden $v-1$ lopussa	5 500 M€
VIU-vastuut vuoden v lopussa	6 200 M€
Tasausvastuu vuoden $v-1$ lopussa	600 M€
A:n maksamat yhteisesti kustannettavat vanhuuseläkkeet vuonna v	450 M€
A:n maksamat muut yhteisesti kustannettavat eläkkeet vuonna v	210 M€

Lisäksi tiedetään, että vuonna v vastuunjakokerroin $q^a = 0,40$ ja muut tasattavat eläkkeet kuin vanhuuseläkkeet muodostavat koko tasausjärjestelmän piirissä neljäsosan kokonaismaksutulojen summasta. Tasausmaksu on 15,5 % palkkasummasta ja TEL-maksu keskimäärin 21,6 % palkoista vuonna v . Laskuperustekorko on 5,0 %, rahastokorko 3,0 % ja vuoden v lopussa tehdään yhteisesti kustannettava rahastotäydennys, joka on 5,0 % vuoden alun VIU vastuista ja joka sisältyy jo yllä esitettyyn vuoden v loppuhetken VIU vastuuseen. Vastuut ovat korkoutettu vuoden loppuhetkelle.

Laske eläkeyhtiö A:n tasausvastuu 31.12.v. Onko yhtiö vuonna v saavana vai maksavana osapuolena tasausjärjestelmään nähden? Miten tehty rahastotäydennys tulee kustannetuksi?

4 V (10 p)

Yhtiöllä on autovakuutuksessa käytössä bonusjärjestelmä, jossa on 4 bonusluokkaa: A (bonus 0 %), B (bonus 20 %), C (bonus 40 %) ja D (bonus 60 %). Järjestelmään saapuvan uuden vakuutuksen aloitusluokka on A.

Ajoneuvo siirtyy vuosittain bonusluokasta toiseen alla olevan taulukon mukaisesti:

Nykyinen bonus-lk	Uusi bonusluokka		
	vahinkojen lkm		
	0	1	>1
A	B	A	A
B	C	A	A
C	D	B	A
D	D	C	A

Vakuutetut ajoneuvot jakautuvat kahteen riskiltään homogeeniseen luokkaan, hyviin ja huonoihin. Hyvillä vuotuinen vahinkojen lukumäärän odotusarvo on 0,1 ja huonoilla 0,5 vahinkoa vuodessa.

Vakuutuskannan vaihtuvuus on ollut pitkään olematonta. Tämän seurauksen ajoneuvojen lukumäärän jakautuminen eri bonusluokkiin on vakiintunut niin, ettei siinä käytännössä tapahdu lainkaan muutosta ajan kuluessa.

Kaikista yhtiön vakuuttamista ajoneuvoista 79 prosentilla on autovakuutuksessa täydet bonukset. Laske näiden tietojen perusteella, kuinka suuri osa vakuutetuista riskeistä on huonoja?

5 V (10 p)

Erään teollisuusyrityksen työntekijöitä on työssä kohdannut tuhoisa suuronnettomuus, jossa suuri määrä työntekijöitä on loukkaantunut, ja korvauskulujen arvioidaan nousevan poikkeuksellisen suuriksi.

Joitakin päiviä tämän suuronnettomuuden jälkeen sinut on ilman ennakkovaroitusta pyydetty vakuutusyhtiön aktuaarina saapumaan viipymättä meneillään olevaan hallituksen kokoukseen. Saavuttuasi kokoukseen, hallitus pyytää sinulta yleistajuisen kuvauksen siitä, kuinka tällaiset poikkeuksellisen suuriin tapaturmankorvauksiin johtavat vahinkotapahtumat vaikuttavat vakuutusmaksuihin Bonsdorff - Nyrhisen monisteessa kuvatuissa eri maksujärjestelmissä. Hallitus edellyttää, että kuvaus on kohtalaisen tiivis, mutta samalla kuitenkin informatiivinen, tuoden ymmärrettävästi esille erot siinä, kuinka eri järjestelmät reagoiva tällaiseen suurvahinkoon. Et todennäköisesti ehdi juurikaan tekemään yksityiskohtaisia laskelmia vaan joudut tyytymään kuvailevaan esitykseen. Tämän hallituskin ymmärtää, eivätkä heitä tekniset yksityiskohdat edes kiinnosta. Kuvaile kirjallisesti esityksesi.